Contents

§1 随机变量的及其分布函数的概念、性质及应用

分布函数的概念及性质

1. 概念

   设X是随机变量，x是任意实数，称函数$F(x)=P\{X\leq x\}(x\in\mathbb{R})$为随机变量$X$的分布函数，或称$X$服从$F(x)$分布，记为$X\sim F(x)$

2. 性质

   - $F(x)$是x的单调不减函数，即对任意实数$x_1<x_2$,有$F(x_1)\leq F(x_2)$
   - $F(x)$是x的右连续函数，即对任意实数x，有$\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0+0)=F(x_0)$
   - $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

分布函数的应用——求概率

- $P\{X\leq a\}=F(a)$
- $P\{X<a\}=F(a-0)$
- $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$
- $P\{a<X<b\}=F(b-0)-F(a)$
- $P\{a\leq X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$
- $P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)$
- $P\{a\leq X\leq b\}=F(b)-F(a-0)$

§2 常见的两类随机变量——离散型随机变量与连续型随机变量

离散型随机变量及其概率分布

如果随机变量X只可能取有限个或可列无限个值$x_1,x_2,...$,则称X为**离散型随机变量**，称

$$P\{X=x_i\}=p_i,i=1,2,...$$

为X的**分布列**、**分布律或概率分布**，记为$X\sim p_i$,概率分布常用表格或矩阵形式表示

数列$\{p_i\}$是离散型随机变量的概率分布的充要条件是：$p_i\geq 0(i=1,2,...)$且$\sum\limits_i p_i=1$

设离散型随机变量X的的概率分布为$P\{X=x_i\}=p_i$,则X的分布函数

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_i\leq x}P\{X=x_i\}$$

$$P\{X=x_i\}=P\{X\leq x_i\}-P\{X<x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0)$$

且对实数轴上任一集合B, 有

$$P\{x \in B\} = \sum_{x_i \in B} p_i$$

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a)$$

连续型随机变量及其概率密度

若随机变量X的分布函数可以表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

其中$f(x)$是非负可积函数，则称X为**连续型随机变量**，称$f(x)$为X的**概率密度函数**，记为$X \sim f(x)$

$f(x)$为某一随机变量X的的概率密度的充要条件是：$f(x) \geq 0$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

设X为连续型随机变量$X \sim f(x)$, 则对任意实数c, 有$P\{X = c\} = 0$, 对实数轴上任一集合B, 有

$$P\{X \in B\} = \int_{B} f(x)\,\mathrm{d}x$$

对任意实数a, b, 有

$$P\{a < X \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

§ 3 常见的随机变量分布类型

离散型

1. $0-1$分布$B(1,p)(Ber-E_1)$

   $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$,即$P\{X=1\} = p, P\{X=0\} = 1-p$, 则称$X$服从参数$p$的$0-1$分布，记为$X \sim B(1,p)$

2. 二项分布$B(n,p)(Ber-E_n)$

   X的概率分布为$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, ..., n; 0 < p < 1)$称$X$服从参数$(n,p)$的二项分布，记为$X \sim B(n,p)$

3. 泊松分布$P(\lambda)$

   X的概率分布为

   $$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, ...; \lambda > 0)$$

   则称X服从参数为λ的泊松分布，记为$X \sim P(\lambda)$，λ为期望

4. 几何分布$G(p)(Ber-E_\infty)$

   X的概率分布为

   $$P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1} (k = 1, 2, ...; 0 < p < 1)$$

则称X服从参数为p的几何分布，记为$X \sim G(p)$

5. 超几何分布$H(N,M,n)$

    X的概率分布为$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(\max\{0,n-N+M\} \le k \le \min\{M,n\}; M,N,$ n为正整 数 且$M \le N, n \le N, k$为正整数)则称X服从参数为(N,M,n)的超几何分布，记为$X \sim H(N,M,n)$

连续型

1. 均匀分布$U(a,b)$

    X的概率密度和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & (a \le x \le b; a<b) \\ 0 & \text{其他}\end{cases}, F(x)=\begin{cases}0 & \text{if } \ x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } \ a \le x<b \\ 1 & \text{if } \ x \ge b\end{cases}$$

    则称X服从参数为(a,b)的均匀分布，记为$X \sim U(a,b)$

2. 指数分布$E(\lambda)$

    X的概率密度和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x \ge 0; \lambda>0) \\ 0 & \text{其他}\end{cases} F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{if } \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{if } \quad x<0\end{cases}$$

    则称X服从参数为λ的指数分布，记为$X \sim E(\lambda)$

3. 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

    X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\sigma>0)$$

    则称X服从参数为(μ,σ^2)的正态分布，记为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

    $\mu=0, \sigma=1$时的正态分布为**标准正态分布**，概率密度为$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, 分布函数为$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$, 显然$\varphi(x)$为偶函数，$\Phi(-x)=1-\Phi(x), \Phi(0)=\frac{1}{2}$

    若$X \sim N(0,1), P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$, 则称$\mu_\alpha$为标准正态分布的**上侧$\alpha$分位数**

    若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$F(x)=P\{X<x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(\mu-x)+F(\mu+x)=1$$

$$P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)(a \neq 0)$$

§4 一维随机变量函数的分布

概念

设X为随机变量，函数$y=g(x)$, 则以随机变量X作为自变量的函数$Y=g(X)$也是随机变量，称为**随机变量X**的函数

随机变量函数的分布