Inledning

Målsättningen med laborationen är att du ska få förståelse för några av de metoder som vi har tagit upp i kursen samt att du ska träna upp dina färdigheter i att skapa effektiva MATLAB-program som löser ett givet problem.

Innan du börjar med LAB 1 behöver du ha kunskap om

- Minstakvadratmetoden
- Interpolation
- Numerisk lösning av icke-linjära ekvationer och ekvationssystem

Innan du börjar med laborationen rekommenderar vi att du bekantar dig med MATLAB genom MATLAB GRADER eller online-kursen MATLAB ONRAMP. Se kursens Canvassida om Laborationerna.

Redovisning

Redovisningen kommer att ske i form av ett individuellt datorprov med en quiz i Canvas. Vid datorprovet kommer ni ha tillgång till Matlab och de MATLAB-program som ni har skickat in och som löser uppgifterna 1-3. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Ni kommer att ha 60 minuter på er (90 minuter för er med förlängd skrivtid). Detaljer om hur provet går till finns i Canvas.

Provet kommer att bestå av tre teoretiska frågor och två praktiska uppgifter.

Teorifrågorna kommer att vara flervalsfrågor och handlar om de metoder och koncept som tas upp i laborationen.

Praktiska uppgifterna kommer vara av typen att göra någon modifikation av den kod ni skrivit för att lösa uppgifterna i laborationen. För att kunna göra uppgifterna på provet snabbt och enkelt, se till att koden ni har implementerat för laborationsuppgifterna är skriven så generellt att det är lätt att ändra saker i koden.

De praktiska uppgifterna kan vara av typen:

- Givet data, anpassa en given modell med minstakvadratmetoden.
- Hitta nollstället till en funktion $f(x)$ med Newtons metod eller sekantmetoden eller till ett system $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ med Newtons metod.
- Bestäm koefficienter i ett polynom som ska gå genom ett givet antal punkter.
- Ändra något i de redan lösta labbuppgifterna och besvara en fråga.

Katarina Gustavsson

1. Temperaturen i Stockholm - minstakvadratmetoden

Du har fått en fil `STHLMTEMP.mat` (finns att ladda ner från Canvas) med uppmätta dygnsmedeltemperaturer (i grader) varje dag från 1 januari 1756 kl till 31 december 2024. Data kommer från SMHIs mätstation vid Observatorielunden i Stockholm och är en av världens längsta temperaturmätserier.

Här kan du läsa mer om mätserien:

`https://bolin.su.se/data/stockholm-historical-daily-temperature-2?n=stockholm-historical-temps-daily-2`

Nu ska du anpassa den givna temperaturdatan med hjälp av minstakvadratmetoden till olika modeller.

UPPGIFT 1. MINSTAKVADRATMETODEN

Börja gärna med att lösa uppgifterna F1 och F2 i MATLAB GRADER *under Laboration 1 - Förberedande uppgifter.*

a) Skriv ett MATLAB-program `MKV.m` som anpassar de uppmätta temperaturerna till modellen

$$T(t) = c_0 + c_1 \sin(kt) + c_2 \cos(kt) + c_3 \sin(2kt) + c_4 \cos(2kt) \tag{1}$$

där $k = 2\pi/365$, t är tiden i dygn och T är temperaturen i grader.

Börja med att ladda ner och spara filen `STHLMTEMP.mat` i samma mapp som du har ditt program `MKV.m`. För att läsa in den data som finns i filen skriver du `load STHLMTEMP` i början av ditt program. Datafilen innehåller en vektor `Tdm` med alla uppmätta dygnsmedeltemperaturer under den aktuella perioden.

Anpassa modellen (1) med minstakvadratmetoden till den temperaturdata som finns i filen `STHLMTEMP.mat`.

Skriv ut koefficienterna på skärmen. Plotta data och den anpassade modellen (1) i samma figur. Ser anpassningen bra ut?

b) Beräkna och skriv ut minstakvadratsumman samt plotta residualen $T_{dm} - T_{mod}$ mot tiden. Här är T_{dm} givna temperaturdata som finns i filen `STHLMTEMP.mat` och T_{mod} är motsvarande temperaturvärden beräknat med modellen (1). I plotten kan du se att residualen ökar något med tiden. Det betyder att vi kan förbättra modellen (1) genom att lägga till termer som tar hänsyn till ökningen.

c) Utöka modellen till

$$T(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 \sin(kt) + a_4 \cos(kt) + a_5 \sin(2kt) + a_6 \cos(2kt) \tag{2}$$

och gör en anpassning av data till modellen (2). Skriv ut koefficienterna. Plotta data och den anpassade modellen (2) i samma figur.

d) Beräkna och skriv ut minstakvadratsumman samt plotta residualen $T_{dm} - T_{mod}$ mot tiden på samma sätt som i b). Ser du någon skillnad i värdet på minstakvadratsumman och i plotten jämfört med b)?

e) Studera den anpassade modellen (2). Kan du se någon långsiktigt ökning eller minskning av dygnsmedeltemperaturen under perioden 1756-2024? Kan du se om ökningen eller minskningen är konstant över tiden eller om den ökar eller minskar plötsligt?

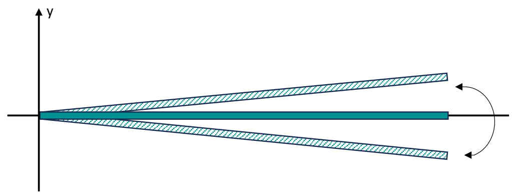
Skicka in programmet `MKV.m`

2. Svängande balk

Rörelsen hos en svängande balk, se Figur 1, kan beskrivas av följande ekvation för dämpad svängning

$$y(t) = 8e^{-\frac{t}{2}} \cos(3t)$$

där y är förskjutningen från jämviktsläget ($y = 0$) och t är tiden.



Figur 1: Balk som svänger kring sitt jämviktstillstånd

UPPGIFT 2. NUMERISK LÖSNING AV OLINJÄR EKVATION

Börja gärna med att lösa uppgifterna F3 och F4 i MATLAB GRADER *under Laboration 1 - Förberedande uppgifter.*

Nu vill man ta reda på den sista tidpunkten (kalla denna T) då balkens positiva förskjutning från jämviktsläget blir lika med ett givet värde H. Skriv ett MATLAB-program `Balk.m` som löser uppgifterna nedan.

a) Låt $H = 0.5$ och bestäm tidpunkten T med Newtons metod. Felet i tidpunkten ska vara mindre än 10^{-8}. Vilket startvärde har använts? Hur många iterationer krävdes och vad blev resultatet?

b) Bestäm tidpunkten T (för samma värde på H) med sekantmetoden. Felet i tidpunkten ska vara mindre än 10^{-8}. Vilka startvärden har använts? Hur många iterationer krävdes och vad blev resultatet? Behövs det fler eller färre steg med sekantmetoden för att nå ett fel som är mindre än 10^{-8} än med Newtons metod? Varför är det på det ena eller andra sättet?

c) Jämför konvergenshastigheten för de två metoderna genom att plotta $|t_{n+1} - t_n|$ som funktion av n för bägge metoderna i samma figur. Använd `semilogy` för att få en log-skala på t-axeln.

d) Låt nu $H = 2.8464405473$ och bestäm tidpunkten T med Newtons metod. Studera konvergenshastighet och känsligheten vad gäller val av startgissning. Vad beror förändringen jämfört med **a)** på?

Skicka in programmet `Balk.m`

3. Att anlägga en väg

Man vill anlägga en väg från P_0 till P_4. Men eftersom marken inom det streckade området inte är lämpligt som underlag för en väg måste vägsträckningen gå runt området, se Figur 1.

Uppgiften går ut på att bestämma en vägsträckning som går genom punkterna P_0, P_1, P_2, P_3 och P_4, se Figur 2 a).

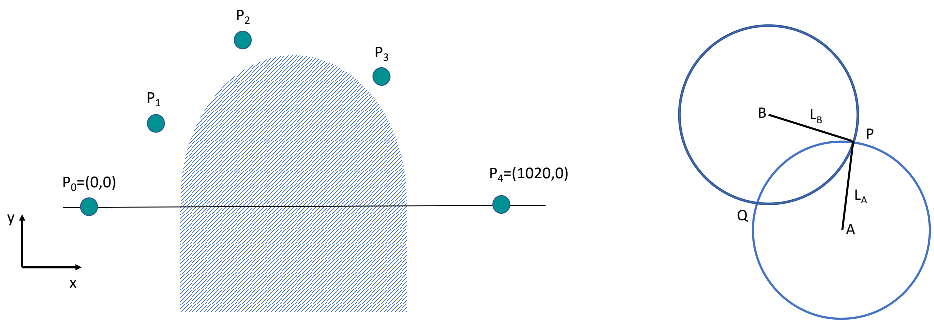
Koordinaterna för $P_0 = (0, 0)$ och för $P_4 = (1020, 0)$ är kända men koordinaterna för punkterna P_1, P_2 och P_3 måste bestämmas.

Att bestämma koordinaterna - Inbindning

För att bestämma koordinaterna för en punkt P mäter man avstånden från $P = (x_P, y_P)$ till två punkter med kända koordinater, $A = (x_A, y_A)$ och $B = (x_B, y_B)$.

Om vi kallar avstånden mellan P och A och P och B för L_A respektive L_B så får vi följande ekvationssystem att lösa för x_p och y_p.

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = L_A^2 \tag{3}$$
$$(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 = L_B^2. \tag{4}$$



(a) Skiss av vägbygget.

(b) Bestämning av koordinater för punkten P med inbindning

Figur 2: Vägbygge

Ekvationerna (3) och (4) beskriver två cirklar med centrum i A och B och med radier som ges av L_A och L_B, se Figur 2 b).

Detta sätt att bestämma en punkts okända koordinater kallas inom geodesin för inbindning och är det som satellitnavigeringssystemet GPS utnyttjar.

Notera att ekvationssystemet kommer att ha två lösningar (skärningspunkter) eftersom det finns två punkter, P och Q, som båda ligger på samma avstånd från punkterna A och B. I vårt fall är det punkten P, det vill säga den högra skärningspunkten vi är intresserade av.

I tabellen nedan finns punkter A och B med kända koordinater samt uppmätta avstånd mellan A och P och B och P för punkterna P_1, P_2 och P_3.

Koordinaterna är angivna i meter från punkten $(0, 0)$.

P	$A = (x_A, y_A)$	$B = (x_B, y_B)$	L_A [m]	L_B [m]
P_1	(175, 950)	(160, 1008)	60	45
P_2	(410, 2400)	(381, 2500)	75	88
P_3	(675, 1730)	(656, 1760)	42	57

UPPGIFT 3. NEWTON FÖR SYSTEM OCH INTERPOLATION

Börja gärna med att lösa uppgiften F5 i MATLAB GRADER *under Laboration 1 - Förberedande uppgifter.*

Skriv ett MATLAB-program `Road.m` som löser uppgifterna nedan.

a) Börja med att bestämma koordinaterna (med lämplig tolerans) för punkterna P_1, P_2 och P_3 med hjälp av inbindning. För varje punkt måste ett olinjärt ekvationssystem motsvarande (3)-(4)) lösas med Newtons metod. Startvärden bestäms genom att rita upp cirklarna.

Programmet ska inte använda kodupprepning. Använd en `for`-slinga för de tre punkterna. Vad blir koordinaterna? Hur kan du förvissa dig om att Newtons metod konvergerar som den ska? Vilken konvergenshastighet ser du?

b) Bestäm det fjärdegradspolynom, $p(x)$, som går genom de fem punkterna P_0, P_1, P_2, P_3 och P_4. Rita upp vägen (grafen för polynomet) för $x \in (0, 1020)$. Rita även in de fem interpolationspunkterna och markera dem med `'o'`. Vad blir koefficienterna i polynomet?

Skicka in programmet `Road.m`.