Contents

§ 1 向量代数

向量运算

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta$
2. $Prj_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影
3. $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$
   其中$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\theta$
4. $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\theta=0/\pi\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$
5. $$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$，称为混合积
6. 若混合积为 0，则称向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面

向量方向角和方向余弦

1. 非零向量$\vec{a}$与x,y,z三轴正方向的夹角α,β,γ称为$\vec{a}$的方向角
2. 方向余弦$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$分别定义为$\vec{a}$与$x,y,z$三轴正方向的夹角的余弦，且$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$
3. $\vec{a}^\circ=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
4. 任意向量$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

§ 2 平面与直线

平面方程

设平面法向量$\vec{n}=(A,B,C)$

1. 一般式： $Ax+By+Cz+D=0$
2. 点法式： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点
3. 三点式
   $$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x-x_2&y-y_2&z-z_2\\x-x_3&y-y_3&z-z_3\end{vmatrix}=0$$
   $P_i(x_i,y_i,z_i)i=1,2,3$为平面上不共线的三点
4. 截距式： $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，其中$(a,b,c)$为平面在$x,y,z$轴上的截距

5. 平面束方程： 设$\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, i=1,2. A_1,B_1,C_1$与$A_2,B_2,C_2$不成比例，则过$L: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$的平面束方程为:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, (\text{不含}\pi_2)$$

或

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \text{不含}\pi_1$$

直线方程

设直线方向向量为$\vec{\tau}=(l,m,n)$

1. 一般式：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

两平面π_1,π_2相交的直线方程，要求两平面不平行，其中直线方向向量$\vec{\tau}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$

2. 点向式：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

其中(x_0,y_0,z_0)为直线上一点

3. 参数式：

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

4. 两点式：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

或者参数式表示：

$$\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1+t(y_2-y_1) \\ z=z_1+t(z_2-z_1) \end{cases}$$

其中(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)为直线上两点

位置关系

1. 点到直线的距离： 点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到直线$L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$的距离为

$$d=\frac{\left|\vec{\tau}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{\tau}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & m & n \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

其中$\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$

2. 点到平面的距离： 点$M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3. 直线L与平面π的夹角$\theta=\arcsin\frac{|\vec{\tau}\cdot\vec{n}|}{|\vec{\tau}||\vec{n}|}$, 其中$\theta=\left|\frac{\pi}{2}-<\vec{\tau},\vec{n}>\right|$

§3 空间曲线与曲面

空间曲线

1. 一般式$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$
2. 参数式$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$
3. 在坐标面上的投影 带入$x=0,y=0,z=0$其中之一消元得到投影的方程

空间曲面

1. 曲面方程:F(x, y, z)=0
2. 二次曲面
3. 柱面
4. 旋转曲面

§4 多元函数微分学几何应用

空间曲线的切线和法平面

1. 用参数方程给出曲线

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases},t\in I,$$

其中$x(t),y(t),z(t)$在I上可导，且三个导数不同时为0，则曲线在$P_0(x_0,y_0,z_0)$处切向量$\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

切线方程:$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程:$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

2. 用方程组给出曲线

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

当

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$$

时，可确定$\begin{cases}x=x\\ y=y(x),\\ z=z(x)\end{cases}$

其在$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{P_0}=(A,B,C)$$

切线方程$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$

法平面方程$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

空间曲面的切平面与法线

1. 用隐式方程给出曲面$F(x,y,z)=0,F$的一阶偏导数连续

   - 其在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量$\boldsymbol{n}=\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)|_{P_0}$
   - 切平面方程$F'_x\mid_{P_0}\cdot(x-x_0)+F'_y\mid_{P_0}\cdot(y-y_0)+F'_z\mid_{P_0}\cdot(z-z_0)=0$
   - 法线方程:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\mid_{P_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y\mid_{P_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z\mid_{P_0}}$$

2. 用显示函数给出的曲面$z=f(x,y),f$的一阶偏导数连续
   - 其在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量$\boldsymbol{n}=\left(f'_x,f'_y,-1\right)|_{P_0}$, 此法向量方向向下
   - 切平面方程$f'_x\mid_{P_0}\cdot(x-x_0)+f'_y\mid_{P_0}\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0$
   - 法线方程:

$$\frac{x-x_0}{f'_x\mid_{P_0}}=\frac{y-y_0}{f'_y\mid_{P_0}}=\frac{z-z_0}{-1}$$

§5 场论初步

方向导数

1. 定义

设三元函数$u=u(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某空间邻域内有定义，l为从点P_0发出的射线，$P(x,y,z)\in l$是邻域内任一点，则

$$\begin{cases}x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha\\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta\,,\\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma\end{cases}$$

以$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$表示$P$ 和 P_0之间的距离，若极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数在点P_0沿射线l的方向导数，记为$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{P_0}$

2. 定理

设三元函数$u=u(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处可微，则函数在该点处沿任意方向$\boldsymbol{l}$的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'(z)(P_0)\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦

梯度

设三元函数$u=u(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处具有一阶连续偏导数，则定义

$$\boldsymbol{\nabla} u\ |_{P_0}=\left(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\right)$$

为在点P_0处的梯度.

方向导数与梯度

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{P_0}=\boldsymbol{\nabla} u\ |_{P_0}\cdot \boldsymbol{l}^{\circ}=\left|\boldsymbol{\nabla} u\ |_{P_0}\right||\boldsymbol{l}^{\circ}|\cos\theta=\left|\boldsymbol{\nabla} u\ |_{P_0}\right|\cos\theta$$

θ为$\boldsymbol{\nabla} u\ |_{P_0}$与$\boldsymbol{l}^{\circ}$的夹角

方向导数是标量，梯度是向量，梯度的方向是函数在该点处增长最快的方向，梯度的模长是函数在该点沿梯度方向的最大增长率。

$$|\boldsymbol{\nabla} u|=\sqrt{\left(u'_x\right)^2+\left(u'_y\right)^2+\left(u'_z\right)^2}$$

散度

设向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

叫做向量场$\boldsymbol{A}$的散度。

旋度

设向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

叫做向量场$\boldsymbol{A}$的旋度。