Contents

§1 三重积分

概念

有界函数$f(x,y,z)$是有界闭区域Ω上的函数，若该函数在区域内连续，则三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

性质

1. $\iiint\limits_{\Omega} 1\,\mathrm{d}v = V, V$为区域$\Omega$的体积
2. 若函数在区域内可积，则其在该区域内有界
3. 线性
4. 设函数在区域Ω内可积，且$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$，则
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$
5. 若在积分区域上$f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, 则
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v \le \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$
6. 估值定理
7. 设函数子啊积分区域上连续，V为区域的体积，则至少存在一点(x_0,y_0,z_0)使得
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V$$

普通对称性与轮换对称性

1. 普通对称性

   假设Ω关于xOz面对称，则有
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v\,, & f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0\,, & f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

   Ω_1是Ω在对称面右/左边的部分

2. 轮换对称性

   直角坐标系下，若交换x,y,z的顺序不改变Ω, 称该函数具有轮换对称性。
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

计算

1. 直角坐标系
    1. 先一后二（先z后x,y, 也叫投影穿线法）
    2. 先二后一（先x,y后z, 也叫定限截面法）
2. 柱坐标系

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}z$$

3. 球坐标系

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$$

故

$$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

4. 换元法

$$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w)\\z=z(u,v,w)\end{cases}\Rightarrow\mathrm{d}v=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$$

其中

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq0$$

应用

1. 质心

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}$$

2. 转动惯量

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v,I_o=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

§2 第一类曲线积分

概念

在曲线Γ上有界的函数$f(x,y,z)$, 定义

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

性质

总假设Γ是空间有限长分段光滑曲线

1. $$\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=l_{\Gamma}$$
2. 若函数在曲线上可积，则其在曲线上必有界
3. 线性
4. 积分可加性 设$\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma,\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$,则
$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$
5. 若在曲线上$f(x,y,z)\le g(x,y,z)$,则
$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s\le\int_{\Gamma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$
6. 中值定理

   设函数在曲线上连续，l_{Γ}为曲线的长度，则至少存在一点(x_0,y_0,z_0)使得
$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=f(x_0,y_0,z_0)\cdot l_{\Gamma}$$
7. 估值：
$$ml_{\Gamma}\le\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s\le Ml_{\Gamma}$$

普通对称性与轮换对称性

1. 普通对称性

   假设Γ关于xOz面对称，则有
$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s\,, f(x,y,z)=f(x,-y,z)\\ 0\ , \qquad\qquad\qquad f(x,y,z)=-f(x,-y,z)\end{cases}$$

   Γ_1是Γ在对称面右/左边的部分
2. 轮换对称性

   直角坐标系下，若交换x,y,z的顺序不改变Γ,称该函数具有轮换对称性。
$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_{\Gamma} f(y,x,z)\,\mathrm{d}s$$

计算

1. 平面情形
    1. 若平面曲线L由$y=y(x),a\le x\le b$给出，则$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$,且

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

    2. 若平面曲线L由参数式 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},(\alpha\le x\le\beta)$ 给出，则$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$,且

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

    3. 若平面曲线L由极坐标形式$r=r(\theta),(\alpha\le\theta\le\beta)$,则$\mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$且

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

2. 空间情形 若空间曲线由参数式$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases},(\alpha\le t\le\beta)$给出，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

且

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

应用

1. 弧长计算
2. 曲线质心计算

$$\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \mathrm{d}s}$$

3. 曲线转动惯量计算

$$I_x=\int_\Gamma(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,I_o=\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

§3 第一类曲面积分

概念

光滑曲面Σ上的有界函数$f(x,y,z)$,定义第一类曲面积分为

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S$$

性质

1. $$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = S_{\Sigma},$$

   其中S_{Σ}为曲面的面积

2. 若函数在曲面上可积，则其在曲面上必有界

3. 线性

4. 积分可加性 设$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$, 则

   $$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

5. 若在曲面上$f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, 则

   $$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \leq \iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

6. 中值定理

   设函数在曲面上连续，S_{Σ}为曲面的面积，则至少存在一点(x_0, y_0, z_0)使得

   $$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = f(x_0,y_0,z_0) \cdot S_{\Sigma}$$

普通对称性与轮换对称性

1. 普通对称性

   假设Σ关于xOz面对称，则有

   $$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\ , f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0\ , \qquad\qquad\qquad f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

   Σ_1是Σ在对称面右/左边的部分

2. 轮换对称性

   直角坐标系下，若交换x, y, z的顺序不改变Σ, 称该函数具有轮换对称性。

   $$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)\,\mathrm{d}S$$

计算

投影，带入，计算

应用

1. 曲面面积计算

2. 曲面质心计算

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

3. 曲面转动惯量计算

$$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S, I_o=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

§4 平面第二类曲线积分

概念

有向曲线L上的函数$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$, 定义第二类曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

性质

1. 线性
2. 有向性

$$\int_{AB}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{s}=-\int_{BA}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

计算

1. 基本方法————化为定积分

若平面有向曲线L由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}, (t:\alpha\to\beta)$，则

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t))\,\mathrm{d}t$$

若方程由$y=y(x), x:a\to b$给出，则

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_a^b \{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\,\mathrm{d}x$$

2. 格林公式

设平面有界区域D由分段光滑曲线L围成，$P(x,y),Q(x,y)$在D上由一阶连续偏导数，L取正向，则

$$\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

   1. 若曲线封闭且内部无奇点，直接用格林公式

2. 若非封闭且$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$,可补线使其封闭

3. 若曲线封闭但内部有奇点，且除奇点外$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$,则换路径

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

L_1在D内部且与L方向相同

3. 平面曲线积分与路径无关

设$P(x,y),Q(x,y)$在单连通区域G内具有一阶连续偏导数，则曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在$G$内与路径无关的充要条件是在$G$内处处有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

或在G内存在函数$u(x,y), \mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

§5 第二类曲面积分

通量

向量函数$\boldsymbol{F}(x,y,z)$通过曲面Σ的通量为

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^\circ\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第二类曲面积分定义为光滑空间有向曲面Σ上向量函数$\boldsymbol{F} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$的通量

性质

1. 线性

2. 有向性

$$\iint\limits_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint\limits_{\Sigma^-} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

3. 可加性 设$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma_1} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint\limits_{\Sigma_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

计算

1. 基本方法————化为二重积分：拆成三个二重积分，分别投影到相应坐标面上

2. 投影转换法
   1. 正向单位法向量求法

$$\boldsymbol{n} = "\pm" \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

上侧为正时取+, 下侧为正时取−

2. 转换投影定理

设曲面$\Sigma: z = z(x,y), z$具有一阶连续偏导数，且$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Sigma$上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = "\pm" \iint\limits_{D}\left(-P\frac{\partial z}{\partial x} - Q\frac{\partial z}{\partial y} + R\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中$P = P[x,y,z(x,y)], Q = Q[x,y,z(x,y)], R = R[x,y,z(x,y)]$

3. 高斯公式

设有向分片光滑封闭曲面Σ是有界区域Ω的边界，$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$在$\Omega$内具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

若非封闭曲面且$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$,补面使其封闭

若封闭曲面且内部有奇点，且除奇点外$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = 0$,则换路径

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ_1在Ω内部且与Σ方向相同

§6 空间第二类曲线积分

1. 一投二代三计算

2. 斯托克斯公式 设Ω为空间区域，Σ是Ω内的分片光滑有向曲面，Γ为逐段光滑的Σ的边界，方向与Σ成右手系，函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$内有连续的一阶偏导数，则有斯托克斯公式：

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中$\boldsymbol{n}^\circ = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为$\Gamma$的单位法向量。