Contents

§1 特征值与特征向量的定义

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，λ是一个数，如果存在非零向量$\boldsymbol{\xi}$使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$$

则称λ是$\boldsymbol{A}$的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}$是对应于λ的特征向量。

§2 特征值、特征向量的性质与重要结论

特征值的性质与重要结论

1. λ_0是$\boldsymbol{A}$的特征值$\Leftrightarrow |\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$；$\lambda_0$不是$\boldsymbol{A}$的特征值$\Leftrightarrow |\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$

2. 若$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值，则

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n\end{cases}$$

特征值、特征向量的性质与重要结论

1. $\boldsymbol{\xi}(\neq 0)$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量$\Leftrightarrow \boldsymbol{\xi}$是$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$的非零解

2. k重特征值最多只有k个线性无关的特征向量

3. 若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性无关

4. 若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是$A$的属于同一特征值$\lambda$的特征向量，则$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$仍是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda$的特征向量（$k_1,k_2$为任意常数）

5. 若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，则当$k_1\neq 0, k_2\neq 0$时，$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$不是$\boldsymbol{A}$的任何特征值的特征向量

6. 设λ_1,λ_2是$\boldsymbol{A}$的两个不同特征值，$\boldsymbol{\xi}$是对应于λ_1的特征向量，则$\boldsymbol{\xi}$不是对应于λ_2的特征向量

常用矩阵的特征值与特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ
对应的特征向量	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$

§3 矩阵相似

定义

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n$阶方阵，如果存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，记作$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

相似矩阵性质

若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则:

1. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

2. $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

3. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$

4. $\lambda_A=\lambda_B$

5. $r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$

6. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$各阶主子式之和分别相等

重要结论

1. 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{A}^k\sim\boldsymbol{B}^k$, $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$
2. 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$且$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$
3. 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$
4. 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$则$\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\sim\boldsymbol{B}^\mathsf{T}$
5. 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{D}$,则$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$

相似的判别与证明

1. 定义法：若存在可逆矩阵P, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$
2. 传递性：若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$, 则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$

§4 矩阵相似对角化

定义

设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，若存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 其中$\boldsymbol{\Lambda}$是对角矩阵，则$\boldsymbol{A}$可相似对角化，记$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,称$\boldsymbol{\Lambda}$是$\boldsymbol{A}$的相似标准形。

矩阵可相似对角化的条件

由定义可知，若$\boldsymbol{A}$可相似对角化，在$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$两端同时左乘$\boldsymbol{P}$, 有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可相似对角化$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$对应与每个k_i重特征值都有k_i个线性无关的特征向量

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个不同特征值$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$可相似对角化

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$可相似对角化

求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$

已知$\boldsymbol{A}$可相似对角化的条件下

1. 求$\boldsymbol{A}$的特征值
2. 求$\boldsymbol{A}$的对应于特征值的特征向量
3. $$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_n]\text{则}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$中特征向量$\boldsymbol{\xi}_i$的顺序可以任意，但特征值λ_i的顺序必须与$\boldsymbol{\xi}_i$对应，即λ_i是$\boldsymbol{\xi}_i$对应的特征值。

由特征值、特征向量反求$\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$$

求$\boldsymbol{A}^k, f(\boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

§5 实对称矩阵的相似对角化

实对称矩阵性质

1. 实对称矩阵的特征值都是实数，特征向量是实向量
2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交
3. 对于任意n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$, 存在n阶正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

实对称矩阵相似对角化基本步骤

1. 求特征值
2. 求特征值对应的特征向量
3. 正交化，单位化得$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta_2},...,\boldsymbol{\eta}_n$
4. 令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta_2},...,\boldsymbol{\eta}_n]$, 则$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$

施密特正交化公式

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关但不正交，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$