Contents

§1 导数定义

若Δy与Δx比值在$\Delta x\to 0$时极限存在，则称函数在x_0处可导，导数为$f'(x_0)$。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

可导必然连续，反之不成立。

单侧导数:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$$

$f'(x_0)$存在 $\iff$ 左导数$f'_-(x_0)$与右导数$f'_+(x_0)$存在且相等

若$f(x_0)$在x_0处连续：

1. $f(x_0)\neq 0\ \Rightarrow|f(x)|$在$x_0$处可导且

$$[|f(x)|]'\ |_{x=x_0}=\begin{cases}f'(x_0), & f(x_0)>0\\ -f'(x_0), & f(x_0)<0\end{cases}$$

2. $f(x_0)=0,$且

$$\begin{cases}f'(x_0)=0\Rightarrow|f(x)|\text{在}x_0\text{处可导且}[|f(x)|]'\ |_{x=x_0}=0\\ f'(x_0)\neq 0\Rightarrow|f(x)|\text{在}x_0\text{处不可导}\end{cases}$$

3. $f(x)$ 在x_0处可导$\not\Leftrightarrow$ $|f(x)|$在x_0处可导

§2 导数的几何意义

$f'(x_0)$表示函数$f(x)$在x_0处的切线斜率。曲线在x_0处的切线方程为$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,法线方程为$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0$

切线存在导数不一定存在，倒数存在切线一定存在

§3 微分

$$\Delta y=A\Delta x+o(x)=\mathrm{d}y+o(x)$$

$$\mathrm{d}y\ |_{x=x_0}=A\Delta x\ \text{或}\ \mathrm{d}y\ |_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$$

§4 OTHERS

函数$f(x)$在$x=a$处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$,则$f(a)=0$是$F(x)$在$x=a$处可导的充分必要条件。