Contents

§1 极值

对于函数$f(x)$，若存在点x_0的某个邻域，使得在该邻域内任意一点x, 均有

$$f(x) \leq f(x_0)(\text{或}f(x) \geq f(x_0)))$$

成立，则称x_0为$f(x)$的极大值（或极小值）点，$f(x_0)$为函数$f(x)$的极大值（或极小值）。

断点也可以是极值点。

§2 单调性

1. 一阶可导点是极值点的必要条件 极值点可以是驻点或不可导点
2. 第一充分条件：
   设$f(x)$在$x = x_0$处连续，且在x_0某去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)(\delta > 0)$内可导
   1. 若$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$在$x = x_0$处取极小值
   2. 若$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$在$x = x_0$处取极大值
   3. 若$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时和 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时不变号, 则$x = x_0$不是极值点。
3. 第二充分条件：
   设$f(x)$在 $x = x_0$处二阶可导，且$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0.$
   1. 若$f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$在 x_0取极小值
   2. 若$f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$在 x_0取极大值
4. 第三充分条件：
   设$f(x)$在 $x = x_0$处 n阶可导，且$f^{(m)}(x) = 0(m = 1, 2, ..., n-1), f^{(n)}(x) \neq 0, (n \geq 2)$则：
   1. 当n为偶数且$f^{(n)}(x_0) < 0, f(x)$在x_0处取极大值
   2. 当n为偶数且$f^{(n)}(x_0) > 0, f(x)$在x_0处取极小值

§3 凹凸性

定义一

设函数$f(x)$在区间I连续，若对I任意不同两点x_1, x_2恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称$y = f(x)$在I上的图形是凹的（或凹弧），若恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称$y = f(x)$在I上的图形是凸的（或凸弧）。更一般地可以写为

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

其中$0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$ (凹弧)

定义二

设函数$f(x)$在$[a,b]$内连续，在(a,b)内可导，若对(a,b)内任意x 及 $x_0(x\neq x_0)$均有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x),$$

则称$f(x)$ 在 $[a,b]$的图形是凹的。

§4 拐点

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点成为该曲线的拐点

1. 间断点不是拐点
2. 间断点处可以不可导
3. 间断点是点而拐点是横坐标

§5 凹凸性判别

设函数$f(x)$ 在 I上二阶可导。

1. 若在I 上 $f''(x)>0,$则$f(x)$ 在 I上的图形是凹的。
2. 若在I 上 $f''(x)<0,$则$f(x)$ 在 I上的图形是凸的。

§6 拐点判别

设$f''(x_0)$存在，且点$(x_0,f(x_0))$是拐点，则$f''(x_0)=0$

第一充分条件：

设$f(x)$ 在点$x=x_0$处连续，在点$x=x_0$的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内二阶导数存在，且在该点左、右邻域内$f''(x)$变号，则点$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点。

第二充分条件：

设$f(x)$在 $x=x_0$的某邻域内三阶可导，且$f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0,$则点$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点。

第三充分条件:

设$f(x)$在 x_0处n阶可导, 且$f^{(m)}(x_0)=0(m=2,3,...n-1),f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 3)$,则当$n$为奇数时点$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点。

§7 极值点与拐点的重要结论

1. 曲线的可导点不可同时为极值点和拐点，不可导点可同时为极值点和拐点。
2. 设多项式函数$f(x)=(x-a)^ng(x)(n>1),$且$g(a)\neq 0$，则当n是偶数时，$x=a$是$f(x)$的极值点，当n是奇数时，$x=a$是$f(x)$的拐点。
3. 设多项式函数$f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_k)^{n_k},$其中$n_i$为正整数，$a_i$是实数且两两不等，$i=1,2,...,k$
   记k_i为$n_i=1$的个数，k_2为n_i为偶数的个数，k_3为$n_i>1$且为奇数的个数，则$f(x)$的极值点个数为$k_1+2k_2+k_3-1,$拐点的个数为$k_1+2k_2+3k_3-2$

§8 渐近线

铅直渐近线

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty\left(或\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty\right)$,则$x=x_0$是一条铅直渐近线。$x_0$可以是无定义点，或定义域端点，或分段函数分段点。

水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_1$,则 $y=y_1$是一条水平渐近线，若$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_2$,则 $y=y_2$是一条水平渐近线；若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$,则 $y=y_0$是一条水平渐近线.

斜渐近线

1. 若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a_1(a_1\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=b_1$,则 $y=a_1x+b_1$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线；
2. 若$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a_2(a_2\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_2x]=b_2$,则 $y=a_2x+b_2$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线；
3. 若$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a(a\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$,则 $y=ax+b$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线；

§9 曲率与曲率半径

设$y(x)$二阶可导,则曲线$y=y(x)$在点$(x,y(x))$处的曲率半径为：

$$k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

曲率半径为

$$R=\frac{1}{k}(y\neq 0)$$