Contents

# §1 合同变换、二次型的合同标准形、规范形

## 线性变换定义

对于$n$元二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)$来说，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

称为线性变换，若线性变换的系数矩阵$\boldsymbol{C}$可逆，则称为可逆线性变换。

$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 令$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 则

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^\top\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

记$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{y})$$

此时原二次型通过线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$得到一个新二次型$g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$.

## 矩阵合同性质与定义

**定义** 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，记为$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$。称对应的二次型$f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})$为合同二次型

合同具有反身性，对称性，传递性

## 二次型的标准形，规范形

若二次型只含有平方项，没有交叉项，称为**标准形**

若标准形中系数的取值仅有$1,-1,0$，则称为**规范形**

**定理** 1 任何二次型均可通过配方法化成标准形及规范形，用矩阵语言表达为：对任何实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$使得$\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$

**定理** 2 任何二次型都可以通过正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$化成标准形，用矩阵语言表达为：任何实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，一定存在正交矩阵$Q$使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$

# §2 惯性定理

无论许纳区什么样的可逆线性变换，将二次型化为**标准形或规范形**，二次型的惯性数$(p,q)$不变。$p$为正项个数，$q$为负项个数。

两个二次型（或实对称矩阵）合同的充要条件是具有相同的正、负惯性指数，或者有相同的秩及正（或负）惯性指数，或有相同的正、负特征值个数

# §3 正定二次型及判别

## 定义

$n$元二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 若对任意$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,...,x_n]^\top\neq 0$, 均有$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 则称$f$为**正定二次型**，此时$\boldsymbol{A}$为**正定矩阵**

令$f$为一个正的常数，其几何图形是封闭的

## 二次型正定的充要条件

$$
\begin{aligned}
n\text{元二次型}f=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\text{正定} &\Leftrightarrow \text{对于任意}\boldsymbol{x}\neq 0,\text{均有}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0\\
&\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵}D\text{使}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^\top\boldsymbol{D}\\
&\Leftrightarrow f\ \text{的正惯性指数}p=n\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{的特征值}\ \lambda_i>0(i=0,1,...,n)\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{的全部顺序主子式(左上角主子式)均大于}0
\end{aligned}
$$

## 二次型正定必要条件

1. $a_{ii}>0(i=1,2,...,n)$
2. $|\boldsymbol{A}|>0$