

Contents

§ 1 基本积分公式 ..... 2

§ 2 不定积分积分法 ..... 3

    凑微分 ..... 3

    换元法 ..... 3

    分部积分法 ..... 3

    有理函数积分 ..... 3

§ 3 定积分计算 ..... 4

    定积分的分部积分法 ..... 4

    Wallias 公式 ..... 4

$\Gamma$ 函数 ..... 4

## § 1 基本积分公式

$$1. \quad \int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, k \neq -1$$

$$2. \quad \int e^x dx = e^x + C, \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$3. \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$4. \quad \int \sin x dx = -\cos x + C; \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = \ln|\cos x| + C; \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C; \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C; \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x dx = \ln(|\csc x - \cot x|) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx = \ln(|\sec x + \tan x|) + C$$

$$5. \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, (a > 0)$$

$$6. \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, (a > 0)$$

$$7. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$8. \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, (a > 0)$$

$$9. \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$10. \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

## § 2 不定积分积分法

### 凑微分

$$\int f[g(x)]g'(x) dx = \int f[g(x)] dg(x) = \int f(u) du$$

### 换元法

1. 三角换元法:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin t, \sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan t, \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec t$$

2. 恒等变形后做三角代换:

被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 时, 化为

$$\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}, \sqrt{\varphi^2(x) - k^2}, \sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$$

再做三角代换

3. 根式代换法:

被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ ,  $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ,  $\sqrt{ae^{bx}+c}$ 时, 一般令 $\sqrt{*} = t$ , 若同时含有 $\sqrt[n]{ax+b}$ ,  $\sqrt[m]{ax+b}$ , 取 $m, n$ 最小公倍数 $l$ , 令 $\sqrt[l]{ax+b} = t$ , 再做根式代换法

1. 倒代换法:

被积函数分母次数比分子高两次及以上时, 令 $u = \frac{1}{x}$

### 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

推广有:

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx$$

### 有理函数积分

将有理函数拆成若干项最简有理分式之和 方法:

1. 分母一次单因式产生一项 $\frac{A}{ax+b}$
2. 分母 $k$ 重单因式产生 $k$ 项, 分别为 $\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \dots, \frac{A_k}{(ax+b)^k} (k > 0, k \neq 1)$
3. 分母二次单因式产生一项 $\frac{A}{ax^2+bx+c}$
4. 分母 $k$ 重二次单因式产生 $k$ 项, 分别为 $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \dots, \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} (k > 0, k \neq 1)$

三角有理式可用万能代换法:

$$t = \tan \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

## § 3 定积分计算

设函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

### 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u \mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) \mathrm{d}x$$

### Wallias 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, n \text{ 为大于1的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, n \text{ 为大于1的奇数} \\ 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, n \text{ 为正奇数} \\ 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, n \text{ 为正奇数} \\ 4 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

## $\Gamma$ 函数

1. Definition:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x, n > 0$$

2. 递推式:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \text{ 故 } \Gamma(n+1) = n!$$