Contents

§1 样本与总体

样本与总体的概念

研究对象全体称为总体，组成总体的每个元素称为个体。

n个相互独立且与总体X具有相同概率分布的随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$所组成的整体$(X_1, X_2, ..., X_n)$称为来自总体X、容量为n的一个简单随机样本，称为样本。一次抽样结果的n个具体数值$(x_1, x_2, ..., x_n)$称为来自样本$X_1, X_2, ..., X_n$的一个观测值（或样本值）。

样本的分布(iid)

对于容量为n的样本$X_1, X_2, ..., X_n$, 有如下定理：

设总体X的分布函数$F(x)$(概率密度为$f(x)$, 或概率分布为$p_i = P\{X = x_i\}$), 则$(X_1, X_2, ..., X_n)$的分布函数为

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

相应地：

1. 对于离散型随机变量的样本，联合分布为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

2. 对于连续型随机变量的样本，联合分布为

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

§2 统计量及其分布

统计量

设$X_1, X_2, ..., X_n$为来自总体X的一个样本，$g(x_1, x_2, ..., x_n)$为n元函数，如果g中不含任何未知参数，则称$g(X_1, X_2, ..., X_n)$为样本$X_1, X_2, ..., X_n$的一个统计量。若$(x_1, x_2, ..., x_n)$为样本值，则称$g(x_1, x_2, ..., x_n)$为样本$g(X_1, X_2, ..., X_n)$的观测值。

常用统计量

1. 样本数字特征
    - 样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
    - 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
    - 样本标准差：$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_1 - \bar{X}\right)^2}$

- 样本k阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k (k=1,2,...)$
- 样本k阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^k (k=1,2,...)$

2. 顺序统计量

   将样本$X_1, X_2, ..., X_n$的n个观测值按其取值从小到大的顺序排列，得

   $$X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$$

   .

   随机变量$X_{(k)}$称为**第k顺序统计量**，其中$X_{(1)}$是最小顺序统计量，而$X_{(n)}$是最大顺序统计量：

   $$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}, X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

   .

3. 性质

   设总体X的期望$EX=\mu$, 方差$DX=\sigma^2$, $X_1, X_2, ..., X_n$是取自总体X, 容量为n的一个样本，$\bar{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差，则：

   $$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 (i=1,2,...,n), E\bar{X} = EX = \mu, D\bar{X} = \frac{1}{n}DX = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = DX = \sigma^2$$

§ 3 χ^2分布，t分布和F分布

χ^2分布

若随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立且都服从标准正态分布，则随机变量$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$服从自由度为n的χ^2分布，记为$X \sim \chi^2(n)$

对于给定的$\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha$$

的$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$的上α分位数。

性质

1. 若$X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2), X_1, X_2$相互独立，则

   $$X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

2. 若$X \sim \chi^2(n)$, 则$EX = n, DX = 2n$

t分布

设随机变量$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$且$X, Y$相互独立，则随机变量$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t \sim t(n)$

对于给定的$\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha$$

的$t_\alpha(n)$为$t(n)$的上α分位数。

性质：

1. t分布的概率密度$f(x)$图形关于$x=0$对称，因此
$$Et = 0(n \geq 2)$$
2. 由t分布的概率密度$f(x)$图形的对称性，可知$P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\}$, 故$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

F分布

设随机变量$X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$且$X, Y$相互独立，则随机变量$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为$(n_1, n_2)$的$F$分布，记为$F \sim F(n_1, n_2)$

对于给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha$$

的$F_\alpha(n_1, n_2)$为$F(n_1, n_2)$的上α分位数。

性质：

1. 若$F \sim F(n_1, n_2)$,则$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
2. $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$
3. 若$t \sim t(n)$, 则$t^2 \sim F(1, n)$

§4 正态总体条件下的常用结论

设$X_1, X_2, ..., X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，$\bar{X}, S^2$分别是样本均值和方差，则

1. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,即$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$
3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
4. $\bar{X}$与S^2相互独立（正态总体下成立）, $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S} \sim t(n-1)$, σ未知时，进一步有
$$\frac{n\left(\bar{X}-\mu\right)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$$

§5 参数的点估计

估计量、估计值

矩估计

对于一个参数，

- 用一阶矩建立方程$\bar{X} = EX$
- 若一阶矩方程不能用，则用二阶矩建立方程$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2)$

对于两个参数，用一阶矩和二阶矩建立方程组

最大似然估计

1. 写似然函数

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i; \theta) \\ \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \end{cases}$$

2. 求参数
    - 若似然函数有驻点，则令$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = 0$或$\frac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}\theta} = 0$, 解出$\hat{\theta}$
    - 若无驻点，使用定义求出$\hat{\theta}$
    - 若似然函数为常数，用定义求$\hat{\theta}$，此时$\hat{\theta}$不唯一

估计量评价标准

1. 无偏性：

    对于估计量$\hat{\theta}$, 若$E\hat{\theta} = \theta$, 则$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量

2. 有效性（最小方差）

    若$E\hat{\theta}_1 = \theta, E\hat{\theta}_2 = \theta$, 即$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$均是$\theta$的无偏估计量，当$D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$时，$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效

3. 一致性（只针对大样本）

    若$\hat{\theta}$为θ的估计量，对任意$\varepsilon > 0$, 有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

    或

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

    即当$\hat{\theta} \xrightarrow{P}$时，称$\hat{\theta}$为$\theta$的一个一致（或相合）估计量。

§6 参数的区间估计

概念

设θ是总体X的分布函数的一个未知参数，对于给定的$\alpha \in (0,1)$, 如果由样本$X_1, X_2, ..., X_n$确定的两个统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, ..., X_n), \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, ..., X_n)$满足

$$P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1 - \alpha,$$

则称区间$\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$分别称为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间的下限和上限，$1-\alpha$称为置信度或置信水平，$\alpha$称为显著性水平。若$P\left\{\theta < \hat{\theta}_1\right\} = P\left\{\theta > \hat{\theta}_2\right\} = \frac{\alpha}{2}$，则称这种置信区间为等尾置信区间

单个正太总体分布均值和方差的置信区间

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体X中抽取样本$X_1, X_2, ..., X_n$，样本均值为$\bar{X}$, 方差为S^2

1. σ^2已知时，μ的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

2. σ^2未知时，μ的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

3. μ已知，σ^2的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_1 - \mu\right)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_1 - \mu\right)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$$

4. μ未知，σ^2的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

§7 假设检验

概念

关于总体的每一种论断称为**统计假设**，然后根据样本观察数据或试验结果所提供的信息去推断（检验）这个看法是否成立，这类统计推断问题称为**假设检验**

原假设与备择假设

常常把没有充分理由不能轻易否定的假设称为**原假设**（**基本假设或零假设**），记为H_0, 将其否定的假设称为**对立假设**或**备择假设**，记为H_1

小概率原理与显著性水平

1. 小概率原理

对假设进行检验的基本思想是采用带有概率性质的反证法，这种方法的依据是小概率原理：概率很接近 0 的事件在一次试验中认为不会发生，若发生小概率事件，则拒绝原假设。

2. 显著性水平

小概率事件中的“小概率”的值没有统一规定，通常是根据实际问题的要求，规定一个界限α，当一个事件的概率不大于α时，即认为它是小概率事件。在假设检验中，α称为显著性水平。

正太总体下的六大检验及拒绝域

1. σ^2已知，μ未知，$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$,则拒绝域为$\left(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$
2. σ^2未知，μ未知。$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$,则拒绝域为
$$\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right)$$
3. σ^2已知，μ未知，$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$,则拒绝域为
$$\left[\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,+\infty\right)$$
4. σ^2已知，μ未知，$H_0:\mu\geq\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$,则拒绝域为
$$\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}z_\alpha\right]$$
5. σ^2未知，μ未知，$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$,则拒绝域为
$$\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right)$$
6. σ^2未知，μ未知，$H_0:\mu\geq\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$,则拒绝域为
$$\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right]$$

§8 两类错误

1. 第一类错误（弃真）：

若H_0为真，按检验法否定H_0，称为弃真错误，概率为$\alpha=P\{拒绝H_0|\ H_0为真\}$

2. 第二类错误（取伪）：

若H_0为假，按检验法接受H_0，称为取伪错误，概率为$\beta=P\{接受H_0|\ H_0为假\}=P\{接受H_0\mid H_1为真\}$