Contents

§1 常见函数求导

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5. $(\operatorname{arccot}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
6. $(\sec\ x)' = \sec\ x \tan x$
7. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
8. $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

§2 一阶微分形式不变性

$$\mathrm{d}\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]\mathrm{d}[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)\mathrm{d}x$$

§3 反函数的导数

设$y = f(x)$为单调、可导函数，且$f'(x) \neq 0$，则存在反函数$x = \varphi(y)$, 且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$, 即$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

若求$\varphi''(y)$, 不能直接使用求导公式，应按照高阶微分的定义进行推导:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}y}$$

§4 隐函数求导

设函数$y = y(x)$是由方程$F(x, y) = 0$确定的可导函数，则：

1. 方程$F(x, y) = 0$两边对自变量x求导，将y看作中间变量，得到一个关于y'的方程
2. 解方程即可求出y'

§5 高阶导数

1. 数学归纳
2. 莱布尼茨公式：

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

3. 泰勒展开
    1. 任意一个任意阶可导的函数都可以写成：

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

    2. 根据泰勒展开唯一性，比较次数。

§6 参数方程

函数由

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定，则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$$