

## Contents

§ 1 表达与计算图形面积 .....	2
曲线 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 及 $x = a, x = b(a < b)$ 围成的面积 .....	2
曲线 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$ 所围成的曲边扇形面积 .....	2
§ 2 表达和计算旋转体体积 .....	2
曲线 $y = y(x)$ 及 $x = a, x = b(a < b)$ 围成的区域绕 $x$ 轴旋转所成的旋转体体积 .....	2
曲线 $y = y(x)$ 及 $x = a, x = b(a < b)$ 围成的区域绕 $y$ 轴旋转所成的旋转体体积 .....	2
平面曲线绕定直线旋转 .....	2
§ 3 用定积分表达和计算函数平均值 .....	2
§ 4 其他几何应用 .....	3
曲边梯形形心 .....	3
平面曲线的弧长 .....	3
旋转曲面的侧面积 .....	3

## § 1 表达与计算图形面积

曲线 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 及 $x = a, x = b(a < b)$ 围成的面积

$$S = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

曲线 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$ 所围成的曲边扇形面积

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} r_2(\theta) \cdot r_2(\theta) d\theta - \frac{1}{2} r_1(\theta) \cdot r_1(\theta) d\theta = \frac{1}{2} |r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)| d\theta$$

## § 2 表达和计算旋转体体积

曲线 $y = y(x)$ 及 $x = a, x = b(a < b)$ 围成的区域绕 $x$ 轴旋转所成的旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi y^2(x) dx$$

曲线 $y = y(x)$ 及 $x = a, x = b(a < b)$ 围成的区域绕 $y$ 轴旋转所成的旋转体体积

$$V_y = 2\pi \int_a^b x|y| dx$$

平面曲线绕定直线旋转

平面曲线 $L: y = f(x), a \leq x \leq b$ , 且 $f(x)$ 可导

定直线 $L_0: Ax + By + C = 0$ 且过 $L_0$ 的任意一条垂线与 $L$ 至多有一个交点

$$V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C]^2 |Af'(x) - B| dx$$

## § 3 用定积分表达和计算函数平均值

设 $x \in [a, b]$ , 函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值为 $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx \Rightarrow \bar{y} = y(\xi), \xi \in [a, b]$

## § 4 其他几何应用

### 曲边梯形形心

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f^2(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}$$

### 平面曲线的弧长

1. 直角坐标  $y = y(x) (a \leq x \leq b)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx$$

2. 极坐标  $r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} \, d\theta$$

3. 参数方程  $x = x(t), y = y(t) (t_0 \leq t \leq t_1)$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$$

### 旋转曲面的侧面积

1. 直角坐标  $y = y(x) (a \leq x \leq b)$

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + [y'_x]^2} \, dx$$

2. 极坐标  $r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r^2(\theta) \sin \theta| \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} \, d\theta$$

3. 参数方程  $x = x(t), y = y(t) (t_0 \leq t \leq t_1)$

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$$