Contents

§1 导数定义 2
单侧导数: 2
. . . . 2
§2 导数的几何意义 2
§3 微分 2
§4 OTHERS 2

§1 导数定义

若Δy与Δx比值在$\Delta x \to 0$时极限存在，则称函数在x_0处可导，导数为$f'(x_0)$。

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

可导必然连续，反之不成立。

单侧导数:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$$

$f'(x_0)$存在 $\iff$ 左导数$f'_-(x_0)$与右导数$f'_+(x_0)$存在且相等

若$f(x_0)$在x_0处连续：

1. $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x)|$在$x_0$处可导且

$$[|f(x)|]' \mid_{x=x_0} = \begin{cases} f'(x_0), & f(x_0) > 0 \\ -f'(x_0), & f(x_0) < 0 \end{cases}$$

2. $f(x_0) = 0$, 且

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \Rightarrow |f(x)|\text{在}x_0\text{处可导且}[|f(x)|]' \mid_{x=x_0} = 0 \\ f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x)|\text{在}x_0\text{处不可导} \end{cases}$$

3. $f(x)$ 在x_0处可导$\not\Leftrightarrow$ $|f(x)|$在x_0处可导

§2 导数的几何意义

$f'(x_0)$表示函数$f(x)$在x_0处的切线斜率。曲线在x_0处的切线方程为$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 法线方程为$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$

切线存在导数不一定存在，倒数存在切线一定存在

§3 微分

$$\Delta y = A\Delta x + o(x) = \mathrm{d}y + o(x)$$

$$\mathrm{d}y \mid_{x=x_0} = A\Delta x \text{ 或 } \mathrm{d}y \mid_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

§4 OTHERS

函数$f(x)$在$x = a$处连续，$F(x) = f(x)|x - a|$, 则$f(a) = 0$是$F(x)$在$x = a$处可导的充分必要条件。