Contents

§ 1 事件的关系与运算

1. 包含：$A \subset B$
2. 相等：$A = B$
3. 积（交）：$A \cap B$或AB
4. 相容：$AB \neq \varnothing$
5. 互斥：$AB = \varnothing$
6. 和（并）：$A \cup B$
7. 差：$A - B$
8. 逆（对立）：$\bar{A}$

$$A - B = A - AB = A\bar{B}$$

$$B = \bar{A} \Leftrightarrow AB = \varnothing \text{ 且 } A \cup B = \Omega$$

完备事件组：若$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_iA_j = \varnothing,$称有限个（或可列个）事件$A_1, A_2, ..., A_n(...)$为完备事件组

运算

- 吸收律：若$A \subset B,$则$A \cup B = B, A \cap B = A$
- 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
- 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 对偶律（德摩根律）：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

§ 2 古典概型和几何概型

古典概型

1. 有限个样本点（基本事件）
2. 每个样本点发生的可能性相等

如果古典概型的基本总事件总数记为$n,$事件A包含k个基本事件，也叫作有利于A的基本事件有k个，则A的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

§ 3 概率性质与公式

性质

有界性：对于任意事件A, 有$0 \leq P(A) \leq 1$, 且$P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$.

单调性：设A, B是两个事件，若$A \subset B$, 则$P(A) \leq P(B), P(B - A) \leq P(B) - P(A)$.

公式

1. 逆概率事件公式：对于任意事件A, 有$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$.
2. 加法公式：对任意两个事件A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P\left(A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B\right) = P\left(A\bar{B}\right) + P(AB) + P\left(\bar{A}B\right)$$

1. 减法公式：$P(A - B) = P(A) - P(AB) = P\left(A\bar{B}\right)$
2. 条件概率公式：设A, B为任意两事件，若$P(A) > 0$, 我们称在已知事件A发生的条件下事件B发生的概率为条件概率，记为$P(B \mid A)$, 且

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

3. 乘法公式：如果 $P(A) > 0$, 则$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$

   一般地，对于$n > 2$, 如果$P(A_1A_2...A_n) > 0$, 则有

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)...P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1})$$

4. 全概率公式：若$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_iA_j = \varnothing(i \neq j, i, j = 1, 2, ..., n), P(A_i) > 0$, 则对任意事件$B$, 有

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_iB, P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

5. 贝叶斯公式（又叫逆概率公式）：如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_iA_j = \varnothing(i \neq j; i, j = 1, 2, ..., n), P(A_i) > 0$, 则对任意事件$B$, 有：

$$P\left(A_j \mid B\right) = \frac{P\left(A_j\right)P\left(B \mid A_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}(j = 1, 2, ..., n)$$

§ 4 事件独立性和独立重复实验

事件独立性

设A, B为两个事件，如果$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件A, B**相互独立**

表示两事件相互独立的其他形式：

- 若$P(A) > 0, P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$
- $P(A) = 0$且$AB \subset A$，则$0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$,故$P(AB) = 0$, 即$P(AB) = P(A)P(B)$依然成立

独立性判定

1. A,B相互独立$\Leftrightarrow A\bar{B}$相互独立$\Leftrightarrow \bar{A},B$相互独立$\Leftrightarrow \bar{A},\bar{B}$相互独立
2. 对独立事件组不含相同事件作运算，得到的新事件组仍独立
3. 若$P(A)=0$或$P(A)=1$, 则A与任意事件B相互独立

独立实验序列概型与n重伯努利概型