Contents

§ 1 一维随机变量的数字特征

随机变量的数学期望

1. 若X是离散型随机变量，分布列为$p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, ...)$，若级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对收敛，则称随机变量$X$的数学期望存在，并将级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$的和称为随机变量$X$的数学期望，记为$EX$, 即

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

若级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$绝对收敛，则称$Y = g(X)$的数学期望$E(g(X))$存在，且$E(g(X)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$

2. 若X是连续型随机变量，概率密度为$f(x)$, 若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛，则称随机变量$X$的数学期望存在，并将积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$的值称为随机变量$X$的数学期望，记为$EX$.

若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛，则称$Y = g(X)$的数学期望$E(g(X))$存在，且$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$

3. 性质
   - $Ea = a, E(EX) = EX$（常数的期望等于常数）
   - $E(aX + bY) = aEX + bEY$
   - 若X, Y相互独立，则$E(XY) = EXEY$

随机变量的方差，标准差

1. 设X是随机变量，若$E[(X - EX)^2]$存在，则称$E[(X - EX)^2]$为X的方差，记为DX, 即

$$DX = E[(X - EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2$$

称$\sqrt{DX}$为X的标准差或均方差，记为$\sigma(X)$，称随机变量$X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$为$X$的标准化随机变量，此时$EX^* = 0, DX^* = 1$

2. 性质
   - $DX \geq 0, E(X^2) = DX + (EX)^2 \geq (EX)^2$
   - $Dc = 0 \Leftrightarrow X$几乎出处为某个常数a, 即$P\{X = a\} = 1$
   - $D(aX + b) = a^2 DX$
   - $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2ab\ \mathrm{Cov}(X, Y)$,
     $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 DX_i + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
   - 若X, Y相互独立，则

     $$D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y),$$

     $$D(XY) = DXDY + DX(EX)^2 + DY(EX)^2 \geq DXDY$$
   - 对任意常数c，有$DX = E[(X - EX)^2] \leq E[(X - c)^2]$

常见分布的数学期望和方差

分布	分布列p_k或概率密度$f(x)$	数学期望	方差
$0-1$分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$	$EX=p$	$p(1-p)$
几何分布$G(p)$	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,...$	$EX=\frac{1}{p}$	$DX=\frac{1-p}{p^2}$
二项分布$B(n,p)$	$P\{X=k\}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i p^{i(1-p)^{n-i}},k=0,1,...,n$	$EX=np$	$DX=np(1-p)$
泊松分布$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,...$	$EX=\lambda$	$DX=\lambda$
均匀分布$U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a},a\le x\le b$	$EX=\frac{a+b}{2}$	$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布$E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x\ge 0$	$EX=\frac{1}{\lambda}$	$DX=\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in R$	$EX=\mu$	$DX=\sigma^2$

§2 二维随机变量数字特征

二维随机变量函数的数学期望

设X,Y是随机变量，$g(X,Y)$为X,Y的函数

1. 如果(X,Y)为离散型随机变量，其联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,j=1,2,...)$$

若级数$\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则定义

$$E[(g(X,Y))]\overset{Z=g(X,Y)}{=}EZ=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

2. 如果(X,Y)为连续型随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$, 若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$绝对收敛，则定义

$$E[(g(X,Y))]\overset{Z=g(X,Y)}{=}EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

两个随机变量的协方差与相关系数

若随机变量X,Y的方差存在且$DX>0,DY>0$,则称$E[(X-EX)(Y-EY)]$为随机变量X与Y的协方差，记为$\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EX\cdot EY$$

其中

$$E(XY)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{cases}$$

称$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$为随机变量$XY$的相关系数，若$\rho_{XY}=0$则称$X,Y$不相关

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)&=\mathrm{Cov}\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)\\&=\frac{\mathrm{Cov}(X-EX,Y-EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho_{XY}\end{aligned}$$

性质：

- $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
- $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\ \mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
- $|\rho_{XY}|\le 1$
- $\rho_{XY}=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$
- $\rho_{XY}=-1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$

§3 相关性与独立性

独立性与不相关性的判定

1. 若X,Y相互独立，则对任意实数x,y，事件$\{X\le x\},\{Y\le y\}$相互独立，$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

   若(X,Y)是离散型随机变量，则X,Y独立的充要条件是

   $$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$$

   若(X,Y)是连续型随机变量，则X,Y独立的充要条件是$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

2. 随机变量X,Y不相关，指X,Y之间不存在线性相依性，即$\rho_{XY}=0$,充要条件为：

   $$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$$

3. 几个重要结论
   - 若X,Y相互独立，则不相关，反之不然
   - 若X,Y服从二维正态分布，则X,Y独立$\Leftrightarrow X,Y$不相关
   - 若X,Y相关，则X,Y不独立

4. 判断过程：

   根据协方差判断相关性→根据分布推断独立性

切比雪夫不等式

若随机变量X的期望EX和方差DX存在，则对任意$\varepsilon>0$, 有

$$P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \text{ 或} P\{|X-EX| < \varepsilon\} \geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$