Contents

§ 1 概念，性质与对称性

概念

设$f(x,y)$是有闭界区域D上的有界函数，将整个闭区域D任意分成n个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta, ..., \sigma_n$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域，也表示它的面积，在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i, η_i), 做乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_{i(i=1,2,...,n)}$, 并作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda$趋于零时，和的极限总存在，且与小闭区域的分割无关，则称$f(x,y)$在D上是可积的，极限值称为$f(x,y)$在D上的二重积分，记作$\iint\limits_D d(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 即:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

若函数f在有界闭区域D上连续，则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$一定存在

性质

1. 性质一：

$$\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma = \iint \mathrm{d}\sigma = A, \text{其中}A\text{为}D\text{的面积}$$

2. 性质二：当函数$f(x,y)$在闭区域D上可积时，$f(x,y)$在D上必有界
3. 性质三：设k_1, k_2为常数，则

$$\iint\limits_D [k_1 f(x,y) \pm k_2 f(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = k_1\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm k_2\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

4. 性质四：设$f(x,y)$在有界闭区域D上可积，且$D_1\cap D_2 = \varnothing, D_1\cup D_2 = D$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

5. 性质五：当$f(X,y), g(x,y)$在有界闭区域D上可积时，若在D上有$f(x,y)\le g(x,y)$, 则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特殊地，有

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

6. 性质六：设M, m分别是函数$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，A为D的面积, 则有

$$mA \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le MA$$

7. 性质七：设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，A为D的面积，则在D上只少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A$$

普通对称性

1. 若D关于y轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,y) \\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y) \end{cases}$$

D_1为D在y轴的左/右半部分

2. 若D关于x轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(x,-y) \\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y) \end{cases}$$

D_1为D在x轴的上/下半部分

3. 若D关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y) \\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y) \end{cases}$$

D_1为D关于原点对称的部分

4. 若D关于直线$y=x$对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(y,x) \\ 0, & f(x,y)=-f(y,x) \end{cases}$$

D_1为D在$y=x$的上/下半部分

轮换对称性

直角坐标系下若区域关于$y=x$对称，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma$$

§2 计算

直角坐标系

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

可交换积分次序

极坐标系

$$\mathrm{d}\sigma = r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$$

换元法

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \text{则}\, \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

换元法可能改变积分上下限，尤其是极坐标系下，若有系数，注意θ取值范围