Contents

§1 定义 2
§2 性质 2
§3 行列式展开 2
    余子式 2
    代数余子式 2
    行列式按某一行（列）展开的展开公式 2
§4 几个重要的行列式 3
    主对角线行列式（上/下）三角行列式 3
    副对角线行列式 3
    拉普拉斯展开式 3
    范德蒙行列式 3
    其他 3
§5 余子式与代数余子式的线性组合计算 3
§6 克拉默法则 3

§1 定义

$n(n \geq 3)$阶行列式是由 n 个 n 维向量$\boldsymbol{\alpha_1} = [a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}], \boldsymbol{\alpha_2} = [a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}], ..., \boldsymbol{\alpha_n} = [a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}]$组成的，其结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积

§2 性质

1. 行列互换，行列式的值不变，即$|\boldsymbol{A}| = \left|\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right|$
2. 若行列式中某一行或某一列元素全为 0，则行列式值为 0
3. 若行列式某行或某列元素均有公因子k, 则可提出k
4. 若行列式某行或某列元素均是两数之和，则可拆成两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 行列式两行或两列互换，行列式的值变号
6. 行列式两行（列）元素相等或对应成比例，则行列式值为 0
7. 行列式中某行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，行列式的值不变

§3 行列式展开

余子式

$\boldsymbol{M}_{ij}$是行列式$\boldsymbol{M}$中去掉第i行和第j列后剩下的行列式

代数余子式

$\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$

行列式按某一行（列）展开的展开公式

行列式等于行列式的某一行（列）元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(i = 1, 2, ..., n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(j = 1, 2, ..., n) \end{cases}$$

行列式的某一行（列）元素分别乘另一行（列）元素的代数余子式后再求和，结果为零

§4 几个重要的行列式

主对角线行列式（上/下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$$

拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$分别为$m, n$阶矩阵

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

其他

$|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$

§5 余子式与代数余子式的线性组合计算

§6 克拉默法则

1. 对n个方程n个未知数的非齐次线性方程组若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

   则方程组有唯一解，且解为

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, ..., n$$

D_i是常数项$b_1, b_2, ..., b_n$替换D第i列后的行列式. 若$D = 0$, 则该方程组无解或有无穷多解

2. 对n个方程n个未知数的齐次线性方程组若系数行列式$D \neq 0$, 则该方程组只有零解，若$D = 0$, 则齐次方程组有非零解