Contents

# §1 不定积分

## 微积分基本定理

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

## 原函数存在定理

1. 连续函数$f(x)$必有原函数
2. 含有第一类间断点和无穷间断点的函数$f(x)$在包含该间断点的区间内没有原函数

# §2 定积分

## 定积分定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{2i-1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

$a=0,b=1$时,取小矩形右端点函数值作为高：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

取小矩形中点函数值为高时有：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$$

# §3 定积分存在定理

## 定积分存在充分条件

1. 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在
2. 若$f(x)$在$[a,b]$单调，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在
3. 若$f(x)$在$[a,b]$有界且只有有限个间断点，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在
4. 若$f(x)$在$[a,b]$有界且只有有限个第一类间断点，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在

## 定积分存在必要条件

若$f(x)$在$[a,b]$可积，则$f(x)$在$[a,b]$有界

## 定积分性质

1. 假设$a<b$, 则$\int_a^b \mathrm{d}x = L$, $L$为区间$[a,b]$的长度。
2. 线性：设常数$k_1,k_2$, 则$\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
3. 估值定理：设$M,m$分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则
$$mL \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le ML$$
4. 中值定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$使
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

# §4 变限函数

$$F(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=f(u(x))u'(x)-f(v(x))v'(x)$$

## 变限函数性质

1. 函数$f(x)$在 $I$上可积，则函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$I$上连续。
2. 函数$f(x)$在 $I$上连续，则函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$I$上可导，且$F'(x)=f(x)$
3. 若$x=x_0\in I$ 是 $f(x)$唯一的跳跃间断点，则$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}x$ 在 $x_0$处不可导，且$F'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), F'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
若$x=x_0\in I$ 是 $f(x)$唯一的可去间断点，则$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}x$ 在 $x_0$处可导，且$F'_-(x_0)=F'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$

# §5 反常积分

## 定义

1. 无穷区间上的反常积分
设$F(x)$是 $f(x)$在相应区间上的一个原函数，
   1. $$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x) - f(a)$$

   若上述极限存在则称反常积分收敛，否则称为发散

2.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathtt{d}x = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

若上述极限存在则称反常积分收敛，否则称为发散

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathtt{d}x = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\mathtt{d}x + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\mathtt{d}x,$$

若两个反常积分都收敛，则称该反常积分收敛，否则称为发散.

2. 无界函数的反常积分
   设$F(x)$是 $f(x)$在相应区间上的一个原函数，$x_0$为 $f(x)$的瑕点
   1. 若$x=a$是唯一瑕点，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathtt{d}x = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

若上述极限存在则称反常积分收敛，否则称为发散

   2. 若$x=c\in(a,b)$是唯一瑕点则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathtt{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\mathtt{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathtt{d}x$$

若上述极限存在则称反常积分收敛，否则称为发散

## 反常积分的敛散性判别

1. 比较判别
2. 比较判别的极限形式