Contents

§1 概念

微分方程及其阶

表示含有未知函数及其导数（或微分）与自变量之间关系的方程称为微分方程。一般写成

$$F\left[x, y, y', y'', ...y^{(n)}\right] = f\left[x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right]$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

常微分方程

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程。

线性微分方程

形如$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0 y = f(x)$的微分方程称为$n$阶线性微分方程，其中$a_k(x)(k = 0, 1, 2, ..., n)$都是自变量$x$的函数，$a_k(x) \not\equiv 0$.当$a_k(x)$都是常数时，又称为$n$阶常系数线性微分方程，若$f(x) \equiv 0$，则称为$n$齐次线性微分方程，否则称为$n$阶非齐次线性微分方程。

微分方程的解

若将函数带入微分方程，使之成为恒等式，则称该函数为微分方程的解。微分方程的图形称为积分曲线。

微分方程的通解

若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数，则称该解为微分方程的通解。

初始条件与特解

确定通解中常数的条件就是初始条件，确定了通解中的常数后，解就成了特解。

§2 一阶微分方程的求解

分离变量

1. 可直接分离
2. 换元后可分离

齐次型微分方程

形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的方程叫做齐次型微分方程，其解法为令$u = \frac{y}{x}$, 则$y = ux \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 于是原方程变为$u + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$，即$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

一阶线性微分方程

形如$y' + p(x)y = q(x)$的方程称为一阶线性微分方程，其中$p(x), q(x)$是已知的连续函数，其通解为

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \cdot q(x)\,\mathrm{d}x + C\right]$$

伯努利方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n,(n\neq 0,1)$$

的 v 方程叫做伯努利方程，其中$p(x),q(x)$是已知的连续函数，n是常数。其解法为

1. 先变形为$y^{-n}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-n}=q(x)$
2. 令$z=y^{1-n}$,得$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x)$
3. 解一阶线性微分方程

二阶可降阶微分方程

1. $y''=f(x,y')$型（方程中不显含未知函数y'）
    1. 令$y'=p,y''=p'$,则原方程变为一阶方程$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$
    2. 若求得通解$p=\varphi(x,C_1)$, 即 $y'=\varphi(x,C_1)$,则原方程通解为$y=\int\varphi(x,C_1)\,\mathrm{d}x+C_2$
2. $y''=f(y,y')$型（方程中不显含自变量x'）
    1. 令$y'=p,y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$则原方程变为一阶方程$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$
    2. 若求得通解$p=\varphi(y,C_1)$, 则由$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$, 分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$
    3. 两边积分得$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$
3. $y''=f(y')$型，按 1 方法。

全微分方程

若函数$P(x,y),Q(x,y)$在单连通区域D上具有一阶连续偏导数，且在D内满足

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$是某二元函数$u(x,y)$的全微分。若一阶微分方程写成

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

的形式时，等式左端表达式是$u(x,y)$的全微分，则称上式为全微分方程。

§3 高阶线性微分方程的求解

二阶常系数齐次微分方程

1. 概念

   方程$y''+py'+qy=0$称为二阶常系数齐次线性微分方程，其中p,q是常数。
2. 解的结构

   若$y_1(x),y_2(x)$是$y''+py'+qy=0$的两个解，且$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq C$，则$y_1(x),y_2(x)$线性无关，且$y_1(x),y_2(x)$的线性组合$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是$y''+py'+qy=0$的解。
3. 通解

   对于$y''+py'+qy=0$, 其对应的特征方程为$r^2+pr+q=0$.
    1. 若$p^2-4q>0$,设r_1,r_2是特征方程的两个不等实根，即$r_1\neq r_2$,可得通解为：

    $$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

    2. 若$p^2-4q=0$,设$r_1=r_2=r$是特征方程的重根，可得通解为：

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$$

3. 若$p^2-4q<0$,设r_1,r_2是特征方程的两个共轭复根，即$r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$,可得通解为：

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

二阶常系数非齐次线性微分方程

1. 概念
   方程$y''+py'+qy=f(x),(f(x)\not\equiv 0)$称为二阶常系数非齐次线性微分方程，其中$p,q$是常数，$f(x)$是已知的连续函数,称为自由项。
2. 解的结构
   1. 若$y_1^*(x)$是$y''+py'+qy=f_1(x)$的解，$y_2^*(x)$是$y''(x)+py'+qy=f_2(x)$的解，则$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$的解。
   2. 设$y_1^*(x),y_2^*(x)$都是$y''+py'+qy=f(x)$的解，则$y_1^*(x)-y_2^*(x)$是对应齐次方程的的解
3. 特解的设定
   设$P_n(x),P_m(x)$分别是x 的 n,m次多项式。
   1. 当自由项$f(x)=P_{n(x)}e^{\alpha x}$时，特解设为$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$, 其中

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄} \\ Q_n(x)\text{为}x\text{ 的 }n\text{次多项式} \\ k=\begin{cases}0,\alpha\text{ 不是特征根}\\1,\alpha\text{ 是特征根}\\2,\alpha\text{ 是重特征根}\end{cases}\end{cases}$$

   2. 当自由项$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$,时，特解设为

$$y^*=e^{\alpha x}\left[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]x^k,$$

      其中

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄} \\ l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为}x\text{的两个不同的}l\text{次多项式} \\ k=\begin{cases}0,\alpha+\beta i\text{不是特征根}\\1,\alpha+\beta i\text{是特征根}\end{cases}\end{cases}$$

4. D算子求特解：

$n(n>2)$阶常系数微分方程

1. 若r为单实根，写Ce^{rx}
2. 若r为k重实根，写

$$(C_1+C_2x+...+C_kx^{k-1})e^{rx}$$

3. 若r为单复根$\alpha+\beta i$，写

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

4. 若r为二重复根$\alpha+\beta i$，写

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3x\cos\beta x+C_4x\sin\beta x)$$

能写成$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$形式的微分方程（欧拉方程）

形如$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$的微分方程称为欧拉方程。

1. 当$x>0$时，令$x=e^t$，则$t=\ln x$，$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{dt}^2}$$

则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}+qy=f(e^t)$$

2. 当$x<0$时，令$x=-e^t$，同理可得