Contents

§ 1 伴随矩阵

性质

对任意n阶方阵$\boldsymbol{A}$, 都有伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$, 且

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}|,|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，有

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathsf{T}},(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1},(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*,(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

用伴随矩阵求可逆矩阵的逆

1. 判断$|\boldsymbol{A}|$是否为零
2. 写出伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$
3. 计算$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$

求伴随矩阵

1. 定义
2. 若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})$

§ 2 初等变换与初等矩阵

初等变换

倍乘、互换、倍加

初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵

1. $\boldsymbol{E}_i(k)$表示单位矩阵第i行（列）倍乘$k(k\neq 0)$
2. $\boldsymbol{E}_{ij}$表示单位矩阵第i行（列）与第j行（列）互换
3. $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$表示单位矩阵第i列k倍加到第j列，或单位矩阵第j行k倍加至第i行

初等矩阵的性质与重要公式

1. 初等矩阵的转置仍是初等矩阵
2. 初等矩阵都是可逆矩阵，其逆矩阵仍是初等矩阵
3. 若矩阵是可逆矩阵，则可分解为有限个初等矩阵的乘积

$$[\boldsymbol{E}_i(k)]^{-1}=\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{i}}\left(\frac{1}{k}\right),\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij},[\boldsymbol{E}_{ij}(k)]^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

简单分块矩阵的逆

若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均是可逆方阵，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

§3 矩阵的秩

定义

设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，若存在k阶子式不为零，而任意$k+1$阶子式均为零，则称$\boldsymbol{A}$的秩为k, 记作$r(\boldsymbol{A})=k$，且若$\boldsymbol{A}$为方阵，则

$$r(\boldsymbol{A}_{n\times n})=n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{可逆}$$

求法

将矩阵$\boldsymbol{A}$用行初等变换化为行阶梯矩阵，非零行数即为$\boldsymbol{A}$的秩

性质

设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$是满足有关矩阵运算要求的矩阵，则

1. $$0\le r(\boldsymbol{A})\le\min\{m,n\}$$

2. $$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})(k\neq 0)$$

3. $$r(\boldsymbol{AB})\le\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$$

4. $$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$$

5. $$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n\text{ if} & r(\boldsymbol{A})=n\\1\text{ if} & r(\boldsymbol{A})=n-1,\text{其中}\boldsymbol{A}\text{为}n(n\ge 2)\text{方阵}\\0\text{ if} & r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$$

6. 设$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$分别是$m,n$阶可逆矩阵，则
$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})$$

7. 若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$,则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$

8. $$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$$

9. 若方阵的秩为 1 或 0，则可拆分为一个行向量与一个列向量的外积，即
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$$
其中$\boldsymbol{a}$是n维列向量，$\boldsymbol{b}$是n维行向量