# Contents

# §1 $n$维随机变量及其分布函数

## $n$维随机变量的概念

如果$X_1, X_2, ..., X_n$是定义在同一个样本空间$\Omega$上的$n$个随机变量，则称$(X_1, X_2, ..., X_n)$为$n$维随机变量，或$n$维随机向量，$X_i (i = 1, 2, ..., n)$称为第$i$个分量

当$n = 2$时，称$(X, Y)$为二维随机变量或二维随机向量

## $n$维随机变量的分布函数的概念和性质

1. 概念

   对任意$n$个实数$x_1, x_2, ..., x_n$，称$n$元函数

   $$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n\}$$

   为$n$维随机变量$(X_1, X_2, ..., X_n)$的分布函数或随机变量$X_1, X_2, \cdot, X_n$的联合分布函数

   当$n = 2$时，对任意的实数$x, y$, 称二元函数

   $$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

   为二维随机变量$(X, Y)$的分布函数或随机变量$X, Y$的联合分布函数

2. 性质

   - 单调性 $F(x, y)$是$x, y$的单调不减函数
   - 右连续性 $F(x, y)$是$x, y$的右连续函数
   - 有界性 $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
   - 非负性 对任意$x_1 < x_2, y_1 < y_2$，有$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$

## 边缘分布函数

设二维随机变量$(X, Y)$的分布函数为$F(x, y)$，随机变量$X$与随机变量$Y$的分布函数$F_X(x), F_Y(y)$分别称为$(X, Y)$关于$X$ 和 $Y$的边缘分布函数。由概率性质得

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} \\ &= \lim_{y \to +\infty} P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) \end{aligned}$$

# §2 常见的二维随机变量得概率分布——离散型随机变量与连续型随机变量

## 二维离散型随机变量得概率分布、边缘分布和条件分布

1. $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_i\}, i, j = 1, 2, ...$

2. 数列$\{p_{ij}\}, i,j=1,2,...$是某一二维离散型随机变量的概率分布的充要条件是

$$p_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

3. 联合分布函数

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_i \leq y} p_{ij}$$

设$G$是平面上的某个区域，则

$$P\{(X,Y) \in G\} = \sum_{(x_i,y_j)\in G} p_{ij}$$

4. $X, Y$的边缘分布分别为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

和

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

5. 条件分布

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

和

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

## 二维连续型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布

1. 边缘概率密度

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

2. 条件概率密度

$$f_{Y\mid X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

3. 条件分布函数

$$F_{Y\mid X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y\mid X}(v \mid x)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}v$$

# § 3 随机变量的相互独立性

## 概念

1. 设二维随机变量$(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)$，如果边缘分布函数$F_X(x),F_Y(y)$满足

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

   则称随机变量$X,Y$是相互独立的

2. 若$n$维随机变量$(X_1,X_2,...,X_n)$的分布函数$F(x_1,x_2,...,x_n)$满足

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot ...\cdot F_{X_n}(x_n),$$

   则称随机变量$X_1,X_2,...,X_n$是相互独立的

3. 若对任意实数$x_i(i=1,2,...,n)$与$y_j(j=1,2,...,m)$有

$$\begin{aligned}&P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,...,X_n\le x_n,Y_1\le y_1,Y_2\le y_2,...,Y_m\le y_m\}\\=&P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,...,X_n\le x_n\}\cdot P\{Y_1\le y_1,Y_2\le y_2,...,Y_m\le y_m\}\end{aligned}$$

   即联合分布函数等于各自部分的分布函数相乘：

$$F(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=F(x_1,x_2,...,x_n)\cdot F(y_1,y_2,...,y_m)$$

   则两个多维随机变量$(X_1,X_2,...,X_n)$与$(Y_1,Y_2,...,Y_m)$是相互独立的

## 相互独立的充要条件

1. $n$个随机变量$X_1,X_2,...,X_n$相互独立
   $\Leftrightarrow$对任意的$n$个实数$x_i$, $n$个事件$\{X_1\le x_1\},\{X_2\le x_2\},...,\{X_n\le x_n\}$相互独立

2. 设$(X,Y)$为二维离散型随机变量，则
   $X,Y$相互独立$\Leftrightarrow$联合分布律等于边缘分布相乘

3. $n$个离散型随机变量$X_1,X_2,...,X_n$相互独立
   $\Leftrightarrow$对任意的$x_i\in D_i=\{X\text{的一切可能值}\}(i=1,2,...,n)$,有

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}$$

4. 设$(X,Y)$为二维连续型随机变量，则
   $X,Y$相互独立$\Leftrightarrow$联合概率密度函数等于边缘概率密度函数的乘积：

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

5. $n$个连续型随机变量$X_1,X_2,...,X_n$则
   $X_1,X_2,...,X_n$相互独立$\Leftrightarrow$联合概率密度函数等于边缘概率密度函数的乘积：

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\cdot ...\cdot f_{X_n}(x_n)$$

## 相互独立的性质

1. 设$X_1,X_2,...,X_n$相互独立，则其中任意$k(2\le k\le n)$个随机变量也相互独立

2. 设$(X,Y)$为二维离散型随机变量，且相互独立，则条件分布等于边缘分布

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = P\{X = x_i\}$$

$$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = P\{Y = y_j\}$$

3. 设$(X,Y)$为连续型随机变量且相互独立，则条件概率密度等于边缘概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

4. 若$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立，$g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$为一元函数，则$g_1(X_1), g_2(X_2), ..., g_n(X_n)$相互独立

# §4 相互独立随机变量函数的分布和卷积公式

1. 和的分布

   设$(X,Y) \sim f(x,y)$,则$Z = X + Y$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y$$

2. 差的分布

   设$(X,Y) \sim f(x,y)$,则$Z = X - Y$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)\,\mathrm{d}y$$

3. 积的分布

   设$(X,Y) \sim f(x,y)$,则$Z = XY$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{z}{y}, y\right)\mathrm{d}y$$

4. 商的分布

   设$(X,Y) \sim f(x,y)$,则$Z = \frac{X}{Y}$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f(zy, y)\,\mathrm{d}y$$

5. 常见分布可加性

   - 若$X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$,则$X + Y \sim B(m+n, p)$
   - 若$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$,则$X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$
   - 若$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,则$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
   - 若$X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$,则$X + Y \sim \chi(n+m)$

6. 万能计算方法

设$(X,Y)$是二维随机变量，且$(X,Y)\sim f(x,y)$, 若$\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$, 且$u,v$具有连续的一阶偏导数，$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$是其唯一反函数，则$(X,Y)$的函数$\begin{cases}U=U(X,Y)\\V=V(X,Y)\end{cases}$的$f_{U,V}(u,v)=f[x(u,v),y(u,v)]\cdot|J|$其中

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}^{-1}\neq 0$$