Contents

§1 表达与计算图形面积 . . . 2
曲线$y = y_1(x)$与$y = y_2(x)$及$x = a, x = b(a < b)$围成的面积 . . . 2
曲线$r = r_1(\theta)$与$r = r_2(\theta)$与射线$\theta = \alpha, \theta = \beta(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$所围成的曲边扇形面积 . . . 2
§2 表达和计算旋转体体积 . . . 2
曲线$y = y(x)$及$x = a, x = b(a < b)$围成的区域绕x轴旋转所成的旋转体体积 . . . 2
曲线$y = y(x)$及$x = a, x = b(a < b)$围成的区域绕y轴旋转所成的旋转体体积 . . . 2
平面曲线绕定直线旋转 . . . 2
§3 用定积分表达和计算函数平均值 . . . 2
§4 其他几何应用 . . . 3
曲边梯形形心 . . . 3
平面曲线的弧长 . . . 3
旋转曲面的侧面积 . . . 3

§1 表达与计算图形面积

曲线$y=y_1(x)$与$y=y_2(x)$及$x=a,x=b(a<b)$围成的面积

$$S=\int_a^b |y_1(x)-y_2(x)|\,\mathrm{d}x$$

曲线$r=r_1(\theta)$与$r=r_2(\theta)$与射线$\theta=\alpha,\theta=\beta(0<\beta-\alpha\le 2\pi)$所围成的曲边扇形面积

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)\right|\mathrm{d}\theta$$

$$\Delta S=\frac{1}{2}r_2(\theta)\cdot r_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}r_1(\theta)\cdot r_1(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left|r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right|\mathrm{d}\theta$$

§2 表达和计算旋转体体积

曲线$y=y(x)$及$x=a,x=b(a<b)$围成的区域绕x轴旋转所成的旋转体体积

$$V_x=\int_a^b \pi y^2(x)\,\mathrm{d}x$$

曲线$y=y(x)$及$x=a,x=b(a<b)$围成的区域绕y轴旋转所成的旋转体体积

$$V_y=2\pi\int_a^b x|y|\,\mathrm{d}x$$

平面曲线绕定直线旋转

平面曲线$L:y=f(x),a\le x\le b$,且$f(x)$可导

定直线$L_0:Ax+By+C=0$且过L_0的任意一条垂线与L至多有一个交点

$$V=\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b [Ax+Bf(x)+C]^2|Af'(x)-B|\,\mathrm{d}x$$

§3 用定积分表达和计算函数平均值

设$x\in[a,b]$，函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的平均值为$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\bar{y}=y(\xi),\xi\in[a,b]$

§4 其他几何应用

曲边梯形形心

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

平面曲线的弧长

1. 直角坐标$y = y(x)(a \le x \le b)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

2. 极坐标$r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

3. 参数方程$x = x(t), y = y(t)(t_0 \le t \le t_1)$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

旋转曲面的侧面积

1. 直角坐标$y = y(x)(a \le x \le b)$

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + [y'_x]^2}\,\mathrm{d}x$$

2. 极坐标$r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \left|r^2(\theta)\sin\theta\right| \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

3. 参数方程$x = x(t), y = y(t)(t_0 \le t \le t_1)$

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$