

Contents

§ 1 齐次线性方程组	2
有解条件	2
解的性质	2
基础解系和解的结构	2
§ 2 非齐次线性方程组	2
有解条件	2
解的性质	2
求解	2
§ 3 方程组公共解	3
§ 4 同解方程组	3

§ 1 齐次线性方程组

$$A_{m \times n} x = 0$$

有解条件

1. 当 $r(A) = n$ 时, 方程组只有零解
2. 当 $r(A) < n$ 时, 方程组有无穷多解, 且有 $n - r$ 个线性无关解

解的性质

1. 若 $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$, 则 $A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$
2. 若 $A_{m \times n}, r(A) = n, AB = AC$, 则 $B = C$

基础解系和解的结构

1. 基础解系: 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 满足

$$\begin{cases} \text{是方程组 } Ax = 0 \text{ 的解} \\ \text{线性无关} \\ \text{方程 } Ax = 0 \text{ 的任意解均可由 } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r} \text{ 线性表示} \end{cases}$$

则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为方程组的基础解系

§ 2 非齐次线性方程组

$$A_{m \times n} x = b$$

有解条件

若 $r(A) \neq r([A, b])$, 则方程组无解

若 $r(A) = r([A, b]) = n$, 则方程组有唯一解

若 $r(A) = r([A, b]) = r < n$, 则方程组有无穷多解.

解的性质

设 η_1, η_2, η 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, ξ 是对应齐次线性方程 $Ax = 0$ 的解, 则: (1) $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解, (2) $k\xi + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解

求解

1. 求 $Ax = 0$ 的通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$
2. 求出 $Ax = b$ 的一个特解 η
3. 由 $Ax = b$ 的通解为 $\eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

§ 3 方程组公共解

齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0, B_{s \times n}x = 0$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}x = 0$ 的解；非齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = \alpha, B_{s \times n}x = \beta$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ 的解

§ 4 同解方程组

若两个方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 和 $B_{s \times n}x = 0$ 有完全相同的解，称他们为同解方程组

$A_{m \times n}x = 0$ 和 $B_{s \times n}x = 0$ 同解方程组

$\Leftrightarrow Ax = 0$ 的解满足 $Bx = 0$, 且 $Bx = 0$ 的解满足 $Ax = 0$

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$, 且 $Ax = 0$ 的解满足 $Bx = 0$ (或 $Bx = 0$ 的解满足 $Ax = 0$)

$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$