Contents

§1 函数

函数有界性

1. 若$f(x)$在(a,b)内为连续函数，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$都存在，则$f(x)$在区间$(a,b)$内有界.
2. 有界函数与有界函数的和、差、积仍然是有界函数.

§2 极限

极限的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任意给定的$\varepsilon > 0$，总存在正数δ，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，对应的函数值$f(x)$满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$，那么就称常数A是函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \text{或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

写成“$\varepsilon - \delta$语言”：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,$当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

极限运算

先实数运算再极限运算，实数系$\mathbb{R}$中不存在非零无穷小量与无穷大量

极限四则运算

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B$，则:

1. $$\lim_{x \to x_0} [kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$,特别地,若 $\lim f(x)$存在,n 正整数,则
$$\lim [f(x)]^n = \lim f(x) \cdot f(x) ... f(x) = [\lim f(x)]^n$$
3. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$$

极限性质

1. 唯一性
可用反证法+三角不等式证明
2. 局部有界性
若$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有界，则 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
3. 局部保号性
若函数$f(x) \to A(x - x_0)$且$A > 0$(或 $A < 0$), 那么存在常数$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$). 如果在x_0的某去心邻域内$f(x) \geq 0$(或 $f(x) \leq 0$) 且 $\lim_{X \to x_0} = A$，则$A \geq 0$或$A \leq 0$.

§3 无穷小

无穷小定义

设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\left(或 \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\right)$，那么称函数$f(x)$是当$x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小. 记为:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\left(或 \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\right)$$

无穷小性质

1. 有界函数与无穷小的乘积仍然是无穷小
2. 有限个无穷小的和是无穷小
3. 有限个无穷小的乘积是无穷小

无穷小比阶

1. 若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为$\alpha(x) = o(\beta(x))$
2. 若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c, c \neq 0$, 则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$ 是同阶无穷小, 记为$\alpha(x) \sim \beta(x)$
3. 若$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小
存在无法比阶的无穷小

常用等价无穷小

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1 + x) \sim x, e^x - 1 \sim x,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^a-1\sim ax,x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

无穷小运算

设 m, n 为正整数，则：

1. $$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l\geq\min\{m,n\}$$
2. $$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$$
3. $$o(x^m)=o(kx^m)=ko(x^m),k\neq 0$$

§4 无穷大

无穷大定义

设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，如果对于任意正数M，总存在正数δ，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$满足不等式$|f(x)|>M$，那么称函数$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷大. 记为:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$$

§5 泰勒公式

设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内具有n阶导数，那么对于这个邻域内的任意x，有:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}+o(x^n)\qquad o(x^n)\text{为皮亚诺余项}$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\qquad\text{带有拉格朗日余项的泰勒展开},\xi\text{介于}x\text{ 和 }x_0\text{之间}$$

常用泰勒公式

1. $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$
2. $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$
3. $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$
4. $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$
5. $$(1+x)^a=1+ax+a(a-1)\frac{x^2}{2!}+...+a(a-1)...(a-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$
6. $$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$
7. $$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

8. $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

简化为：

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^2)$$
5. $$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + o(x^2)$$
6. $$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
7. $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
8. $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

§6 连续与间断

连续定义

设函数$f(x)$在x_0的某一邻域内有定义，且有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续。

设$f(x)$在点x_0处连续，且$f(x_0) > 0$，则存在$\delta > 0$，使得当$|x - x_0|$时，$f(x) > 0$

间断定义与分类

1. 可去间断点
   若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$或$f(x_0)$无定义，则称$x = x_0$为可去间断点。
2. 跳跃间断点
   若$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A^+, \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A^-$且$A^+ \neq A^-$，则称$x = x_0$为跳跃间断点。
3. 无穷间断点
   若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$或$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \infty$则称$x = x_0$为无穷间断点。
4. 震荡间断点
   若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$震荡不存在，则称$x = x_0$为震荡间断点。

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点，无穷间断点和震荡间断点属于第二类间断点