

Contents

§ 1 极值 2

§ 2 单调性 2

§ 3 凹凸性 2

 定义一 2

 定义二 3

§ 4 拐点 3

§ 5 凹凸性判别 3

§ 6 拐点判别 3

 第一充分条件: 3

 第二充分条件: 3

 第三充分条件: 3

§ 7 极值点与拐点的重要结论 3

§ 8 渐近线 4

 铅直渐近线 4

 水平渐近线 4

 斜渐近线 4

§ 9 曲率与曲率半径 4

§ 1 极值

对于函数 $f(x)$, 若存在点 x_0 的某个邻域, 使得在该邻域内任意一点 x , 均有

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (或 } f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值 (或极小值) 点, $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值 (或极小值)。

断点也可以是极值点。

§ 2 单调性

1. 一阶可导点是极值点的必要条件 极值点可以是驻点或不可导点

2. 第一充分条件:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且在 x_0 某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta) (\delta > 0)$ 内可导

1. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值
2. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极大值
3. 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时和 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时不变号, 则 $x = x_0$ 不是极值点。

3. 第二充分条件:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$.

1. 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取极小值
2. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值

4. 第三充分条件:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x) = 0 (m = 1, 2, \dots, n-1), f^{(n)}(x) \neq 0, (n \geq 2)$ 则:

1. 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$, $f(x)$ 在 x_0 处取极大值
2. 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$, $f(x)$ 在 x_0 处取极小值

§ 3 凹凸性

定义一

设函数 $f(x)$ 在区间 I 连续, 若对 I 任意不同两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称 $y = f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧), 若恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称 $y = f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧)。更一般地可以写为

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

其中 $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. (凹弧)

定义二

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续, 在 (a, b) 内可导, 若对 (a, b) 内任意 x 及 $x_0(x \neq x_0)$ 均有

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x),$$

则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的图形是凹的。

§ 4 拐点

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点成为该曲线的拐点

1. 间断点不是拐点
2. 间断点处可以不可导
3. 间断点是点而拐点是横坐标

§ 5 凹凸性判别

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导。

1. 若在 I 上 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的。
2. 若在 I 上 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的。

§ 6 拐点判别

设 $f''(x_0)$ 存在, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 则 $f''(x_0) = 0$

第一充分条件:

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内二阶导数存在, 且在该点左、右邻域内 $f''(x)$ 变号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点。

第二充分条件:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内三阶可导, 且 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点。

第三充分条件:

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0(m = 2, 3, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0(n \geq 3)$, 则当 n 为奇数时点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。

§ 7 极值点与拐点的重要结论

1. 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点, 不可导点可同时为极值点和拐点。
2. 设多项式函数 $f(x) = (x - a)^n g(x)(n > 1)$, 且 $g(a) \neq 0$, 则当 n 是偶数时, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极值点, 当 n 是奇数时, $x = a$ 是 $f(x)$ 的拐点。
3. 设多项式函数 $f(x) = (x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \dots (x - a_k)^{n_k}$, 其中 n_i 为正整数, a_i 是实数且两两不等, $i = 1, 2, \dots, k$
记 k_i 为 $n_i = 1$ 的个数, k_2 为 n_i 为偶数的个数, k_3 为 $n_i > 1$ 且为奇数的个数, 则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1 + 2k_2 + k_3 - 1$, 拐点的个数为 $k_1 + 2k_2 + 3k_3 - 2$

§ 8 渐近线

铅直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$), 则 $x = x_0$ 是一条铅直渐近线。 x_0 可以是无定义点, 或定义域端点, 或分段函数分段点。

水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_1$, 则 $y = y_1$ 是一条水平渐近线; 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_2$, 则 $y = y_2$ 是一条水平渐近线; 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$, 则 $y = y_0$ 是一条水平渐近线。

斜渐近线

1. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a_1 (a_1 \neq 0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a_1 x] = b_1$, 则 $y = a_1 x + b_1$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线;
2. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a_2 (a_2 \neq 0)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_2 x] = b_2$, 则 $y = a_2 x + b_2$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线;
3. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a (a \neq 0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$, 则 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线;

§ 9 曲率与曲率半径

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y = y(x)$ 在点 $(x, y(x))$ 处的曲率半径为:

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

曲率半径为

$$R = \frac{1}{k} (y \neq 0)$$