Contents

§1 常数项级数

概念及敛散性

给定一个无穷数列$u_1,u_2,...,u_n,...$,将其各项用加号连接起来得到记号$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+...+u_n+...$$

叫做无穷级数，其中u_n叫作该级数的通项，若u_n为常数，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为常数项无穷级数，简称常数项级数.

若部分和数列$\{S_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 则称无穷级数收敛，若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称无穷级数发散

性质

1. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_v$均收敛，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)$也收敛，且
$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm b\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$
2. 改变级数任意有限项，不会改变级数敛散性。
3. 收敛级数的任意项加括号后所得的新级数仍收敛，且其和不变
4. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

§2 级数敛散性判别

正项级数及其敛散性判别

若通项$u_n\geq 0, n=0,1,...$,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数

1. 收敛原则
   正向级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$S_n$有界
2. 比较判别
   给出两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, 如果从某项起有$u_n\leq v_n$则
   1. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛
   2. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散
3. p级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$
   1. $p>1$收敛
   2. $p\leq 1$发散
4. 比较判别法的极限形式
   给出两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n, v_n\neq 0(n=1,2,...)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$
   1. 若$A=0$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛
   2. 若$A=+\infty$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散

        3. 若$0<A<+\infty$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$相同
5. 比值判别（达朗贝尔）判别

    给出正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=A$

    1. $A<1$收敛
    2. $A>1$发散
    3. $A=1$不确定
6. 根判别(柯西判别法)

    给出正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=A$

    1. $A<1$收敛
    2. $A>1$发散
    3. $A=1$不确定
7. 积分判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，若存在$[1,+\infty)$上单调减少的非负连续函数$f(x)$, 使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=f(n)$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与反常积分$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$的敛散性相同

交错级数及其敛散性判别

若级数各项正负相间出现，称这样的级数为交错级数

莱布尼茨判别法：给出交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0, n=1,2,...$,若$\{u_n\}$单调不增且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 则级数收敛

任意项级数及其敛散性判别（绝对值判别法）

若级数各项可正可负可零，称这样的级数为任意项级数

给任意项级数每一项加上绝对值，写成$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, 叫作原级数的绝对值级数。

1. 绝对收敛

    如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛

2. 条件收敛

    如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛

§3 幂级数与收敛域

概念

1. 函数项级数
    设$u_n(x)$是x的函数，$n=1,2,...$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为函数项级数
2. 幂级数
    设$u_n(x)=a_nx^n$或$u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, 其中a_n为常数，$n=0,1,...$,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$称为幂级数

3. 收敛点和发散点
   给定点$x_0 \in I$, 有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, 则称点$x_0$为该函数项级数的收敛点，若函数项级数在该点发散，则称该点为发散点。
4. 收敛域
   函数项级数的所有收敛点的集合称为它的收敛域。

阿贝尔定理

当幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在点$x_1$收敛时，对于满足$|x| < |x_1|$的一切$x$, 幂级数绝对收敛。当幂级数在点$x_2$发散时，对于满足$|x| > |x_2|$的一切$x$, 幂级数绝对发散。

收敛半径

若$R \geq 0$满足条件：当$|x| < R$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$绝对收敛；当$|x| > R$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$发散，则称$R$为该幂级数的收敛半径。区间$[-R, R]$称为该幂级数的收敛区间。

若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在点$x_1$处条件收敛，则$R = |x - x_0|$

收敛域的求法

1. 对于不缺项幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
   1. 收敛半径求法
      若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$,或$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则收敛半径
      $$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, r \neq 0, \rho \neq +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$$
   2. 收敛区间与收敛域
      区间$(-R, R)$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间, 单独考察端点$-R, R$处的敛散性，可确定收敛域为$(-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R]$
2. 缺项级数和一般函数项级数
   1. 加绝对值，变为$\Sigma|u_n(x)|$
   2. 用正项级数的比值（或根值）判别法
      令$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}) < 1$求出收敛区间$(a, b)$
   3. 单独讨论$x = a, b$时的敛散性，确定收敛域。

§4 幂级数求和函数

概念

在收敛域上，记$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 并称$S(x)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的求和函数

运算法则

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_a, R_b (R_a \neq R_b)$, 则有

1. $k\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} k a_n x^n, |x| < R_a, k$为常数。
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n, |x| < \min(R_a, R_b)$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n$收敛半径$R=\min\{R_a,R_b\}$(柯西划线法)

恒等变形方式

1. 通项，下标一起变

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k+l}^{\infty} a_{n-l} x^{n-l}$$

   l为整数

2. 只变下标，不变通项

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_{k+l-1} x^{k+l-1} + \sum_{n=k+l}^{\infty} a_n x^n$$

3. 只变通项，不变下标

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = x^l \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-l}$$

性质

1. 幂级数的和函数$S(x)$在其收敛于上连续
2. 幂级数的和函数在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

   逐项积分后得到的幂级数与原级数收敛半径相同，收敛域可能扩大

3. 幂级数的和函数在其收敛域上可导，且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

   逐项微分后得到的幂级数与原级数收敛半径相同，收敛域可能缩小

重要展开式

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, -\infty < x < \infty$$
2. $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1$$
3. $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1$$
4. $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x < 1$$
5. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, -\infty < x < \infty$$
6. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, -\infty < x < \infty$$

7.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...,\begin{cases}x\in(-1,1) & \text{if}\ \ \alpha\le 1\\ x\in(-1,1] & \text{if}\ -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1] & \text{if}\ \ \alpha>0\text{ 且 }\alpha\notin \mathrm{N}_+\\ x\in(-\infty,\infty) & \text{if}\ \ \alpha\in \mathrm{N}_+\end{cases}$$

8.

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n!)}$$

9.

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<\infty$$

§5 函数展开为幂级数

概念

1. 泰勒级数
2. 麦克劳林级数

求法

1. 直接展开
2. 利用已知幂级数展开，通过变量替换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数等方法求得

§6 傅里叶级数

周期为$2l$的傅里叶级数

设函数是周期为$2l$的周期函数，且在$[-l,l]$上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,...)$$

为$f(x)$的以$2l$为周期的傅里叶系数，称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为$f(x)$的以$2l$为周期的傅里叶级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=S(x)$$

迪利克雷收敛定理

设$f(x)$是以$2l$为周期的可积函数，如果在[-1, 1]上满足：

1. 连续或只有有限个第一类间断点；
2. 至多只有有限个极值点

则$f(x)$的傅里叶级数在$[-l,l]$上处处收敛，记其和函数为$S(x)$, 则

$$S(x)=\begin{cases}f(x),x\text{为连续点}\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\text{为间断点}\\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2},x=\pm l\end{cases}$$

正弦级数和余弦级数

1. 当$f(x)$为奇函数时，其展开式是正弦函数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,n=1,2,...$$

2. 当$f(x)$为偶函数时，其展开式是余弦函数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,n=1,2,...$$

只在$[0,l]$上有定义的函数的正弦级数和余弦级数展开

若$f(x)$是定义在$[0,l]$上的函数，首先用周期延拓，使其扩展为定义在$(-\infty,+\infty)$上的周期函数$F(x)$，得到$F(x)$的傅里叶展开式后，再将其自变量限制在$[0,l]$上，得到$f(x)$的傅里叶级数展开式。

1. 周期奇延拓与正弦级数展开
    1. 设$f(x)$是定义在$[0,l]$的函数，令

    $$F(x)=\begin{cases}f(x)\quad\text{if}\;\;0<x\le l\\ -f(-x)\;\;\text{if}\;\;-l\le x<0\\ 0\;\;\text{if}\;\;x=0\end{cases}$$

    再令$F(x)$为以$2l$为周期的周期函数

    2. 正弦级数展开

    $$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,x\in[0,l]$$

    $$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,n=1,2,...$$

2. 周期偶延拓与余弦级数展开
    1. 设$f(x)$是定义在$[0,l]$的函数，令

    $$F(x)=\begin{cases}f(x)\quad\text{if}\;\;0\le x\le l\\ f(-x)\;\;\text{if}\;\;-l\le x<0\end{cases}$$

    再令$F(x)$为以$2l$为周期的周期函数

    1. 余弦级数展开

    $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,x\in[0,l]$$

    $$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,n=1,2,...$$