Contents

§1 基本概念

邻域

δ邻域：

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}或U(P_0,\delta)=\left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

去心δ邻域：

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P_0 \mid 0<|PP_0|<\delta\}$$

点P_0的去心邻域记为$\mathring{U}(P_0)$，不强调邻域半径

极限

设函数$f(x,y)$在区域D有定义，$P_0(x_0,y_0)\in D$或为区域D边界上的一点，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$, 当点$P(x,y)\in D$且满足$0<|PP_0|=\sqrt{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}<\delta$时恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称常数A为函数$f(x,y)$在点P_0的极限，记作：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或} \lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

多元函数极限有无数种趋近路径。

连续

若函数$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, 则称函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$上连续，如果$f(x,y)$在区域$D$内的每一点上都连续，则称函数$f(x,y)$在区域$D$上连续。

偏导数

1. 定义

   设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，若极限

   $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

   存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

   $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \text{或 } f'_x(x_0,y_0)$$

   即

   $$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+x_0,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

2. 高阶偏导数

若二元函数$z=f(x,y)$的偏导数$f'_x(x,y),f'_y(x,y)$仍具有偏导数，则称它们的偏导数称为$z=f(x,y)$的二阶导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}$$

若函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数都在区域D内连续，则它们是相等的。

可微

1. 定义

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某实心邻域内有定义，若$z=f(x,y)$在该点全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中A,B仅与(x_0,y_0)有关，$o(\rho)$是$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$时$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$的高阶无穷小, 则称函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微分，并称$A\Delta x+B\Delta y$为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的全微分，记为

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y=A\,\mathrm{d}x+B\,\mathrm{d}y$$

2. 可微的必要条件

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，则函数在该点处偏导数一定存在，且

$$A=\frac{\partial z}{\partial x},B=\frac{\partial z}{\partial y}$$

可知若函数在(x_0,y_0)可微，则全微分可记为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

3. 可微的充分条件

若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处偏导数存在且连续，则称该函数在点(x,y)处可微。

4. 可微判别

   1. 写出全增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$；
   2. 写出线性增量$A\Delta x+B\Delta y$, 其中$A=f'_x(x_0,y_0),B=f'_y(x_0,y_0)$;
   3. 做极限$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$, 若极限等于零，则函数在$(x_0,y_0)$处可微，反之不可微。

§2 多元函数微分

链式法则

全微分不变性

设函数$z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$,若$f(u,v),u(x,y),v(x,y)$分别有连续偏导数，则复合函数$z=f(u,v)$在$(x,y)$处的全微分可表示为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

隐函数存在定理（公式法）

1. 隐函数存在定理 1

   对于由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=f(x)$,当$F'_y(x,y)\neq 0$时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

2. 隐函数存在定理 2

   对于由方程$F(x,y,z)=0$确定的隐函数$z=f(x,y)$,当$F'_z(x,y,z)\neq 0$时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

二元函数拉格朗日定理

设函数$f(x,y)$定义在区域D上，且$\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}=0,\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}=0,(x,y)\in D,$则$f(x,y)=C,(x,y)\in D,C$为常数

§3 二元函数极值

无条件极值

1. 二元函数取极值的必要条件：

   设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处$\begin{cases}\text{一阶偏导数存在}\\\text{取极值}\end{cases}$,则$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$

2. 二元函数取极值的充分条件：

$$\text{记}\begin{cases}f''_{xx}(x_0,y_0)=A\\f''_{xy}(x_0,y_0)=B,\\f''_{yy}(x_0,y_0)=C\end{cases}\quad\text{则 }\Delta=AC-B^2\begin{cases}>0\Rightarrow\begin{cases}A<0\Rightarrow\text{ 极大值}\\A>0\Rightarrow\text{ 极小值}\end{cases}\\<0\Rightarrow\text{非极值}\\=0\Rightarrow\text{方法失效}\end{cases}$$

条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数$f(x,y,z)$在约束条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\\psi(x,y,z)=0\end{cases}$,下的最值，则

1. 构造辅助函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$
2. 令

$$
\begin{cases}
F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\
F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_x = 0 \\
F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \\
F'_\lambda = \varphi(x,y,z) = 0 \\
F'_\mu = \psi(x,y,z) = 0
\end{cases}
$$

3. 解方程组得备选点$P_i, i = 1,2,3...,n$，并求$f(P_i)$, 最大值和最小值即为所求（边界点也可以是最值）

最远（近）点的垂线原理

若Γ是光滑闭合曲线，点Q是Γ外的一点，点P_1, P_2分别是Γ上与点Q的距离最远和最近的点，则直线P_1Q, P_2Q分别在点P_1, P_2处与曲线Γ在这两点处的切线垂直。

若光滑闭曲线Γ_1, Γ_2不相交，点P_1, P_2分别是他们之间最远（近）的点，则直线P_1P_2是Γ_1, Γ_2的公垂线，即P_1P_2同时垂直于Γ_1, Γ_2在P_1, P_2处的切线。

有界闭区域上连续函数的最值问题

1. 根据$f'_x(x,y), f'_y(x,y)$为0或不存在，求出区域D内的全部可疑点；
2. 用拉格朗日乘数法或代入法求出边界上的所有可疑点；
3. 比较所有可疑点的函数值，得出最大值和最小值。