

Contents

§ 1 概念，性质与对称性 ..... 2

    概念 ..... 2

    性质 ..... 2

    普通对称性 ..... 3

    轮换对称性 ..... 3

§ 2 计算 ..... 3

    直角坐标系 ..... 3

    极坐标系 ..... 4

    换元法 ..... 4

# § 1 概念, 性质与对称性

## 概念

设 $f(x, y)$ 是有闭界区域 $D$ 上的有界函数, 将整个闭区域 $D$ 任意分成 $n$ 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta, \dots, \sigma_n$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 $i$ 个小闭区域, 也表示它的面积, 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i)$ , 做乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_{i(i=1,2,\dots,n)}$ , 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ , 如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda$ 趋于零时, 和的极限总存在, 且与小闭区域的分割无关, 则称 $f(x, y)$ 在 $D$ 上是可积的, 极限值称为 $f(x, y)$ 在 $D$ 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 即:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

若函数 $f$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 一定存在

## 性质

1. 性质一:

$$\iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = A, \text{ 其中 } A \text{ 为 } D \text{ 的面积}$$

2. 性质二: 当函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上可积时,  $f(x, y)$ 在 $D$ 上必有界

3. 性质三: 设 $k_1, k_2$ 为常数, 则

$$\iint_D [k_1 f(x, y) \pm k_2 f(x, y)] d\sigma = k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma \pm k_2 \iint_D f(x, y) d\sigma$$

4. 性质四: 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上可积, 且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset, D_1 \cup D_2 = D$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

5. 性质五: 当 $f(x, y), g(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上可积时, 若在 $D$ 上有 $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

特殊地, 有

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

6. 性质六: 设 $M, m$ 分别是函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D$ 上的最大值和最小值,  $A$ 为 $D$ 的面积, 则有

$$mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA$$

7. 性质七: 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续,  $A$ 为 $D$ 的面积, 则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A$$

## 普通对称性

1. 若 $D$ 关于 $y$ 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) = f(-x, y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, y) \end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 在 $y$ 轴的左/右半部分

2. 若 $D$ 关于 $x$ 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) = f(x, -y) \\ 0, & f(x, y) = -f(x, -y) \end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 在 $x$ 轴的上/下半部分

3. 若 $D$ 关于原点对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) = f(-x, -y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, -y) \end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 关于原点对称的部分

4. 若 $D$ 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) = f(y, x) \\ 0, & f(x, y) = -f(y, x) \end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 在 $y = x$ 的上/下半部分

## 轮换对称性

直角坐标系下若区域关于 $y = x$ 对称, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

## § 2 计算

### 直角坐标系

$$d\sigma = dx dy$$

可交换积分次序

极坐标系

$$\mathrm{d}\sigma = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

换元法

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \text{ 则 } \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$