Contents

§1 依概率收敛 2

§2 大数定律 2

§3 中心极限定理 2

§1 依概率收敛

设随机变量X与随机变量序列$\{X_n\}(n=1,2,...)$, 如果对于任意的$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq 0\}=0\text{或}\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1,$$

则称随机变量序列$\{X_n\}$**依概率收敛于随机变量X**, 记为

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X\text{或}X_n\xrightarrow{P}X(n\to\infty)$$

§2 大数定律

1. 切比雪夫大数定律：假设$\{X_n\}$是相互独立的随机变量序列，如果方差DX_i存在且一致有上界，即存在常数C，使$DX_i\leq C$对一切$i\geq 1$均成立，则$\{X_n\}$服从大数定律：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

2. 伯努利大数定律：假设μ_n是n重伯努利试验中事件A发生的次数，在每次试验中事件A发生的概率为p, 则$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$, 即对任意$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

3. 辛钦大数定律：假设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，如果数学期望$EX_i=\mu$存在，则$\frac{1}{n}\sum_{n\to\infty}X_i\xrightarrow{P}\mu$, 即对任意实数$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

§3 中心极限定理

1. 列维-林德伯格定理：假设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，如果

$$EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2>0$$

存在，则对任意实数x有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

2. 棣莫弗-拉普拉斯定理：假设随机变量$Y_n\sim B(n,p)$则对任意实数x有：

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\Phi(x)$$