

Contents

§ 1 中值定理 2

 定理一 2

 定理二(介值定理) 2

 定理三(平均值定理) 2

 定理四(零点定理) 2

 定理五(费马定理) 2

 定理六(罗尔定理) 2

 定理七(拉格朗日中值定理) 2

 定理八(柯西中值定理) 2

 定理九(泰勒公式) 2

§ 2 微分等式 3

 零点定理 3

 单调性 3

 实系数奇次方程至少有一个实根 3

 罗尔定理推论 3

§ 3 微分不等式 3

 函数性态(单调性, 最值, 凹凸性等)证明不等式 3

§ 1 中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

定理一

$m \leq f(x) \leq M$, 其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的最小值与最大值。

定理二(介值定理)

当 $m \leq \mu \leq M$ 时, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$

定理三(平均值定理)

当 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ 时, 在 $[x_1, x_2]$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

定理四(零点定理)

当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

定理五(费马定理)

设 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $\begin{cases} 1 \text{ 可导} \\ 2 \text{ 取极值} \end{cases}$, 则 $f'(x_0) = 0$

定理六(罗尔定理)

设 $f(x)$ 满足 1 在 $[a, b]$ 内连续, 2 在 (a, b) 内可导, 3 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

定理七(拉格朗日中值定理)

设 $f(x)$ 满足 1 在 $[a, b]$ 连续 2 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 或

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

定理八(柯西中值定理)

设 $f(x), g(x)$ 满足在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 可导, $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

定理九(泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + f'''(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

§ 2 微分等式

零点定理

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个根

单调性

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至多有一个根。

实系数奇次方程至少有一个实根

罗尔定理推论

若 $f^{(n)} = 0$ 至多有 k 个根, 则 $f(x)$ 至多有 $k + n$ 个根。

§ 3 微分不等式

函数性态（单调性，最值，凹凸性等）证明不等式

1. 若在 $[a, b]$ 上有 $f''(x) > 0, a < x < b, f(a) = f(b) = 0$, 则有 $f(x) < 0$