Contents

# §1 中值定理

设$f(x)$在 $[a,b]$上连续，则

## 定理一

$m \le f(x) \le M$,其中$m,M$分别是$f(x)$在 $[a,b]$的最小值与最大值。

## 定理二(介值定理)

当$m \le \mu \le M$时，存在$\xi \in [a,b]$,使得$f(\xi)=\mu$

## 定理三（平均值定理）

当$a<x_1<x_2<...<x_n<b$时，在$[x_1,x_2]$内至少存在一点$\xi$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$$

## 定理四（零点定理）

当$f(a)\cdot f(b)<0$时，存在$\xi \in (a,b)$, 使得$f(\xi)=0.$

## 定理五（费马定理）

设$f(x)$在点$x_0$处满足$\begin{cases}1\text{ 可导}\\ 2\text{取极值}\end{cases}$, 则$f'(x_0)=0$

## 定理六(罗尔定理)

设$f(x)$满足 1 在$[a,b]$内连续，2 在$(a,b)$内可导，3 $f(a)=f(b)$, 则存在$\xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$

## 定理七（拉格朗日中值定理）

设$f(x)$满足 1 在$[a,b]$连续 2 在$(a,b)$可导，则存在$\xi \in (a,b)$, 使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$或

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

## 定理八（柯西中值定理）

设$f(x),g(x)$满足在$[a,b]$连续，$(a,b)$可导，$g'(x)\neq 0$, 则存在$\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

## 定理九（泰勒公式）

设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在点$x_0$的某个邻域内$n+1$阶导数存在，则存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+...+f^{(n)}(x)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

# §2 微分等式

## 零点定理

$f(x)$在$[a,b]$连续，且$f(a)f(b)<0$，则$f(x)=0$在$(a,b)$内至少有一个根

## 单调性

若$f(x)$在$(a,b)$内单调，则$f(x)=0$在$(a,b)$内至多有一个根。

## 实系数奇次方程至少有一个实根

## 罗尔定理推论

若$f^{(n)}=0$至多有$k$个根，则$f(x)$至多有$k+n$个根。

# §3 微分不等式

## 函数性态（单调性，最值，凹凸性等）证明不等式

1. 若在$[a,b]$上有$f''(x)>0, a<x<b, f(a)=f(b)=0,$ 则有$f(x)<0$