Indice

CAPITOLO 1

Nozioni preliminari

1. Insiemi

Utilizzeremo la seguente idea intuitiva di insieme. Un insieme S è una collezione di "oggetti". Tali oggetti sono detti *elementi* di S. La collezione senza alcun elemento è il cosiddetto *insieme vuoto*, usualmente indicato con il simbolo $\emptyset$.

ESEMPIO. $S =$ l'insieme degli studenti dell'università di Pisa.

Notazione: scriveremo $s \in S$ per indicare che l'elemento s appartiene all'insieme S.

Un insieme S si definisce di solito in uno dei seguenti modi:

- descrivendone esplicitamente gli elementi di S;
- utilizzando un altro insieme già noto U, a volte detto "universo", per caratterizzare gli elementi di S come quegli elementi di U con certe proprietà.

ESEMPIO. Consideriamo l'insieme S consistente della collezione dei numeri 1, 3, 5, 7 e 9. Possiamo definire S semplicemente elencando i suoi elementi (di solito tra parentesi graffe):

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Possiamo definire S anche come "l'insieme dei numeri interi positivi dispari minori di 10". In questo caso stiamo pensando che l'universo U è l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots\}$ di tutti i numeri interi positivi e gli elementi di S sono caratterizzati, e quindi definiti, dalla proprietà di essere dispari e minori di 10.

Notazione: l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots\}$, detto dei numeri *naturali*, si indica di solito con $\mathbb{N}$. La seconda definizione dell'insieme S nell'esempio predente si fornisce di solito in modo compatto scrivendo

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ dispari}, n < 10\},$$

dove il simbolo " | " si legge "tali che".

Un insieme T si dice *sottoinsieme* di un insieme S se ogni elemento di T è anche elemento di S. In questa situazione si scrive $S \subset T$ (o $S \subseteq T$). Usando i simboli "$\forall$" (per ogni) e "$\iff$" (se e solo se), abbiamo dunque:

$$T \subset S \quad \iff \quad \forall t \in T, \quad t \in S.$$

Osserviamo che $\emptyset \subset S$ per ogni insieme S. Quando $T \subset S$ e simultaneamente $S \subset T$ diciamo che T ed S sono uguali, e scriviamo $T = S$. Nella notazione con le parentesi graffe gli elementi di un insieme si intendono di solito non ordinati. Quindi, ad esempio, $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$.

ESEMPIO. Sia $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$ l'insieme di tutti numeri interi (sia positivi che negativi, più lo zero). Allora $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ma $\mathbb{Z}$ non è contenuto in $\mathbb{N}$ e quindi $\mathbb{Z}$ è diverso da $\mathbb{N}$, perché ad esempio -1 appartiene a $\mathbb{Z}$ ma non ad $\mathbb{N}$. In simboli,

$$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}, \quad \text{quindi} \quad \mathbb{Z} \neq \mathbb{N},$$

dove "$\not\subset$" si legge "non è sottoinsieme di" e "$\neq$" si legge "è diverso da". (La barra su un simbolo ne indica sempre la negazione).

Si hanno le inclusioni

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

dove

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

è l'insieme dei *numeri razionali* ed $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, contenente numeri *irrazionali* come $\sqrt{2}$ e *trascendenti* come π (fare riferimento al corso di Analisi 1 per maggiori informazioni sull'insieme $\mathbb{R}$).

DEFINIZIONI. Dati due insiemi S e T, possiamo definire altri insiemi nei seguenti modi:

- *Intersezione*: $S \cap T = \{s \in S \mid s \in T\} = \{t \in T \mid t \in S\}$
- *Unione*: $S \cup T = \{x \mid x \in S \quad \text{oppure} \quad x \in T\}$
- *Differenza*: $S \setminus T = \{s \in S \mid s \notin T\}$

ESERCIZIO. Verificare che, se $T \subset S \subset U$, si ha sempre $T \cap S = T$, $T \cup S = S$ e $T \setminus S = \emptyset$.

ESEMPIO. Siano $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$ e $T = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$. Allora

$$S \cap T = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}, \quad S \cup T = \mathbb{R}, \quad S \setminus T = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\},$$
$$T \setminus S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1\}.$$

Osserviamo che, poiché $x^2 \geq 1$ se e solo se $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \geq 0$,

$$\begin{aligned} S &= (\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} \overset{\text{(notazione)}}{=} (-\infty, -1] \cup [1, +\infty]. \end{aligned}$$

ESERCIZIO. Sia T l'insieme dell'esempio precedente. Dimostrare che

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} \overset{\text{(notazione)}}{=} [-1, 1].$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B, il loro *prodotto cartesiano* è l'insieme

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}$$

Dato un insieme S ed $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire l'insieme S^n come

$$S^n = S \times \overset{(n \text{ volte})}{\cdots} \times S = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_i \in S \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

ESEMPIO. $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali. In particolare, $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali.

ESEMPIO. Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Chiaramente $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Determiniamo $S \cap \mathbb{Z}^2$: se $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ e $x^2 = 1 - y^2$ allora $0 \leq x^2 = 1 - y^2 \leq 1$ implica $x^2 \in \{0, 1\}$. Da questo è facile concludere che:

$$S = \{(0, -1), (0, 1), (-1, 0), (1, 0)\}.$$

Dato $S \subset U$, l'insieme $S' = U \setminus S$ è detto il *complementare* di S in U.

ESERCIZIO. Dimostrare che vale la seguente *prima legge di De Morgan*:

$$S, T \subset U \implies (S \cap T)' = S' \cup T'.$$

2. Induzione matematica

Nella teoria assiomatica degli insiemi, per definire i numeri naturali $\mathbb{N}$ si può usare il cosiddetto *principio di induzione*, che noi assumeremo essere (intuitivamente) vero. Sia $E(n)$ un qualunque enunciato che dipende da $n \in \mathbb{N}$. Ad esempio, $E(n)$ potrebbe essere l'affermazione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale l'uguaglianza:

$$(*_n) \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE. Se valgono i seguenti fatti:

- $E(1)$ è vera (base dell'induzione),
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(n)$ vera $\Rightarrow E(n+1)$ vera (passo induttivo),

allora $E(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO. Dimostriamo che $E(n) = (*_n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ usando il principio di induzione. La base dell'induzione $(*_1)$ vale banalmente perché afferma semplicemente che $1 = 1 \cdot 2/2$. Supponiamo $(*_n)$ vera (ipotesi induttiva) e verifichiamo che allora $(*_{n+1})$ lo è:

$$1+\cdots+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

DEFINIZIONI. Dato $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ il *fattoriale* di n, indicato con $n!$, è definito come segue:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \ \cdots \ 2 \cdot 1 & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Dati $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leq n$, il *coefficiente binomiale* $\displaystyle\binom{n}{k}$ è definito ponendo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

ESEMPIO. Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $E(n)$ l'affermazione che per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ coincide con il numero $S(n,k)$ di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ aventi esattamente k elementi. Osserviamo preliminarmente che l'unico insieme con 0 elementi è l'insieme vuoto, che è sottoinsieme di qualunque insieme. Dimostriamo per induzione che $E(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, è chiaro che $E(1)$ è vera. Ora supponiamo che $E(n)$ sia vera (ipotesi induttiva). Per $k = 0$ l'affermazione $E(n+1)$ è vera per l'osservazione preliminare, quindi possiamo supporre $k > 0$. I sottonsiemi di $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ con k elementi sono di due tipi: quelli che contengono $n+1$ e quelli che non lo contengono. Utilizzando l'ipotesi induttiva si vede facilmente che ce ne sono $\binom{n}{k-1}$ del primo tipo e $\binom{n}{k}$ del secondo tipo, quindi

$$S(n+1,k) = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$
$$\frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!\,k!} = \binom{n+1}{k}.$$

Abbiamo verificato che $E(n+1)$ è vera.

Esercizi

(1) Verificare usando il principio di induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(2) Verificare con il principio di induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la *formula di Newton*:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

3. Applicazioni

DEFINIZIONE. Un'*applicazione* o *funzione* f da un insieme S detto *dominio* ad un insieme T detto *codominio* è una regola che associa ad ogni $s \in S$ un unico elemento $t \in T$, detto *immagine di* s, di solito indicato con $f(s)$. L'insieme $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\} \subset T$ è detto *immagine* di f.

Notazioni: Per indicare una funzione da S a T scriveremo $f : S \to T$ oppure $S \xrightarrow{f} T$. Inoltre, quando non c'è rischio di confusione, invece di $f(s) = t$ potremo scrivere $s \mapsto t$.

ESEMPI. (a) se S è un qualunque insieme, $\mathrm{id}_S : S \to S$, $\mathrm{id}_S(s) = s$;
(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n+1$;
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
(d) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ per qualche $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : S \to T$ è detta *iniettiva* se $f(s_1) = f(s_2)$ implica $s_1 = s_2$, ovvero se le immagini tramite f di elementi distinti sono sempre distinte.

Degli esempi appena visti sono iniettive le applicazioni (a) e (b). L'applicazione (c) non è iniettiva, mentre (d) è iniettiva o meno a seconda dei valori di n e $a_0, \ldots, a_n$. Verificare per esercizio le affermazioni appena fatte.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : S \to T$ è detta *suriettiva* se $f(S) = T$. In altre parole, $f : S \to T$ è suriettiva se l'immagine di f coincide con T, ovvero se dato un qualunque $t \in T$ esiste $s \in S$ tale che $f(s) = t$.

Degli esempi appena visti è suriettiva l'applicazione (a). Le applicazioni (b) e (c) non sono suriettive, mentre l'applicazione (d) è suriettiva o meno a seconda dei valori di n e $a_0, \ldots, a_n$. Verificare per esercizio le affermazioni appena fatte.

DEFINIZIONE. Date due applicazioni $f : S \to T$ e $g : T \to U$, la *composizione* di g con f, di solito indicata con $g \circ f$, è l'applicazione da S ad U definita da $g \circ f(s) = g(f(s))$ per ogni $s \in S$.

ESEMPIO. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $g(y) = y+1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, rispettivamente. Allora $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono applicazioni diverse. Infatti, $g \circ f(x) = g(x^3) = x^3 + 1$, mentre $f \circ g(y) = f(y+1) = (y+1)^3$ quindi $g \circ f(2) = 2^3 + 1 = 9$ mentre $f \circ g(2) = 3^3 = 27$, dunque $g \circ f \neq f \circ g$.

ESEMPIO. Verifichiamo che se $T \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} U$ e $g \circ f$ è iniettiva, allora f è necessariamente iniettiva. Basta far vedere che è vera la "contronominale", ovvero che se f non è iniettiva allora neanche $g \circ f$ lo è. Ma questo è facile da verificare: se f non è iniettiva allora esistono elementi distinti $t_1, t_2 \in T$ tali che $f(t_1) = f(t_2)$ e quindi $g \circ f(t_1) = g(f(t_1)) = g(f(t_2)) = g \circ f(t_2)$, perciò $g \circ f$ non è iniettiva.

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : S \to T$ è detta *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Osserviamo che se $f : S \to T$ è biiettiva allora esiste un'applicazione $g : T \to S$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_S$ e $f \circ g = id_T$. Infatti, poiché f è suriettiva, per ogni $t \in T$ esiste un elemento $s_t \in S$ tale che $f(s_t) = t$, e poiché f è iniettiva s_t è unico. Possiamo quindi definire $g(t) = s_t$. Allora per costruzione valgono $f \circ g(t) = t$ per ogni $t \in T$ e $g \circ f(s) = s$ per ogni $s \in S$, quindi $g \circ f = \mathrm{id}_S$ e $f \circ g = id_T$.

DEFINIZIONE. L'applicazione g descritta sopra è l'*inversa* dell'applicazione biiettiva f, e si denota f^{-1}.

Esercizi

(1) Siano $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e $T = \{1, 2, 3, 4\}$. Definiamo le applicazioni $f\colon S \to T$ e $g\colon S \to T$ ponendo $f(\alpha) = 4$, $f(\beta) = 1$, $f(\gamma) = 2$, $f(\delta) = 2$ e $g(\alpha) = 2$, $g(\beta) = 3$, $g(\gamma) = 1$, $g(\delta) = 4$.
   (a) f è iniettiva ? g è iniettiva ? f è suriettiva ? g è suriettiva ?
   (b) Siano $A = \{\beta, \delta\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Determinare i seguenti sottoinsiemi di T: $f(A)$, $g(B)$, $f(A \cap B)$, $g(A \cup b)$.

(2) Siano S e T gli insiemi dell'esercizio precedente.
   (a) Quante sono le applicazioni da S a T ?
   (b) Quante sono le applicazioni suriettive da S a T ?
   (c) Quante sono le applicazioni iniettive da S a T ?

(3) Le seguenti formule definiscono applicazioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stablire quali sono iniettive e quali suriettive. Determinare le immagini $f(\mathbb{R}_{>0})$, dove $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
   (a) $f(x) = 2x$
   (b) $f(x) = x - 4$
   (c) $f(x) = x^3$
   (d) $f(x) = x^2 + x$
   (e) $f(x) = e^x$

4. Esempi di strutture algebriche

Sappiamo dall'aritmetica elementare che l'insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

è dotato di due operazioni: l'addizione e la moltiplicazione. L'addizione, o somma, tra numeri interi soddisfa le seguenti proprietà:

$$\text{(GA)}\qquad \begin{gathered} a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{per ogni } a, b, c \\ a + b = b + a \quad \text{per ogni } a, b \\ a + 0 = a \quad \text{per ogni } a \\ a + (-a) = 0 \quad \text{per ogni } a \end{gathered}$$

Un insieme dotato di un'operazione "$+$" ed un elemento "0" aventi le proprietà (GA) si dice *gruppo Abeliano* o *gruppo commutativo*. La moltiplicazione, o prodotto, tra numeri interi soddisfa le proprietá:

$$\text{(AU)}\qquad \begin{gathered} a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{per ogni } a, b, c \\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{per ogni } a, b, c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c \quad \text{per ogni } a, b, c \\ 1 \cdot a = a, \quad (-1) \cdot a = -a \quad \text{per ogni } a \end{gathered}$$

Sappiamo inoltre che vale la proprietà

$$\text{(AC)}\qquad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{per ogni } a, b$$

Un insieme R dotato di operazioni "$+$" e "$\cdot$" e provvisto di elementi "0" e "1" soddisfacenti le proprietà (GA) e (AU) si dice *anello unitario*. Se inoltre vale anche la (AC) allora R si dice *anello commutativo unitario*. Dunque l'insieme $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo unitario rispetto alle operazioni di somma e prodotto e, come tutti gli anelli unitari, anche un gruppo Abeliano rispetto alla sola operazione di somma.

L'insieme dei numeri interi è contenuto nell'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} := \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

e, come sappiamo (o possiamo facilmente verificare), le operazioni di somma e di prodotto tra numeri interi si estendono all'insieme $\mathbb{Q}$ conservando le proprietà (GA), (AU) e (AC). Quindi anche l'insieme dei numeri razionali è un anello commutativo unitario. Vale inoltre il seguente fatto:

$$\text{(Ca)}\qquad q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \;\Rightarrow\; \text{esiste } q' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ tale che } q \cdot q' = 1.$$

Infatti, se $q = a/b \neq 0$, basta scegliere $q' := b/a$. Un anello commutativo unitario $\mathbb{K}$ per cui valga la (Ca) una volta sostituito $\mathbb{K}$ al posto di $\mathbb{Q}$ si dice *campo*. Dunque $\mathbb{Q}$ è un campo, e lo stesso è vero per l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

In generale, un'*operazione* su un insieme S è un'applicazione $S \times S \to S$. Di solito si dice che una (o più) operazioni su un insieme definiscono su di esso una *struttura algebrica*. Le strutture di gruppo Abeliano, anello e campo sono esempi di strutture algebriche.

ESEMPI. Mentre, come abbiamo visto, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ ed $(\mathbb{R}, +)$ sono gruppi Abeliani,

$(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ non lo è perché non vale l'ultima delle (GA). Analogamente, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ e $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sono gruppi Abeliani, mentre $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ed $(\mathbb{N}, \cdot)$ non lo sono perché non vale la (Ca).

5. Polinomi

Dato un campo $\mathbb{K}$ (ad esempio $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$), un esempio di anello commutativo con unità è l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}[t] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, n \geq 0\},$$

dotato delle seguenti operazioni di somma e prodotto. Per ogni $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$, possiamo supporre che $a_m \neq 0$, e porre per comodità $a_i = 0$ per $i < 0$ e $i > m$. Il numero m è il *grado* di $p(t)$. Dati $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ di gradi rispettivamente m ed n, con

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_m t^m, \quad q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n,$$

e posto $\mu = \max(m, n)$, definiamo

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_\mu + b_\mu)t^\mu, \quad \text{e}$$

$$p(t) \cdot q(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n+m} t^{n+m}, \quad c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0, \quad k = 0, \ldots, m+n.$$

Ad esempio, se $p(t) = 1 + t$ e $q(t) = 1 - t + t^2$, abbiamo

$$p(t) + q(t) = 2 + t^2, \quad p(t) \cdot q(t) = 1 - t + t^2 + t - t^2 + t^3 = 1 + t^3.$$

L'anello $\mathbb{K}[t]$ non è un campo perché non soddisfa la (Ca).

TEOREMA 1.1 (di Ruffini). *Sia $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ un polinomio di grado $n \geq 1$ e $k \in \mathbb{K}$. Allora $p(k) = 0$ se e solo se $p(t) = (t - k)q(t)$, con $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ di grado $n - 1$.* □

ESEMPIO. il polinomio $p(t) = t^3 - t^2 - t - 2 \in \mathbb{R}[t]$ soddisfa $p(2) = 0$. Tramite il teorema di Ruffini deduciamo che $p(t) = (t - 2)(t^2 + at + b)$, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Espandendo il prodotto otteniamo $p(t) = t^3 + (a - 2)t^2 + (b - 2)t - 2b$, da cui $a = b = 1$. Dunque $p(t) = (t - 2)(t^2 + t + 1)$.

Si dimostra facilmente per induzione a partire dall'enunciato del teorema di Ruffini che un polinomio di grado positivo può avere al massimo n radici distinte. Ciò implica immediatamente il *principio di identità dei polinomi*, che dice che se due polinomi assumono gli stessi valori allora coincidono. Scritto formalmente:

$$p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{K}[t], \quad p_1(k) = p_2(k) \; \forall k \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = p_2(t)$$

Infatti, da $p_1(k) - p_2(k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{K}$ segue che il polinomio $p_1(t) - p_2(t) \in \mathbb{K}[t]$ ha infinite radici, quindi deve avere grado zero e dunque essere nullo.

Dato un polinomio della forma $(t - k)q(t) \in \mathbb{K}[t]$, possiamo chiederci se k è radice di $q(t)$ oppure no. Nel primo caso, per il teorema di Ruffini avremo $q(t) = (t - k)r(t)$ per qualche polinomio $r(t) \in \mathbb{K}[t]$, quindi $(t - k)q(t) = (t - k)^2 r(t)$. Ora possiamo chiederci se k è radice di $r(t)$ e così via. Questa discussione porta alla seguente:

DEFINIZIONE. Sia $k \in \mathbb{K}$ una radice di $p(t) \in \mathbb{K}[t]$. La *molteplicità* di k come radice di $p(t)$, indicata con a_k, è il massimo intero $b \geq 1$ tale che

$$p(t) = (t-k)^b s(t) \quad \text{per qualche } s(t) \in \mathbb{K}[t].$$

Una radice di molteplicità 1 è detta *semplice*, una di molteplicità 2 è detta *doppia*.

ESEMPIO. $1 \in \mathbb{R}$ è una radice semplice del polinomio $p(t) = (t-1)(t^2+1) \in \mathbb{R}[t]$; $-2 \in \mathbb{R}$ è una radice di molteplicità 3 del polinomio $q(t) = (t+2)^3(t^2+4) \in \mathbb{R}[t]$.

Esercizi

(1) Vero o falso ?
   (a) Il grado della somma di due polinomi è maggiore o uguale del grado di ciascuno dei due polinomi.
   (b) Il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla somma dei gradi dei due polinomi.

(2) Verificare usando il principio di induzione che, se $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$,
$$t^n - 1 = (t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + 1) \in \mathbb{K}[t]$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(3) Utilizzare il teorema di Ruffini per rispondere alle seguenti domande.
   (a) Il polinomio $3t^3 - 9t^2 - 7t + 21 \in \mathbb{Q}[t]$ è della forma $(t-3)q(t)$ per qualche $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$?
   (b) Il polinomio $t^3 + 8t^2 + 6t - 8 \in \mathbb{R}[t]$ è della forma $(t-2)q(t)$ per qualche $q(t) \in \mathbb{R}[t]$?
   (c) Per quale $k \in \mathbb{Q}$ il polinomio $t^3 + 2t^2 + t + k \in \mathbb{R}[t]$ è della forma $(t-1)q(t)$ per qualche $q(t) \in \mathbb{R}[t]$?

CAPITOLO 2

Numeri complessi

1. Introduzione e prime definizioni

L'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni razionali ma ha le soluzioni reali $\pm\sqrt{2}$, mentre l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

non ha soluzioni reali. Per analogia con l'inclusione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, vorremmo costruire un nuovo campo $\mathbb{C}$ contenente $\mathbb{R}$ in modo che qualche elemento di $\mathbb{C}$ soddisfi l'equazione (1). Aggiungiamo ad $\mathbb{R}$ un "simbolo" i ed estendiamo la moltiplicazione in modo che $i \cdot i = i^2 = -1$. Se $\mathbb{C}$ deve essere un campo e contenere $\mathbb{R}$ ed i, dovrà contenere tutti i "numeri" della forma $a + bi$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Proviamo quindi a definire

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i, \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

In questo modo possiamo identificare $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme $\{a + 0 \cdot i, \ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.

Sull'insieme $\mathbb{C}$ è naturale definire le operazioni di somma e prodotto in modo che coincidano con i risultati delle naturali manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i) + (a' + b' \cdot i) &:= (a + a') + (b + b') \cdot i \\ (a + b \cdot i) \cdot (a' + b' \cdot i) &:= (aa' - bb') + (ab' + ba') \cdot i \end{aligned} \tag{2}$$

dove ":=" significa che l'uguaglianza definisce il membro di sinistra. Per esempio,

$$(1 - 2i)(-1 + i) = -1 + 2i + i + 2 = 1 + 3i$$

È facile verificare che $\mathbb{C}$, dotato di queste operazioni, risulta essere un campo. Le verifiche delle proprietà commutative, associative e distributive sono facili esercizi. L'elemento neutro rispetto alla somma è $0 + 0i$ e lo indicheremo semplicemente con $0 \in \mathbb{C}$. L'opposto di $a + bi$ è chiaramente $-a - bi$, mentre $1 = 1 + 0i$ è l'unità moltiplicativa. Osserviamo che $a + b \cdot i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se e solo se $a^2 + b^2 > 0$, quindi segue da (2) che

$$(a + b \cdot i) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i\right) = 1. \tag{3}$$

Da quanto detto si vede subito che è anche possibile definire $\mathbb{C}$ più formalmente come l'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato delle operazioni corrispondenti alle (2), ovvero:

$$\begin{aligned} (a, b) + (a', b') &:= (a + a', b + b') \\ (a, b) \cdot (a', b') &:= (aa' - bb', ab' + ba'). \end{aligned} \tag{4}$$

La scrittura $a + bi$ di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si dice la *forma algebrica* di z. I numeri della forma bi, $b \in \mathbb{R}$, sono detti *immaginari puri*.

Definiamo ora un'importante applicazione detta *coniugio*: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + bi \mapsto \overline{z} = a - bi$. Il numero $\overline{z}$ è detto il *coniugato* di z. Osserviamo che se $z = a + bi \in \mathbb{C}$ allora $z\overline{z} = a^2 + b^2$ è sempre un numero reale non negativo, ed è nullo se e solo se $z = 0$. Quindi possiamo definire il *modulo* di $z \in \mathbb{C}$ come $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Se $z = a + bi \neq 0$, l'equazione (3) fornisce la seguente formula per l'inverso di z:

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\overline{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

ESEMPIO. Determiniamo la forma algebrica $a + bi$ di $\frac{2-i}{3+i}$. Moltiplicando sopra e sotto per $\overline{3+i} = 3 - i$ otteniamo

$$\frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{9+1} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{10}(5-5i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

ESEMPIO. Vogliamo risolvere l'equazione $\frac{z-i}{z+i} = 1 - i$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $z + i$ otteniamo $z - i = (z+i)(1-i) = z - zi + i + 1$, ovvero $zi = 2i + 1$, e moltiplicando ambo i membri per $-i$ otteniamo $z = 2 - i$.

Esercizi

(1) Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri complessi:

$$\frac{2-i}{3+i} \qquad \frac{2+i}{3+i} \qquad \frac{2-i}{3-i} \qquad \frac{(1+i)^2}{1+(1-i)^2} \qquad \frac{(1-i)^2}{1+(1-i)^2} \qquad \frac{(1+i)^2}{1+(1+i)^2}$$

(2) Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri complessi:

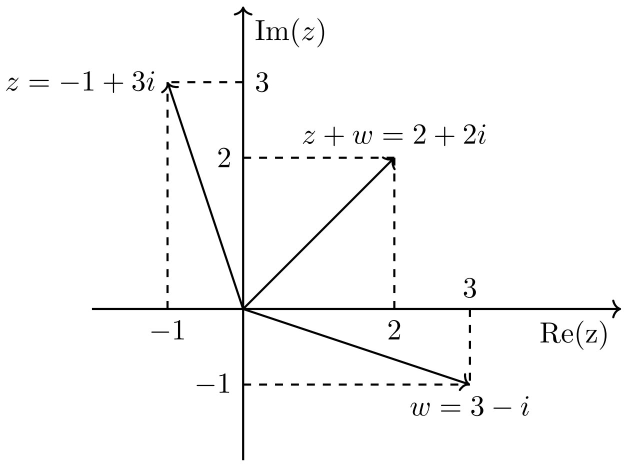
$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-2i}{1+i} \qquad \frac{1-i}{1+i} + \frac{1-2i}{1+i} \qquad \frac{1+i}{1-i} + \frac{1+2i}{1+i}$$

(3) Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{z+i}{z-i} = 2+i; \quad \frac{z-i}{z+i} = 1-i; \quad \frac{z+i}{z-i} = 1+i; \quad \frac{2z-i}{z+i} = 1-i; \quad \frac{z+2i}{z-i} = -1+i;$$
$$\frac{z+i}{z-2i} = -1-i$$

2. Proprietà dei numeri complessi

Poiché $\mathbb{C}$ è naturalmente identificato con $\mathbb{R}^2$, possiamo rappresentare ogni numero complesso nel piano della geometria elementare usando una sistema di coordinate:



In questo modo ogni numero complesso $z = a + bi$ viene identificato con il corrispondente punto del piano di coordinate (a, b). Questa è la rappresentazione *cartesiana* dei numeri complessi. Chiaramente, possiamo pensare ogni punto dell'asse delle ascisse come un numero reale. Per questo motivo, l'asse delle ascisse è anche detto asse reale. Inoltre, poiché se $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, tramite il teorema di Pitagora possiamo interpretare geometricamente il modulo di ogni numero complesso z come la distanza dall'origine del punto corrispondente a z nella rappresentazione cartesiana. Analogamente, possiamo interpretare l'applicazione di coniugio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come la riflessione rispetto all'asse reale.

DEFINIZIONE. Dato $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ è *parte reale* di z, mentre $b \in \mathbb{R}$ ne è la *parte immaginaria*. A volte si scrive $a = \mathrm{Re(z)}$ e $b = \mathrm{Im}(z)$.

ESERCIZIO. Verificare le seguenti proprietà del coniugio:

- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re(z)}$; $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$; $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$; $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO. Vogliamo identificare il seguente sottoinsieme del piano complesso:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z - 1|\} \subset \mathbb{C}.$$

L'equazione $|z| = |z - 1|$ è equivalente a $|z|^2 = |z - 1|^2$, ovvero $z\overline{z} = (z - 1)(\overline{z} - 1)$, che dopo facili passaggi si riduce a $z + \overline{z} = 1$. Quindi l'insieme S si può rappresentare nel piano complesso come una retta verticale passante per il punto $1/2$.

ESERCIZIO. Verificare le seguenti proprietà del modulo:

- $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|zw| = |z||w|$; $|z^{-1}| = (|z|)^{-1}$;
- $\max(|\mathrm{Re(z)}|, |\mathrm{Im(z)}|) \leq |\mathrm{z}| \leq |\mathrm{Re(z)}| + |\mathrm{Im(z)}|$.

PROPOSIZIONE 2.1. *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, si ha*

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

DIMOSTRAZIONE.

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(\mathrm{z}\overline{\mathrm{w}}) \leq |\mathrm{z}|^2 + |\mathrm{w}|^2 + 2|\mathrm{z}||\mathrm{w}| = (|\mathrm{z}| + |\mathrm{w}|)^2,$$

quindi $|z + w| \leq |z| + |w|$. Inoltre,

$$|z| = |z + w - w| \leq |z + w| + |w|,$$

dunque $|z| - |w| \leq |z + w|$, e scambiando z con w si conclude. □

Osserviamo che ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

ammette soluzioni in $\mathbb{C}$. Infatti, la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado fornisce le soluzioni

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

che in $\mathbb{C}$ hanno senso anche se $b^2 - 4ab < 0$! In questo caso esiste il numero reale $\sqrt{4ac - b^2}$, quindi l'immaginario puro $z_0 = (\sqrt{4ac - b^2})i$ è ben definito e si può verificare per esercizio che i due numeri complessi

$$z_1 = \frac{1}{2a}(-b + z_0), \quad z_2 = \frac{1}{2a}(-b - z_0)$$

soddisfano l'equazione di partenza.

ESEMPIO. L'equazione $z^2 + z + 1 = 0$ ha soluzioni $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vale anche il seguente risultato che non dimostreremo:

TEOREMA 2.2 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Data un'equazione polinomiale a coefficienti complessi*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, \quad \textit{con } a_n \neq 0,$$

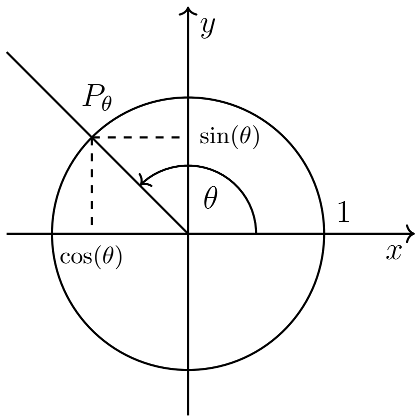
esiste almeno un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ *che la soddisfa.* □

Esercizi

(1) Sia u la radice complessa dell'equazione $z^2 - (i+3)z + i + 2 = 0$ con parte immaginaria positiva. Calcolare u^2 [suggerimento: applicare la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado determinando le due radici complesse di $b^2 - 4ac = 2i$].
(2) Sia u la radice complessa dell'equazione $z^2 + (i-2)z - i + 1 = 0$ con parte immaginaria negativa. Calcolare $u^2 + 1$.
(3) Sia u la radice complessa dell'equazione $z^2 - (i+2)z + i + 1 = 0$ con parte immaginaria positiva. Calcolare $u^2 + 1$.

3. Rappresentazione polare

Le funzioni $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono date, per definizione, dalle coordinate rettangolari del punto di intersezione della circonferenza di raggio 1 e centro l'origine con la semiretta ottenuta ruotando in senso antiorario di un angolo θ (misurato in radianti) la semiretta positiva dell'asse reale:



Segue dalla definizione che $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ e che i grafici delle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono dati dalla Figura 1. Oltre alle coordinate rettangolari, nel piano possiamo utilizzare coordinate polari (ρ, θ), legate alle coordinate rettangolari dalle trasformazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} .$$

Questo ci permette di scrivere, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$z = a + bi = \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) i = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta) i),$$

dove $\rho = |z|$ (si veda la Figura 2. L'angolo θ, indicato spesso con $Arg(z)$, è detto *argomento* del

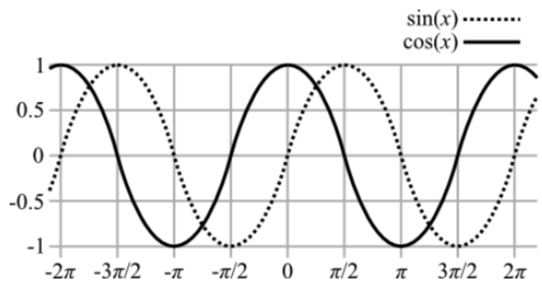


FIGURA 1. I grafici delle funzioni $sin(x)$ and $cos(x)$

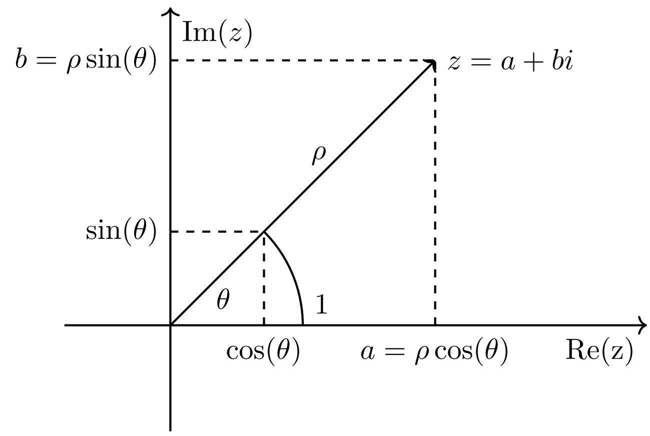


FIGURA 2. Rappresentazione polare di $z = a + bi = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$

numero complesso z. È chiaramente ben definito solo a meno di multipli interi di 2π, oppure se pensato appartenente ad un intervallo di ampiezza 2π (chiuso a sinistra ma non a destra o viceversa). A questo scopo noi utilizzeremo l'intervallo $[0, 2\pi)$.

OSSERVAZIONE. Dato un numero complesso in forma algebrica $z = a + bi \in \mathbb{C}$, per trovare ρ e θ tali che $z = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ si può procedere nel seguente modo. Come abbiamo osservato ρ è il modulo di $|z|$, quindi $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Inoltre, uguagliando la parte reale e la parte immaginaria delle due espressioni abbiamo

$$\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta) \end{cases},$$

dunque otteniamo le formule

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

che ci permettono di determinare l'angolo θ a meno di multipli interi di 2π.

TEOREMA 2.3 (Formula di De Moivre). *Per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni $\sin$ e $\cos$ soddisfano le seguenti identità (non lo dimostriamo):

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2.$$

Siano $z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i)$ e $z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i)$. Calcolando, abbiamo

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + (\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))i) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)i). \end{aligned}$$

$\square$

Più in generale, se $z_k = \rho_k(\cos(\theta_k)+\sin(\theta_k)i)$, $k = 1, \ldots, n$, si può dimostrare per induzione (esercizio) che

$$z_1 \cdots z_n = \rho_1 \cdots \rho_n(\cos(\theta_1 + \cdots \theta_n) + \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)i). \tag{5}$$

Nel caso in cui $z_1 = \cdots = z_n = z = \rho(cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ abbiamo l'utile uguaglianza:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i).$$

ESEMPIO. Vogliamo calcolare ζ^{11}, dove ζ è la soluzione dell'equazione $z^2 + z + 1 = 0$ con parte immaginaria positiva. La formula di risoluzione fornisce $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = -1/2 \pm \sqrt{3}i/2$, quindi $\zeta = -1/2 + \sqrt{3}i/2 = \cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3)i$. Poiché $11 \cdot 2\pi/3 = 6\pi + 4\pi/3$, $\zeta^{11} = \cos(4\pi/3) + \sin(4\pi/3)i = -1/2 - \sqrt{3}i/2$.

ESEMPIO. Sia $z = -1/2 + \sqrt{3}i/2 \in \mathbb{C}$. Vogliamo determinare l'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid z^k = 1\}$. Abbiamo $z = \cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3)i$, quindi $z^k = \cos(2k\pi/3) + \sin(2k\pi/3)i = 1$ se e solo se $2k\pi/3$ è un multiplo intero di 2π, ovvero se e solo se k è un multiplo di 3.

ESEMPIO. Vogliamo calcolare $\zeta^7-\zeta^4-1$, dove ζ è la soluzione dell'equazione $z^2-z+1-i = 0$ con parte reale nulla. Poiché ζ deve avere parte reale nulla, sarà della forma $\zeta = bi$ per qualche $b \in \mathbb{R}$. Affinché ζ sia soluzione dell'equazione bisogna avere $(bi)^2-bi+1-i = -b^2-bi+1-i = 0$, ovvero $b^2 = 1$ e $b = -1$. Quindi $b = -1$ e $\zeta = -i$. Infine, $(-i)^4 = (-i)^2 \cdot (-i)^2 = 1$, $(-i)^7 = (-i)^4 \cdot (-i)^2 \cdot (-i) = i$ e $\zeta^7 - \zeta^4 - 1 = i - 1 - 1 = -2 + i$.

Esercizi

(1) Dimostrare applicando il principio di induzione la formula (5).
(2) Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ la radice dell'equazione $z^2 - z + 1 = 0$ con parte immaginaria negativa. Calcolare ζ^{11}.
(3) Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ la radice dell'equazione $z^2 + iz - 1 = 0$ con parte reale positiva. Calcolare ζ^8.
(4) Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \in \mathbb{C}$. Determinare l'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid z^k = 1\}$.
(5) Sia $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{C}$. Determinare l'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid z^k = -1\}$.

4. Estrazione di radici complesse

Dato $n \in \mathbb{N}$ e $z, w \in \mathbb{C}$, diciamo che z è una *radice ennesima* di w se $z^n = w$.

Problema: dato $w \in \mathbb{C}$, vogliamo calcolare l'insieme

$$R_n(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = w\}$$

delle radici ennesime di w.

Calcolando i moduli dei due membri dell'equazione $z^n = w$ si ottiene $|z|^n = |w|$, quindi $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$. In particolare, $w = 0$ implica $|z| = 0$, quindi in questo caso $z = 0$ è l'unica soluzione. Per procedere in generale supponiamo $w = r(\cos(\phi) + \sin(\phi)i)$ con $r > 0$, e cerchiamo soluzioni della forma

$$z = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)i), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Se $z^n = w$, per il teorema di De Moivre abbiamo

$$\rho^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i) = r(\cos(\phi) + \sin(\phi)i),$$

dunque

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ \cos(n\theta) = \cos(\phi), \\ \sin(n\theta) = \sin(\phi). \end{cases}$$

Queste equazioni implicano che $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ e $n\theta = \phi + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Risolvendo la seconda equazione rispetto a θ otteniamo $\theta = \frac{\phi+2k\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poiché non ci interessa trovare tutte le soluzioni reali in θ ma solo quelle nell'intervallo $[0, 2\pi)$, possiamo limitare i k facendo in modo di non ottenere due valori di θ che differiscono per un multiplo di 2π (sarebbero ridondanti, perché gli z corrispondenti sarebbero uguali). È facile controllare che per fare ciò basta far variare k tra 0 ed $n-1$, quindi l'insieme delle radici ennesime di w risulta uguale a

$$R_n(w) = \left\{ r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + \sin(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)i), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

ESEMPIO. Le radici quadrate di $i = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)i$ sono $\pm(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)i) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Infatti, l'argomento principale è $(\pi/2)/2 = \pi/4$. Aggiungendo multipli di $(2\pi)/2$ si ottengono gli argomenti $\{\pi/4, 5\pi/4\}$. La conclusione segue dal fatto che $\cos(5\pi/4) = -\cos(\pi/4)$ e $\sin(5\pi/4) = -\sin(\pi/4)$.

In pratica, per trovare tutte le radici ennesime di un numero complesso w si può procedere nel modo seguente. Se $w = r(\cos(\phi) + \sin(\phi)i)$, si determina anzitutto la radice "principale"

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\phi}{n}) + \sin(\frac{\phi}{n})i),$$

poi si ottengono le altre aumentando l'argomento di z_0 di multipli interi di $\frac{2\pi}{n}$ fino a tornare all'argomento di partenza $\frac{\phi}{n}$. Le n radici ottenute $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ sono sempre disposte sui vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $r^{\frac{1}{n}}$.

ESEMPIO. Determiniamo le radici cubiche di $1 = \cos(0) + \sin(0)i$. L'argomento principale è $0/3 = 0$. Aggiungendo multipli interi di $2\pi/3$ si ottengono gli argomenti $\{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$. Quindi le radici cubiche di 1 sono i numeri complessi

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3)i = -1/2 + \sqrt{3}i/2,$$
$$z_2 = \cos(4\pi/3) + \sin(4\pi/3)i = -1/2 - \sqrt{3}i/2.$$

ESEMPIO. Vogliamo determinare le soluzioni dell'equazione $z^3 = \dfrac{1+i}{1-i}$. Abbiamo

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

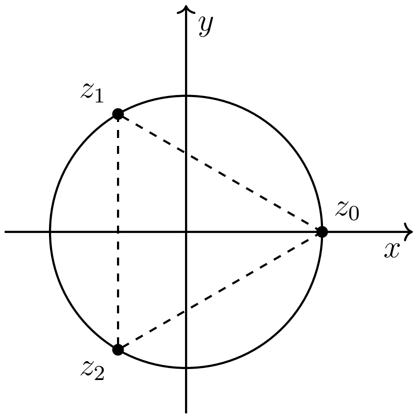


FIGURA 3. Le radici cubiche di 1

Si tratta di determinare le radici cubiche di $i = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)i$. L'argomento principale è $\pi/6$, che va incrementato di multipli interi di $2\pi/3$. Quindi si ottengono le radici $z_0 = cos(\pi/6) + \sin(\pi/6)i = \sqrt{3}/2 + i/2$, $z_1 = \cos(5\pi/6) + \sin(5\pi/6)i = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $z_2 = \cos(3\pi/2) + \sin(3\pi/2)i = -i$.

ESEMPIO. Troviamo le soluzioni dell'equazione $(z - 2i)^3 + 1 = 0$. Posto $w = z - 2i$, vogliamo risolvere l'equazione $w^3 = -1 = cos(\pi) + \sin(\pi)i$. La radice terza principale di -1 è $\cos(\pi/3) + \sin(\pi/3)i = 1/2 + \sqrt{3}i/2$, le altre due sono $\cos(\pi) + \sin(\pi)i = -1$ e $\cos(5\pi/3) + \sin(5\pi/3)i = 1/2 - \sqrt{3}i/2$. Le soluzioni dell'equazione di partenza si ottengono sommando $2i$ alle radici terze di -1:

$$\frac{1}{2} + \frac{4+\sqrt{3}}{2}i, \quad -1+2i, \quad \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}i.$$

Esercizi

(1) Determinare le soluzioni dell'equazione $(z + i)^3 + 1 = 0$.
(2) Determinare le soluzioni dell'equazione $(2z - i)^3 + 1 = 0$.
(3) Quale dei seguenti numeri complessi è soluzione dell'equazione $z^5 + 1 = \dfrac{z-1}{z}$?

- $-(\sqrt{3}+i)/2$
- $(1-\sqrt{3}i)/2$
- $(-1+i)/\sqrt{2}$
- $(1+\sqrt{3}i)/2$

5. Rappresentazione esponenziale

La funzione esponenziale $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ si può estendere ad una funzione $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$\exp(a + bi) = e^a(cos(b) + \sin(b)i), \quad a + bi \in \mathbb{C}.$$

Chiaramente, se $a = a + 0i \in \mathbb{C}$, $\exp(a) = e^a(\cos(0) + \sin(0)i) = e^a$, quindi abbiamo effettivamente definito un'estensione della funzione esponenziale. Notiamo inoltre che $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, perché $e^a > 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Da adesso in poi useremo anche la notazione e^z per indicare $\exp(z)$.

OSSERVAZIONE. L'immagine dell'applicazione $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti, ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha una rappresentazione polare del tipo $z = \rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$ con $\rho \neq 0$. Inoltre, $\exp(\theta i) = e^{\theta i} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Quindi $z = \rho e^{\theta i} = e^{\ln(\rho)+\theta i} \in \operatorname{Im}(\exp)$.

ESEMPIO. Verifichiamo che vale la cosiddetta *formula di Eulero*:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Infatti, $e^{\pi i} = \cos(\pi) + \sin(\pi)i = -1$.

Osserviamo anche che la restrizione di $\exp$ all'asse reale è iniettiva perché lo è la funzione esponenziale (essendo monotòna crescente), mentre la restrizione all'asse immaginario non è inettiva perché per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{(\theta+2k\pi)i} = \cos(\theta + 2k\pi) + \sin(\theta + 2k\pi)i = \cos(\theta) + \sin(\theta)i = e^{\theta i}.$$

ESEMPIO. Vogliamo determinare la rappresentazione algebrica del numero complesso $\dfrac{1+i}{1+2e^{\pi i/2}}$. Poiché $e^{\pi i/2} = cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$,

$$\frac{1+i}{1+2e^{\pi i/2}} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i.$$

PROPOSIZIONE 2.4. *Per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *si ha* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $z_k = a_k + b_k i$, $k = 1, 2$. Applicando la definizione della funzione esponenziale ed il teorema di de Moivre otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} = e^{a_1}(\cos(b_1) + \sin(b_1)i)e^{a_2}(\cos(b_2) + \sin(b_2)i) &= e^{a_1+a_2}(\cos(b_1 + b_2) + \sin(b_1 + b_2)i) \\ &= e^{a_1+a_2+(b_1+b_2)i} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

ESEMPIO. Vogliamo esprimere le radici dell'equazione $z^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = 0$ in forma esponenziale. L'equazione è $z^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{3\pi i/4}$, ed ha radici $z_k = e^{(3/12+2k/3)\pi i}$, $k = 0, 1, 2$. Esplicitando le formule otteniamo

$$R_3(e^{3\pi i/4}) = \{z_0 = e^{\pi i/4},\ z_1 = e^{11\pi i/12},\ z_2 = e^{19\pi i/12}\}.$$

ESEMPIO. Vogliamo mostrare che esiste un unico numero complesso z tale che $z + \overline{z} > 0$, $i(z - \overline{z}) > 0$ e $z^4 = 1 + i$, e che ha rappresentazione esponenziale $-2^{1/8}e^{9\pi i/16}$. La condizione $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re(z)} > 0$ equivale a chiedere che $\mathrm{Re(z)} > 0$, mentre la condizione $i(z - \overline{z}) = i2i\mathrm{Im}(z) = -2\mathrm{Im}(z) > 0$ equivale a $\mathrm{Im}(z) < 0$. Quindi stiamo cercando un numero nel quarto quadrante del piano complesso. Ora procediamo a trovare le radici quarte di $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)i) = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$. La formula generale fornisce le soluzioni $z_k = 2^{1/8}e^{(1/16+k/2)\pi i}$, $k = 0, \dots, 3$. Esplicitando si ottiene:

$$R_4(1 + i) = \{z_0 = 2^{1/8}e^{\pi i/16},\ z_1 = 2^{1/8}e^{9\pi i/16}, z_2 = 2^{1/8}e^{17\pi i/16}, z_3 = 2^{1/8}e^{25\pi i/16}\}.$$

Controllando i valori di $Arg(z_k)$, $k = 0, \dots, 3$, si verifica che l'unica radice nel quarto quadrante è $z_3 = 2^{1/8}e^{25\pi i/16} = 2^{1/8}e^{\pi i}e^{9\pi i/16} = -2^{1/8}e^{9\pi i/16}$.

ESEMPIO. Vogliamo esprimere in forma esponenziale le radici dell'equazione $z^5 + 1 = 0$. L'equazione si scrive $z^5 = -1$, quindi bisogna trovare la forma esponenziale delle radici quinte di $-1 = e^{\pi i}$. La formula generale ci dà $z_k = e^{(1/5+2k/5)\pi i}$, $k = 0, \dots, 5$. Esplicitando otteniamo

$$R_5(-1) = \{e^{\pi i/5},\ e^{3\pi i/5},\ e^{\pi i},\ e^{7\pi i/5},\ e^{9\pi i/5}\}.$$

Esercizi

(1) Quale dei seguenti numeri complessi è radice dell'equazione $z^3 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$?

- $e^{-\frac{7}{9}\pi i}$
- $e^{\frac{8}{9}\pi i}$
- $e^{-\frac{8}{11}\pi i}$
- $e^{-\frac{8}{9}\pi i}$
- $e^{\frac{8}{11}\pi i}$

(2) Quale dei seguenti numeri complessi è radice dell'equazione $z^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$?

- $e^{-\frac{13}{12}\pi i}$
- $e^{\frac{11}{12}\pi i}$
- $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$
- $e^{\frac{7}{12}\pi i}$
- $e^{-\frac{7}{12}\pi i}$

(3) Quale dei seguenti numeri complessi è radice dell'equazione $z^7 + 1 = 0$?

- $e^{\frac{54}{77}\pi i}$
- $e^{\frac{55}{77}\pi i}$
- $e^{\frac{56}{77}\pi i}$
- $e^{\frac{57}{77}\pi i}$
- $e^{\frac{58}{77}\pi i}$

(4) Quale dei seguenti numeri complessi è radice dell'equazione $z^9 + 1 = 0$?

- $e^{\frac{53}{99}\pi i}$
- $e^{\frac{54}{99}\pi i}$
- $e^{\frac{55}{99}\pi i}$
- $e^{\frac{56}{99}\pi i}$
- $e^{\frac{57}{99}\pi i}$

(5) Quale dei seguenti numeri complessi soddisfa l'equazione $z^4 = i$?

- $e^{\frac{3}{8}\pi i}$
- $e^{\frac{11}{8}\pi i}$
- $e^{\frac{7}{8}\pi i}$
- $e^{\frac{13}{8}\pi i}$
- $e^{\frac{\pi}{2}i}$

(6) Quale dei seguenti numeri complessi soddisfa l'equazione $z^2 = \dfrac{z^2 i - 1}{z^2} - i$?

- $e^{2\pi i/3}$
- $e^{5\pi i/4}$
- $e^{3\pi i/2}$
- $e^{\pi i/3}$
- $e^{-\pi i/3}$

(7) Quale dei seguenti numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ è soluzione dell'equazione $z^3 = \dfrac{1-i}{1+i}$?

- $e^{5\pi i/3}$
- $e^{2\pi i/5}$
- $e^{11\pi i/6}$
- $e^{7\pi i/4}$

Soluzioni degli esercizi

- Sezione 1: (1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$; $\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$; $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$; $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$; $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$; (2) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$; $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$; (3) $1 + 2i$; $2 - i$; $2 + i$; $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$; $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$; $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.
- Sezione 2: (1) $3 + 4i$; (2) $1 - 2i$; (3) $1 + 2i$.
- Sezione 3: (2) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (3) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (4) $\{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; (5) $\{3(2h+1) \mid h \in \mathbb{Z}\}$.
- Sezione 4: (1) $\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i, -1 - i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}+2}{2}i\}$; (2) $\{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{4}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{4} + \frac{2-\sqrt{3}}{4}i\}$; (3) $-(\sqrt{3} + i)/2$.
- Sezione 5: (1) $e^{-\frac{8}{9}\pi i}$; (2) $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$; (3) $e^{\frac{55}{77}\pi i}$; (4) $e^{\frac{55}{99}\pi i}$; (5) $e^{\frac{13}{8}\pi i}$; (6) $e^{5\pi i/4}$; (7) $e^{11\pi i/6}$.

CAPITOLO 3

Sistemi di equazioni lineari e algoritmo di Gauss

1. La tricotomia fondamentale

Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Supponiamo di voler trovare le soluzioni in $\mathbb{K}$ di una singola equazione di primo grado nell'incognita x:

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

Notiamo che, al variare dei coefficienti $a, b \in \mathbb{K}$ si possono presentare i seguenti tre casi:

(1) $a \neq 0$: in questo caso l'equazione *ammette un'unica soluzione* data da $x = b/a$, ottenuta semplicemente moltiplicando ambo i membri per $1/a$;

(2) $a = 0$, $b \neq 0$: poiché per ogni $k \in \mathbb{K}$ abbiamo $0 \cdot k = 0$ [1], l'equazione si riduce all'uguaglianza $0 \cdot x = b$, che non è verificata da alcun valore di x. Quindi l'equazione *non ammette soluzioni*;

(3) $a = b = 0$: l'equazione si riduce a $0 \cdot x = 0$, che è soddisfatta da qualunque valore di x. Quindi l'equazione *ammette infinite soluzioni*.

Come verificheremo, la tricotomia appena osservata (cioè l'esistenza di una, nessuna o infinite soluzioni) è un fatto generale, valido per un qualunque sistema di equazioni lineari con un numero arbitrario di equazioni ed un numero arbitrario di incognite. La chiameremo *tricotomia fondamentale* dei sistemi lineari.

ESEMPIO. Il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

si può risolvere "per sostituzione", ad esempio risolvendo la seconda equazione rispetto ad y, sostituendo l'espressione trovata nella prima equazione e infine risolvendo quest'ultima rispetto ad x:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - y = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3(4x - 3) = 12 \\ y = 4x - 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -3/10 \\ y = -6/5 - 3 = -21/5 \end{cases}$$

Osserviamo che in questo modo abbiamo anche verificato l'esistenza di un'unica soluzione, ovvero la coppia $(-3/10, -21/5)$.

ESEMPIO. Ora consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$$

[1] ciò è vero in un qualunque campo

Risolvendo la seconda equazione rispetto ad y e sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3(2x/3 - 1/3) = 12 \\ y = 2x/3 - 1/2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 = 12 \\ y = 2x/3 - 1/2 \end{cases},$$

quindi il sistema di partenza non ammette soluzioni.

ESEMPIO. Il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 24 \end{cases}$$

fornisce

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 24 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3(2x/3 - 4) = 12 \\ y = 2x/3 - 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 12 = 12 \\ y = 2x/3 - 4 \end{cases},$$

che ammette infinite soluzioni. Infatti, in questo caso possiamo considerare la x come "variabile libera", e facendola variare a piacere otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S = \{(k, 2k/3 - 4) \mid x \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^2.$$

2. Operazioni elementari

Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Un *sistema di equazioni lineari* a coefficienti in $\mathbb{K}$ in m equazioni ed n incognite è un sistema del tipo

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono le *incognite* e $a_{ij}, b_k \in \mathbb{K}$ per ogni $i, k \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Una *soluzione* di (S) è, per definizione, una n–upla $(k_1, \ldots, k_n)$ di elementi di $\mathbb{K}$ tale che, sostituendo ad ogni incognita x_i il valore k_i per $i = 1, \ldots, n$, le equazioni di (S) siano tutte simultaneamente soddisfatte.

Abbiamo già incontrato il semplice metodo di risoluzione "per sostituzione". È un metodo in linea di principio corretto ma inefficiente, non adatto a risolvere i sistemi lineari in modo sistematico, né per stabilire fatti generali come la tricotomia fondamentale. Esiste però un altro metodo, molto più efficiente, che viene effettivamente utilizzato per la risoluzione dei sistemi lineari anche tramite calcolatori. Inoltre, più avanti ce ne serviremo per stabilire la validità generale della tricotomia fondamentale. Si tratta dell'algoritmo di *eliminazione di Gauss*. Cominciamo a vedere come funziona attraverso alcuni semplici esempi.

Sia come al solito $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, e supponiamo di voler trovare tutte le terne di $\mathbb{K}^3$ che soddisfano il sistema:

$$(S1) \qquad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro due volte la prima equazione del sistema ($S1$) dalla seconda equazione si ottiene

$$(S2) \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-2 \\ x+2y+2z=5 \end{cases}$$

Osserviamo che in questo modo abbiamo "eliminato" la variabile x dalla seconda equazione. Inoltre, possiamo convincerci facilmente che il sistema ($S2$) ha le stesse soluzioni del sistema ($S1$). Ovvero che se (k_1, k_2, k_3) è una soluzione di ($S1$) se e solo se (k_1, k_2, k_3) è una soluzione di ($S2$).

DEFINIZIONE. Due sistemi di equazioni lineari che ammettono le stesse soluzioni si dicono *equivalenti*.

Il ragionamento fatto nell'esempio si generalizza facilmente, fornendo la seguente

PROPOSIZIONE 3.1. *Sommando ad un'equazione di un sistema lineare un qualunque multiplo di un'altra equazione si ottiene un sistema lineare equivalente.* □

È anche immediato convincersi che un altro modo per ottenere da un sistema lineare un sistema equivalente consiste nel moltiplicare ambo i membri di una qualunque equazione per un numero $k \in \mathbb{K}$ *diverso da zero*. Analogamente, scambiare tra loro due equazioni di un sistema lineare non cambia l'insieme delle soluzioni.

Riassumendo, per trasformare un sistema lineare in un sistema equivalente abbiamo a nostra disposizione tre operazioni, dette *operazioni elementari* o *mosse di Gauss*:

(1) moltiplicare ambo i membri di una qualunque equazione per una costante diversa da zero;
(2) scambiare tra loro due equazioni;
(3) sommare ad un'equazione un qualunque multiplo di un'altra equazione.

L'idea alla base dell'algoritmo di eliminazione è che qualunque sistema lineare si può trasformare tramite operazioni elementari in un sistema equivalente, le cui equazioni hanno una forma semplice, tale da permettere il facile calcolo delle soluzioni. Ecco come applicare le operazioni elementari per "semplificare" il sistema ($S2$):

$$(S2) \xrightarrow{E3 \to E3 - E1} \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-2 \\ y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{E3 \to E3 - E2} \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-2 \\ 4z=4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo risolto l'ultima equazione rispetto a z, sostituito il valore ottenuto nella seconda equazione, risolto quest'ultima rispetto ad y, sostituito i valori ottenuti per y e z nella prima equazione ed infine abbiamo ricavato il valore di x. Osserviamo che questa semplice risoluzione è stata possibile perché nell'ultima equazione non comparivano né x né y e nella seconda non compariva la x.

Poiché abbiamo ottenuto l'ultimo sistema lineare a partire da ($S1$) utilizzando soltanto operazioni elementari, ognuna delle quali lascia invariato l'insieme delle soluzioni, concludiamo che il sistema iniziale ($S1$) ammette un'unica soluzione, data dalla terna $(1, 1, 1)$.

ESEMPIO.

$$\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{E1 \to E1/2} \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{E2 \to E2-E1} \begin{cases} x+y=2 \\ 0=-1 \end{cases}$$

quindi il sistema non ammette soluzioni.

ESEMPIO.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y+2z=7 \end{cases} \xrightarrow{E2 \to E2-E1} \begin{cases} x+y+z=4 \\ y+z=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3-z \end{cases}$$

Lasciando variare liberamente z otteniamo che il sistema ammette l'insieme infinito di soluzioni

$$S = \{(1, 3-k, k) \mid k \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^3.$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere l'ultima equazione dell'ultimo sistema nella forma $z = 3 - y$ e considerare y come variabile libera, trovando come insieme di soluzioni

$$S' = \{(1, k, 3-k) \mid k \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^3.$$

Ovviamente risulta $S = S'$, come si può verificare facilmente (farlo per esercizio).

ESEMPIO. Vogliamo bilanciare la reazione chimica:

$$Al + H_2O + NaOH \longrightarrow NaAlO_2 + H_2,$$

dove Al = alluminio, H_2O = acqua, $NaOH$ = soda caustica, $NaAlO_2$ = alluminato di sodio e H_2 = idrogeno molecolare. Si tratta di trovare cinque numeri naturali $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{N}$ tali che la reazione

$$x_1Al + x_2H_2O + x_3NaOH \longrightarrow x_4NaAlO_2 + x_5H_2$$

sia bilanciata. Uguagliando il numero di atomi di allumino (Al), idrogeno (H), ossigeno (O) e sodio (Na) da una parte e dall'altra otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ 2x_2 + x_3 = 2x_5 \\ x_2 + x_3 = 2x_4 \\ x_3 = x_4, \end{cases}$$

che possiamo riscrivere così:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che tutti i termini noti (a destra dei segni "=") sono nulli. Un sistema lineare con questa proprietà è detto *omogeneo* [2]. Applicando le operazioni elementari otteniamo

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E3 \to E3 - 2E2} \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E3 \leftrightarrow E4}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E4 \to E4 + E3} \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_5/3 \\ x_2 = 2x_5/3 \\ x_3 = 2x_5/3 \\ x_4 = 2x_5/3 \end{cases}$$

L'insieme di soluzioni è quindi $\{(2x_5/3, 2x_5/3, 2x_5/3, 2x_5/3, x_5) \mid x_5 \in \mathbb{K}\}$, che risulta infinito. Noi stiamo cercando una quintupla di numeri naturali che risolve il sistema. Chiaramente, ponendo $x_5 = 3$ si trova la soluzione $(2, 2, 2, 2, 3)$ che possiamo utilizzare per bilanciare la reazione:

$$2Al + 2H_2O + 2NaOH \longrightarrow 2NaAlO_2 + 3H_2$$

Facciamo ora un'osservazione importante. Per tenere traccia delle trasformazioni indotte dalle operazioni elementari su un sistema lineare non è necessario scrivere il sistema completamente, ma soltanto tenere traccia dei coefficienti. Ad esempio, il sistema dell'esempio precedente è individuato dalla tabella di coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni indotte sulle righe dalle operazioni elementari sono le seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - 2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \leftrightarrow R4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R4 \to R4 + R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tabelle di numeri contenenti i coefficienti di un sistema lineare sono dette *matrici*. Una matrice con m righe ed n colonne è detta *matrice* $m \times n$.

3. L'algoritmo di eliminazione di Gauss

Consideriamo le seguenti due operazioni elementari su una matrice a coefficienti in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

[2] Osserviamo che un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione $(0, \ldots, 0)$.

(1) scambiare due righe;
(2) sommare ad una riga un multiplo di una riga precedente.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss è una procedura tramite la quale si può trasformare qualunque matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ non nulla (cioè con qualche elemento diverso da zero) in una matrice $m \times n$ *a gradini*, ovvero della forma

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & & & & & & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & & & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & & \vdots & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & p_3 & * & \cdots & & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & p_r & * & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & & & & & & & \vdots & & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

dove i numeri p_i, $i = 1, \ldots, r$ sono tutti diversi da zero e sono detti *pivot*.

Passiamo alla descrizione dei passi dell'algoritmo di eliminazione supponendo che la matrice non sia nulla.

(1) identifico la prima colonna $\neq 0$, e faccio scambi di righe finché in tale colonna c'è un elemento $\neq 0$ nella prima riga. Tale elemento sarà il primo pivot p_1;
(2) faccio operazioni elementari in modo tale da annullare tutti gli elementi sotto p_1 sulla stessa colonna;
(3) se la sottomatrice complementare della riga contenente p_1 non è nulla, riapplico ad essa i passi precedenti;
(4) continuo a produrre righe contenenti pivot in questo modo, fino a che ho esaurito la matrice di partenza oppure la sottomatrice complementare delle righe contenenti i pivot è la matrice nulla.

La matrice A' a gradini ottenuta dalla matrice A tramite questo algoritmo ha $r \leq \min(m, n)$ pivot. Il numero $r = r(A)$ è detto *rango* di A. Vedremo più in là che esso non dipende dalla (non unica!) successione di operazioni fatte per costruire la matrice A' a partire da A. Nel caso in cui A sia la matrice nulla, definiamo $r(A) = 0$.

ESEMPIO. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3 - 3R1]{R2 \to R2 - R1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Il sistema iniziale non ha soluzioni perché l'ultima equazione dell'ultimo sistema, equivalente al primo, chiaramente non ne ha.

L'esempio precedente suggerisce la seguente

OSSERVAZIONE. Un sistema con matrice a gradini è impossibile se e solo se c'è un pivot nell'ultima colonna. Infatti, se c'è un pivot nell'ultima colonna è ovvio che il sistema non ha soluzioni, mentre se nessun pivot è nell'ultima colonna, possiamo sempre trovare delle soluzioni, risolvendo le equazioni rispetto alle incognite che hanno i pivot come coefficienti, e considerando le altre come "variabili libere".

Possiamo sempre scrivere la matrice M di un sistema nella forma $M = (A|B)$, dove B è la colonna dei termini noti. La matrice A è a volte detta *matrice incompleta* del sistema, e la matrice M *matrice completa*. Chiaramente, la forma a gradini di $M = (A|B)$ avrà un pivot nell'ultima colonna se e solo se $r(A) \neq r(M)$. Quando vale l'uguaglianza, le variabili libere di una matrici a gradini ottenuta applicando l'algoritmo di eliminazione sono $n - r$, dove n è il numero di incognite. In questo caso diciamo che il sistema *ha* ∞^{n-r} *soluzioni*. Notiamo che quando $n - r > 0$ il sistema ammette infinite soluzioni, mentre quando $n - r = 0$, ovvero quando il rango della matrice del sistema è uguale al numero di incognite, non ci sono variabili libere e dunque il sistema ha un'unica soluzione. Questo mostra, in particolare, che la tricotomia fondamentale vale per qualunque sistema lineare. Dunque, supponendo che il rango di una matrice sia indipendente dalla successione di operazioni che la trasformano in una matrice a gradini, abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA 3.2 (Rouché-Capelli). *Un sistema lineare con matrice $M = (A|B)$ ha soluzioni se e solo se $r(A) = r(M)$. Quando esistono, le soluzioni sono ∞^{n-r}, dove n è il numero di incognite e $r = r(A) = r(M)$. Inoltre, esiste un'unica soluzione se e solo se $n = r$.*

ESEMPIO. Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Vogliamo determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + (k+1)y + z = 3 \\ 2x + (k+2)y + z = k + 2 \end{cases}$$

per tutti i valori di $k \in \mathbb{K}$ per i quali ne ammette. Applichiamo l'eliminazione:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & k+1 & 1 & 3 \\ 2 & k+2 & 1 & k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3 - 2R1]{R2 \to R2 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 3$ il rango di $M = (A|B)$ è maggiore del rango di A, quindi il sistema non ha soluzioni. Se $k = 3$ abbiamo $r(M) = r(A) = 2$, e il sistema ammette $\infty^{3-2=1}$ soluzioni, che si ottengono risolvendo l'ultimo sistema ponendo $k = 3$ e scegliendo la z come variabile libera. Si ottiene $y = -z/3 + 1/3$ e $x = 5/3 + z/3$, quindi l'insieme delle soluzioni del sistema per $k = 3$ è

$$\{(5/3 + h/3, 1/3 - h/3, h) \mid h \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^3.$$

ESEMPIO. Vogliamo discutere il seguente sistema al variare di $h \in \mathbb{K}$ e risolverlo quando è possibile:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ hx - y = -1 \\ 4x + y = 1 + h \end{cases}$$

Applichiamo l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ h & -1 & -1\\ 4 & 1 & h+1\end{pmatrix} \xrightarrow[R3\to R3-4R1]{R2\to R2-hR1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1-h & -1-2h\\ 0 & -3 & h-7\end{pmatrix} \xrightarrow[R2\leftrightarrow R3]{R2\to -R2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & h-7\\ 0 & 1+h & 1+2h\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3\to R3+\frac{1}{3}(h+1)R2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & h-7\\ 0 & 0 & (h^2-4)/3\end{pmatrix}$$

La matrice a gradini ha un pivot nell'ultima colonna se e solo se $h \neq \pm 2$. Quindi il sistema ha soluzioni se e solo se $h = \pm 2$, e in tali casi ha soluzione unica. Per $h = 2$ dall'ultimo sistema si ottiene $y = 5/3$ e $x = 1/3$, mentre per $h = -2$ si ottiene $y = 3$ e $x = -1$.

ESEMPIO. Vogliamo determinare le soluzioni di

$$\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 1\\ (t-1)y + tz = 1\\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{K}$. Applichiamo l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix}-t & t-1 & 1 & 1\\ 0 & t-1 & t & 1\\ 2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{R1\leftrightarrow R3} \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & t-1 & t & 1\\ -t & t-1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3+\frac{t}{2}R1} \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & t-1 & t & 1\\ 0 & t-1 & 1+t/2 & 1+5t/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3\to R3-R1} \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & t-1 & t & 1\\ 0 & 0 & 1-t/2 & 5t/2\end{pmatrix}$$

Quindi se $t \neq 1, 2$ il sistema ammette un'unica soluzione, data da $x = 5(t-1)/(t-2)$, $y = (2-t-5t^2)/(2-t)(t-1)$, $z = 5t/(2-t)$. Se $t = 2$ l'ultima matrice diventa

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

che è a gradini e quindi concludiamo che il sistema non ammette soluzioni. Poiché sostituendo $t = 1$ nell'ultima matrice non otteniamo una matrice a gradini, continuiamo l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1/2 & 5/2\end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3-\frac{1}{2}R1} \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema non ha soluzioni neanche per $t = 2$.

ESEMPIO. Vogliamo discutere, al variare di $h \in \mathbb{K}$ e risolvere, quando possibile, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + (h+1)y + z = 2 + h\\ (h+3)y + z = 2h^2\\ x + (5+h)y + (1+h)z = 6 - h \end{cases}$$

Applichiamo l'eliminazione (scambiando ad un certo punto la seconda e la terza colonna, ovvero y e z):

$$\begin{pmatrix} 1 & h+1 & 1 & 2+h \\ 0 & h+3 & 1 & 2h^2 \\ 1 & 5+h & 1+h & 6-h \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R1} \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 1 & 2+h \\ 0 & h+3 & 1 & 2h^2 \\ 0 & 4 & h & 4-2h \end{pmatrix} \xrightarrow{C2 \leftrightarrow C3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & h+1 & 2+h \\ 0 & 1 & h+3 & 2h^2 \\ 0 & h & 4 & 4-2h \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3 \to R3 - hR2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & h+1 & 2+h \\ 0 & 1 & h+3 & 2h^2 \\ 0 & 0 & 4-3h-h^2 & 4-2h-2h^3 \end{pmatrix}$$

Poiché $4-3h-h^2 = (1-h)(h+4)$ e $4-2h-2h^3 = (1-h)(4+2h+2h^2)$ si annulla per $h=1$ ma non per $h=-4$, vediamo che il sistema ha soluzione unica per $h \neq 1, -4$, ha ∞^1 soluzioni per $h=1$ e nessuna soluzione per $h=-4$. Per ricavare le soluzioni quando $h \neq 1, -4$ bisogna risolvere la terza equazione rispetto ad y (ricordiamoci che, avendo scambiato la seconda e terza colonna del sistema, la y e la z originali risultano scambiate!). Si ottiene $y = (2h^2+2h+4)/(h+4)$, e sostituendo nelle altre equazioni si ricava, dopo alcuni calcoli, $z = -(8h+6)/(h+4)$ e $x = -(2h^3+3h^2-8h-10)/(h+4)$. Quando $h=1$ si considera z come variabile libera, dalla seconda equazione si ricava $y = -4z+2$ e dalla prima $x = -2z-y+3 = 2z+1$. Quindi, ricordandosi di scambiare seconda e terza coordinata, per $h=1$ l'insieme delle soluzioni è dato da

$$\{(2k+1, k, 2-4k) \mid k \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^3.$$

Esercizi

(1) Applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per ridurre a gradini le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} -3y+2z=-1 \\ 2x+y=0 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3y+z=-2 \\ -x-y-3z=-1 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-2y+2z=1 \\ -3y-3z=1 \\ -2x-y+z=-1 \end{cases}$$

(3) Applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x+3y-z-w=0 \\ y+z+w=0 \\ 2x-y+3z-w=0 \\ 2y+2y+2w=0 \end{cases}$$

(4) Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli stabilire, per ogni $k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, se il

seguente sistema ammette una, nessuna o infinite soluzioni:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + kz = 0 \end{cases}$$

(5) Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli stabilire, per ogni $k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, se il seguente sistema ammette una, nessuna o infinite soluzioni:

$$\begin{cases} kx + 2y + 2z = k \\ 2x + 2y = 2 \\ 2x + ky + 2z = 3 \end{cases}$$

(6) Considerare, al variare del parametro $k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -kx + 3z = 3 - k \\ -x - y = -1 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni del sistema per ogni $k \in \mathbb{K}$.

(7) Risolvere il seguente sistema lineare al variare di $a, b \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

$$\begin{cases} 2x + y = b \\ -ax + 3y = -1 \end{cases}$$

(8) Considerare, al variare del parametro $k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -kx + y - (2k+1)z = -2k \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + (k+3)z = k + 2 \end{cases}$$

(a) calcolare il rango della matrice incompleta del sistema per ogni k;
(b) calcolare il rango della matrice completa del sistema per ogni k;
(c) determinare l'insieme $S_k \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema per ogni k.

(9) Considerare, al variare di $k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + y + kz + w = 1 \\ kx + ky - z + 2w = -4 \\ kx + y - z = 0 \\ 2kx + 2y - 2z + (k^2 - 4)w = k - 2 \end{cases} .$$

(a) calcolare, al variare di k, il rango della matrice completa e quello della matrice incompleta del sistema;
(b) determinare, al variare di k, se il sistema ammette una, nessuna o infinite soluzioni;
(c) determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema per i k tali che S_k è infinito.

Soluzioni degli esercizi

(1) Possibili matrici a gradini (non le uniche soluzioni):

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -9 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49}{10} \end{pmatrix}$$

(2) Insiemi di soluzioni:

$$\left\{\begin{pmatrix} -1/11 \\ 2/11 \\ -5/22 \end{pmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{pmatrix} 13/19 \\ 12/19 \\ -2/19 \end{pmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}\right\}$$

(3) Insieme di soluzioni:

$$\left\{\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K}\right\}$$

(4) Soluzione unica per $k \neq 5/4$, nessuna soluzione per $k = 5/4$.

(5) Soluzione unica per $k \neq 2$, nessuna soluzione per $k = 2$.

(6) Il sistema ammette l'unica soluzione $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1-k/2 \end{pmatrix}$ per ogni $k \in \mathbb{K}$.

(7) Se $a \neq -6$ il sistema ammette l'unica soluzione $\dfrac{1}{a+6}\begin{pmatrix} 3b+1 \\ ab-2 \end{pmatrix}$. Se $a = -6$ e $b \neq -1/3$ il sistema non ha soluzioni. Se $a = -6$ e $b = -1/3$ il sistema ammette le infinite soluzioni $\{\begin{pmatrix} -t/2-1/6 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K}\}$.

(8) (a) 3 per $k \neq -1, 2$, e 2 altrimenti; (b) il rango della matrice completa è sempre uguale a quello della matrice incompleta; (c) $S_k = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ per ogni $k \neq -1, 2$, $S_{-1} = \{\begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{\begin{pmatrix} 3(1-\lambda) \\ 2-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(9) (a) Siano A_k e B_k rispettivamente le matrici incompleta e completa. Se $k \notin \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ entrambe A_k e B_k hanno rango 4, $\mathrm{rg}(A_{-2}) = 3$ e $\mathrm{rg}(B_{-2}) = 4$, $\mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(B_2) = 3$, $\mathrm{rg}(A_0) = 3$, $\mathrm{rg}(B_0) = 4$, $\mathrm{rg}(A_{-1}) = \mathrm{rg}(B_{-1}) = 3$, $\mathrm{rg}(A_1) = 3$, $\mathrm{rg}(B_1) = 4$; (b) unica soluzione per $k \notin \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, nessuna soluzione per $k \in \{-2, 0, 1\}$, infinite soluzioni per $k \in \{-1, 2\}$; (c) $S_{-1} = \{\begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 3 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{\begin{pmatrix} 3-5\lambda \\ -6+12\lambda \\ 2\lambda \\ 1-6\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

CAPITOLO 4

Spazi vettoriali

1. La struttura di spazio vettoriale

Sappiamo che, essendo $\mathbb{C}$ un campo, la coppia $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo abeliano. Osserviamo che se identifichiamo i numeri complessi con i punti del piano dotato di un sistema di coordinate, ed i punti del piano a loro volta con dei segmenti orientati (vettori elementari), l'operazione di somma $+\colon\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si può definire geometricamente tramite la costruzione del parallelogramma.

Osserviamo che per ogni $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ esiste un'applicazione

$$\mathbb{K} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (k, z) \mapsto kz,$$

dove il prodotto kz non è altro che il prodotto tra k e z come numeri complessi. Usando di nuovo il fatto che $\mathbb{C}$ è un campo si vede subito che questa "operazione" soddisfa le proprietà:

(1) $k(z + w) = kz + kw$ per ogni $k \in \mathbb{K}, z, w \in \mathbb{C}$,
(2) $(h + k)z = hz + kz$ per ogni $h, k \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{C}$,
(3) $h(kz) = (hk)z$ per ogni $h, k \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{C}$,
(4) $1 \cdot z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Abbiamo inoltre che il modulo di kz è pari, per le proprietà del modulo, a $|k|$ per il modulo di z. La lunghezza del segmento associato a z viene quindi "riscalata" di $|k|$ quando z viene moltiplicato per k. Per questo motivo, quando i numeri di $\mathbb{K}$ vengono usati in questo modo, ci si riferisce ad essi come "scalari". Riassumendo, abbiamo osservato che su $\mathbb{C}$, oltre alla somma ordinaria che lo rende un gruppo Abeliano, è presente un "prodotto per scalari".

Il fatto che, come abbiamo visto a suo tempo, $\mathbb{C}$ si possa identificare con $\mathbb{R}^2$ usando la parte reale e la parte immaginaria di ogni numero complesso suggerisce di generalizzare la struttura appena evidenziata su $\mathbb{C}$ a tutti gli insiemi $\mathbb{K}^n$ con $n \geq 1$. Infatti, consideriamo su $\mathbb{K}^n = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid k_i \in \mathbb{K}\}$ la *somma* $+\colon\ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ data da

$$(h_1, \ldots, h_n) + (k_1, \ldots, k_n) = (h_1 + k_1, \ldots, h_n + k_n), \quad h_i, k_i \in \mathbb{K}.$$

ESEMPIO. $(1, 2, -1) + (5, 0, 2) = (6, 2, 1)$.

Analogamente, possiamo definire il *prodotto per scalari* $\cdot\colon\ \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ponendo

$$h \cdot (k_1, \ldots, k_n) = (hk_1, \ldots, hk_n), \quad h, k_i \in \mathbb{K}.$$

ESEMPIO. $(-2) \cdot (0, 1, 5) = (0, -2, -10)$.

È facile verificare che $(\mathbb{K}^n, +)$ è un gruppo Abeliano. Infatti, questa operazione gode delle proprietà associativa e commutativa perchè è definita, componente per componente, tramite la somma su $\mathbb{K}$, la quale gode di tali proprietà. Inoltre, $(0, \ldots, 0)$ è chiaramente neutro per questa operazione. Lo indicheremo semplicemente con 0 quando non vi sia pericolo di confusione. Infine, l'opposto di $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ è chiaramente $(-k_1, \ldots, -k_n)$. Il prodotto per scalari gode delle proprietà analoghe a quelle già incontrate per il prodotto per scalari su $\mathbb{C}$. Generalizzando ancora, arriviamo alla seguente

DEFINIZIONE. Uno *spazio vettoriale* sul campo $\mathbb{K}$ è un gruppo Abeliano $(V, +)$ dotato di un'applicazione "prodotto per scalari" $\cdot\colon\ \mathbb{K} \times V \to V$ tale che:

(1) $k \cdot (v + w) = k \cdot z + kw$ per ogni $k \in \mathbb{K}, v, w \in V$,
(2) $(h + k) \cdot v = h \cdot v + k \cdot v$ per ogni $h, k \in \mathbb{K}, v \in V$,
(3) $h \cdot (k \cdot v) = (hk) \cdot v$ per ogni $h, k \in \mathbb{K}, v \in V$,
(4) $1 \cdot v = v$ per ogni $v \in V$.

OSSERVAZIONE. Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ è l'elemento neutro di $\mathbb{K}$ rispetto alla somma, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$0_{\mathbb{K}}v = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})v = 0_{\mathbb{K}}v + 0_{\mathbb{K}}v \quad \Longrightarrow \quad 0_{\mathbb{K}}v = 0_V.$$

I seguenti sono esempi di spazi vettoriali:

(1) $\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ come casi particolari di $\mathbb{K}^n$;
(2) $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$;
(3) $\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ con la somma usuale e il prodotto per elementi di $\mathbb{K}$ definito pensando tali elementi come polinomi di grado 0. Ad esempio, se $p(x) = 2 - x^2$, $q(x) = 1 + x + x^2$, $p(x) + q(x) = 3 + x$ e $(-3) \cdot p(x) = -6 + 3x^2$;
(4) $\mathbb{K}[x]_{\leq d} = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(p(x)) \leq d\}$, $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
(5) $C_0(\mathbb{R}) = \{f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ è continua$\}$, con le operazioni date da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (rf)(x) = rf(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

per ogni $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ e $r \in \mathbb{R}$;
(6) $C_k(\mathbb{R}) = \{f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ è derivabile k volte con $f^{(k)}$ continua$\}$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, con le stesse operazioni di $C_0(\mathbb{R})$;
(7) $V = \{(0, \ldots, 0)\} \subset \mathbb{K}^n$;
(8) $\mathbb{K}^{m,n} = \{$matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}\}$, con somma data da

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \quad \Longrightarrow \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

e prodotto per scalari dato da

$$k \in \mathbb{K},\ A = (a_{ij}) \quad \Longrightarrow \quad kA = (ka_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Ad esempio, se $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ allora $A + B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $2 \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Osserviamo che, dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ ed n vettori $v_1, \ldots, v \in V$, il modo più generale per creare un altro vettore con le operazioni a nostra disposizione è formare una *combinazione lineare*

$$k_1v_1 + \cdots + k_nv_n \in V, \quad k_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n.$$

Il concetto di combinazione lineare ci permette di riformulare il problema della risoluzione di un sistema lineare in termini più astratti. Consideriamo il seguente

ESEMPIO. Ci chiediamo se il vettore $\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2$ è combinazione lineare di $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}\right)$. Dovrebbero esistere $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ tali che

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\x_1 + 2x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Questa uguaglianza tra vettori equivale all'uguaglianza delle loro componenti, e ciò equivale al fatto che (x_1, x_2) sia soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Generalizzando l'esempio, possiamo porci il problema se un dato vettore

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

sia uguale ad una combinazione lineare

$$k_1A^1 + \cdots + k_nA^n, \quad k_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

dove

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Per le definizioni delle operazioni su $\mathbb{K}^m$ sappiamo che

$$k_1A^1 + \cdots + k_nA^n = \begin{pmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{2n} \\ \vdots \\ k_ma_{m1} + k_2a_{m2} + \cdots + k_na_{mn} \end{pmatrix}.$$

Quindi l'uguaglianza $k_1A^1 + \cdots + k_nA^n = B$ equivale a dire che la ennupla di coefficienti $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{K}$ della combinazione lineare è una soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2. Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dati $v_1, \ldots, v_n \in V$, consideriamo il sottoinsieme di V dato da tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \ldots, v_n$:

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{k_1v_1 + \cdots + k_nv_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}\} \subset V$$

ESEMPIO. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{K}^3$. Allora

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \{k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{K}\} = \{\begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 - k_2 \\ 3k_1 + k_2 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^3$$

Il sottoinsieme $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset V$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari:

$$(h_1v_1 + \cdots + h_nv_n) + (k_1v_1 + \cdots + k_nv_n) = (h_1 + k_1)v_1 + \cdots + (h_n + k_n)v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$
$$k(h_1v_1 + \cdots + h_nv_n) = (kh_1)v_1 + \cdots + (kh_n)v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Quindi $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset V$ è anch'esso uno spazio vettoriale: abbiamo scoperto un modo di costruire moltissimi nuovi spazi vettoriali.

DEFINIZIONE. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Un sottoinsieme non vuoto $W \subset V$ si dice *sottospazio vettoriale* (o più brevemente *sottospazio*) se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari su V. Dati $v_1, \dots, v_k \in V$, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ è detto il *sottospazio generato* da $v_1, \dots, v_k$.

ESERCIZIO. Mostrare che $W \subset V$ è un sottospazio dello spazio vettoriale V se e solo se, comunque presi $w_1, w_2 \in W$ allora $k_1w_1 + k_2w_2 \in W$ per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$.

OSSERVAZIONE. Un sottospazio vettoriale $W \subset V$ contiene sempre 0_V. Infatti, essendo chiuso rispetto al prodotto per scalari, per ogni $w \in W$ abbiamo $0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot w \in W$.

ESEMPIO. Il sottoinsieme

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \mid \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \} \subset \mathbb{K}^2$$

non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^2$ perché non contiene $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Lo stesso si può dire di ogni sottoinsieme di $\mathbb{K}^n$ definito da un sistema lineare non omogeneo.

ESEMPIO. Il sottoinsieme $U = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{K}^2$ contiene $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ma non è un sottospazio perché $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in U$ ma $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \notin U$.

ESEMPI. (1) $\{(0, \dots, 0)\}$ e $\mathbb{K}^n$ sono sottospazi di $\mathbb{K}^n$;
(2) l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$;
(3) $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ è un sottospazio di $\mathbb{K}[x]$ per ogni $d \geq 0$;
(4) $C_k(\mathbb{R})$ è un sottospazio di $C_0(\mathbb{R})$ per ogni $k \geq 0$;
(5) La *matrice trasposta* di una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è la matrice ${}^tA$ ottenuta da A scambiandone le righe con le colonne. Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $A = {}^tA$ si dice *simmetrica*. Il sottoinsieme $S(n, \mathbb{K})$ delle matrici simmetriche dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n,n}$, dato da

$$S(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} \mid A = {}^tA\} \subset \mathbb{K}^{n,n},$$

è un sottospazio di $\mathbb{K}^{n,n}$.

ESEMPIO. Consideriamo l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x - 2y + z + w = 0 \\ x + y - z + 2w = 0 \end{cases}$$

Con l'eliminazione otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2-R1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $y = \frac{1}{3}(2z - w)$ e $x = 2y - z - w = \frac{4}{3}z - \frac{2}{3}w - z - w = \frac{1}{3}(z - 5w)$. L'insieme delle soluzioni si può scrivere quindi:

$$\left\{ \begin{pmatrix} (z-5w)/3 \\ (2z-w)/3 \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -5 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{K}^4.$$

OSSERVAZIONE. Ragionando come nell'esempio precedente si può mostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{K}^n$ definito da un sistema lineare omogeneo è il sottospazio generato da un numero finito di vettori. Infatti, tali vettori si possono determinare tramite l'algoritmo di eliminazione come nell'esempio.

ESEMPIO. Vogliamo stabilire quale dei vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$ appartiene al sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero è combinazione lineare dei tre vettori dati. Il sistema

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}$. Applicando l'eliminazione otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3-R1]{R2 \to R2-R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 2 & -1 & c-a \\ 0 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow[R4 \to R4+R2]{R3 \to R2+2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & -3a+2b+c \\ 0 & 0 & 1 & -a+b+d \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R4 \to R4+R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & -3a+2b+c \\ 0 & 0 & 0 & -4a+3b+c+d \end{pmatrix}$$

Il sistema ha soluzioni se e solo se non c'è un pivot nell'ultima colonna, quindi se e solo se $-4a + 3b + c + d = 0$. Possiamo quindi concludere che

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid -4x + 3y + z + w = 0 \right\}.$$

Tra i vettori v_i, solo $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ha coordinate che soddisfano l'equazione $-4x+3y+z+w = 0$, quindi è il vettore cercato.

ESEMPIO. Vogliamo stabilire quale delle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$ appartiene al sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ovvero è combinazione lineare dei tre vettori dati. Osserviamo che le componenti delle cinque matrici A_i coincidono con le componenti dei vettori v_i dell'esempio precedente. Inoltre, l'uguaglianza di matrici

$$x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

equivale, eguagliando le componenti, al sistema lineare

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

che è esattamente lo stesso dell'esempio precedente, nel quale abbiamo verificato che affinché il sistema abbia soluzioni è necessario e sufficiente che $-4a+3b+c+d=0$. Questo implica che, tra le matrici A_i, l'unica che che appartiene al sottospazio è A_1.

ESEMPIO. Vogliamo stabilire quale dei polinomi $p_1(t)=t-t^2-2t^3, p_2(t)=-t+t^2-2t^3, p_3(t)=1-t^2-2t^3, p_4(t)=t-t^2+2t^3, p_5(t)=-1+t-2t^3 \in \mathbb{K}[t]_{\leq 3}$ appartiene al sottospazio generato da $1+t+t^2$, $-t+2t^2+t^3$ e $1+t+t^3$, ovvero è combinazione lineare dei tre vettori dati. Osserviamo che i coefficienti dei cinque polinomi $p_i(t)$ coincidono con le componenti dei vettori v_i e delle matrici A_i dei due esempi precedenti. Inoltre, l'uguaglianza di polinomi

$$x(1+t+t^2)+y(-t+2t^2+t^3)+z(1+t+t^3)=a+bt+ct^2+dt^3$$

equivale, eguagliando i coefficienti, al sistema lineare

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

che è esattamente lo stesso deli due esempi precedenti. Quindi anche in questo caso che affinché il sistema abbia soluzioni è necessario e sufficiente che $-4a+3b+c+d=0$. Possiamo concludere che che, tra i polinomi $p_i(t)$, l'unico che che appartiene al sottospazio è $p_1(t)$.

ESEMPIO. Siano $v_1=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}$ e $v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^3$. Vogliamo stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false: (a) $v_1\in\langle v_3,v_4\rangle$, (b) $v_2\in\langle v_3,v_4\rangle$, (c) $v_1\in\langle v_2,v_3\rangle$, (d) $v_4\in\langle v_2,v_3\rangle$. Riguardo ad (a) osserviamo che se, ad esempio, $v_1=av_3+bv_4$ allora abbiamo $v_1-a_v3-bv_4=0$, ovvero esiste una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei vettori v_1, v_3 e v_4 che dà il vettore nullo. La stessa considerazione si applica per (b), (c) e (d). Questo ci porta a chiederci, in generale, quali combinazioni lineari non nulle di v_1, v_2, v_3 e v_4 diano il vettore nullo. Consideriamo quindi il sistema lineare omogeneo associato alla matrice le cui colonne sono i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4. Applicando l'eliminazione otteniamo:

$$\begin{pmatrix}0&1&-3&1\\2&0&4&-1\\-1&1&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R1\leftrightarrow R3}\begin{pmatrix}-1&1&-5&0\\2&0&4&-1\\0&1&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R2\to R2+2R1}\begin{pmatrix}-1&1&-5&0\\0&2&-6&-1\\0&1&-3&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R2\leftrightarrow R3}\begin{pmatrix}-1&1&-5&0\\0&1&-3&1\\0&2&-6&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R3\to R3-2R2}\begin{pmatrix}-1&1&-5&0\\0&1&-3&1\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema otteniamo $w=0$, $y=3z$ e $x=-2z$. Quindi concludiamo che

$$S=\{\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^4 \mid k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3+k_4v_4=0\}=\{\begin{pmatrix}-2k\\3k\\k\\0\end{pmatrix}\mid k\in\mathbb{K}\}.$$

Questo mostra, in particolare, che qualunque combinazione lineare dei vettori v_1,v_2,v_3 e v_4 che dà il vettore nullo è "multipla" della combinazione lineare $-2v_1+3v_2+v_3$. Ora consideriamo una per una le affermazioni del testo: (a) Se $v_1=av_3+bv_4$ allora $\begin{pmatrix}1\\0\\-a\\-b\end{pmatrix}\in S$, ovvero $\begin{pmatrix}1\\0\\-a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k\\3k\\k\\0\end{pmatrix}$ per qualche $k\in\mathbb{K}$, che è impossibile. (b) Se $v_2=av_3+bv_4$ allora $\begin{pmatrix}0\\1\\-a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k\\3k\\k\\0\end{pmatrix}$, che è di nuovo impossibile. (c) Se $v_1=av_2+bv_3$ allora $\begin{pmatrix}1\\-a\\-b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k\\3k\\k\\0\end{pmatrix}$, il che implica $k=-1/2$, $a=3/2$ e $b=1/2$. Infatti $v_1=\frac{3}{2}v_2+\frac{1}{2}v_3\in\langle v_2,v_3\rangle$. (d) Se $v_4=av_2+bv_3$ allora $\begin{pmatrix}0\\-a\\-b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k\\3k\\k\\0\end{pmatrix}$, che è impossibile.

3. Insiemi di generatori, basi e dimensione

ESEMPIO. Ogni vettore di $\mathbb{K}^2$ è combinazione lineare di $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ed $e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, ogni polinomio di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ combinazione lineare di 1, x e x^2, e ogni matrice di $\mathbb{K}^{2,2}$ combinazione lineare di $E(1,1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $E(1,2) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $E(2,1) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ ed $E(2,2) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Infatti,

$$\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right) = a\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + b\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),$$

$$a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2,$$

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) = a\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) + b\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) + c\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) + d\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right).$$

Quindi $\langle e_1, e_2\rangle = \mathbb{K}^2$, $\langle 1, x, x^2\rangle = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ e $\langle E(i,j),\ i,j = 1,2\rangle = \mathbb{K}^{2,2}$.

DEFINIZIONE. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è un *insieme di generatori* per V se ogni vettore $v \in V$ è uguale ad una combinazione lineare di un numero finito di vettori appartenenti ad S. In altre parole, se per ogni $v \in V$ esistono $v_1, \ldots, v_k \in S$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = v$. Quando esiste un insieme di generatori finito di V, si dice che V è finitamente generato.

ESEMPI. I seguenti sono esempi di insiemi di generatori:

(1)
$$\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{K}^n;$$

(2)
$$\{1, x, x^2, \ldots\} \subset \mathbb{K}[x];$$

(3)
$$\{1, x, \ldots, x^d\} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq d};$$

(4)
$$\{E(i,j), i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{K}^{m,n},$$

dove $E(i,j)$ è la matrice $m \times n$ che ha 1 nella posizione (i,j) e zeri altrove. Le matrici $E(i,j)$ sono dette *monomiali*;

(5)
$$\{E(i,i), i = 1, \ldots, n\} \cup \{E(i,j) + E(j,i) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset S(n),$$

dove $S(n, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n,n}$ è lo spazio delle matrici simmetriche $n \times n$.

ESEMPIO. I vettori $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ e $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}5\\7\end{smallmatrix}\right)$ sono generatori di $\mathbb{K}^2$. Mostriamo che, dato qualunque $v = \left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2$, esistono infinite terne di coefficienti $(x, y, z) \in \mathbb{K}$ tali che $xv_1 + yv_2 + zv_3 = v$. Passando alle componenti dei vettori si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + y + 5z = a \\ x - y + 7z = b. \end{cases}$$

Applicando l'eliminazione otteniamo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & a\\ 1 & -1 & 7 & b\end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 - R1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & a\\ 0 & -2 & 2 & b-a\end{pmatrix},$$

quindi $y = (a-b)/2 + z$ e $x = -y - 5z + a = (b-a)/2 - z - 5z + a = -6z + (a+b)/4$. Dunque per ogni $z \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-6z + (a+b)/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z + (a-b)/2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che ogni vettore di $\mathbb{K}^2$ è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 in infiniti modi diversi. In particolare, sostituendo $z = 0$ nella formula precedente otteniamo

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2} v_1 + \frac{a-b}{2} v_2.$$

Quindi ogni vettore di $\mathbb{K}^2$ è combinazione lineare di v_1 e v_2. Inoltre, la formula applicata a v_3, ovvero per $a = 5$ e $b = 7$, fornisce l'uguaglianza $v_3 = 6v_1 - v_2$. Allora, per ogni $x, y, z \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = xv_1 + yv_2 + z(6v_1 - v_2) = (x + 6z)v_1 + (y - z)v_2.$$

Dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{K}^2$ perché $\{v_1, v_2\}$ è già un insieme di generatori: l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è quindi in un certo senso "inefficiente" perché ridondante.

L'esempio precedente ci spinge a chiederci come fare per trovare insiemi di generatori "efficienti". L'esempio ci insegna che una condizione da richiedere è che nessuno dei vettori v_i sia combinazione lineare degli altri. La seguente definizione identifica proprio gli insiemi di vettori che ci interessano.

DEFINIZIONE. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Dei vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono scalari non tutti nulli $k_1, \ldots, k_m$ tali che $k_1v_1 + \cdots + k_mv_m = 0$. Nel caso in cui l'ultima uguaglianza sia ottenibile solamente scegliendo $k_1 = \cdots = k_m = 0$, i vettori $v_1, \ldots, v_m$ si dicono *linearmente indipendenti*.

OSSERVAZIONE. $v_1, \ldots, v_m \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri. Infatti, se $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$, allora $a_1v_1 + \cdots - v_i + \cdots + a_mv_m = 0$, quindi i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti. Viceversa, se sono linearmente dipendenti allora $k_1v_1 + \cdots + k_mv_m = 0$ con $k_i \neq 0$ per qualche i, e $v_i = -\frac{1}{k_i} \sum_{j \neq i} k_j v_j$ è combinazione lineare degli altri vettori.

ESEMPIO. I vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^2$. Infatti,

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + 3k_2 \\ -2k_1 + 4k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica che (k_1, k_2) è soluzione del sistema omogeneo con matrice associata $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sommando due volte la prima riga alla seconda si ottiene $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, quindi l'unica soluzione del sistema è $(0, 0)$. Per verificare se gli stessi vettori sono generatori di $\mathbb{K}^2$, dato $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2$ cerchiamo $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tali che

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + 3k_2 \\ -2k_1 + 4k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Adesso il sistema risultante ha matrice associata $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & 4 & b \end{smallmatrix}\right)$ e sommando due volte la prima riga alla seconda si ottiene $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 10 & 2a+b \end{smallmatrix}\right)$. La soluzione unica è data da $((4a-3b)/10, (2a+b)/10)$, e quindi ogni vettore di $\mathbb{K}^2$ si scrive *in modo unico* come combinazione lineare di $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

DEFINIZIONE. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un insieme non vuoto di vettori $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ è una *base* di V se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V linearmente indipendenti. Lo spazio vettoriale banale $\{0\}$ non ha basi.

ESEMPI. (1) I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{K}^n$ costituiscono la sua *base canonica* (verificare per esercizio che sono linearmente indipendenti);

(2) $\mathbb{K}[x]$ non ha una base finita. Infatti, un fissato insieme finito di polinomi $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{K}[x]$ non può generare polinomi qualunque grado, perché

$$\deg(x_1 p_1 + \cdots + x_m p_m) \leq \max(\deg(p_1), \ldots, \deg(p_m))$$

per ogni $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$.

(3) I polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^d$ sono una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ per ogni $d \geq 0$ (verificarlo per esercizio);

(4) Le matrici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sono una base di $\mathbb{K}^{2,2}$. Analogamente, le matrici monomiali $E(i,j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, sono una base di $\mathbb{K}^{m,n}$ (verificare entrambe le affermazioni per esercizio).

ESEMPIO. Vogliamo stabilire quale dei vettori $-x^2+4x-3, 3x-2, x^2+x+1, 2x^2+x$ forma, insieme con $p_1(x) = x^2+2x-1$ e $p_2(x) = x^2-x+1$, una base dello spazio di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più due. Dobbiamo intanto escludere i vettori che sono combinazioni lineari di x^2+2x-1 e x^2-x+1, ovvero della forma

$$a(x^2+2x-1) + b(x^2-x+1) = (a+b)x^2 + (2a-b)x + (-a+b).$$

Affinché un vettore $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sia di questa forma bisogna avere

$$\begin{cases} a+b = \alpha \\ 2a-b = \beta \\ -a+b = \gamma. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -1 & \beta \\ -1 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3+R1]{R2 \to R2-2R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -3 & -2\alpha+\beta \\ 0 & 2 & \alpha+\gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3+\frac{2}{3}R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -3 & -2\alpha+\beta \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

Imponendo che non ci sia un pivot nell'ultima colonna otteniamo

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \langle x^2+2x-1, x^2-x+1 \rangle \quad \text{se e solo se} \quad -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0.$$

L'unico polinomio tra quelli dati che non soddisfa questa condizione è $p_3(x) = x^2+x+1$, quindi deve essere il polinomio cercato. Per verificarlo osserviamo che l'uguaglianza

$$a(x^2+2x-1) + b(x^2-x+1) + c(x^2+x+1) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} a+b+c=\alpha \\ 2a-b+c=\beta \\ -a+b+c=\gamma. \end{cases}$$

Il procedimento di eliminazione è simile al precedente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 & \beta \\ -1 & 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[R3\to R3+R1]{R2\to R2-2R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -3 & -1 & -2\alpha+\beta \\ 0 & 2 & 2 & \alpha+\gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3+\frac{2}{3}R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -3 & -1 & -2\alpha+\beta \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

Questo mostra esattamente che ogni vettore di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori p_1, p_2, p_3, i quali sono quindi generatori. Inoltre, poiché la scrittura è unica, il vettore zero si può scrivere soltanto come la combinazione lineare nulla, pertanto i p_i sono linearmente indipendenti, cioè una base.

PROPOSIZIONE 4.1 (Esistenza delle coordinate). *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Allora ogni vettore di V si scrive* in modo unico *come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$.*

DIMOSTRAZIONE. Se v si scrivesse in due modi come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ avremmo

$$v = k_1v_1 + \cdots + k_nv_n \quad \text{e} \quad v = k'_1v_1 + \cdots + k'_nv_n.$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima e raccogliendo si otterrebbe

$$0 = (k_1 - k'_1)v_1 + \cdots + (k_n - k'_n)v_n,$$

e dunque $k_i = k'_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, perché i vettori v_i sono linearmente indipendenti. □

DEFINIZIONE. Data una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, indicheremo con $x_B \colon V \to \mathbb{K}^n$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in V$ l'unica n-upla $x_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. La chiameremo n-upla delle *coordinate di v rispetto alla base B.*

ESEMPIO. Vogliamo determinare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$ rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Bisogna risolvere il sistema lineare

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Procediamo con l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R4\to R4-R1]{R3\to R3-R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3+R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R4\to R4-\frac{1}{2}R3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima matrice si deduce che $x_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, sia $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ un insieme di generatori e $\{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Allora $s \leq m$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché i vettori w_i sono generatori, possiamo scrivere $v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$, con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, per ogni $j = 1, \ldots, s$. Quindi una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_s$ con coefficienti $x_1, \ldots, x_s$ si può scrivere nel modo seguente:

$$\sum_{j=1}^{s} x_j v_j = \sum_{j=1}^{s} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{s} x_j a_{ij} \right) w_i.$$

Ora osserviamo che il sistema lineare omogeneo

$$\sum_{j=1}^{s} x_j a_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

ha s incognite ed m equazioni. Se per assurdo fosse $s > m$, applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice del sistema si otterrebbe una matrice a gradini con delle colonne prive di pivot. Questo implicherebbe che il sistema ha infinite soluzioni, in particolare esisterebbe una soluzione $(x_1, \ldots, x_s) \neq (0, \ldots, 0)$. Sostituendo nella prima equazione otterremmo $x_1v_1 + \cdots + x_sv_s = 0$, che è impossibile perché i vettori v_j sono linearmente indipendenti. □

COROLLARIO 4.3. *Se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ sono due basi di uno spazio vettoriale V, allora $n = m$.*

DIMOSTRAZIONE. Considerando B come un insieme di generatori e C come un insieme di vettori linearmente indipendenti, la proposizione dice che $n \geq m$. Considerando invece C come un insieme di generatori e B come un insieme di vettori linearmente indipendenti, si ottiene la disuguaglianza opposta e dunque l'uguaglianza. □

DEFINIZIONE. La *dimensione* di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ che ammette una base finita è il numero di vettori di una tale base. La denotiamo $\dim V$ oppure $\dim_{\mathbb{K}} V$. Se uno spazio vettoriale ammette una base finita allora diciamo che ha *dimensione finita*, altrimenti diciamo che ha *dimensione infinita* e scriviamo $\dim V = \infty$. Per definizione la dimensione dello spazio vettoriale banale $\{0\}$ è zero.

OSSERVAZIONE. Usando quello che abbiamo già visto, in base alla definizione di dimensione abbiamo $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$, $\dim \mathbb{K}[x]_{\leq d} = d + 1$ e $\dim \mathbb{K}^{m,n} = mn$.

OSSERVAZIONE. La proposizione 4.2 implica che in uno spazio vettoriale V di dimensione n (i) gli insiemi di vettori linearmente indipendenti hanno al più di n vettori e (ii) gli insiemi di generatori ne hanno almeno n. Questo segue subito dal fatto che ogni base di V è formata di generatori linearmente indipendenti ed è composta esattamente di n vettori. Inoltre, se $W \subset V$ è un sottospazio, segue da (i) che $\dim W \leq n$. Infatti, una base di W consiste di $\dim W$ vettori linearmente indipendenti di V, che quindi non possono essere più di n.

COROLLARIO 4.4 (completamento a base). *Se V ha dimensione finita e $v_1, \ldots, v_s \in V$ sono vettori linearmente indipendenti allora esiste una base di V che li contiene. Se $W \subset V$ è un sottospazio e* $\dim W = \dim V$ *allora $W = V$.*

DIMOSTRAZIONE. Se i vettori $v_1, \ldots, v_s$ sono generatori allora sono già una base. Altrimenti, esiste $v_{s+1} \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$. I vettori $v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}$ sono linearmente indipendenti, perché se avessimo

$$a_1v_1 + \cdots + a_sv_v + a_{s+1}v_{s+1} = 0$$

con $(a_1, \dots, a_s, a_{s+1}) \neq (0, \dots, 0)$ allora $v_{s+1} \notin \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ implicherebbe $a_{s+1} = 0$, dunque $v_1, \dots, v_s$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Ripetendo lo stesso ragionamento, se $v_1, \dots, v_{s+1}$ sono generatori abbiamo trovato la base, altrimenti possiamo aggiungere un vettore v_{s+2} ottenendo un nuovo insieme di vettori linearmente indipendenti. Poiché V ha dimensione finita, per l'ultima osservazione ogni insieme di vettori indipendenti di V consiste al massimo di $\dim V$ vettori. Quindi non possiamo continuare ad aggiungere indefinitamente vettori a $v_1, \dots, v_s$: dopo un numero finito di passi otterremo una base di V. Questo dimostra la prima parte dell'enunciato.

Per dimostrare la seconda parte basta considerare una base B di W. Per la prima parte, esiste una base di V che contiene B. Ma poiché B consiste di n vettori ed ogni base di V ha n vettori, B deve essere anche una base di V, e dunque $W = V$. $\square$

ESEMPIO. Vogliamo stabilire se i vettori $A^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3$ sono linearmente indipendenti, ed eventualmente completarli a base. Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è un multiplo dell'altro. Da ciò è immediato dedurre che A^1 ed A^2 sono lineamente indipendenti. Osserviamo che

$$\langle A^1, A^2 \rangle = \{ \left(\begin{smallmatrix} a-b \\ 2a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{K} \},$$

Quindi ad esempio $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \notin \langle A^1, A^2 \rangle$, e dunque A^1, A^2 ed A^3 sono linearmente indipendenti. Poiché $\{A^1, A^2, A^3\}$ è una base del sottospazio $\langle A^1, A^2, A^3 \rangle$, abbiamo $\dim \langle A^1, A^2, A^3 \rangle = 3 = \dim \mathbb{K}^3$ e quindi per il corollario precedente $\langle A^1, A^2, A^3 \rangle = \mathbb{K}^3$. Perciò i vettori A^1, A^2 ed A^3 sono una base di $\mathbb{K}^3$.

ESEMPIO. Vogliamo completare a base l'insieme $S = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \} \subset \mathbb{K}^{2,2}$. Verifichiamo che i vettori di S sono linearmente indipendenti:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $a + b = a = 0$, che ovviamente implica $a = b = 0$. Poiché $\dim \mathbb{K}^{2,2} = 4$, sappiamo che dobbiamo aggiungere ad S due vettori per formare una base. Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K} \}$$

e

$$W' = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ c & a+b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K} \}.$$

Aggiungendo la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin W'$ otteniamo quattro vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^{2,2}$. Non è possibile aggiungere altri vettori, perché quattro vettori linearmente indipendenti sono il numero massimo di tali vettori in $\mathbb{K}^{2,2}$, essendo $\dim \mathbb{K}^{2,2} = 4$. Quindi abbiamo trovato la base cercata.

ESEMPIO. Vogliamo calcolare la dimensione di $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ k-2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \subset \mathbb{K}^3$ al variare di $k \in \mathbb{K}$. Quando i tre vettori sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base del sottospazio generato, il quale in tale caso ha dimensione tre. Stabiliamo quindi quali relazioni lineari è possibile trovare tra i vettori risolvendo il sistema omogeneo associato alle loro componenti:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R2\to R2+R1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & k+1 & 4 \\ 0 & 1 & k-1 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow[R3\to R3-(k+1)R2]{R2\leftrightarrow R3} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & -k^2+k+6 \end{smallmatrix}\right)$$

La presenza dei due pivot nelle prime due colonne dice che i primi due vettori sono linearmente indipendenti per ogni k e quindi che la dimensione del sottospazio è sempre almeno due. Inoltre, $-k^2 + k + 6 = 0$ se e solo se $k = 3$ o $k = -2$. Ne deduciamo che se $k \neq -2, 3$ i tre vettori sono linearmente indipendenti e la dimensione del sottospazio è tre, altrimenti i tre vettori sono linearmente dipendenti e la dimensione del sottospazio è due.

ESEMPI. (1) 1 e i sono una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (verificare per esercizio);

(2) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ sono una base di $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Infatti,

$$\begin{pmatrix} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Inoltre, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (verificare per esercizio);

(3) calcoliamo le coordinate di $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^{2,2}$ rispetto alla base

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

Cerchiamo $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ tali che

$$x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+w & x \\ z & x+y-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + w = a \\ x = b \\ z = c \\ x + y - w = d \end{cases},$$

che ammette l'unica soluzione $(x, y, z, w) = (b, (a - 2b + d)/2, c, (a - d)/2)$. Quindi

$$x_B(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} b \\ (a-2b+d)/2 \\ c \\ (a-d)/2 \end{smallmatrix}\right).$$

ESEMPIO. Vogliamo trovare un sottospazio di $\mathbb{K}^3$ di dimensione 2 e contenente $A^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Cerchiamo $A^2 \in \mathbb{K}^3$ tale che $\dim\langle A^1, A^2\rangle = 2$. Basterà scegliere $A^2 \in \mathbb{K}^3 \setminus \langle A^1\rangle$. Infatti, per costruzione A^1 ed A^2 risulterebbero linearmente indipendenti. Inoltre, sarebbero generatori del sottospazio $\langle A^1, A^2\rangle$ e quindi una sua base. Quindi possiamo scegliere ad esempio $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

ESEMPIO. Sia $S = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^4 \mid x - 2y + 3z - w = 0\} \subset \mathbb{K}^4$. Vogliamo verificare che S è un sottospazio e trovarne una base. La prima parte si può svolgere mostrando direttamente che S è non vuoto (contiene lo zero) e chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari. Alternativamente, osserviamo che S è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo con 4 incognite ed un'equazione. Possiamo dichiarare y, z e w come variabili libere ed ottenere la descrizione

$$S = \{\begin{pmatrix} 2y-3z+w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid y, z, w \in \mathbb{K}\} = \{y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \langle\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle.$$

Questo implica che S è il sottospazio generato da tre vettori, e in particolare un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^4$. Usando la definizione si verifica immediatamente che i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, oltre ad essere generatori di S, sono linearmente indipendenti. Quindi ne sono una base.

ESEMPIO. Sia $S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \} \subset \mathbb{K}^3$. Vogliamo verificare che S è un sottospazio e trovarne una base. La prima parte si può svolgere mostrando direttamente che S è non vuoto e chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari. Alternativamente, risolviamo il sistema lineare che definisce S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 - 2R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi, dichiarando z come variabile libera, $y = 5z/3$ e $x = -2(5z/3) + z = -7z/3$ e

$$S = \{\begin{pmatrix} -7z/3 \\ 5z/3 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K}\} = \langle\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\rangle.$$

Chiaramente $\{\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ è una base di S.

ESEMPIO. Vogliamo estrarre una base dall'insieme $\{A^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{K}^3$ dopo aver verificato che i vettori A^i sono generatori. Applichiamo l'eliminazione al sistema lineare $x_1A^1 + x_2A^2 + x_3A^3 + x_4A^4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-b \end{pmatrix}$$

La presenza dei pivot nelle prime tre colonne mostra che gli A^i sono generatori, e più precisamente che A^1, A^2 e A^3 sono una base.

OSSERVAZIONE (estrazione di base). Se i vettori $w_1, \ldots, w_m$ generano uno spazio vettoriale $V \neq \{0\}$, allora l'insieme $S = \{w_1, \ldots, w_m\}$ contiene sempre una base di V. Infatti, se i vettori w_i sono linearmente indipendenti allora la base cercata è S stesso. Altrimenti, uno dei vettori w_i è combinazione degli altri, che quindi sono ancora generatori e formano un insieme $S' \subset S$. Per lo stesso ragionamento appena fatto, se i vettori di S' sono linearmente indipendenti allora la base cercata è S', altrimenti si può scartare un vettore ottenendo un insieme più piccolo di generatori $S'' \subset S'$. Continuando così si arriva necessariamente ad una base di V, perché se si arrivasse ad un unico vettore (necessariamente non nullo in quanto generatore), questo sarebbe linearmente indipendente per definizione.

Ricordiamoci che se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, abbiamo definito il rango di A come il numero di pivot di una qualunque matrice a gradini A' ottenuta da A applicando l'algoritmo di eliminazione. La prossima proposizione mostra che il rango di A non dipende da A' ma solamente da A.

PROPOSIZIONE 4.5. *Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, e siano $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{K}^m$ e $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{K}^n$ rispettivamente le colonne e le righe di A. Allora il rango di A vale*

$$r(A) = \dim\langle A^1, \dots, A^n \rangle = \dim\langle A_1, \dots, A_m \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Il metodo utilizzato nell'esempio precedente mostra come estrarre una base da qualunque insieme di generatori $A^1, \dots, A^n$ di $\langle A^1, \dots, A^n \rangle$. Infatti, basta applicare l'eliminazione alla matrice $A = (A^1, \dots, A^n) \in \mathbb{K}^{m,n}$ e, una volta ottenuta una matrice a gradini A', la base estratta consisterà dei vettori A^j tali che sulla j-esima colonna di A' c'è un pivot. Poiché il numero di pivot $r(A)$ di A' è esattamente il rango di A, questo mostra che $r(A) = \dim\langle A^1, \dots, A^n \rangle$. Inoltre, è facile verificare che le r righe A' contenenti i pivot sono linearmente indipendenti perché i pivot appartengono a colonne distinte di A'. Poiché le eventuali altre righe di A' sono nulle, concludiamo che $r(A) = \dim\langle A'_1, \dots, A'_m \rangle$. Quindi basta controllare che il sottospazio generato dalle righe di A e quello generato dalle righe di A' hanno la stessa dimensione. Ma questi due sottospazi sono uguali! Infatti, le righe di A' sono ottenute da quelle di A tramite operazioni elementari. Certamente, gli scambi di righe non cambiano il sottospazio generato. Analogamente, è un facile esercizio verificare che la sostituzione di una riga A_i con una $A'_i = A_i + kA_j$ per qualche i e j lascia invariato il sottospazio generato dalle righe. □

ESEMPIO. Siano $v_1 = (1, k, 2k)$, $v_2 = (k, 2k, k+1)$ e $v_3 = (2k, 4k, 2k) \in \mathbb{K}^3$, al variare di $k \in \mathbb{K}$. Vogliamo calcolare la dimensione del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ al variare di k. Applichiamo l'eliminazione alla matrice che ha per *righe* i vettori v_i:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ k & 2k & k+1 \\ 2k & 4k & 2k \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3 - 2kR1]{R2 \to R2 - kR1} \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 2k-k^2 & k+1-2k^2 \\ 0 & 4k-2k^2 & 2k-4k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - 2R2} \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 2k-k^2 & k+1-2k^2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0, 2$ la matrice ottenuta è a gradini con tre pivot, quindi il sistema omogeneo associato ha solo la soluzione banale. Questo significa che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti e dunque $\dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 3$. Se $k = 0$ proseguiamo l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 + 2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque per $k = 0$ abbiamo $\dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$. Un conto analogo fornisce $\dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$ anche per $k = 2$.

4. Intersezione e somma di sottospazi, formula di Grassmann

PROPOSIZIONE 4.6. *Se W_1, W_2 sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V, allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $0_V \in W_1$ e $0_V \in W_2$, segue che $0_V \in W_1 \cap W_2$. Inoltre, se $v, w \in W_1 \cap W_2$ allora $v, w \in W_1$ e $v, w \in W_2$. Quindi $v + w \in W_1$ e $v + w \in W_2$ ovvero $v + w \in W_1 \cap W_2$. Per la moltiplicazione per scalari la verifica è analoga e viene lasciata per esercizio. □

ESEMPIO. Siano $\pi_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\pi_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{K}^3$. Vogliamo trovare una base di $\pi_1 \cap \pi_2$. $\pi_1 \cap \pi_2$ consiste dei vettori di $\mathbb{K}^3$ che sono simultaneamente combinazione lineare dei generatori di π_1 e dei generatori di π_2. Quindi vogliamo capire per quali scalari

x, y, z, w si ha:

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \iff x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-z\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}-w\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0.$$

Consideriamo questa equazione come un sistema lineare e applichiamo l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\1&1&-1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R2\to R2-R1}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R3\to R3-R2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Le soluzioni sono date da $z=0$, $y=-w$ e $x=z+w=w$, quindi

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \implies \boxed{x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}=w\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\boxed{w\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}.$$

Questo mostra che $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\in\pi_1\cap\pi_2$, quindi $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\subset\pi_1\cap\pi_2$, e che ogni vettore di $\pi_1\cap\pi_2$ è un multiplo di $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Concludiamo che $\pi_1\cap\pi_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ con base data da $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

OSSERVAZIONE. Lo svolgimento dell'esercizio precedente mostra che per determinare un' intersezione del tipo

$$\langle A^1,\dots,A^m\rangle\cap\langle B^1,\dots,B^n\rangle$$

basta risolvere il sistema lineare

$$x_1A^1+\cdots+x_mA^m+x_{m+1}B^1+\cdots+x_{m+n}B^n=0.$$

Ogni vettore dell'intersezione è della forma $x_1A^1+\cdots+x_mA^m$ (o, equivalentemente, della forma $-x_{m+1}B^1-\cdots-x_{m+n}B^n$), dove $(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n})$ è una soluzione del sistema.

OSSERVAZIONE. L'unione insiemistica di due sottospazi vettoriali *non è* necessariamente un sottospazio. Infatti, il sottoinsieme $W=\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{K}^2\mid xy=0\}\subset\mathbb{K}^2$ contiene $(0,0)$ ma non è chiuso rispetto alla somma, perché $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{K}^2$ ma $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\notin W$. Per costruire un sottospazio che ne contiene due dati si ricorre allora alla seguente

DEFINIZIONE. Se W_1, W_2 sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V, definiamo la loro *somma* come

$$W_1+W_2=\{w_1+w_2\mid w_1\in W_1, w_2\in W_2\}\subset V.$$

Quando $W_1\cap W_2=\{0\}$ diciamo che la somma è *diretta* e la indichiamo con $W_1\oplus W_2$. Più in generale, possiamo definire la somma di k sottospazi $W_1,\dots,W_k\subset V$ come

$$W_1+\cdots+W_k=\{w_1+\cdots+w_k\mid w_i\in W_i,\ i=1,\dots,k\}\subset V.$$

Il fatto che la somma W_1+W_2 di due sottospazi sia un sottospazio è molto facile da verificare. Infatti, poiché poiché entrambi W_1 e W_2 contengono il vettore nullo, $0=0+0\in W_1+W_2$. Inoltre, se $w_1+w_2, w_1'+w_2'\in W_1+W_2$ allora $(w_1+w_2)+(w_1'+w_2')=(w_1+w_1')+(w_2+w_2')\in W_1+W_2$, mentre se $w_1+w_2\in W_1+W_2$ e $k\in\mathbb{K}$, $k(w_1+w_2)=kw_1+kw_2\in W_1+W_2$.

ESERCIZIO. Verificare che l'unione di un insieme di generatori del sottospazio W_1 e di un insieme di generatori del sottospazio W_2 è un insieme di generatori di W_1+W_2.

OSSERVAZIONE. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi in somma diretta allora ogni vettore $v\in W_1\oplus W_2$ si scrive in modo unico come somma w_1+w_2. Infatti, se $w_1+w_2=w_1'+w_2'$ allora $w_1-w_1'=w_2'-w_2\in W_1\cap W_2=\{0\}$ e quindi $w_1=w_1'$ e $w_2=w_2'$. I due vettori w_1 e w_2 vengono talvolta detti le *componenti* di v.

ESEMPI. (1) $\mathbb{K}^3 = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle + \langle \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$;

(2) $\mathbb{K}^3 = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle \oplus \langle \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$;

(3) $\mathbb{K}^n = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \rangle + \cdots + \langle \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \rangle$;

(4) definiamo lo spazio delle matrici *(strettamente) triangolari superiori*

$$T_{\text{sup}} = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3,3} \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i \geq j\}$$

e lo spazio delle matrici *(strettamente) triangolari inferiori*

$$T_{\text{inf}} = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3,3} \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i \leq j\}.$$

Allora T_{sup} e T_{inf} sono sottospazi di $\mathbb{K}^{3,3}$ in somma diretta.

ESEMPIO. Vogliamo determinare una base di $S + S' \subset \mathbb{K}^4$, dove

$$S = \{(x, y, z, w) \mid x + 2y - z = 0\}, \quad \text{e} \quad S' = T \cap T',$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{K}^4 \mid x + z = 0\} \quad \text{e} \quad T' = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{K}^4 \mid y + z + w = 0\}.$$

I vettori di $T \cap T'$ hanno componenti date dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases}$, quindi

$$T \cap T' = \{ \left(\begin{smallmatrix}-z\\-z-w\\z\\w\end{smallmatrix}\right) \mid z, w \in \mathbb{K}\} = \langle \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

Analogamente,

$$S = \{ \left(\begin{smallmatrix}-2y+z\\y\\z\\w\end{smallmatrix}\right) \mid y, z, w \in \mathbb{K}\} = \langle \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

Quindi

$$S + S' = \langle \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Per trovare una base di $S + S'$ dobbiamo estrarre una base dall'insieme di generatori che abbiamo trovato. Quindi applichiamo l'eliminazione alla matrice associata ai vettori, riordinati in modo da facilitare le operazioni elementari:

$$\left(\begin{smallmatrix}1&-2&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R3\to R3-R1} \left(\begin{smallmatrix}1&-2&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&2&0&2&0\\0&0&1&0&1\end{smallmatrix}\right) \xrightarrow[R3\leftrightarrow R4]{R3\to R3-2R2} \left(\begin{smallmatrix}1&-2&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&4&2\end{smallmatrix}\right)$$

La presenza dei quattro pivot nelle prime quattro colonne ci dice che i vettori $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ sono una base di $S + S'$.

ESEMPIO. Vogliamo stabilire quale dei seguenti sottospazi di $\mathbb{K}^3$ sia in somma diretta con il sottospazio $\langle \left(\begin{smallmatrix}3\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle$.

$$\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle, \quad \langle \left(\begin{smallmatrix}5\\2\\-1\end{smallmatrix}\right) \rangle, \quad \langle \left(\begin{smallmatrix}4\\2\\0\end{smallmatrix}\right) \rangle, \quad \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle, \quad \langle \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Dato un vettore $v \neq 0$ ed un sottospazio W, si vede subito che $\langle v \rangle \cap W \neq \{0\}$ se e solo se $v \in W$. Quindi si tratta di stabilire quale dei cinque vettori generatori non appartiene al sottospazio.

Risolviamo il sistema lineare

$$x\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

con l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix}3&2&a\\1&1&b\\-1&0&c\end{pmatrix}\xrightarrow[R2\leftrightarrow R3]{R1\leftrightarrow R3}\begin{pmatrix}-1&0&c\\1&1&b\\3&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R3\to R3+3R1]{R2\to R2+R1}\begin{pmatrix}-1&0&c\\0&1&b+c\\0&2&a+3c\end{pmatrix}\xrightarrow{R3\to R3-2R2}\begin{pmatrix}-1&0&c\\0&1&b+c\\0&0&a-2b+c\end{pmatrix}.$$

Dunque un vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio se e solo se $a-2b+c=0$. L'unico dei cinque vettori generatori che non soddisfa questa condizione è $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

ESEMPIO. Siano $A^1, A^2 \in \mathbb{K}^3$ due vettori qualunque. Mostriamo che almeno uno dei sottospazi $\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$, $\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$ e $\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$ è in somma diretta con $\langle A^1, A^2\rangle$. Ogni sottospazio del tipo $\langle v\rangle$ è in somma diretta con $W=\langle A^1,A^2\rangle$ se e solo se $v\notin W$. Ma se ciascuno dei vettori della base canonica appartenesse a W allora $W=\mathbb{K}^3$, che è impossibile perché W è generato da due vettori, mentre abbiamo visto che per generare $\mathbb{K}^3$ servono almeno tre vettori.

TEOREMA 4.7 (formula di Grassmann). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, e siano $U, W \subset V$ due sottospazi. Allora,*

$$\boxed{\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)}.$$

In particolare, se $U\cap W=\{0\}$ si ha $\boxed{\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)}$. $\cancel{-\dim(U\cap V)}$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che è possibile completare una base $B_{U\cap W}=\{v_1,\dots,v_r\}$ di $U\cap W$ a basi

$$B_U=\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s\}\quad\text{e}\quad B_W=\{v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_t\}$$

di U e W, rispettivamente. Se verifichiamo che l'unione insiemistica

$$B_U\cup B_W=\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s,w_1,\dots,w_t\}$$

è una base di $U+W$ abbiamo finito. Infatti in tal caso l'identità

$$(r+s+t)+r=(r+s)+(r+t)$$

equivale alla formula di Grassman. Per un'osservazione fatta in precedenza sappiamo che $B_U\cup B_W$ è un insieme di generatori di $U+W$ perché è unione di B_U e B_W, insiemi di generatori rispettivamente di U e di W. Quindi dobbiamo verificare che i vettori di $B_U\cup B_W$ sono linearmente indipendenti. Per farlo osserviamo che un'uguaglianza

$$a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_su_s+c_1w_1+\cdots+c_tw_t=0$$

equivale a

$$(*)\qquad a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_su_s=-(c_1w_1+\cdots+c_tw_t),$$

la quale implica che il membro di sinistra (e di destra) dell'uguaglianza appartiene sia a U che a W, ovvero a $U\cap W$. Poiché gli elementi del sottospazio $U\cap W\subseteq U$ si scrivono tutti come combinazioni lineari dei soli elementi v_i, abbiamo

$$a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_su_s=d_1v_1+\cdots+d_rv_r=d_1v_1+\cdots+d_rv_r+0u_1+\cdots+0u_s$$

per qualche $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{K}$. Ma gli elementi di U si scrivono in modo unico come combinazioni lineari degli elementi della sua base $\{v_i, u_j\}$. Questo implica $b_1 = \cdots = b_s = 0$, quindi l'uguaglianza $(*)$ fornisce una relazione di dipendenza lineare tra i vettori v_i e w_k. Ma l'insieme $\{v_i, w_k\}$ è una base di W, quindi $a_1 = \cdots = a_r = 0$ e $c_1 = \cdots = c_t = 0$. Questo mostra che i vettori di $B_U \cup B_W$ sono linearmente indipendenti, dunque sono una base di $U + W$. $\square$

ESEMPIO. Vogliamo verificare che se U e W sono sottospazi di $\mathbb{K}^4$ tali che $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$ allora $U \cap W \neq \{0\}$. Poiché $U + W \subset \mathbb{K}^4$ abbiamo $\dim(U + W) \leq 4$. Quindi per la formula di Grassman

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 3 - 4 \geq 1,$$

che implica $U \cap W \neq \{0\}$.

ESEMPIO. Nello spazio $\mathbb{K}^{3,3}$, siano $S(3,\mathbb{K})$ ed $A(3,\mathbb{K})$ rispettivamente il sottospazio delle matrici simmetriche e di quelle antisimmetriche. Per definizione

$$A(3,\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{3,3} \mid A = -{}^tA\}.$$

Vogliamo mostrare che $\mathbb{K}^{3,3} = S(3,\mathbb{K}) \oplus A(3,\mathbb{K})$. Poiché per ogni matrice $M \in \mathbb{K}^{3,3}$ possiamo scrivere

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

e $A_1 = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \in S(3,\mathbb{K})$ mentre $A_2 = \frac{1}{2}(M - {}^tM) \in A(3,\mathbb{K})$, abbiamo $S(3,\mathbb{K}) + A(3,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{3,3}$. È chiaro dalle definizioni che $S(3,\mathbb{K}) \cap A(3,\mathbb{K}) = \{0\}$, quindi $\mathbb{K}^{3,3} = S(3,\mathbb{K}) \oplus A(3,\mathbb{K})$. Determiniamo anche delle basi di $S(3,\mathbb{K})$ ed $A(3,\mathbb{K})$. Una base di $S(3,\mathbb{K})$ è data da

$$\left\{\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}\right\},$$

mentre una base di $A(3,\mathbb{K})$ è data da

$$\left\{\begin{pmatrix} 0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Quindi $\dim S(3,\mathbb{K}) = 6$ e $\dim A(3,\mathbb{K}) = 3$. Verifichiamo che la formula di Grassmann vale per i sottospazi $S(3,\mathbb{K})$ e $A(3,\mathbb{K})$:

$$\dim(S(3,\mathbb{K}) \cap A(3,\mathbb{K})) + \dim(S(3,\mathbb{K}) + A(3,\mathbb{K})) = 0 + 9 = 6 + 3 = \dim S(3,\mathbb{K}) + \dim A(3,\mathbb{K}).$$

Esercizi

(1) Quale dei seguenti vettori di $\mathbb{K}^4$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}$?

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\-2 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\-2 \end{pmatrix}$ $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\-2 \end{pmatrix}$ $\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\2 \end{pmatrix}$ $\boxed{5}$ $\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\-2 \end{pmatrix}$

(2) Quale dei seguenti polinomi di $\mathbb{K}[t]_{\leq 3}$ è combinazione lineare di $1+t^2-t^3$, $-t-2t^2+t^3$ e $1+t+t^3$?

$\boxed{1}$ $2t-t^2+t^3$ $\boxed{2}$ $2t-t^2-t^3$ $\boxed{3}$ $2t+t^2-t^3$ $\boxed{4}$ $-2t-t^2-t^3$ $\boxed{5}$ $2-t^2-t^3$

(3) Quale delle seguenti matrici di $\mathbb{K}^{2,2}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0\\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{5}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) Quale dei seguenti sottospazi di $\mathbb{K}^3$ è in somma diretta con il sottospazio $\langle \begin{pmatrix} 3\\1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle$?

$\boxed{1}$ $\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{2}$ $\langle \begin{pmatrix} 5\\2\\-1 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{3}$ $\langle \begin{pmatrix} 4\\2\\0 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{4}$ $\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{5}$ $\langle \begin{pmatrix} 3\\2\\1 \end{pmatrix} \rangle$

(5) Quale dei seguenti sottospazi di $\mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ è in somma diretta con il sottospazio $\langle 1+t-t^2, -1+t \rangle$?

$\boxed{1}$ $-3+t+t^2\rangle$ $\boxed{2}$ $\langle 1+t \rangle$ $\boxed{3}$ $\langle 2t-t^2 \rangle$ $\boxed{4}$ $\langle -2+2t \rangle$ $\boxed{5}$ $\langle -4+2t+t^2 \rangle$

(6) Quale dei seguenti sottospazi di $S(2,\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{2,2} \mid {}^tA = A\}$ è in somma diretta con il sottospazio $\langle \begin{pmatrix} -1 & 3\\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$?

$\boxed{1}$ $\langle \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{2}$ $\langle \begin{pmatrix} -1 & 4\\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{3}$ $\langle \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{4}$ $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rangle$ $\boxed{5}$ $\langle \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

(7) Qual è la seconda coordinata del vettore $\begin{pmatrix} 1\\2\\2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ rispetto alla base di $\mathbb{K}^3$ $\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\3\\-4 \end{pmatrix} \}$?

$\boxed{1}$ 7/10 $\boxed{2}$ 5/8 $\boxed{3}$ 4/5 $\boxed{4}$ 3/4 $\boxed{5}$ -1/3

(8) Qual è la seconda coordinata della matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in S(2,\mathbb{K})$ rispetto alla base di $S(2,\mathbb{K})$ $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3\\ 3 & -4 \end{pmatrix} \}$?

$\boxed{1}$ 7/10 $\boxed{2}$ 5/8 $\boxed{3}$ 3/4 $\boxed{4}$ -2/3 $\boxed{5}$ 5/4

(9) Qual è la seconda coordinata del polinomio $1+2t+2t^2 \in \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ rispetto alla base di $K[t]_{\leq 2}$ $1+t^2, 2t+2t^2, -1+3t-4t^2$?

$\boxed{1}$ 1/3 $\boxed{2}$ 5/8 $\boxed{3}$ 7/10 $\boxed{4}$ 3/4 $\boxed{5}$ -3/5

(10) Qual è la terza coordinata del vettore $\begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$ rispetto alla base di $\mathbb{K}^4$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$?

$\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ 1 $\boxed{3}$ $3/2$ $\boxed{4}$ -1 $\boxed{5}$ $2/3$

(11) Qual è la terza coordinata della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$ rispetto alla base $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ $2/3$ $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ $3/2$

(12) Qual è la quarta coordinata del polinomio $2 + t + t^2 + 3t^3 \in \mathbb{K}[t]_{\leq 3}$ rispetto alla base di $\mathbb{K}[t]_{\leq 3}$
$\{1 + t^2 + t^3, 1 + t + t^3, t + t^2 + t^3, t^3\}$?

$\boxed{1}$ 2 $\boxed{2}$ -1 $\boxed{3}$ $2/3$ $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ $3/2$

(13) Siano $\pi_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\pi_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \subset S(2, \mathbb{K})$. Quale delle seguenti genera $\pi_1 \cap \pi_2$?

$\boxed{1}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{2}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{3}$ $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{4}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{5}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

(14) Siano $\pi_1 = \langle 1 + t, t + t^2 \rangle$, $\pi_2 = \langle 1 + t - t^2, 1 - t^2 \rangle \subset \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$. Quale dei seguenti genera $\pi_1 \cap \pi_2$?

$\boxed{1}$ $1 + t^2$ $\boxed{2}$ $1 + t - t^2$ $\boxed{3}$ $1 - t^2$ $\boxed{4}$ $2 + t$ $\boxed{5}$ $1 - 2t + t^2$

(15) Siano $\pi_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\pi_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \subset \mathbb{K}^3$. Quale dei seguenti genera $\pi_1 \cap \pi_2$?

$\boxed{1}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{2}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{3}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{4}$ $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{5}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$

(16) Quale dei seguenti forma, insieme con $x^2 + 2x - 1$ e $x^2 - x + 1$, una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$?

$\boxed{A}$ $-x^2 + 4x - 3$ $\boxed{B}$ $3x - 2$ $\boxed{C}$ $x^2 + x + 1$ $\boxed{D}$ $2x^2 + x$

(17) Quale dei seguenti forma, insieme con $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^3$?

$\boxed{A}$ $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{B}$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{C}$ $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{D}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(18) Quale delle seguenti forma, insieme con $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, una base dello spazio $S(2, \mathbb{K})$?

$\boxed{A}$ $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{B}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{C}$ $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\boxed{D}$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(19) Siano $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3$. Quale è vera ?
[Suggerimento: usare l'eliminazione di Gauss]

$\boxed{A}$ $v_1 \in \langle v_3, v_4 \rangle$ $\boxed{B}$ $v_2 \in \langle v_3, v_4 \rangle$ $\boxed{C}$ $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$ $\boxed{D}$ $v_4 \in \langle v_2, v_3 \rangle$

(20) Siano $p_1 = 2 - t^2$, $p_2 = t + t^2$, $p_3 = 4 - 3t - t^2$ e $p_4 = 2 + t \in \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$. Quale è vera ?
[Suggerimento: usare l'eliminazione di Gauss]

$\boxed{A}$ $p_1 \in \langle p_3, p_4 \rangle$ $\boxed{B}$ $p_1 \in \langle p_2, p_3 \rangle$ $\boxed{C}$ $p_2 \in \langle p_3, p_4 \rangle$ $\boxed{D}$ $p_4 \in \langle p_1, p_2 \rangle$

(21) Siano $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in S(2, \mathbb{K})$. Quale è vera ?
[Suggerimento: usare l'eliminazione di Gauss]

$\boxed{A}$ $A_1 \in \langle A_2, A_3 \rangle$ $\boxed{B}$ $A_4 \in \langle A_2, A_3 \rangle$ $\boxed{C}$ $A_1 \in \langle A_3, A_4 \rangle$ $\boxed{D}$ $A_2 \in \langle A_3, A_4 \rangle$

Soluzioni degli esercizi

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Risposta	1	4	2	4	2	5	2	1	4	1	4	4	1	3	5

Esercizio	16	17	18	19	20	21
Risposta	C	D	B	C	D	A

CAPITOLO 5

Applicazioni lineari

Tra tutte le funzioni da uno spazio vettoriale ad un altro, sono particolarmente importanti quelle "compatibili" con le strutture algebriche, nel senso della seguente

DEFINIZIONE. Una funzione $f\colon V \to W$ tra due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ è un'*applicazione lineare* se

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$;
- $f(kv) = kf(v)$ per ogni $k \in \mathbb{K}$ e $v \in V$.

OSSERVAZIONE. Se $f\colon V \to W$ è un'applicazione lineare, allora $f(0_V) = 0_W$. Infatti, $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot f(0_V) = 0_W$.

ESEMPIO. Sia $A = (A^1, \dots, A^n) \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Definiamo $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ponendo [1]

$$f_A(X) = AX = x_1A^1 + \cdots + x_nA^n$$

Verifichiamo che f_A è lineare: se $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $k \in \mathbb{K}$,

$$f_A(X+Y) = (x_1+y_1)A^1+\cdots+(x_n+y_n)A^n = (x_1A^1+\cdots+x_nA^n)+(y_1A^1+\cdots+y_nA^n) = f_A(X)+f_A(Y)$$

$$f_A(kX) = kx_1A^1 + \cdots + kx_nA^n = k(x_1A^1 + \cdots + x_nA^n) = kf_A(X).$$

ESEMPI. (1) $f\colon V \to W$, $f(v) = 0_W$ per ogni $v \in V$ è *l'applicazione nulla*; $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, data da $\mathrm{id}_V(v) = v$ per ogni $v \in V$, è *l'identità di* V. Le verifiche che sono lineari sono immediate.

(2) $f = f_{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ è lineare per l'esempio visto, ed è data dalle formule

$$f(x, y, z) = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ x + y \end{pmatrix};$$

(3) Sia $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ data da $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Per far vedere che f è lineare scriviamo

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che $f = f_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)}$, quindi f è lineare.

(4) Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ data da $f(x, y, z) = (x + y, z)$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} x + y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

[1] Notazione: posto $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, indicheremo $x_1A^1 + \cdots + x_nA^n$ con AX.

quindi $f = f_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ è lineare;

(5) $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ data da $f(x,y) = (x-y,1)$ non è lineare. Infatti, $f(1,0) = (1,1)$ e $f(2\cdot(1,0)) = f(2,0) = (2,1) \neq 2f(1,0) = (2,2)$;

(6) $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ data $f(x,y) = (x^2,y)$ non è lineare, perché $f(1,0) = (1,0)$ e $f(2\cdot(1,0)) = f(2,0) = (4,0) \neq 2f(1,0) = (2,0)$;

(7) $f\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^2$ data da $f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^2) = (a_0,a_1)$ è lineare (verificarlo per esercizio);

(8) $f\colon \mathbb{K}^{2,2} \to \mathbb{K}$ data da $f((\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})) = a + d$ è lineare (verificarlo per esercizio);

(9) Sia $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una funzione le cui componenti siano specificate da polinomi omogenei di primo grado, ovvero data da

$$f(x_1,\dots,x_n) = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j)$$

Questa applicazione è lineare perché si può scrivere

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = f_A(X),$$

dove $X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $A = (A^1,\dots,A^n) \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1,\dots,n$. Dunque $f = f_A$.

DEFINIZIONE. Il *nucleo* di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ è il sottoinsieme

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V.$$

PROPOSIZIONE 5.1. *Il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ sono sottospazi rispettivamente di V e di W.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $0_V = 0 \cdot v$ per ogni $v \in V$, abbiamo $f(0_V) = f(0\cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_W$, quindi $0_V \in \ker(f)$. Inoltre, se $v_1, v_2 \in \ker(f)$ allora $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$, dunque $v_1 + v_2 \in \ker(f)$. Analogamente, se $v \in \ker(f)$ e $k \in \mathbb{K}$ allora $f(kv) = kf(v) = k0 = 0$ e quindi $kv \in \ker(f)$. Questo mostra che $\ker(f)$ è un sottospazio di V. Chiaramente $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$. Inoltre, siano ora $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2) \in \mathrm{Im}(f) \subset W$. Poiché $w_1+w_2 = f(v_1)+f(v_2) = f(v_1+v_2)$, abbiamo $w_1+w_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Inoltre, se $w = f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ e $k \in \mathbb{K}$ abbiamo $kw = kf(v) = f(kv) \in \mathrm{Im}(f)$. Dunque $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di W. □

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f(x,y,z) = (x-y, y+z, x+y+2z).$$

Possiamo scrivere

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ovvero $f = f_A$, con $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, quindi f è lineare. Dalla scrittura di f è evidente che $\mathrm{Im}(f) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\rangle$. Determiniamo una base di $\ker(f)$ risolvendo il sistema lineare $AX = 0$:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R3 \to R3 - R1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R3 \to R3 - 2R2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

L'eliminazione mostra tra l'altro che $\mathrm{Im}(f)$ ha dimensione due, con base $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Il sistema ha soluzioni $(-z, -z, z)$ al variare di $z \in \mathbb{K}$, quindi $\ker(f)$ ha base $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

PROPOSIZIONE 5.2. *Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f manda combinazioni lineari in combinazioni lineari. Inoltre, se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono generatori di V allora* $\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla proprietà di linearità di f segue immediatamente che

$$f(k_1u_1 + \cdots + k_mu_m) = k_1f(u_1) + \cdots + k_mf(u_m)$$

per ogni $u_1, \dots, u_m \in V$ e $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{K}$, quindi f manda combinazioni lineari in combinazioni lineari. In particolare, se i vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V allora per ogni $v \in V$ abbiamo $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ per qualche $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, e quindi

$$f(v) = f(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1f(v_1) + \cdots + c_nf(v_n) \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle$$

Queste uguaglianze mostrano che il sottospazio $\mathrm{Im}(f) \subset W$ coincide con il sottospazio generato dai vettori $f(v_1)$, $f(v_2)$, …, $f(v_n)$. □

ESEMPIO. Mostriamo che non può esistere un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ tale che

$$f(1,-1,0) = (1,2,0), \quad f(0,2,-1) = (1,1,1) \quad \text{e} \quad f(1,1,-1) = (0,1,0).$$

Se f fosse lineare manderebbe combinazioni lineari in combinazioni lineari e zero in zero. Quindi, poiché

$$(1,-1,0) + (0,2,-1) - (1,1,-1) = (0,0,0),$$

avremmo

$$f(1,-1,0) + f(0,2,-1) = f(1,1,-1),$$

che invece è falso.

ESEMPIO. Consideriamo $A = (A^1, \dots, A^n) \in \mathbb{K}^{m,n}$ e l'applicazione lineare $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Se indichiamo con $E^1, \dots, E^n \in \mathbb{K}^n$ i vettori della base canonica, per definizione di f_A abbiamo

$$f_A(E^1) = A^1,\ f_A(E^2) = A^2,\ \dots\ , f_A(E^n) = A^n.$$

Quindi $\mathrm{Im}(f_A) = \langle A^1, \dots, A^n\rangle$ e $r(A) = \dim \mathrm{Im}(f_A)$.

L'esempio precedente suggerisce la seguente

DEFINIZIONE. Il *rango* di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$, indicato con $\mathrm{rg}(f)$, è la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$.

PROPOSIZIONE 5.3. *Un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ è iniettiva se e solo se* $\ker(f) = \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $0 \in \ker(f)$, se f è iniettiva da $f(v) = 0 = f(0)$ deduciamo che $v = 0$, dunque che $\ker(f) = \{0\}$. Viceversa, supponendo $\ker(f) = \{0\}$, da $f(v) = f(w)$, ovvero $0 = f(v) - f(w) = f(v - w)$, segue che $v = w$. Quindi $\ker(f) = \{0\}$ implica che f è iniettiva. $\square$

PROPOSIZIONE 5.4. *Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare con V di dimensione finita. Allora*

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim V.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $B' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $\ker(f)$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V ottenuta completando B'. Sappiamo che $\operatorname{Im}(f) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n)\rangle = \langle f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\rangle$, quindi è sufficiente dimostrare che $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. Se

$$0 = a_{k+1}f(v_{k+1}) + \cdots + a_n f(v_n) = f(a_{k+1}v_{k+1} + \cdots + a_n v_n)$$

allora $a_{k+1}v_{k+1} + \cdots + a_n v_n \in \ker(f)$ e quindi è uguale ad una combinazione lineare $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$. Ma allora

$$-a_1v_1 - \cdots - a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} + \cdots + a_nv_n = 0,$$

che implica $a_1 = \cdots = a_n = 0$ perché i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti. In particolare, da $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ deduciamo che $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. $\square$

ESEMPIO. Vogliamo determinare per quale k l'applicazione lineare $f_k\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ data da $f_k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+kz \\ 2y+3z \\ x-2y-4z \end{pmatrix}$ soddisfa $\dim\ker(f_k) = 1$. Bisogna imporre che $\operatorname{rg}(f_k) = 3 - \dim\ker(f_k) = 3 - 1 = 2$. Abbiamo

$$f_k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+kz \\ 2y+3z \\ x-2y-4z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\operatorname{rg}(f_k)$ applichiamo l'eliminazione alla matrice le cui colonne sono le immagini $f_k(E^i)$ dei vettori della base canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4-k \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 + R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1-k \end{pmatrix}.$$

Quindi $\dim\ker(f_k) = 1$ per $k = -1$.

OSSERVAZIONE. Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ coincide chiaramente con $\ker(f_A) \subset \mathbb{K}^n$. Poiché, come abbiamo visto, $r = r(A) = \operatorname{rg}(f_A)$, $\dim\ker(f_A) = n - r$ è il numero di "variabili libere" di un sistema $A'X = 0$, dove A' è una matrice a gradini ottenuta da A tramite il procedimento di eliminazione di Gauss.

ESEMPIO. Sia $t \in \mathbb{K}$, ed $f_t\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f_t(x, y, z) = (x + 2y + z, tx - (1-t)y, -2x - 4y - z).$$

Vogliamo capire per quale valore di t l'applicazione f_t ha rango due. Come nell'esercizio precedente, applichiamo l'eliminazione alla matrice le cui colonne sono le immagini $f_t(E^i)$ dei vettori della base canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & t-1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3 + 2R1]{R2 \to R2 - tR1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -t-1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi f_t ha rango due per $t = -1$.

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ l'applicazione lineare data da $f(x, y) = (3x + 6y, 2x + 4y)$. Vogliamo capire per quale valore del parametro $t \in \mathbb{K}$ il vettore $(t, 2-t) \in \mathbb{K}^2$ appartiene all'immagine di f. Poiché

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle = \langle\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}6\\4\end{smallmatrix}\right)\rangle,$$

cerchiamo il valore di $t \in \mathbb{K}$ tale che il sistema $x\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right) + y\left(\begin{smallmatrix}6\\4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}t\\2-t\end{smallmatrix}\right)$ ha soluzioni:

$$\left(\begin{smallmatrix}3&6&t\\2&4&2-t\end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R2 \to R2 - \frac{2}{3}R1} \left(\begin{smallmatrix}3&6&t\\0&0&2-5t/3\end{smallmatrix}\right)$$

quindi $(t, 2-t)$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$ per $t = 6/5$.

ESEMPIO. Stabiliamo qual è il rango dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^6 \to \mathbb{K}^6$ data da

$$f(x_1, \ldots, x_6) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1).$$

Applichiamo l'eliminazione alla matrice le cui colonne sono i vettori $f(E^i)$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R2\to R2-R1\\R3\to R3-R1\\R4\to R4-R1\\R5\to R5-R1\\R6\to R6-R1}]{} \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Quindi f ha rango due.

ESEMPI. (1) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra $\mathbb{K}$-spazi vettoriali della stessa dimensione finita. Allora f è iniettiva se e solo se f è suriettiva. Infatti, se f è iniettiva allora $\dim W = \dim V = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = \dim\mathrm{Im}(f)$, e dunque $\mathrm{Im}(f) = W$. Viceversa, se $\dim\mathrm{Im}(f) = \dim W = \dim V$ allora $\ker(f) = \{0\}$ e quindi f è iniettiva;

(2) $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, data da $f(x, y, z) = (x, y)$ è un esempio di applicazione lineare suriettiva ma non iniettiva, perché $\dim\mathrm{Im}(f) \leq 2$ implica $\dim\ker(f) = 3 - \dim\mathrm{Im}(f) \geq 1$. Infatti, $\ker(f) = \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$;

(3) se $f\colon V \to W$ è un'applicazione lineare allora $\dim V < \dim W$ implica che f non è suriettiva, e $\dim V > \dim W$ implica che f non è iniettiva.

(4) L'applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^5$ data da $f(x, y) = (x, y, x, y, x+y)$ non può essere suriettiva, ma è chiaramente iniettiva.

DEFINIZIONE. Un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ iniettiva e suriettiva si dice un *isomorfismo* tra V e W.

ESEMPIO. Vogliamo verificare che se $f\colon V \to W$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora $\dim V = \dim W$. Poiché $\ker(f) = \{0\}$ abbiamo $\dim W = \dim\mathrm{Im}(f) = \dim V$.

ESEMPIO. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una sua base. L'applicazione $x_B\colon V \to \mathbb{K}^n$ che manda un vettore v nell'n-upla delle sue coordinate rispetto a B è un'isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$. Verifichiamo che è lineare: se $v = \sum_i a_i v_i$ e $w = \sum_i b_i v_i$ allora $v + w = \sum_i (a_i + b_i) v_i$, quindi $x_B(v + w) = x_B(v) + x_B(w)$. Analogamente, se $k \in \mathbb{K}$ allora $kv = \sum_i (ka_i) v_i$ e quindi $x_B(kv) = k x_B(v)$. Infine, se $x_B(v) = (0, \ldots, 0)$ allora necessariamente $v = 0_V$, ed ovviamente $\mathrm{Im}(x_B) = \mathbb{K}^n$.

ESEMPI. (1) Se $B = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$, l'applicazione $x_B \colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}^3$ è data da
$x_B(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$;
(2) Se $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} \subset \mathbb{K}^{2,2}$, $x_B \colon \mathbb{K}^{2,2} \to \mathbb{K}^4$ è data da $x_B \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a, b, c, d)$.

PROPOSIZIONE 5.5. *Se $f \colon V \to W$ è un isomorfismo allora l'applicazione inversa $f^{-1} \colon W \to V$ è lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che f è biiettiva, per dimostrare che $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$ è sufficiente verificare che $w_1 + w_2 = f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2))$, che segue subito dal fatto che f è lineare e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$. Analogamente, $f^{-1}(kw) = kf^{-1}(w)$ segue dal fatto che $kw = f(kf^{-1}(w))$. □

PROPOSIZIONE 5.6. *Sia $f \colon V \to W$ un'applicazione lineare e $U \subset V$ un sottospazio. Allora $f(U) \subset W$ è un sottospazio. Inoltre, se f è iniettiva allora* $\dim f(U) = \dim U$.

DIMOSTRAZIONE. La restrizione $f|_U \colon U \to W$ è un'applicazione lineare quindi $f(U) = \mathrm{Im}(f|_U)$ è un sottospazio di W. Se f è iniettiva anche $f|_U$ lo è, quindi

$$\dim f(U) = \dim \mathrm{Im}(f|_U) = \dim U - \dim \ker(f|_U) = \dim U.$$

□

ESEMPIO. Sia $f_h \colon \mathbb{K}^{2,2} \to \mathbb{K}^{2,2}$ l'applicazione lineare data da

$$f_h \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + hx_2 + 3x_3 & -x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 & x_1 + 2x_3 - 2x_4 \end{pmatrix},$$

per ogni $h \in \mathbb{K}$. Vogliamo capire per quali $h \in \mathbb{K}$ si ha $\dim \ker(f_h) = 2$. Per ognuno di tali valori vogliamo trovare basi di $\ker(f_h)$ e di $\mathrm{Im}(f_h)$. L'uguaglianza $f_h \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ equivale ad un sistema lineare omogeneo. Applichiamo l'eliminazione di Gauss per risolverlo:

$$\begin{pmatrix} 2 & h & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & h \\ -1 & 2 & -1 & h \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R4 \leftrightarrow R1]{R3 \to R3 - R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & h & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R4 \to R4 - 2R1 \\ R3 \leftrightarrow R4}]{R2 \to R2 + R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & h - 2 \\ 0 & h & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3 \to R3 - \frac{h}{2} R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & h - 2 \\ 0 & 0 & -(2 + h)/2 & (2 + h)(4 - h)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema, se $h \neq -2$ la variabile x_4 è libera ed otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = (2h-6)x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = (4-h)x_4 \end{cases},$$

quindi

$$\ker(f_h) = \langle \begin{pmatrix} 2h-6 & -1 \\ 4-h & 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{per } h \neq -2.$$

Questo mostra che $\dim\ker(f_h) = 1$ se $h \neq -2$. Invece per $h = -2$ entrambe x_3 ed x_4 sono libere, ed inoltre

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -x_3/2 + 2x_4 \end{cases},$$

dunque

$$\ker(f_{-2}) = \langle \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Poiché le matrici $\left(\begin{smallmatrix} -2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti, esse sono una base di $\ker(f_{-2})$.

L'immagine di f_{-2} ha dimensione $\dim \mathbb{K}^{2,2} - \dim\ker(f_{-2}) = 4 - 2 = 2$, ed è generata dalle matrici

$$f_{-2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ f_{-2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ f_{-2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ f_{-2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right).$$

Poiché le prime due matrici sono linearmente indipendenti, esse costituiscono una base di $\mathrm{Im}(f_{-2})$.

È naturale aspettarsi che la composizione di applicazioni lineari sia ancora lineare. Infatti vale la seguente

PROPOSIZIONE 5.7. *Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to U$ due applicazioni lineari tra $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Allora l'applicazione composta $g \circ f\colon V \to U$ è lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $v_1, v_2 \in V$ abbiamo

$$g \circ f(v_1+v_2) = g(f(v_1+v_2)) = g(f(v_1)+f(v_2)) = g(f(v_1))+g(f(v_2)) = g\circ f(v_1)+g\circ f(v_2),$$

per ogni $v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$g \circ f(kv) = g(f(kv)) = g(kf(v)) = k(g(f(v))) = kg \circ f(v).$$

□

Esercizi

Esercizio 1

Per quale k l'applicazione lineare $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f_k\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+kz \\ 2y+3z \\ x-2y-4z \end{smallmatrix}\right)$ soddisfa $\dim\ker(f_k) = 1$?

$\boxed{1}$ $k = -2$ $\boxed{2}$ $k = -1$ $\boxed{3}$ $k = 0$ $\boxed{4}$ $k = 1$ $\boxed{5}$ $k = 2$

Esercizio 2
Per quale k l'applicazione lineare $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+kz \\ 2x+3y \\ 4x+3y+2z \end{pmatrix}$ soddisfa $\dim \ker(f_k) = 1$?

$\boxed{1}$ $k = 2$ $\boxed{2}$ $k = -1$ $\boxed{3}$ $k = 1$ $\boxed{4}$ $k = 0$ $\boxed{5}$ $k = -2$

Esercizio 3
Per quale k l'applicazione lineare $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+2y+z \\ y \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ soddisfa $\dim \ker(f_k) = 1$?

$\boxed{1}$ $k = 1$ $\boxed{2}$ $k = -2$ $\boxed{3}$ $k = 2$ $\boxed{4}$ $k = -1$ $\boxed{5}$ $k = 0$

Esercizio 4
Sia $t \in \mathbb{R}$, ed $f_t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_t(x, y) = (x + 2y, tx - (1 - t)y, -2x - 4y)$. Per quale valore di t si ha $\dim \ker(f_t) = 1$?

$\boxed{1}$ $1/2$ $\boxed{2}$ $-2/3$ $\boxed{3}$ 2 $\boxed{4}$ -1 $\boxed{5}$ $1/4$

Esercizio 5
Sia $t \in \mathbb{R}$, ed $f_t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_t(x, y) = (3x - y, -x + y/3, (t + 1)x + ty)$. Per quale valore di t si ha $\dim \ker(f_t) = 1$?

$\boxed{1}$ $2/5$ $\boxed{2}$ $-1/4$ $\boxed{3}$ $1/2$ $\boxed{4}$ $3/4$ $\boxed{5}$ $1/3$

Esercizio 6
Sia $t \in \mathbb{R}$, ed $f_t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_t(x, y) = ((t - 2)x + 2ty, x - y/2, 2x - y)$. Per quale valore di t si ha $\dim \ker(f_t) = 1$?

$\boxed{1}$ $-1/4$ $\boxed{2}$ $1/2$ $\boxed{3}$ $2/5$ $\boxed{4}$ $1/3$ $\boxed{5}$ $3/4$

Esercizio 7
Sia $t \in \mathbb{R}$, ed $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_t(x, y, z) = (x + 2y + z, tx - (1 - t)y, -2x - 4y - z)$. Per quale valore di t l'applicazione f_t ha rango due ?

$\boxed{1}$ $1/7$ $\boxed{2}$ $-1/5$ $\boxed{3}$ 1 $\boxed{4}$ -1 $\boxed{5}$ $1/5$

Esercizio 8
Sia $t \in \mathbb{R}$, ed $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_t(x, y, z) = (x - 2y + z, tx - (1 - t)y, -2x - 4y - z)$. Per quale valore di t l'applicazione f_t ha rango due ?

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ $-1/5$ $\boxed{3}$ $1/7$ $\boxed{4}$ -1 $\boxed{5}$ 0

Esercizio 9
Sia $t \in \mathbb{R}$, ed $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f_t(x, y, z) = (x - 2y + z, tx + (1 - t)y, -2x - 4y - z)$. Per quale valore di t l'applicazione f_t ha rango due ?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ $1/5$ $\boxed{3}$ $1/7$ $\boxed{4}$ 1 $\boxed{5}$ $-1/3$

Esercizio 10
Sia $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da $f(x,y) = (3x+6y, 2x+4y)$. Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $(t, 2-t) \in \mathbb{R}^2$ appartiene all'immagine di f ?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 0 $\boxed{3}$ $6/5$ $\boxed{4}$ $5/6$ $\boxed{5}$ 2

Esercizio 11
Sia $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da $f(x,y) = (2x+4y, -x-2y)$. Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $(t, 2-t) \in \mathbb{R}^2$ appartiene all'immagine di f ?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 0 $\boxed{3}$ $6/5$ $\boxed{4}$ $5/6$ $\boxed{5}$ 4

Esercizio 12
Sia $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da $f(x,y) = (x+2y, 3x+6y)$. Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $(t, 2-t) \in \mathbb{R}^2$ appartiene all'immagine di f ?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 0 $\boxed{3}$ $6/5$ $\boxed{4}$ $1/2$ $\boxed{5}$ 4

Esercizio 13
Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da
$f(x,y,z) = (x+2y+z, x+y+tz, 2x+y+z)$ ha rango 2 ?

$\boxed{1}$ $-\dfrac{1}{3}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{3}$ $\boxed{3}$ $\dfrac{2}{3}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{4}{3}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{5}{3}$

Esercizio 14
Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da
$f(x,y,z) = (-x+2y+z, x+y+tz, 2x+y+z)$ ha rango 2 ?

$\boxed{1}$ $-\dfrac{1}{5}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{5}$ $\boxed{3}$ $\dfrac{2}{5}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{3}{5}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{4}{5}$

Esercizio 15
Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da
$f(x,y,z) = (2y+z, x+y+tz, 2x+y+z)$ ha rango 2 ?

$\boxed{1}$ $-\dfrac{1}{4}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{3}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{3}{4}$ $\boxed{5}$ 1

Esercizio 16
Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da
$f(x,y,z) = (x+y-z, tx-(1-t)y, -2x-4y+z)$ ha rango minore di 3 ?

$\boxed{1}$ $-\dfrac{3}{2}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{3}$ $\boxed{3}$ $-\dfrac{1}{2}$ $\boxed{4}$ $-\dfrac{1}{5}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{5}{3}$

Esercizio 17
Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da
$f(x,y,z) = (x-2y-z, tx-(1-t)y, -2x-4y+z)$ ha rango minore di 3 ?

$\boxed{1}$ $-\dfrac{3}{2}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{3}$ $\boxed{3}$ $-\dfrac{1}{2}$ $\boxed{4}$ $-\dfrac{1}{5}$ $\boxed{5}$ $\dfrac{5}{3}$

Esercizio 18
Per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (x + y + z, tx - (1 - t)y, -2x - 4y + z)$ ha rango minore di 3 ?

$\boxed{1}$ $-\frac{3}{2}$ $\boxed{2}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{3}$ $-\frac{1}{2}$ $\boxed{4}$ $-\frac{1}{5}$ $\boxed{5}$ $\frac{5}{3}$

Esercizio 19
Per quale dei seguenti valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (tx + y + 2z, -x + 2y + tz, x - y + 2z)$ ha nucleo di dimensione 1 ?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ -5 $\boxed{3}$ 5 $\boxed{4}$ 3 $\boxed{5}$ 4

Esercizio 20
Per quale dei seguenti valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (tx + y + 2z, -x + 2y + tz, x - y + 2z)$ ha nucleo di dimensione 1 ?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ -5 $\boxed{3}$ 5 $\boxed{4}$ 3 $\boxed{5}$ 4

Esercizio 21
Per quale dei seguenti valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (x + ty + 2z, -tx + 2y + z, x - y + 2z)$ ha nucleo di dimensione 1 ?

$\boxed{1}$ $1/2$ $\boxed{2}$ -2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ $-1/2$ $\boxed{5}$ 1

Esercizio 22
Per quale dei seguenti valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (x, 2x + y, x + y)$?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{3}$ 4 $\boxed{4}$ -2 $\boxed{5}$ 0

Esercizio 23
Per quale dei seguenti valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y)$?

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{3}$ -4 $\boxed{4}$ -2 $\boxed{5}$ 0

Esercizio 24
Per quale dei seguenti valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (x, x - 2y, x + y)$?

$\boxed{1}$ $5/3$ $\boxed{2}$ $-1/2$ $\boxed{3}$ $-2/5$ $\boxed{4}$ $-5/2$ $\boxed{5}$ $3/5$

Esercizio 25
Qual è il rango dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ data da $f(x_1, \ldots, x_6) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)$?

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ 5

Esercizio 26
Qual è il rango dell'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ data da
$f(x_1,\ldots,x_6) = (x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2)$?

$\boxed{\text{A}}$ 4 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 5 $\boxed{\text{E}}$ 3

Esercizio 27
Qual è il rango dell'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ data da
$f(x_1,\ldots,x_6) = (x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)$?

$\boxed{\text{A}}$ 5 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 3 $\boxed{\text{E}}$ 4

Soluzioni degli esercizi

Esercizio	Risposta	Esercizio	Risposta
1	$\boxed{2}$	15	$\boxed{4}$
2	$\boxed{3}$	16	$\boxed{3}$
3	$\boxed{3}$	17	$\boxed{4}$
4	$\boxed{4}$	18	$\boxed{1}$
5	$\boxed{2}$	19	$\boxed{2}$
6	$\boxed{3}$	20	$\boxed{2}$
7	$\boxed{4}$	21	$\boxed{4}$
8	$\boxed{2}$	22	$\boxed{2}$
9	$\boxed{3}$	23	$\boxed{3}$
10	$\boxed{3}$	24	$\boxed{4}$
11	$\boxed{5}$	25	$\boxed{\text{B}}$
12	$\boxed{4}$	26	$\boxed{\text{C}}$
13	$\boxed{3}$	27	$\boxed{\text{B}}$
14	$\boxed{5}$		

CAPITOLO 6

Applicazioni lineari e matrici

Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare e $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $C = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ basi. Vogliamo calcolare il vettore $x_C(f(v))$ delle coordinate del vettore $f(v)$ rispetto alla base C sapendo il vettore $X = x_B(v)$ delle coordinate di v rispetto a B. Supponiamo che $X = (x_1, \dots, x_n)$, cosicché $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Allora, poiché x_C è lineare,

$$x_C(f(v)) = x_C(x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)) = x_1 x_C(f(v_1)) + \dots + x_n x_C(f(v_n)) = M_{BC}(f)X,$$

dove

$$M_{BC}(f) = (x_C(f(v_1)), x_C(f(v_2), \dots, x_C(f(v_n))) \in \mathbb{K}^{m,n}$$

è la *matrice associata ad* f tramite le basi B e C, ovvero la matrice la cui i-esima colonna è il vettore $x_C(f(v_i))$ delle coordinate di $f(v_i)$ rispetto alla base C. Riassumendo, abbiamo ricavato la seguente formula:

$$\boxed{x_C(f(v)) = M_{BC}(f)x_B(v)}$$

ESEMPIO. Osserviamo che se $\mathcal{E}_n \subset \mathbb{K}^n$ è la base canonica, $x_{\mathcal{E}_n}(X) = X$ per ogni $X \in \mathbb{K}^n$. Calcoliamo la matrice $M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$ dell'applicazione identità rispetto alle basi canoniche. Abbiamo $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(E^i) = E^i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e quindi $x_{\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(E^i)) = x_{\mathcal{E}_n}(E^i) = E^i$ per ogni i. Dunque

$$M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = (E^1, \dots, E^n) = I,$$

la cosiddetta matrice identità. Più in generale, sia $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ l'applicazione identità su un qualunque $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ una base. Allora, poiché $x_B(\mathrm{id}_V(v_i)) = x_B(v_i) = E^i \in \mathbb{K}^n$ per ogni $i = 1, \dots, n$, abbiamo

$$M_{BB}(\mathrm{id}_V) = (E^1, \dots, E^n) = I.$$

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ data da $f(x, y, z) = (x - 2y, y - z)$ e $B = \mathcal{E}_3 \subset \mathbb{K}^3$, $C = \mathcal{E}_2 \subset \mathbb{K}^2$ le basi canoniche. Poiché

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},$$

abbiamo $M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2}(f) = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Osserviamo che, infatti, posto $X = (x, y, z)$ e $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$,

$$f(X) = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = f_A(X).$$

Consideriamo ora le basi $B' = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ e $C' = \{(1, 2), (-1, 1)\}$. Vogliamo calcolare $M_{B'C'}(f)$, quindi dobbiamo determinare le coordinate dei vettori $f(1, -1, 0) = (3, -1)$, $f(0, 1, 0) = (-2, 1)$ e $f(0, 1, -1) = (-2, 2)$ rispetto alla base C'. Troviamo le coordinate rispetto a C' di un vettore generico $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ risolvendo il sistema lineare $x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\2 & 1 & b\end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 - 2R1} \begin{pmatrix}1 & -1 & a\\0 & 3 & b-2a\end{pmatrix},$$

quindi

$$x_{C'}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)/3 \\ (-2a+b)/3 \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{K}.$$

Possiamo ora calcolare

$$x_{C'}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \end{pmatrix}, \quad x_{C'}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}, \quad x_{C'}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_{B'C'}(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -7/3 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO. Sia $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, data da $f_A(X) = AX$. Allora, se $E^1, \ldots, E^n$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$, visto che

$$AE^i = A^i = x_{\mathcal{E}_m}(A^i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

abbiamo $M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_m}(f_A) = A$. Viceversa, se $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è un'applicazione lineare, $f = f_A$ dove $A = M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_m}(f)$. Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$ abbiamo

$$f_A(E^i) = M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_m}(f)E^i = M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_m}(f)^i = f(E^i).$$

PROPOSIZIONE 6.1. *Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Allora, dati n vettori $w_1, \ldots, w_n \in W$ esiste un'unica applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato $u = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, poniamo $f(u) = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n$. L'applicazione f è ben definita per l'unicità delle coordinate, $f(v_i) = w_i$ per ogni i ed inoltre f è lineare. Infatti, sia $k \in \mathbb{K}$. Allora $ku = (kx_1)v_1 + \cdots + (kx_n)v_n$, e per definizione $f(ku) = (kx_1)w_1 + \cdots + (kx_n)w_n = kf(u)$. Inoltre, se $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$, $f(u + v) = f((x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (x_n + y_n)v_n) = (x_1 + y_1)w_1 + \cdots + (x_n + y_n)w_n = f(u) + f(v)$. È chiaro che se un'altra applicazione lineare g soddisfa $g(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ allora, poiché g manda combinazioni lineari in combinazioni lineari con gli stessi coefficienti, deve coincidere con f. □

OSSERVAZIONE. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare e siano $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Siano $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ e $C = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset W$ basi. Abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_B"'] & W \arrow[d, "x_C"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "g"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

dove $g = x_C \circ f \circ x_B^{-1}$ coincide con l'applicazione lineare associata alla matrice $M_{BC}(f)$. Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$, il vettore $x_C(f(x_B^{-1}(E^i)) = x_C(f(v_i))$ è, per definizione, l'i-esima colonna della matrice $M_{BC}(f)$, ovvero $M_{BC}(f)E^i$. È interessante osservare che il sottospazio $\mathrm{Im}(f) \subset W$ viene mandato dall'isomorfismo x_C sul sottospazio $x_C(\mathrm{Im}(f)) = g(x_B(V)) = g(\mathbb{K}^n) = \mathrm{Im}(g)$. Quindi

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(g) = r(M_{BC}(f)).$$

Quindi *il rango di una qualunque applicazione lineare coincide con il rango della matrice ad essa associata tramite basi qualunque*.

DEFINIZIONE. Un'applicazione lineare $f\colon V \to V$ da uno spazio vettoriale in sé stesso si dice *endomorfismo* di V.

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'unico endomorfismo tale che

$$f(E^1) = 2E^1 + E^2 + 3E^3, \quad f(E^2) = 3E^1 + E^2 - 2E^3, \quad f(E^3) = 2f(E^1) - f(E^2).$$

Scriviamo la matrice $M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_3}(f)$ e stabiliamo se l'applicazione f è iniettiva o suriettiva.

Abbiamo $f(E^3) = 2(2,1,3) - (3,1,-2) = (1,1,8)$, quindi

$$M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Poiché $f(E^3) \in \langle f(E^1), f(E^2)\rangle$, sappiamo già che f non può essere suriettiva. Verifichiamolo comunque usando l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3 - 3R1]{R2 \to R2 - 2R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 + 5R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice finale ha due pivot nelle prime due colonne, vediamo che $\operatorname{rg}(f) = 2$ e $\operatorname{Im}(f) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$. Quindi f non è suriettiva e $\dim\ker(f) = 3 - 2 = 1$. Risolvendo il sistema si ottengono le soluzioni $\{(-2z, z, z) \mid z \in \mathbb{K}\}$, quindi $\ker(f) = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Avere la possibilità di scegliere le basi con le quali associare una matrice ad un'applicazione lineare ha dei vantaggi che diventeranno più chiari in seguito, ma che già si possono intuire grazie al seguente

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ lineare, data da $f(x,y) = (x+y, 3x-y, x-y)$. Poiché $f(1,0) = (1,3,1)$ e $f(0,1) = (1,-1,-1)$,

$$M_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ora calcoliamo $M_{BC}(f)$, dove $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ e $C = \{(2,2,0),(0,4,2),(0,0,1)\}$ (dando per buono che B e C sono basi). Abbiamo

$$f(1,1) = (2,2,0) = 1 \cdot (2,2,0) + 0 \cdot (0,4,2) + 0 \cdot (0,0,1)$$

e

$$f(1,-1) = (0,4,2) = 0 \cdot (2,2,0) + 1 \cdot (0,4,2) + 0 \cdot (0,0,1),$$

quindi

$$M_{BC}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è nettamente più semplice della matrice $M_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3}(f)$. Questo esempio illustra il fatto che a volte un'applicazione lineare si può rappresentare con matrici più semplici usando basi più complicate di quelle canoniche, e questo fatto in alcuni contesti può essere molto vantaggioso.

Il nostro prossimo scopo è determinare una formula per calcolare il modo in cui cambia la matrice associata ad un'applicazione lineare al cambiare delle basi. Cominciamo con lo stabilire come calcolare la matrice associata alla composizione di applicazioni lineari. Nel farlo introdurremo un'importante operazione tra matrici.

PROPOSIZIONE 6.2. *Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to U$ due applicazioni lineari tra $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Siano $B \subset V$, $C \subset W$ e $D \subset U$ basi rispettivamente di n, m e q elementi. Allora*

$$M_{BD}(g \circ f) = M_{CD}(g) \cdot M_{BC}(f),$$

dove, date due matrici $N \in \mathbb{K}^{q,m}$ e $P = (P^1, P^2, \dots, P^n) \in \mathbb{K}^{m,n}$, il prodotto di matrici $N \cdot P$ *è definito da $(NP^1, NP^2, \dots, NP^n) \in \mathbb{K}^{q,n}$.*

ESEMPIO. Calcoliamo il prodotto di $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^{2,3}$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^{3,2}$:

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 1\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 3\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -2 \end{smallmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 3\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 1\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$

quindi

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

OSSERVAZIONE. Guardando l'esempio precedente ci accorgiamo che se indichiamo con $C = (c_{hk})$ la matrice prodotto delle matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{rs})$, allora per ogni h e k vale la formula:

$$c_{hk} = \sum_j a_{hj} b_{jk}.$$

Per questo motivo il prodotto tra matrici definito nella proposizione precedente è usualmente detto *prodotto righe per colonne*. Notiamo che definisce un'applicazione $\mathbb{K}^{q,m} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{q,n}$. In altre parole, il prodotto righe per colonne $A \cdot B$ tra due matrici A e B è definito se e solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B. Un caso particolare del prodotto righe per colonne è degno di nota. Dotando l'insieme delle matrici quadrate $\mathbb{K}^{n,n}$ della somma usuale tra matrici e del prodotto righe per colonne, si ottiene un anello $(\mathbb{K}^{n,n}, +, \cdot)$ con unità moltiplicativa data dalla matrice identità I. Questo anello *non è* commutativo, perché ad esempio

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Inoltre, non ogni elemento di $\mathbb{K}^{n,n} \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ ammette un inverso. Ad esempio, per ogni matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^{2,2}$ abbiamo $A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq I$, quindi $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ non ha un'inversa.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 6.2. Siano $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ e supponiamo che l'i-esima colonna $M_{BC}(f)^i$ della matrice $M_{BC}(f)$ sia data da $x_C(f(v_i)) = (y_1, \dots, y_m)$. L'$i$-esima colonna di $M_{BD}(g \circ f)$ è, per definizione,

$$x_D(g \circ f(v_i)) = x_D(g(y_1 w_1 + \dots + y_m w_m)) = y_1 x_D(g(w_1)) + \dots + y_m x_D(g(w_m)) = M_{CD}(g) M_{BC}(f)^i,$$

quindi le matrici $M_{BD}(g \circ f)$ e $M_{CD}(g) \cdot M_{BC}(f)$ coincidono. □

ESEMPIO. Siano $B, C \subset \mathbb{K}^n$ due una basi qualunque. Applicando la formula della proposizione otteniamo

$$M_{BC}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) M_{CB}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = M(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = I, \quad M_{CB}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) M_{BC}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = M_{BB}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = I.$$

Concludiamo che $M_{BC}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$ è invertibile e $M_{CB}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = M_{BC}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})^{-1}$.

PROPOSIZIONE 6.3. *Una matrice $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile se e solo se $\mathrm{rg}(M) = n$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathrm{rg}(M) = n$ le colonne di M sono una base B di $\mathbb{K}^n$, quindi possiamo scrivere $M = M_{B\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$ e l'esempio precedente mostra che M è invertibile. Viceversa, se

$MN = (MN^1, MN^2, \dots, MN^n) = I = (E^1, \dots, E^n)$, allora $r(M) = rg(f_M) = n$ perché $\mathbb{K}^n = \langle E^1, \dots, E^n \rangle \subset \mathrm{Im}(f_M)$. $\square$

ESEMPIO. Il seguente esempio contiene un metodo pratico per calcolare, quando esiste, la matrice inversa di una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Cominciamo con l'osservare che tramite operazioni elementari che includono la moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, ogni matrice a gradini quadrata di rango massimo può essere trasformata nella matrice identità. Infatti, basta riscalare le righe per far diventare 1 tutti i pivot e poi azzerare tutti gli elementi della matrice che si trovano sopra di essi. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1 \to R1/2]{\substack{R4 \to R4/4 \\ R2 \to -R2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1 \to R1+3/2R3]{R2 \to R2+2R3} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \to R1 - R2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa procedura si può utilizzare per calcolare l'unica soluzione di un sistema quadrato $AX = B$ di rango massimo. Basta applicare l'eliminazione alla matrice completa (A, B) fino ad arrivare ad una matrice della forma (I, B'). È evidente che la colonna B' fornisce l'unica soluzione del sistema.

Ora supponiamo di voler calcolare l'inversa $X = (X^1, \dots, X^n)$ di una matrice A. L'equazione $AX = I$ equivale agli n sistemi lineari $AX^1 = E^1$, ..., $AX^n = E^n$, che possiamo risolvere simultaneamente applicando l'algoritmo di eliminazione alla matrice $(A, I) = (A^1, \dots, A^n, E^1, \dots, E^n)$ in modo tale da ottenere la matrice I nelle prime n colonne. Poiché questo procedimento risolve simultaneamente gli n sistemi di cui sopra, il risultato sarà necessariamente della forma (I, X) con $AX = I$. Supponiamo ad esempio di sapere che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile. Applicando l'eliminazione per calcolare l'inversa di A otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 + 2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R1 \to R1 - R3]{R2 \to R2 - R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to -R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo per esercizio che la matrice trovata $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è effettivamente l'inversa di A:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora la formula del cambiamento di matrice che stavamo cercando. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare e basi $B \subset V$ e $C \subset W$. Vogliamo capire la relazione che intercorre tra la matrice $M_{BC}(f)$ e la matrice $M_{B'C'}(f)$, dove $B' \subset V$ e $C' \subset W$ sono altre due basi. Osserviamo che possiamo scrivere f come la seguente composizione di applicazioni lineari:

$$V \xrightarrow{\mathrm{id}_V} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\mathrm{id}_W} W.$$

Usando due volte la formula per la matrice associata alla composizione di applicazioni lineari otteniamo:

$$M_{B'C'}(f) = M_{B'C'}(\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V) = M_{CC'}(\mathrm{id}_W) M_{B'C}(f \circ \mathrm{id}_V) = M_{CC'}(\mathrm{id}_W) M_{BC}(f) M_{B'B}(\mathrm{id}_V).$$

In particolare, quando $V = W$, $B = C$ e $B' = C'$ otteniamo la formula

$$M_{B'B'}(f) = M_{BB'}(\mathrm{id}_V) M_{BB}(f) M_{B'B}(\mathrm{id}_V).$$

Osserviamo che le matrici $M_{B'B}(\mathrm{id}_V)$ e $M_{BB'}(\mathrm{id}_V)$ sono una l'inversa dell'altra:

$$M_{B'B}(\mathrm{id}_V)M_{BB'}(\mathrm{id}_V) = M_{B'B'}(\mathrm{id}_V) = I, \quad M_{BB'}(\mathrm{id}_V)M_{B'B}(\mathrm{id}_V) = M_{BB}(\mathrm{id}_V) = I.$$

Riassumendo, la formula del cambiamento di matrice per un'applicazione lineare $f\colon V \to V$ si può scrivere

$$\boxed{M_{B'B'}(f) = P^{-1}M_{BB}(f)P}$$

dove $P = M_{B'B}(\mathrm{id}_V)$ è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori di B' rispetto alla base B.

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'endorfismo definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice $M_{BB}(f)$, dove $B = \{(1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$. Applichiamo la formula per il cambiamento di matrice:

$$M_{BB}(f) = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P,$$

dove

$$P = M_{B\mathcal{E}_3}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo P^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2\to R2-R1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3-R2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1\to R1+R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1\to R1-R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ l'applicazione lineare con matrice

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $B = \{(1,-1), (2,1)\}$. Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_2}(f)$. Applicando la formula di cambiamento di matrice:

$$M_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_2}(f) = P^{-1}M_{BB}P,$$

dove $P = M_{\mathcal{E}_2B}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2})$ e $P^{-1} = M_{B\mathcal{E}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Invertiamo quest'ultima matrice per ottenere P:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2\to R2+R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1\to R1-2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE. Una matrice non invertibile P è anche detta *singolare*. Due matrici M ed M' si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile P tale che $M' = P^{-1}MP$.

ESEMPIO. Vogliamo verificare che esiste un unico endomorfismo $f\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ tale che

$$f(2-x)=1+3x, \quad f(x-2x^2)=1+x-2x^2, \quad f(1+x^2)=x+x^2.$$

Vogliamo anche calcolare $\mathrm{rg}(f)$ e $\dim\ker(f)$. Per verificare esistenza e unicità di f dobbiamo controllare che

$$B=\{2-x, x-2x^2, 1+x^2\}$$

sia una base. Se $\mathcal{E}_3=\{1,x,x^2\}$, l'isomorfismo $x_{\mathcal{E}_3}\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2}\to\mathbb{K}^3$ manda B sull'insieme

$$C=\{(2,-1,0),(0,1,-2),(1,0,1)\}.$$

Poiché gli isomorfismi conservano le dimensioni dei sottospazi e quindi mandano basi in basi, se C è una base di $\mathbb{K}^3$ anche $B=x_{\mathcal{E}_3}^{-1}(C)$ lo è. Verifichiamo che C è una base usando l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R1\leftrightarrow R2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R2\to R2+2R1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3+R2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La presenza di 3 pivot nell'ultima matrice garantisce che C è una base. Per calcolare $\mathrm{rg}(f)$ possiamo procedere nello stesso modo, applicando l'eliminazione alla matrice dei vettori delle coordinate dei vettori di $f(B)$. Ordinando i vettori di $f(B)$ in modo opportuno si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R2\to R2-3R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R3\to R3-R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Quindi $\mathrm{rg}(f)=2$ e $\dim\ker(f)=3-2=1$.

Esercizi

(1) Determinare la matrice, rispetto alla base canonica, delle seguenti applicazioni lineari $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$:

$$f(x,y) = (2x - 3y,\, -x + 2y)\,, \quad g(x,y) = (-x + y,\, 2x + y)\,, \quad h(x,y) = (-3x + y,\, -3x - 2y)$$

(2) Determinare la matrice, rispetto alla base canonica, delle seguenti applicazioni lineari $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$:

$$f(x,y,z) = (-3x - 2y,\, 2x - 2z,\, -2x - y - 3z)\,, \quad g(x,y,z) = (2x + y,\, -x + y - z,\, -2x - 3z)$$

(3) Calcolare i seguenti prodotti di matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Calcolare le inverse delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(5) Sia $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ l'applicazione lineare data da $f(x,y) = (2y,\, -x + 2y)$. Determinare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\}$.

(6) Sia $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ l'applicazione lineare data da $f(x,y) = (x - 3y,\, -x - 3y)$. Determinare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(7) Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'applicazione lineare data da $f(x,y,z) = (-2x - 2y,\, x - y - z,\, 2x)$. Determinare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

(8) Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'applicazione lineare data da $f(x,y,z) = (-x - 3y,\, -3x + 2y - z,\, -x - 3z)$. Determinare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(9) Sia $f\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare data da $f(p(x)) = p(-x)$. Calcolare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{1 + x + x^2, 1 + x, 1 - x\}$.

(10) Sia $f\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare data da $f(p(x)) = p(x + 1)$. Calcolare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{2, 1 - x, x^2\}$.

(11) Sia $f\colon \mathbb{K}^{2,2} \to \mathbb{K}^{2,2}$ l'applicazione lineare data da $f(A) = NA$, dove $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

(12) Sia $f\colon \mathbb{K}^{2,2} \to \mathbb{K}^{2,2}$ l'applicazione lineare data da $f(A) = NA$, dove $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice $M_{BB}(f)$ di f rispetto alla base $B = \{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\}$.

(13) Verificare che esiste un unico endomorfismo $f\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ tale che $f(1 + x) = 2 - x$, $f(x + x^2) = 2x + x^3$, $f(x^2 + x^3) = 2 + x + x^3$e $f(1 - x^3) = -2 + 3x + x^3$. Calcolare $\operatorname{rg}(f)$ e $\dim\ker(f)$.

Soluzioni degli esercizi

(1) $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(h) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -8 & 24 & -4 \\ 11 & -5 & -7 \\ 6 & -11 & -5 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5}i+\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}i+\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}i-\frac{3}{5} & \frac{1}{5}i+\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{11}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{27} & -\frac{8}{27} & \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{19}{15} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{4}{5} \\ -\frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{17}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} -12 & -17 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{7}{4} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} -\frac{13}{4} & -\frac{41}{4} & \frac{15}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(8) $\begin{pmatrix} -\frac{31}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{9}{2} \\ \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(10) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(11) $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 1 & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} \\ -\frac{7}{5} & 4 & \frac{2}{5} & \frac{16}{5} \\ -3 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{5} & -2 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

(12) $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{11}{2} & \frac{9}{2} & 3 & -5 \\ -6 & 6 & 7 & -9 \\ -8 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

(13) I polinomi $1+x$, $x+x^2$, x^2+x^3 e $1-x^3$ sono una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$, quindi f è univocamente definita. Inoltre $\operatorname{rg}(f) = 2$ e $\dim\ker(f) = 2$.

CAPITOLO 7

Determinanti

Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Il determinante è, per ogni $n \geq 1$, un'applicazione $\det\colon\ \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ con la seguente utile proprietà:

$$\det(A) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad r(A) < n.$$

Per definire il determinante si utilizza la nozione di *minore* di una matrice quadrata, di cui ora vediamo la definizione. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $n \geq 2$. Un *minore* di A di ordine k è una matrice quadrata di ordine k ottenuta da A eliminando $n-k$ righe ed $n-k$ colonne. Ad esempio, sia $A \in \mathbb{K}^{3,3}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eliminando la prima riga e la seconda colonna di A si ottiene il minore 2×2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}.$$

Indichiamo con A_{ij} il minore $(n-1) \times (n-1)$ di A ottenuto eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna di A. Nell'esempio appena visto, $B = A_{12}$.

DEFINIZIONE. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, con $n \geq 1$. Allora $\det(A) \in \mathbb{K}$ è definito da:

(1) $\det(A) = a_{11}$ se $n = 1$;
(2) $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(A_{1n})$ se $n > 1$.

Ad esempio,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -6 - 3 + 2 = -7.$$

La formula data nella definizione di determinante è detta *sviluppo di Laplace* rispetto alla prima riga. È utile sapere che per calcolare il determinante è possibile utilizzare sviluppi di Laplace rispetto ad altre righe, ed anche rispetto alle colonne. Questo fatto è enunciato nella seguente proposizione, che non dimostreremo. Per enunciare la proposizione conviene utilizzare la seguente notazione. Sia a_{ij} l'elemento di $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ appartenente alla riga i e alla colonna j.

Chiameremo *complemento algebrico* di a_{ij} il numero

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

PROPOSIZIONE. *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora*

$$\det(A) = a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathcal{A}_{in} \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, n,$$
$$\det(A) = a_{1j}\mathcal{A}_{1j} + a_{2j}\mathcal{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathcal{A}_{nj} \quad \textit{per ogni } j = 1, \dots, n.$$

□

Calcoliamo il determinante della stessa matrice 3×3 vista prima tramite lo sviluppo di Laplace rispetto alla seconda colonna:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3 + 2 - 6 = -7.$$

Una regola pratica per il calcolo di un determinante 3×3 è la seguente *regola di Sarrus*. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,3}.$$

Riscriviamo le prime due colonne di A a destra della matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

La regola di Sarrus dice che $\det(A)$ è il numero che si ottiene sommando i prodotti degli elementi sulle diagonali di lunghezza 3 "Nord-Ovest-Sud-Est" e sottraendo i prodotti degli elementi sulle diagonali di lunghezza 3 "Sud-Ovest-Nord-Est". Ad esempio, nel caso della matrice 3×3 già incontrata abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

quindi

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 7(-1) + 2 \cdot 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 = -7.$$

ESEMPIO. Per calcolare il determinante della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

conviene usare, a causa della disposizione degli zeri, lo sviluppo di Laplace rispetto alla seconda riga oppure rispetto alla terza colonna. Sviluppando ad esempio rispetto alla seconda riga otteniamo

$$\det(B) = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la regola di Sarrus per calcolare il determinante 3×3 concludiamo

$$\det(B) = 0 + 0 + 2 - 0 - 1 - 0 = 1.$$

Il determinante soddisfa anche le seguenti proprietà che useremo ma non dimostreremo:

(1) se A ha due righe uguali oppure due colonne uguali oppure una riga nulla oppure una colonna nulla allora $\det(A) = 0$;

(2) se $a, b \in \mathbb{K}$, $X, Y \in \mathbb{K}^n$ e $A = (A^1, \dots, A^{i-1}, aX + bY, A^{i+1}, \dots, A^n)$, allora

$$\det(A) = a \det(A^1, \dots, A^{i-1}, X, A^{i+1}, \dots, A^n) + b \det(A^1, \dots, A^{i-1}, Y, A^{i+1}, \dots, A^n);$$

in altre parole, fissati $n-1$ vettori colonna $A^1, \dots, A^{i-1}, A^{i+1}, \dots, A^n$, l'applicazione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ data da

$$X \mapsto \det(A^1, \dots, A^{i-1}, X, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

è lineare;

(3) per le righe vale la proprietà analoga alla precedente;

(4) scambiando due colonne o due righe di A il determinante cambia segno;

(5) scambiando le righe e le colonne di A il determinante non cambia. In altre parole, $\det({}^tA) = \det(A)$;

(6) Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ è triangolare superiore, ovvero $a_{ij} = 0$ se $i > j$, allora $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$. In particolare, $\det(I) = 1$.

(7) (Teorema di Binet): per ogni $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ si ha $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

OSSERVAZIONE. Le proprietà (1), (2) e (3) implicano che il determinante di una matrice non cambia se ad una riga o ad una colonna si somma una combinazione lineare delle altre righe o, rispettivamente, delle altre colonne.

ESEMPIO. Usiamo l'osservazione precedente e la proprietà (6) per calcolare il determinante della matrice 3×3 già incontrata:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7.$$

PROPOSIZIONE. *Sia $A' = (a'_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice a gradini ottenuta dalla matrice A tramite una successione dei seguenti due tipi di mosse elementari: sommare ad una riga un multiplo di un'altra e scambiare due righe. Allora* $\det(A') = (-1)^s \det(A)$*, dove s è il numero di scambi di righe applicati durante il procedimento.*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato segue immediatamente dall'osservazione precedente e dalla proprietà (4). □

PROPOSIZIONE. *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora $r(A) < n$ se e solo se* $\det(A) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Applicando mosse elementari come nella proposizione precedente, da A possiamo ottenere una matrice quadrata a gradini A'. Sappiamo che $r(A) = n$ se e solo se A' ha n pivot, ovvero se e solo se tutti gli elementi sulla diagonale principale di A' sono diversi da zero. Ma per la proprietà (6) questo fatto equivale a $\det(A') \neq 0$. Poiché per la proposizione precedente $\det(A') = \pm \det(A)$, la conclusione segue immediatamente. □

Nel calcolo del rango di matrici in cui compaiono dei parametri, l'utilizzo del determinante può essere più semplice dell'eliminazione di Gauss.

ESEMPIO. Calcolare il rango di $A_k = \left(\begin{smallmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ al variare di $k \in \mathbb{K}$. Lo sviluppo del determinante rispetto alla seconda riga fornisce

$$\det(A_k) = k \det \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = k(k-2).$$

Quindi $r(A_k) < 3$ se e solo se $k \in \{0, 2\}$. Inoltre abbiamo $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, che ha rango 2 perché la prima e la terza riga di A_0 sono linearmente indipendenti. La matrice $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2 per la stessa ragione.

ESEMPIO. Calcolare il rango di $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ al variare di $k \in \mathbb{K}$. Ci conviene applicare delle mosse elementari che non cambiano il determinante prima di calcolarlo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R3 - R1]{R2 \to R2 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & k-2 & -k \\ 0 & 2 & 3-k \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante rispetto alla prima colonna otteniamo

$$\det(A_k) = \det \begin{pmatrix} k-2 & -k \\ 2 & 3-k \end{pmatrix} = -k^2 + 7k - 6 = (1-k)(k-6).$$

Quindi $r(A_k) < 3$ se e solo se $k \in \{1, 6\}$ e si verifica facilmente che $r(A_1) = r(A_6) = 2$.

Anche se il determinante è definito solo per matrici quadrate, si può utilizzare per calcolare il rango di matrici rettangolari. L'ingrediente cruciale è il seguente.

PROPOSIZIONE. *Il rango di una matrice rettangolare A coincide con l'ordine massimo di un suo minore quadrato B non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia B un minore di A con $\det(B) \neq 0$. Poiché le righe di B sono linearmente indipendenti, a maggior ragione lo sono quelle di A che le contengono, quindi $r(A)$ è almeno pari all'ordine di B. Dunque $r(A)$ è maggiore o uguale all'ordine massimo di un suo minore quadrato non singolare. Viceversa, verifichiamo che esiste un minore quadrato non singolare di ordine $r = r(A)$. Sia $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ una base dello spazio delle colonne $\langle A^1, \dots, A^n \rangle$ estratta dall'insieme delle colonne $\{A^1, \dots, A^n\}$. La matrice $A' = (A^{j_1}, \dots, A^{j_r})$ ha rango r, quindi ha r righe $A'_{i_1}, \dots, A'_{i_r}$ linearmente indipendenti che individuano un suo minore non singolare B. Ma B è chiaramente anche un minore non singolare di A ed ha ordine r. $\square$

ESEMPIO. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante diverso da zero, quindi $r(A) \geq 2$. Calcolando si verifica che tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo, quindi $r(A) = 2$.

Vediamo ora come ottimizzare l'utilizzo dei determinanti per calcolare il rango delle matrici. Sia B un minore $m \times m$ di una matrice A. Un minore $(m+1) \times (m+1)$ di A si dice *orlato* di B se si ottiene aggiungendo una riga e una colonna di A a quelle che individuano B.

ESEMPIO. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. I minori $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sono i due minori ottenuti orlando il minore $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE (Criterio degli orlati). *Sia B un minore $m \times m$ non singolare della matrice A. Allora $r(A) = m$ se e solo se ogni minore orlato di B è singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione precedente, se $r(A) = m$ allora ogni minore orlato di B è singolare. Viceversa, supponiamo che ogni minore orlato di B sia singolare. Notiamo che le m righe di A contenenti B sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che $r(A) > m$. Allora esiste una riga di A che non è combinazione lineare delle righe di A contenenti B, quindi aggiungendola ad esse si ottiene una sottomatrice A' di rango $m+1$. Chiaramente le m colonne di A' contenenti B sono linearmente indipendenti, e poiché $r(A') = m+1$ esiste una colonna di A' che non è loro combinazione lineare. Aggiungendola ed esse si individua un minore orlato di B non singolare, ma ciò contraddice l'ipotesi. $\square$

ESEMPIO. Per calcolare il rango della matrice A dell'esempio precedente è sufficiente, per il criterio degli orlati, calcolare i determinanti dei due minori orlati B_1 e B_2, e non di tutti e quattro i minori 3×3 di A.

ESEMPIO. Calcoliamo, usando il criterio degli orlati, il rango della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & k^2 - 1 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{K}$. Il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante diverso da zero, quindi $r(A_k) \geq 2$ per ogni $k \in \mathbb{K}$. I determinanti dei due minori orlati risultano

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = k - 1, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & k^1 - 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = k^2 - 1,$$

quindi $r(A_1) = 2$ e $r(A_k) = 3$ per $k \neq 1$.

I determinanti si possono usare anche per calcolare le inverse delle matrici invertibili.

PROPOSIZIONE. *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice con $\det(A) \neq 0$, e sia $M = (m_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ la matrice definita ponendo*

$$m_{ij} = \frac{\mathcal{A}_{ji}}{\det(A)}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Allora $M = A^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente mostrare che $AM = I$, ovvero che, data la j-esima colonna M^j di M, $AM^j = E^j$, il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Abbiamo

$$AM^j = m_{1j}A^1 + m_{2j}A^2 + \cdots + m_{nj}A^n,$$

quindi l'i-esima componente di AM^j è

$$a_{i1}m_{1j} + a_{i2}m_{2j} + \cdots + a_{in}m_{nj} = \frac{1}{\det(A)}(a_{i1}\mathcal{A}_{j1} + a_{i2}\mathcal{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\mathcal{A}_{jn}).$$

Ma il numero

$$d_{ij} = a_{i1}\mathcal{A}_{j1} + a_{i2}\mathcal{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\mathcal{A}_{jn}$$

è lo sviluppo di Laplace tramite l'i-esima riga della matrice ottenuta da A sostituendone la sua j-esima riga con la sua i-esima riga. Poiché il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo, abbiamo $d_{ij} = \delta_{ij}\det(A)$, dove δ_{ij} è il delta di Kronecker. Questo implica immediatamente quello che volevamo, ovvero $AM^j = E^j$. □

ESEMPIO. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calcoliamone il determinante con la regola di Sarrus:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Quindi, usando la proposizione troviamo

$${}^tA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando la proposizione precedente si può ricavare una formula esplicita, detta *regola di Cramer*, per l'unica soluzione $X = (x_1, \ldots, x_n)$ di un sistema del tipo $AX = B$, con $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\det(A) \neq 0$. La formula è data da

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

dove $B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \dots, A^n)$ è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con il vettore colonna B dei termini noti del sistema. La regola deriva dal fatto che, essendo A invertibile, l'uguaglianza $AX = B$ equivale a $X = A^{-1}B$, e dalla proposizione precedente $(A^{-1})_{ij} = \mathcal{A}_{ji}/\det(A)$. Quindi

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_j (A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (b_1\mathcal{A}_{1i} + b_2\mathcal{A}_{2i} + \cdots + b_n\mathcal{A}_{ni}) = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}.$$

ESEMPIO. Vogliamo trovare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema è $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, che ha determinante -1. Quindi si può applicare la regola di Cramer per trovare l'unica soluzione:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = 8, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = -3, \quad z = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -10$$

Esercizi

(1) Per quali dei seguenti $\zeta \in \mathbb{C}$ i vettori $\begin{pmatrix} \zeta \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ sono $\mathbb{C}$-linearmente dipendenti ?

- $\zeta = \pm e^{5\pi i/8}$ • $\zeta = \pm e^{7\pi i/8}$ • $\zeta = \pm e^{3\pi i/8}$ • $\zeta = \pm e^{\pi i/8}$

(2) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(3) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici usando gli sviluppi di Laplace:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici usando la regola di Sarrus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(5) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici usando gli sviluppi di Laplace:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici senza usare sviluppi di Laplace:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(7) Calcolare il rango delle seguenti matrici razionali al variare di $k \in \mathbb{Q}$:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & k \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} k & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$$

(8) Calcolare il rango delle seguenti matrici razionali al variare di $k \in \mathbb{Q}$:

$$(a) \begin{pmatrix} k & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & k \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} k & -1 & 3 & 1 \\ 1 & k & 2 & -1 \\ 2k & k-1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 3 \\ -1 & 2 & k & 1 \\ k+1 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(9) Calcolare le inverse delle seguenti matrici usando i determinanti:

$$(a) \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(10) Risolvere i seguenti sistemi lineari col metodo di Cramer:

$$(a) \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -2x - 3y = 2 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + z = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - 2y - 2z = -3 \\ -2x + y + 2z = 2 \\ -x + 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

Soluzioni degli esercizi

(1) $\zeta = \pm e^{3\pi i/8}$;
(2) $-3, 24, 8, -27, 4$.
(3) $12, 0, -4, 6, 8$.
(4) $-63, -16, -1, -8, 6$.
(5) $57, 3, 2, -2, -12$.
(6) $-4, -12, -36, -33, -4$.
(7) (a) 3 per $k \neq 0, -2$, 2 per $k \in \{0, -2\}$; (b) 3 per $k \neq \pm 2$, 2 per $k = \pm 2$; (c) 3 per $k \neq 5/2, -2$, 2 per $k \in \{5/2, -2\}$.
(8) (a) 3 per ogni k; (b) 3 per $k \neq 1$, 2 per $k = 1$; (3) 3 per $k \neq -1$, 2 per $k = -1$.
(9)

$$(a) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

(10) (a) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}\right)$; (b) $(-8,\ -6,\ 2)$; (c) $\left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{6}{5}\right)$.

CAPITOLO 8

Esercizi di ricapitolazione

Nei seguenti esercizi $\mathbb{K}$ indicherà sempre uno dei campi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Esercizio 1
Sia $S \subset \mathbb{K}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 2)$, $v_2 = (-2, 0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, $v_4 = (0, 0, 3, -1)$. Mostrare che $S = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ e calcolare $\dim S$.

Esercizio 2
Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più quattro a coefficienti in $\mathbb{K}$.

(1) Si dimostri che i sottoinsiemi di V dati da

$$U = \{p(x) \in V \mid p(x) = p(1-x)\}, \quad W = \{p(x) \in V \mid p(x) = -p(1-x)\}$$

sono sottospazi, e se ne trovino delle basi.

(2) Si dimostri che $V = U \oplus W$.

Esercizio 3
Per ognuna delle seguenti coppie di sottospazi $U, V \subset \mathbb{K}^3$ verificare la formula di Grassmann calcolandone separatamente tutti i termini:

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V).$$

(1) $U = \langle (-1, 0, 2) \rangle$, $V = \langle (0, 1, -2), (1, -1, 2) \rangle$
(2) $U = \langle (1, 1, 0) \rangle$, $V = \langle (0, -2, 1), (1, -1, 1) \rangle$
(3) $U = \langle (-1, 0, 2), (0, 1, -2) \rangle$, $V = \langle (1, -1, 2), (1, 1, 0) \rangle$
(4) $U = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle$, $V = \langle (2, 0, 2), (-1, 1, -1) \rangle$

Esercizio 4
Determinare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{K}$ tali che la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soddisfi l'equazione $A_\lambda^2 = A_\lambda$.

Esercizio 5
Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $r \in \mathbb{K}$. Calcolare M^n per ogni intero $n \geq 1$.

Esercizio 6
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita ed $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Mostrare che se B e B' sono due basi di V allora le matrici associate $M_{BB}(f)$ ed $M_{B'B'}(f)$ associate ad f hanno lo stesso determinante. Usare questo fatto per definire il *determinante di un endomorfismo*.

Esercizio 7
Si consideri l'insieme $\mathbb{C}^{2,2}$ delle matrici 2×2 a coefficienti complessi come spazio vettoriale su

$\mathbb{C}$. Sia

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),$$

e sia $\phi\colon\ \mathbb{C}^{2,2} \to \mathbb{C}^{2,2}$ l'applicazione definita da $\phi(X) = B^{-1}XB$ per ogni $X \in \mathbb{C}^{2,2}$.

(1) Si dimostri che ϕ è una applicazione lineare.
(2) Si calcoli il determinante di ϕ.

Esercizio 8
Si consideri l'insieme $\mathbb{C}^{2,2}$ delle matrici 2×2 a coefficienti complessi come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),$$

e sia $\phi\colon\ \mathbb{C}^{2,2} \to \mathbb{C}^{2,2}$ l'applicazione lineare definita da $\phi(X) = B^{-1}XB$ per ogni $X \in \mathbb{C}^{2,2}$. Si calcoli il determinante di ϕ.

Esercizio 9
Siano $W_1, W_2 \subset \mathbb{K}^4$ i sottospazi dati da

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x + y = 0\}, \quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2z - t = 0\}.$$

Sia $F\colon\ \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ un'applicazione lineare tale che

(1) $F(1, 0, 0, 0) = F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 0)$,
(2) $W_1 \cap W_2 \subseteq \ker(F)$.

Si determini una base dell'immagine di F.

Esercizio 10
Siano $W_1, W_2 \subset \mathbb{K}^4$ i sottospazi dati da

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + 2y = 0\} \quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid z + t = 0\}.$$

Sia $F\colon\ \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ un'applicazione lineare tale che

(1) $F(1, 0, 0, 0) = F(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$,
(2) $W_1 \cap W_2 \subseteq \ker(F)$.

Si determini una base dell'immagine di F.

Esercizio 11
Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^3$ dati da

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (-1, 0, 2), \quad v_3 = (0, 2, 1).$$

Sia $U \subseteq \mathbb{K}^3$ un sottospazio di dimensione 1. Si dimostri che esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbb{K}^3$ generato da due dei vettori v_1, v_2, v_3 tale che

$$\mathbb{K}^3 = U \oplus W.$$

Esercizio 12
Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^3$ dati da

$$v_1 = (0, 1, 2), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (2, 0, 1).$$

Sia $U \subseteq \mathbb{K}^3$ un sottospazio di dimensione 1. Si dimostri che esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbb{K}^3$ generato da due dei vettori v_1, v_2, v_3 tale che

$$\mathbb{K}^3 = U \oplus W.$$

Esercizio 13
Sia $f_k\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $k \in \mathbb{K}$, l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k+1 \\ 2 & k & -k \\ 4 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Si determini per quali valori di k l'applicazione f_k è invertibile.
(2) Si determinino una base del nucleo di f_k e una base dell'immagine di f_k per ogni valore di $k \in \mathbb{K}$.

Esercizio 14
Si considerino i vettori

$$v_1 = (4,1,1,1), \quad v_2 = (2,1,1,0), \quad v_3 = (0,-1,0,1), \quad v_4 = (2,1,0,0) \in \mathbb{K}^4$$

e i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^4$:

$$W_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad W_2 = \langle v_3, v_4 \rangle.$$

Si determini una base del sottospazio somma $W_1 + W_2$.

Esercizio 15
Si considerino $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}^3$ come spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Siano

$$v_1 = (1,0,3),\ v_2 = (1,-1,2),\ v_3 = (0,1,-3),\ v_4 = (0,0,-\lambda) \in \mathbb{K}^3.$$

Determinare l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{K}$ per cui esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ tale che:

$$f(v_1) = \lambda, \quad f(v_2) = 2, \quad f(v_3) = -2, \quad f(v_4) = 1.$$

Esercizio 16
Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{K}$, la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ data da:

$$f(x,y,z,w) = (x + \lambda^2 y + w, 6y - z - w, x + 5\lambda y - z), \quad x,y,z,w \in \mathbb{K}.$$

Esercizio 17
Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a tre. Si determini una base del nucleo dell'applicazione lineare $F\colon V \to \mathbb{R}^2$ data da $F(p) = (p(1), p(2))$.

Esercizio 18
Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Si consideri, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il sottospazio $W_t \subset V$ generato dai polinomi

$$p_1 = -1 + x + x^2 - x^3, \quad p_2 = -1 + 2x + 2x^2 + x^3, \quad p_3 = -2 + x + x^2 + tx^3.$$

(1) Si determini la dimensione di W_t;

(2) Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e $S(2) \subset \mathbb{R}^{2,2}$ il sottospazio formato dalle matrici simmetriche. Si determini per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un isomorfismo $\varphi : V \to \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $\varphi(W_t) = S(2)$.

Esercizio 19
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{K}$, l'applicazione lineare $\phi_k : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ data da

$$\phi_k(x, y, z, w) = (x + y + kz, kx - y + w, y + kz - w).$$

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{K}$:

(1) la matrice di ϕ_k rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{K}^4$ e di $\mathbb{K}^3$;
(2) il rango di ϕ_k;
(3) una base del nucleo e una base dell'immagine di ϕ_k.
(4) Sia $W \subset \mathbb{K}^4$ is sottospazio dato da

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y + z - w = 0\}.$$

Determinare i valori di k tali che $\phi_k(W) \neq \mathbb{K}^3$.

Esercizio 20
Considerare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + ky = 3 + \sqrt{7} \\ 2x - y + z = 2 \\ kx + y + 2z = 5 + \sqrt{7} \end{cases}$$

(1) calcolare il determinante della matrice incompleta del sistema;
(2) determinare i valori di k tali che il sistema ammette un'unica soluzione;
(3) determinare le soluzioni del sistema per i valori di k trovati nel punto precedente;
(4) determinare le soluzioni del sistema per i rimanenti valori di k.

Esercizio 21
Siano $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari date da $f(x, y, z, w) = (x+z, y+w, x+y+z+w)$ e $g(x, y, z, w) = (x + y + w, x + z, -y)$ per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

(1) Determinare i ranghi di f e di g, ed esibire una base dell'immagine di f;
(2) determinare basi dei nuclei di f e di g;
(3) determinare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, il rango dell'applicazione lineare $f + kg : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$;
(4) determinare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker(f + kg)$.

Esercizio 22
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ kx + (k+2)y + 2z + 2w = 0 \\ k^2 y - kz + kw = 1 \end{cases}$$

(1) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(2) calcolare il rango della matrice completa del sistema e discutere l'esistenza di soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(3) determinare l'insieme delle soluzioni del sistema per $k = 1$ e per $k = -1$.

Esercizio 23
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + ky + z = 2k - 1 \\ x + y + kz = 0 \\ kx + y + z = 5 \end{cases}$$

(1) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(2) determinare i valori di k per cui l'insieme delle soluzioni S_k è vuoto, finito o infinito;
(3) determinare l'insieme S_k per i valori di k per cui S_k è infinito;
(4) determinare l'insieme S_0.

Esercizio 24
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ 2x + (2-k)y + 3z = 7 \\ (k-1)x - y + 3z = -5 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare i valori di k per cui l'insieme delle soluzioni S_k è vuoto, finito o infinito;
(c) determinare l'insieme S_k per tutti i valori di k tali che S_k è infinito;
(d) determinare l'insieme S_0.

Esercizio 25
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} (k+1)x + 2y + 2z = -2 \\ x + ky + z = 2 \\ 3x + 3y + (2+k)z = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare i valori di k per cui l'insieme delle soluzioni S_k è vuoto, finito o infinito;
(c) determinare l'insieme S_k per tutti i valori di k tali che S_k è infinito;
(d) determinare l'insieme S_{-2}.

Esercizio 26
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + z + (k+1)w = 1 \\ ky + 2kw = 2 \\ x - y + kz + kw = 1 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare, al variare di k, se l'insieme delle soluzioni S_k è vuoto, finito o infinito;
(c) determinare l'insieme S_1;
(d) determinare l'insieme $U = \{k \in \mathbb{R} \mid S_1 \cap S_k \neq \emptyset\}$.

Esercizio 27
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $\phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\phi_k(x, y, z, w) = (x + y + kz, kx - y + w, y + kz - w).$$

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

(1) la matrice di ϕ_k rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$;
(2) il rango di ϕ_k;
(3) una base del nucleo e una base dell'immagine di ϕ_k.

Domanda extra: sia

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Determinare i valori di k tali che $\phi_k(W) \neq \mathbb{R}^3$.

Esercizio 28
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + z = k \\ kx - y + (k-2)z = k + 1 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il rango della matrice completa del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 29
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x - z = k^2 \\ x + y + 3w = 2k \\ 2x + y + z + 5w = -k \\ x + w = -1 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il rango della matrice completa del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare l'insieme $S_k \subset \mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;

(d) esibire un sottospazio vettoriale $\pi \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\dim \pi = 2$ ed esistono $k_1 \neq k_2$ tali che $\pi \cap S_{k_1} \neq \emptyset$ e $\pi \cap S_{k_2} \neq \emptyset$.

Esercizio 30
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} kx + y + 3z = 4 \\ kx + 2ky + z = 4 \\ (2k-1)y - kz = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il rango della matrice completa del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare l'insieme $S_k \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 31
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + w = 1 \\ x + y + kz + 2w = 0 \\ kx - 2y + (2-k)z - w = k \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il rango della matrice completa del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare quante soluzioni ammette il sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(d) determinare l'insieme delle soluzioni del sistema per $k = 1$.

Esercizio 32
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 5x + (k^2-1)y - 3z + 6w = 6 \\ x - z + 2w = 3 \\ 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 2x - y + kw = 2 \end{cases}$$

(a) Calcolare il rango della matrice incompleta del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il rango della matrice completa del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare quante soluzioni ammette il sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(d) determinare l'insieme delle soluzioni del sistema per $k = 1$.

Esercizio 33
Sia $f\colon\ \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ l'endomorfismo tale che

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix},$$

dove $B = \{i, i+x, 1-x^2\}$. Determinare $f(1)$, $f(x)$ ed $f(x^2)$.

SOLUZIONI.

Esercizio 1: $\dim S = 3$.

Esercizio 2: Per determinare generatori (e successivamente basi) di U e di W si può procedere imponendo che un polinomio generico

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

soddisfi le condizioni richieste, risolvendo poi il risultante sistema di equazioni lineari. Ad esempio, la condizione $p(x) = p(1-x)$ si scrive

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + a_3(1-x)^3 + a_4(1-x)^4.$$

Sviluppando tutte le potenze dei binomi a destra dell'uguale ed imponendo l'uguaglianza dei coefficienti delle stesse potenze di x si ottiene un sistema lineare le cui soluzioni sono i coefficienti dei polinomi di U.

Alternativamente, osserviamo che i polinomi linearmente indipendenti (perché di grado diverso) 1, $x(1-x)$ e $x^2(1-x)^2$ appartengono ad U, quindi $\dim U \geq 3$. Analogamente, i polinomi linearmente indipendenti $2x-1$ e $(2x-1)^3$ appartengono a W, quindi $\dim W \geq 2$. Inoltre, se $p(x) \in U \cap W$ allora $p(x) = -p(x)$, quindi $p(x) = 0$. Dunque $U \cap W = \{0\}$, e per la formula di Grassman

$$5 \leq \dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) \leq 5 = \dim V.$$

Possiamo concludere che $\dim U = 3$, $\dim W = 2$ e $U + W = V$. Inoltre, $\{1, x(1-x), x^2(1-x)^2\}$ è una base di U e $\{2x-1, (2x-1)^3\}$ è una base di W. Osserviamo anche che per mostrare che $U + W = V$ si può osservare direttamente che ogni $p(x) \in V$ si scrive come una somma

$$p(x) = \frac{p(x) + p(1-x)}{2} + \frac{p(x) - p(1-x)}{2},$$

dove il primo addendo appartiene ad U e il secondo a W.

Esercizio 3:
(1) $\dim(U \cap V) = 0$, $\dim(U+V) = 3$, $\dim(U) = 1$, $\dim(V) = 2$;
(2) $\dim(U \cap V) = 1$, $\dim(U+V) = 2$, $\dim(U) = 1$, $\dim(V) = 2$;
(3) $\dim(U \cap V) = 1$, $\dim(U+V) = 3$, $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 2$;
(4) $\dim(U \cap V) = 2$, $\dim(U+V) = 2$, $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 2$;

Esercizio 4: $A_\lambda^2 = A_\lambda$ se e solo se $\lambda = 0$.

Esercizio 5: $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nr \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 6: per la formula del cambiamento di matrice associata abbiamo

$$M_{B'B'}(f) = M_{BB'}(\mathrm{id}_V) M_{BB}(f) M_{B'B}(\mathrm{id}_V), \tag{6}$$

e inoltre $M_{BB'}(\mathrm{id}_V) M_{B'B}(\mathrm{id}_V) = M_{B'B'}(\mathrm{id}_V) = I$, quindi per il teorema di Binet $\det(M_{BB'}(\mathrm{id}_V)) \cdot \det(M_{B'B}(\mathrm{id}_V)) = 1$, e quindi, dall'equazione (6) deduciamo $\det(M_{B'B'}(f)) = \det(M_{BB}(f))$. Dunque questo numero non dipende dalla scelta della base B, e possiamo definirlo come il *determinante dell'endomorfismo* f.

Esercizio 7: Siano X_1, X_2 due elementi di $\mathbb{C}^{2,2}$ e sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Per l'associatività e la distributività del prodotto fra matrici, si ha che

$$\begin{aligned}\phi(X_1 + X_2) &= B^{-1}(X_1 + X_2)B = (B^{-1}X_1 + B^{-1}X_2)B = \\ &= B^{-1}X_1B + B^{-1}X_2B = \phi(X_1) + \phi(X_2)\end{aligned}$$

Inoltre, per l'associatività del prodotto fra matrici e per la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare, si ha che

$$\phi(\lambda X_1) = B^{-1}(\lambda X_1)B = (\lambda B^{-1})X_1B = \lambda(B^{-1}X_1B) = \lambda\phi(X_1)$$

Indichiamo con $E_{hk} \in \mathbb{C}^{2,2}$ la matrice che al posto (i, j) ha il numero $\delta_{ih}\delta_{jk}$, dove δ_{ij} è la delta di Kronecker. Per calcolare il determinante troviamo la matrice di ϕ rispetto alla base $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ dello spazio $\mathbb{C}^{2,2}$:

$$M_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 2 & -8 & -4 \\ 3 & 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice risulta essere uguale ad 1, quindi $\det(\phi) = 1$.

Esercizio 8: la matrice di ϕ rispetto alla base canonica $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ dello spazio $\mathbb{C}^{2,2}$ è

$$M_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 & 3 \\ -4 & -8 & 2 & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante, calcolato con Laplace, risulta essere uguale ad 1, quindi $\det(\phi) = 1$.

Esercizio 9: sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset \mathbb{K}^4$ la base canonica. Poiché per (1) $F(e_1) = F(e_3)$, per linearità $v_1 = e_1 - e_3 \in \ker(F)$. Inoltre, si verifica facilmente che $W_1 \cap W_2$ è generato da $v_2 = e_1 - 2e_2$ e $v_3 = e_3 + 2e_4$. Un semplice calcolo mostra che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, quindi $\ker(F)$ ha dimensione almeno 3. Poiché per (1) $F \neq 0$, la dimensione di $\ker(F)$ è esattamente 3, e dunque la sua immagine ha dimensione 1, con base un qualunque vettore non nullo che gli appartiene, ad esempio $(1, 2, 0)$.

Esercizio 10: sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset \mathbb{K}^4$ la base canonica. Poiché per (1) $F(e_1) = F(e_3)$, per linearità $v_1 = e_1 - e_3 \in \ker(F)$. Inoltre, si verifica facilmente che $W_1 \cap W_2$ è generato da $v_2 = -2e_1 + e_2$ e $v_3 = -e_3 + e_4$. Un semplice calcolo mostra che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, quindi $\ker(F)$ ha dimensione almeno 3. Poiché per (1) $F \neq 0$, la dimensione di $\ker(F)$ è esattamente 3, e dunque la sua immagine ha dimensione 1, con base un qualunque vettore non nullo che gli appartiene, ad esempio $(1, 1, 1)$.

Esercizio 11: se $Z := \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ avesse dimensione due, la conclusione non potrebbe essere vera per un sottospazio di dimensione uno $U \subset Z$. Quindi la prima cosa da verificare è il fatto che i vettori v_1, v_2 e v_3 costituiscano una base di $\mathbb{K}^3$. Questo segue subito dal fatto che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

Sia ora $U = \langle v \rangle$, con $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ e $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Se $a_i \neq 0$, poniamo $W := \langle v_j, v_k \rangle$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Osserviamo che $v \notin \langle v_j, v_k \rangle$ per l'unicità delle coordinate rispetto ad una base. Da questo segue subito, ad esempio dalla formula di Grassman, che $U \oplus W = \mathbb{K}^3$.

Esercizio 12: La risoluzione è analoga a quella dell'esercizio precedente. In questo caso v_1, v_2 e v_3 sono una base di $\mathbb{K}^3$ perché

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0.$$

Esercizio 13: Sommando alla prima riga di A_k la seconda e sottraendovi la terza, si ha

$$\det A_k = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & k & -k \\ 4 & k-1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} k & -k \\ k-1 & 1 \end{pmatrix} = -(k + k(k-1)) = -k^2.$$ Quindi f_k è invertibile se e solo se A_k è invertibile se e solo se $k \neq 0$. Per $k \neq 0$, $\ker f_k = \{0\}$ (e non ha una base), $\operatorname{Im} f_k = \mathbb{K}^3$ e, ad esempio, la base canonica ne è una base. Per $k = 0$, $\ker f_0$ è descritto dal sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2x & = 0 \\ 4x - y + z & = 0 \end{cases}$$

che è equivalente alle equazioni $x = 0, y = z$, quindi la dimensione di $\ker f_0$ è uno, con base data dal vettore $(0, 1, 1)$. Ne segue che la dimensione dell'immagine di f_0 è due, e una base è data dalle prime due colonne della matrice A_0, ovvero dai vettori $(1, 2, 4)$ e $(-1, 0, -1)$.

Esercizio 14: Per calcolare la dimensione di $W_1 + W_2$ è sufficiente estrarre una base dal suo insieme di generatori v_1, v_2, v_3 e v_4. Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori v_i:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $W_1 + W_2$, che ha quindi dimensione 3.

Esercizio 15: Se $\lambda = 0$ allora $f(v_4) = f(0) = 0 \neq 1$, quindi da ora in poi supponiamo $\lambda \neq 0$. Si vede subito che

$$v_1 = v_2 + v_3 - \frac{4}{\lambda} v_4.$$

Quindi, assumendo che f esista, applicando f alla relazione precedente si ricava che λ deve soddisfare

$$\lambda = 2 - 2 - \frac{4}{\lambda} = -\frac{4}{\lambda},$$

ovvero $\lambda = \pm 2i$. Questo implica che l'insieme da determinare è vuoto se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supponiamo $\lambda = \pm 2i$ e facciamo vedere che f esiste. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \neq 0,$$

l'insieme $\{v_1, v_3, v_4\} \subset \mathbb{K}^3$ è una base. Definiamo f ponendo

$$f(v_1) := \lambda, \quad f(v_3) := -2, \quad f(v_4) := 1.$$

Poiché

$$f(v_2) = f(v_1) - f(v_3) + \frac{4}{\lambda} f(v_4) = \lambda + 2 + \frac{4}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4}{\lambda} = 2,$$

f soddisfa le condizioni richieste. Quindi quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'insieme cercato è $\{\pm 2i\}$.

Esercizio 16: La matrice associata ad f tramite le basi canoniche è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & 5\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché la quarta colonna di M è la somma della prima e della terza colonna, l'immagine di f è generata dalle prime tre colonne di M. Poiché la prima e la terza colonna di M sono non nulle e non proporzionali tra loro, la dimensione di $\operatorname{Im} f$ è sempre almeno due, ed è tre se e solo se le prime tre colonne di M sono indipendenti, ovvero se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 5\lambda & -1 \end{pmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 2) \neq 0$$

Poiché $4 = \dim \mathbb{K}^4 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$, concludiamo:

$$\dim(\ker f) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \lambda \in \{2, 3\} \\ 1 & \text{se} \quad \lambda \notin \{2, 3\}. \end{cases}$$

Esercizio 17: F è suriettiva perché la sua immagine contiene i vettori indipendenti $F(x-1) = (0, 1)$ e $F(x-2) = (-1, 0)$. Quindi $\dim \ker(F) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(F) = 4 - 2 = 2$. Inoltre, i polinomi $(x-1)(x-2)$ e $(x-1)(x-2)^2$ appartengono chiaramente a $\ker(F)$ e sono linearmente indipendenti perché di grado diverso. Quindi formano la base cercata.

Esercizio 18: Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice le cui righe sono le coordinate dei polinomi $p_i(x)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & t+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t+4 \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che se $t \neq -4$ il sottospazio W_t ha dimensione 3, mentre per $t = -4$ ha dimensione 2. Poiché $S(2)$ ha dimensione 3 (con base $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $S_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) per $t = -4$ non esiste l'isomorfismo φ. Infatti, l'immagine di W_{-4} tramite qualunque applicazione lineare avrebbe dimensione al più 2, e quindi non potrebbe coincidere con $S(2)$. Se $t \neq -4$, sia $\{p_1(x), \dots, p_4(x)\}$ una base di V ottenuta completando la base $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ di W_t, e $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ ottenuta completando la base $\{S_1, S_2, S_3\}$ di $S(2)$. L'isomorfismo $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^{2,2}$ si ottiene come l'unica applicazione lineare tale che $\varphi(p_i(x)) = S_i$, $i = 1, \dots, 4$.

Esercizio 19: (1) La matrice di Φ_k rispetto alle basi canoniche è $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\Phi_k) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \end{smallmatrix}\right)$. (2) Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice appena calcolata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & -1-k & -k^2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & -k^2 & -k \end{pmatrix}.$$

Quindi il rango di Φ_k è 3 se $k \neq 0$, mentre se $k = 0$ è 2. (3) Se $k \neq 0$ Φ_k è suriettiva, quindi $\operatorname{Im}(\Phi_k) = \mathbb{K}^3$, con base canonica, mentre $\ker(\Phi_k)$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = -w \\ y = (1-k)w \\ z = w \end{cases},$$

ha come base $\{(-1, 1-k, 1, 1)\}$. Se $k = 0$ una base di $\operatorname{Im}(\Phi_0)$ è data dalle prime due colonne della matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\Phi_0)$, ovvero $\{(1,0,0), (1,-1,1)\}$, mentre $\ker(\Phi_0)$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = -w \\ y = w \end{cases},$$

quindi ha come base $\{(-1,1,0,1), (0,0,1,0)\}$. (4) Abbiamo

$$W = \langle (1,1,0,0), (1,0,-1,0), (1,0,0,1) \rangle,$$

quindi $\Phi_k(W)$ è generato dai vettori $(2, k-1, 1)$, $(1-k, k, -k)$ e $(1, k+1, -1)$. Il determinante della matrice 3×3 data dalle coordinate di questi vettori vale $-k(k-2)$, quindi $\Phi_k(W) \neq \mathbb{K}^3$ se e solo se $k \in \{0, 2\}$.

Esercizio 20: (1) Il sistema ha matrice $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\det(A_k) = k^2 - 4k - 3$. (2) Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $\det(A_k) \neq 0$, ovvero se e solo se $k \neq 2 \pm \sqrt{7}$. (3)

Quando $k \neq 2 \pm \sqrt{7}$ l'unica soluzione del sistema si trova applicando le formule di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3+\sqrt{7} & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5+\sqrt{7} & 1 & 2 \end{vmatrix}}{k^2-4k-3} = \frac{k(1+\sqrt{7})-3\sqrt{7}-9}{k^2-4k-3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+\sqrt{7} & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ k & 5+\sqrt{7} & 2 \end{vmatrix}}{k^2-4k-3} = \frac{k(3+\sqrt{7})-5\sqrt{7}-13}{k^2-4k-3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 3+\sqrt{7} \\ 2 & -1 & 2 \\ k & 1 & 5+\sqrt{7} \end{vmatrix}}{k^2-4k-3} = \frac{2k^2-k(7+\sqrt{7})+\sqrt{7}-1}{k^2-4k-3}.$$

(4) Il sistema ha matrice completa

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 3+\sqrt{7} \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 2 & 5+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

per ogni k. Per $k = 2+\sqrt{7}$ il minore 2×2 di C_k individuato dalle prime due righe e prime due colonne è non singolare, e il minore orlato 3×3 individuato dalle prime tre colonne è singolare. D'altra parte, il secondo minore orlato 3×3 individuato dalla prima, seconda e quarta colonna ha determinante $d = 2k^2 - k(7+\sqrt{7}) + \sqrt{7} - 1$, che si annulla se $k = 2+\sqrt{7}$. Quindi per $k = 2+\sqrt{7}$ il sistema ha ∞^1 soluzioni, ottenute ad esempio considerando z come un parametro e risolvendo il sistema 2×2 in x, y tramite le formule di Cramer. Così facendo si ottiene

$$x = \frac{-3-\sqrt{7}-2k+kz}{-1-2k} = \frac{(2+\sqrt{7})z-3\sqrt{7}-7}{-5-2\sqrt{7}}, \quad y = \frac{-4-2\sqrt{7}-z}{-1-2k} = \frac{-4-z-2\sqrt{7}}{-5-2\sqrt{7}}$$

Se $k = 2-\sqrt{7}$ il determinante d prende il valore $d = 14-2\sqrt{7} \neq 0$, quindi il sistema non ammette soluzioni perché il rango di $A_{2-\sqrt{7}}$ è due mentre il rango di $C_{2-\sqrt{7}}$ è tre.

Esercizio 21: (1) Le matrici di f e di g rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$ sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analizzando queste matrici si verifica facilmente che $\mathrm{rg}(f) = 2$, $\mathrm{rg}(g) = 3$, e che una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$. (2) Dalla formula $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = \dim\mathbb{R}^4$ si deduce $\dim\ker(f) = 2$. Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+w=0 \end{cases}$$

ha matrice di rango due, quindi definisce un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione due, e si verifica direttamente che $U \subseteq \ker(f)$, dunque per ragioni di dimensione $U = \ker(f)$. Si verifica subito che una base di questo sottospazio è $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$. Procedendo nello stesso modo per g si trova che $\dim\ker(g) = 1$, $\ker(g)$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+w=0 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ed ha base $\{(1,0,-1,-1)\}$. (3) Rispetto alle basi canoniche l'applicazione $f+kg$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} k+1 & k & 1 & k \\ k & 1 & k & 1 \\ 1 & 1-k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della sottomatrice formata dalle prime tre colonne è

$$\det\begin{pmatrix} k+1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 1-k & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 1 \end{pmatrix} = k(k^2-k+1),$$

che si annulla se e solo se $k=0$. Quindi $f+kg$ ha rango due se $k=0$ e rango tre se $k\neq 0$. (4) Per $k=0$ $f+kg=f$, e in questo caso la risposta è già stata data nel punto (2). Possiamo dunque supporre $k\neq 0$ da adesso in poi. Il nucleo di $f+kg$ ha dimensione $4-\dim\operatorname{Im}(f+kg)=4-3=1$, quindi qualunque vettore non nullo $X\in\mathbb{R}^4$ annullato da $f+kg$ è una base di $\ker(f+kg)$. Per trovare X possiamo ad esempio risolvere il sistema $(f+kg)(X)=0$ usando le formule di Cramer per trovare x, y e z in funzione di w. Per semplificare i calcoli possiamo porre $w=-k(k^2-k+1)$. Si trova

$$x=\det\left(\begin{smallmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1-k & 1 \end{smallmatrix}\right)=k(k^2-1),\qquad y=\det\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)=k(1-k),$$

$$z=\det\left(\begin{smallmatrix} k+1 & k & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \end{smallmatrix}\right)=k(-k^2+k+1).$$

Cancellando $k\neq 0$ da tutte le coordinate otteniamo che $\ker(f+kg)$ ha base

$$\{(k^2-1,1-k,-k^2+k+1,-k^2+k-1)\}.$$

Esercizio 22: (1) La matrice incompleta del sistema è $A=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ k & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & k^2 & -k & k \end{smallmatrix}\right)$. Le prime tre colonne di A formano una sottomatrice quadrata con determinante $-2k(k+1)$. Quindi se $k\neq 0,-1$ la matrice A ha rango 3. Se $k=0$ $A=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2 perché l'ultima riga è nulla e le prime due sono linearmente indipendenti, mentre se $k=-1$ $A=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 3 perché la sottomatrice 3×3 formata dalle ultime tre colonne ha determinante -3.
(2) La matrice completa è 3×5 e contiene A come sottomatrice, quindi ha rango 3 se $k\neq 0$, mentre se $k=0$ è uguale a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, che ha rango 3 perché la sottomatrice 3×3 formata dalla prima, terza e quinta colonna ha determinante 2. Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni se e solo se $k\neq 0$.
(3) Se $k=1$ le soluzioni si ottengono ad esempio risolvendo rispetto a x, y e z, trattando la variabile w come un parametro. Applicando le formule di Cramer si ottiene

$$x=\frac{9}{4}w-\frac{1}{2},\qquad y=-\frac{5}{4}w+\frac{1}{2},\qquad z=-\frac{1}{4}w-\frac{1}{2},$$

quindi l'insieme delle soluzioni è $\{(\frac{9}{4}w-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}w+\frac{1}{2},-\frac{1}{4}w-\frac{1}{2},w)\mid w\in\mathbb{R}\}$.

Se $k=-1$ le soluzioni si ottengono ad esempio risolvendo rispetto a y, z e w. Procedendo come nel caso $k=1$ si ottiene l'insieme $\{(x,-x-2/3,x+1,-2/3)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Esercizio 23: (1) La matrice incompleta del sistema è $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ed ha determinante $k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2)$. Quindi se $k \neq 1, -2$ la matrice A_k ha rango massimo, cioè 3. D'altra parte, $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 1 perché è non nulla ed ha tutte le colonne uguali, mentre $A_{-2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2 perché la sottomatrice individuata dalle prime due righe e prime due colonne ha determinante $3 \neq 0$.
(2) Quando $k \neq 1, -2$ la matrice A_k è nonsingolare, quindi il sistema ammette un'unica soluzione e l'insieme S_k contiene un solo elemento. Per $k = 1$ la matrice completa è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, che ha rango almeno 2 perché le prime due righe sono chiaramente indipendenti. Poiché A_1 ha rango 1, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzioni, ovvero l'insieme S_1 è l'insieme vuoto. Se $k = -2$ la matrice completa è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, che ha rango 2 perché le prime due righe sono chiaramente indipendenti mentre la somma di tutte e tre le righe è nulla. Poiché anche A_{-2} ha rango 2, il sistema ammette infinite soluzioni.
(3) Poiché la sottomatrice di A_{-2} individuata dalle prime due righe e prime due colonne è non singolare, per $k = -2$ l'insieme si ottiene utilizzando solo le prime due equazioni e considerando la variabile z come un parametro. Il sistema 2×2 risultante è:

$$\begin{cases} x - 2y = -z - 5 \\ x + y = 2z \end{cases}$$

Applicando le formule di Cramer si ottiene $x = z - 5/3$ e $y = z + 5/3$, dunque

$$S_{-2} = \{(z - 5/3, z + 5/3, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

(4) Per $k = 0$ il sistema è quadrato e non singolare; l'unica soluzione si ottiene applicando le formule di Cramer. Il risultato è

$$S_0 = \{(-3, 3, 2)\}.$$

Esercizio 24: (a) La matrice incompleta del sistema è $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & k \\ 2 & 2-k & 3 \\ k-1 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, ed ha determinante $k^3 - 3k^2 - 9k + 27 = (k+3)(k-3)^2$. Quindi se $k \neq \pm 3$ la matrice A_k ha rango massimo, cioè 3. D'altra parte, $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 1 perché è non nulla ed ha tutte le righe uguali, mentre $A_{-3} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2 perché la sottomatrice individuata dalle prime due righe e prime due colonne ha determinante $12 \neq 0$.
(b) Quando $k \neq \pm 3$ la matrice A_k è nonsingolare, quindi il sistema ammette un'unica soluzione e l'insieme S_k contiene un solo elemento. Per $k = 3$ la matrice completa è $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{smallmatrix}\right)$, che ha rango almeno 2 perché le prime due righe sono chiaramente indipendenti. Poiché A_3 ha rango 1, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzioni, ovvero l'insieme S_3 è l'insieme vuoto. Se $k = -3$ la matrice completa è $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & -1 & 3 & -5 \end{smallmatrix}\right)$, che ha rango 2 perché le prime due colonne B^1, B^2 sono chiaramente indipendenti, mentre la terza e quarta colonna sono uguali, rispettivamnete, a $-B^1 + B^2$ e $B^1 + B^2$. Poiché anche A_{-3} ha rango 2, quando $k = -3$ il sistema ammette infinite soluzioni.
(c) Poiché la sottomatrice di A_{-3} individuata dalle prime due righe e prime due colonne è non singolare, S_{-3} si ottiene utilizzando solo le prime due equazioni e considerando la variabile z

come un parametro. Il sistema 2×2 risultante è:

$$\begin{cases} 2x - y = 3z + 1 \\ 2x + 5y = -3z + 7 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, ad esempio tramite le formule di Cramer, si ottiene $x = z+1$ e $y = -z+1$, dunque

$$S_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} z+1 \\ -z+1 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Per $k = 0$ il sistema è quadrato e non singolare, quindi ammette un'unica soluzione. Applicando ad esempio formule di Cramer si ottiene

$$S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 25: (a) La matrice incompleta del sistema è $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2 & 2 \\ 1 & k & 1 \\ 3 & 3 & 2+k \end{pmatrix}$, ed ha determinante $k^3 + 3k^2 - 9k + 5 = (k+5)(k-1)^2$. Quindi se $k \notin \{-5, 1\}$ la matrice A_k ha rango massimo, cioè 3. D'altra parte, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 1 perché è non nulla ed ha tutte le colonne uguali, mentre $A_{-5} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché la sottomatrice individuata dalle prime due righe e prime due colonne ha determinante $18 \neq 0$.

(b) Quando $k \notin \{-5, 1\}$ la matrice A_k è nonsingolare, quindi il sistema ammette un'unica soluzione e l'insieme S_k contiene un solo elemento. Per $k = 1$ la matrice completa è $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, che ha rango almeno 2 perché le prime due righe sono non proporzionali. Poiché A_1 ha rango 1, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzioni, ovvero l'insieme S_1 è l'insieme vuoto. Se $k = -5$ la matrice completa è $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, che ha rango 2 perché la prima e la terza colonna B^1 e B^3 sono non proporzionali, mentre la seconda e quarta colonna sono uguali, rispettivamente, a $-2B^1 - 3B^3$ e $B^1 + B^3$. Poiché anche A_{-5} ha rango 2, quando $k = -5$ il sistema ammette infinite soluzioni.

(c) Poiché la sottomatrice di A_{-5} individuata dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna è non singolare, S_{-5} si ottiene utilizzando solo le prime due equazioni e considerando la variabile y come un parametro. Il sistema 2×2 risultante è:

$$\begin{cases} 4x - 2z = 2y + 2 \\ x + z = 5y + 2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, ad esempio tramite le formule di Cramer, si ottiene $x = 2y+1$ e $z = 3y+1$, dunque

$$S_{-5} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y+1 \\ y \\ 3y+1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 26: (a) La matrice incompleta del sistema è $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & k & 0 & 2k \\ 1 & -1 & k & k \end{pmatrix}$. La sottomatrice quadrata di A formata dalle prime tre colonne ha determinante $k^2 - k$. Quindi se $k \notin \{0, 1\}$ la matrice A_k ha rango massimo, cioè 3. D'altra parte, $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché la sua seconda riga è nulla mentre la prima e la terza sono linearmente indipendenti. Invece $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 perché la sua sottomatrice quadrata formata dalle ultime tre colonne ha determinante $-1 \neq 0$. Riassumendo, A_k ha rango 2 per $k = 0$ e rango 3 per $k \neq 0$.

(b) Quando $k \neq 0$ la matrice A_k e la matrice completa $B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k+1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 2k & 2 \\ 1 & -1 & k & k & 1 \end{pmatrix}$ hanno entrambe

rango 3. Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette infinite soluzioni. Invece A_0 ha rango 2, mentre B_0 ha rango 3 perché il determinante della sua sottomatrice formata dalla seconda, quarta e quinta colonna è $-2 \neq 0$. Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema non ammette soluzioni. Riassumendo, S_k è infinito per $k \neq 0$ e vuoto per $k = 0$.
(c) La matrice completa per $k = 1$ è $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Applicando l'eliminazione di Gauss otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo rispetto alle incognite x, y e w si trova subito $x = -3 - z$, $y = 0$ e $w = 2$. Quindi

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3-t \\ -2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Sostituendo le coordinate di $\begin{pmatrix} -3-t \\ 0 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \in S_1$ nel sistema che definisce S_k si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} 2k = 2 \\ 2k = 2 \\ kt + 2k - t = 2 \end{cases}$$

che sono soddisfatte per $k = 1$ e t qualunque. Quindi $S_1 \cap S_k = \emptyset$ per ogni $k \neq 1$ e $U = \{1\}$.

Esercizio 27: (1) La matrice di Φ_k rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \end{pmatrix}$. (2) Per calcolare il rango di Φ_k al variare di k applichiamo il procedimento di eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1-k & -k^2 & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & -1-k & -k^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (k+1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

Concludiamo che il rango di Φ_k è 3 se $k \neq 0$, e 2 se $k = 0$. (3) Per calcolare una base di $\ker(\Phi_k)$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice ottenuta tramite l'eliminazione di Gauss, ovvero

$$\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ y + kz - w = 0 \\ kz - kw = 0. \end{cases}$$

Se $k \neq 0$ il nucleo di Φ_k ha dimensione 1; risolvendo il sistema si trova la base $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1-k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Se $k = 0$ l'ultima equazione si annulla e $\ker(\Phi_k)$ ha dimensione 2. Si trova che i vettori indipendenti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfano le prime due equazioni e quindi sono una base di $\ker(\Phi_0)$. Per quanto riguarda una base dell'immagine di Φ_k, se $k \neq 0$ il rango di Φ_k è 3, quindi $\Phi_k(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3$ e come base basta prendere la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Se $k = 0$ il rango di Φ_0 è 2 e la matrice di Φ_0 rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, le cui prime due colonne sono linearmente indipendenti. Quindi una base dell'immagine di Φ_0 è $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
<u>Domanda extra</u>: una base di W è data da $\{w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, quindi il sottospazio $\Phi_k(W)$ è generato dei vettori $\Phi_k(w_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_i(w_2) = \begin{pmatrix} k+1 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ e $\Phi_k(w_3) =$

$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. la matrice delle coordinate di questi tre vettori ha determinante

$$\det(\begin{pmatrix} 2 & k+1 & k \\ k-1 & -1 & 1 \\ 1 & k+1 & k-1 \end{pmatrix}) = k^2 - 2k,$$

che si annulla se e solo se $k \in \{0, 2\}$. Quindi $\Phi_k(W) \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se $k \in \{0, 2\}$.

Esercizio 28: (a) La matrice incompleta del sistema è $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & k-2 \end{pmatrix}$, che ha determinante 0 per ogni $k \in \mathbb{R}$ perché la terza colonna è la somma della prima colonna più due volte la seconda. La sottomatrice quadrata $A_{2,2}$ di A_k individuata dalle prime due righe e colonne è non singolare, quindi il rango di A_k è uguale a 2 per ogni k.
(b) La matrice completa del sistema è $B_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ k & -1 & k-2 & k+1 \end{pmatrix}$. La matrice $A_{2,2}$, vista come sottomatrice di B_k, ha come matrici orlate A_k e la matrice $C_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ k & -1 & k+1 \end{pmatrix}$, formata dalla prima, seconda e quarta colonna di B_k. Il determinante di C_k è uguale a $(k+2)(k-1)$, quindi quando $k \neq -2, 1$ il rango di B_k è 3, mentre quando $k \in \{-2, 1\}$ è 2.
(c) per il teorema di Rouché-Capelli, per quanto visto in (b) l'insieme S_k è vuoto per ogni $k \neq -2, 1$. La matrice completa per $k = 1$ è $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Applicando l'eliminazione di Gauss otteniamo:

$$B_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo rispetto alle incognite x, y si trova $x = 1 - z$ e $y = -1 - 2z$. Quindi

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ -1-2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La matrice completa per $k = -2$ è $B_{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Applicando l'eliminazione di Gauss otteniamo:

$$B_{-2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo rispetto alle incognite x, y si trova $x = -2 - z$ e $y = 5 - 2z$. Quindi

$$S_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2-t \\ 5-2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 29: Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & k^2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2k \\ 2 & 1 & 1 & 5 & -k \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & -k \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2k \\ 1 & 0 & -1 & 0 & k^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1+2k \\ 0 & 0 & -1 & -1 & k^2+1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2-k \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1+3k \\ 0 & 0 & -1 & -1 & k^2+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2-k \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1+3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2-3k+2 \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che la matrice incompleta del sistema ha rango 3 per ogni k e risponde ad (a). Inoltre, poiché $k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$ vediamo che la matrice completa ha rango 3 se $k \in \{1, 2\}$ e rango 4 altrimenti, che risponde a (b). Riguardo a (c), dal teorema di Rouché-Capelli ricaviamo che $S_k = \emptyset$ per $k \neq 1, 2$. Sostituendo $k = 1$ nell'ultima matrice ricavata con l'eliminazione e risolvendo il sistema risultante si trova $S_1 = \{\begin{pmatrix} -t-1 \\ -2t+3 \\ -t-2 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$, e sostituendo $k = 2$ si trova $S_2 = \{\begin{pmatrix} -t-1 \\ -2t+5 \\ -t-5 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$. (d) il sottospazio bidimensionale $\pi = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^4$ contiene $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_1$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_2$, dunque è il sottospazio cercato.

Esercizio 30: Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice completa C_k del sistema:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 3 & 4 \\ k & 2k & 1 & 4 \\ 0 & 2k-1 & -k & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2k-1 & -2 & 0 \\ 0 & 2k-1 & -k & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2k-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) L'eliminazione di Gauss mostra che la matrice incompleta B_k del sistema ha rango 3 per $k \neq 0, 1/2, 2$. Analizzando poi caso per caso si trova $\mathrm{rg}(B_0) = \mathrm{rg}(B_{1/2}) = \mathrm{rg}(B_2) = 2$. (b) Chiaramente anche la matrice completa C_k ha rango 3 per $k \notin \{0, 1/2, 2\}$, mentre sostituendo i tre valori di k si verifica facilmente che $\mathrm{rg}(C_0) = 3$ e $\mathrm{rg}(C_{1/2}) = \mathrm{rg}(C_2) = 2$. (c) Per $k \notin \{0, 1/2, 2\}$ le soluzioni si possono trovare usando le formule di Cramer, perché $\det(B_k) \neq 0$. Per ognuno di questi valori di k il sistema ammette l'unica soluzione $\begin{pmatrix} 4/k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\mathrm{rg}(B_0) \neq \mathrm{rg}(C_0)$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni per $k = 0$. Risolvendo il sistema negli altri due casi si trovano le infinite soluzioni $\{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle\}$ per $k = 1/2$ e le infinite soluzioni $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle\}$ per $k = 2$.

Esercizio 31: Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice completa C_k del sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 2 & 0 \\ k & -2 & 2-k & -1 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ k & -2 & 2-k & -1 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2-3k & -5 & 1 \\ k & -2 & 2-k & -1 & k \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2-3k & -5 & 1 \\ 0 & -k-2 & -k^2-k+2 & -2k-1 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2-3k & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{4}k^2 & \frac{3}{2}-\frac{3}{4}k & \frac{3}{4}k-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2-3k & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 4-k^2 & 6-3k & 3k-2 \end{pmatrix}$$

(a) L'eliminazione di Gauss mostra che la matrice incompleta B_k del sistema ha rango 3 per $k \neq \pm 2$. Analizzando poi caso per caso si trova $\mathrm{rg}(B_2) = 2$ e $\mathrm{rg}(B_{-2}) = 3$. (b) Chiaramente anche la matrice completa C_k ha rango 3 per $k \neq 2$, mentre sostituendo $k = 2$ si verifica facilmente che $\mathrm{rg}(C_2) = 3$. (c) Poiché per $k \neq 2$ abbiamo $\mathrm{rg}(B_k) = \mathrm{rg}(C_k) = 3$, per questi valori di k il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Per $k = 2$ abbiamo $\mathrm{rg}(B_2) \neq \mathrm{rg}(C_2)$ e dunque il sistema non ammette soluzioni. (d) Quando $k = 1$ le soluzioni del sistema si possono calcolare usando la matrice ottenuta con l'eliminazione di Gauss, considerando la variabile w come un parametro, e risolvendo rispetto a x, y e z. Per questo scopo è possibile usare le formule di Cramer:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} -2w & 1 & 1 \\ 5w+1 & -4 & -1 \\ -3w+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{-12} = 0, \qquad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -2w & 1 \\ 0 & 5w+1 & -1 \\ 0 & -3w+1 & 3 \end{pmatrix}}{-12} = -w - 1/3,$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2w \\ 0 & -4 & 5w+1 \\ 0 & 0 & -3w+1 \end{pmatrix}}{-12} = -w + 1/3.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni per $k = 1$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizio 32: Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice completa C_k del sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & k^2-1 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & k & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & k & 2 \\ 5 & k^2-1 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & k-4 & -4 \\ 0 & k^2-1 & 2 & -4 & -9 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & k-5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & k^2-5 & 5k^2-14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & k-5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & 5k^2-5 \end{pmatrix}$$

(a) L'eliminazione di Gauss mostra che la matrice incompleta B_k del sistema ha rango 4 per $k \notin \{0, 1\}$. Si vede inoltre che $\mathrm{rg}(B_0) = \mathrm{rg}(B_1) = 3$. (b) Ovviamente anche la matrice completa

C_k ha rango 4 per $k \neq 0, 1$, mentre si verifica facilmente che $\mathrm{rg}(C_0) = 4$ e $\mathrm{rg}(C_1) = 3$. (c) Poiché per $k \neq 0, 1$ abbiamo $\mathrm{rg}(B_k) = \mathrm{rg}(C_k) = 4$, per questi valori di k il sistema ammette un'unica soluzione. Inoltre, $\mathrm{rg}(B_0) \neq \mathrm{rg}(C_0)$ e dunque il sistema non ammette soluzioni per $k = 0$. Infine, $\mathrm{rg}(B_1) = \mathrm{rg}(C_1) = 3$, perciò il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni per $k = 1$. (d) Si può considerare la variabile w come un parametro e risolvere rispetto ad x, y e z il sistema associato all'ultima matrice ottenuta con l'eliminazione di Gauss. A questo scopo è possibile usare le formule di Cramer:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} -2w+3 & 0 & -1 \\ w-5 & 1 & 0 \\ 4w-9 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -2w+3 & -1 \\ 0 & w-5 & 0 \\ 0 & 4w-9 & 2 \end{pmatrix}}{2} = w - 5,$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2w+3 \\ 0 & 1 & w-5 \\ 0 & 0 & 4w-9 \end{pmatrix}}{2} = 2w - \frac{9}{2}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni per $k = 1$ è $\begin{pmatrix} -3/2 \\ -5 \\ -9/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

Esercizio 33: Sia $\mathcal{E}_3 = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ la base standard. Le coordinate di $f(1)$, $f(x)$ ed $f(x^2)$ rispetto ad $\mathcal{E}_3$ sono date dalle colonne della matrice $M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_3}(f)$, che possiamo determinare usando la formula:

$$M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_3}(f) = M_{B\mathcal{E}_3}(\mathrm{id}) M_{BB}(f) M_{\mathcal{E}_3 B}(\mathrm{id}).$$

Abbiamo

$$M_{B\mathcal{E}_3}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{E}_3 B}(\mathrm{id}) = M_{B\mathcal{E}_3}(\mathrm{id})^{-1}.$$

Per trovare $M_{\mathcal{E}_3 B}(\mathrm{id})$ applichiamo il metodo dei determinanti per il calcolo della matrice inversa. Usando la formula per il determinante di matrici triangolari vediamo che $\det M_{B\mathcal{E}_3}(\mathrm{id}) = -i$. Dunque

$${}^t M_{B\mathcal{E}_3}(\mathrm{id})^{-1} = \frac{1}{-i} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E}_3 B}(f) = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione,

$$M_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ -i & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $f(1) = ix^2$, $f(x) = i - x + x^2$ e $f(x^2) = -ix + x^2$.

CAPITOLO 9

Autovettori e autovalori

$\mathbb{K}$ indicherà sempre uno dei campi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1. Introduzione

Consideriamo l'applicazione lineare $f\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ data da

$$f(x,y) = (2x, 3y)$$

Grazie alla semplicità di f possiamo rispondere facilmente a domande come: dato un intero $n \geq 1$, qual è l'applicazione $f^n = f \circ \overset{(n \text{ volte})}{\cdots} \circ f$? Infatti, si vede subito che

$$f^n(x,y) = (2^n x, 3^n y).$$

Sembrerebbe molto più difficile scrivere la risposta nel caso ad esempio dell'applicazione

$$g(x,y) = (x+2y, 3x+2y).$$

Ma è veramente così ? Supponiamo ad esempio che esista una base $B = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{K}^2$ tale che la matrice $M_{BB}(g)$ sia diagonale, ovvero tale che

$$M_{BB}(g) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

per qualche $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Allora avremmo $M_{BB}(g^n) = M_{BB}(g)^n = \left(\begin{smallmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{smallmatrix}\right)$, e quindi, se $v = av_1 + bv_2$, le coordinate di $g^n(v)$ rispetto a B sarebbero date semplicemente da

$$\begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^n a \\ k_2^n b \end{pmatrix},$$

e dunque

$$g^n(v) = k_1^2 a v_1 + k_2^n b v_2.$$

Osserviamo che in effetti una base B come sopra esiste. Infatti, sia $B = \{v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Allora è facile verificare che $g(v_1) = 4v_1$ e $g(v_2) = -v_2$, quindi $M_{BB}(g) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Autovettori e autovalori

Siamo arrivati a porci naturalmente il seguente problema: dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V ed un suo endomorfismo $f\colon\ V \to V$, esiste sempre una base B di V tale che $M_{BB}(f)$ è diagonale? Vedremo che in generale la risposta è "no". Gli endomorfismi di V per i quali esiste una base del genere sono detti *diagonalizzabili*. Il nostro prossimo scopo sarà capire come determinare se un endomorfismo è diagonalizzabile o meno.

Facciamo una semplice osservazione: se $B = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{K}^2$ è una base tale che $M_{BB}(f)$ è diagonale, allora $f(v_1) = k_1 v_1$ e $f(v_2) = k_2 v_2$ per qualche $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Questo fatto si può riformulare dicendo che f manda in sé i due sottospazi $\langle v_i \rangle$, $i = 1, 2$, ovvero che $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$ sono *f-invarianti*.

ESEMPIO. Sia $f\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ data da $f(x, y) = (2x, x + y)$. Cerchiamo di capire se in $\mathbb{K}^2$ esistono sottospazi f-invarianti di dimensione 1. Quindi vorremmo $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ tale che $f\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = k\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ per qualche $k \in \mathbb{K}$. Scrivendo l'uguaglianza in modo esplicito otteniamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2a = ka \\ a + b = kb \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2-k)a = 0 \\ a + (1-k)b = 0 \end{cases}.$$

Chiaramente, se $k \neq 1, 2$ allora non c'è una soluzione $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Se $k = 2$ esiste la soluzione $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (e i suoi multipli scalari), mentre se $k = 1$ abbiamo la soluzione $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (e i suoi multipli scalari). Dunque, se $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica, possiamo dire che ci sono due sottospazi f-invarianti: $\langle e_1 + e_2 \rangle$ e $\langle e_2 \rangle$. Inoltre f è diagonalizzabile, perché $B = \{e_1 + e_2, e_2\}$ è una base e $M_{BB}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

DEFINIZIONE. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ed $f\colon\ V \to V$ un endomorfismo di V. Sia $v \in V \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{K}$ uno scalare tale che $f(v) = kv$. Allora lo scalare k si dice *autovalore* di f e il vettore v *autovettore* di f *relativo a* k, o *k-autovettore di f*.

Nell'esempio precedente, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è un 2-autovettore di f, mentre $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ è un 1-autovettore di f.

DEFINIZIONE. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f\colon\ V \to V$ un endomorfismo di V e $k \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. L'*autospazio* di f relativo all'autovalore k è

$$V_k = \{v \in V \mid f(v) = kv\} = \{k\text{-autovettori di } f\} \cup \{0\} \subset V.$$

PROPOSIZIONE 9.1. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f\colon\ V \to V$ un endomorfismo di V e $k \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. Allora l'autospazio di f relativo a k è un sottospazio di V.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che se $v, w \in V_k$ allora per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ abbiamo $av + bw \in V_k$. Infatti, $f(av + bw) = af(v) + bf(w) = akv + bkw = k(av + bw)$. $\square$

Osserviamo the $0 \in \mathbb{K}$ è un autovalore di un endomorfismo f se e solo se f non è iniettivo. Infatti, per definizione 0 è un autovalore di f se e solo se f manda a zero un vettore non nullo.

ESEMPIO. Sia $f\colon\ \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ data da $f(x, y, z) = (x - y - z, 2x + y + z, x)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{K}$. Se $\mathcal{E}$ è la base canonica la matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2 perché le sue ultime due colonne sono uguali. Quindi $\dim \ker(f) = 1$. Poiché $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \in \ker(f)$, abbiamo verificato che $\ker(f) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = V_0$.

3. Ricerca degli autovalori di un endomorfismo

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale di dimensione n ed $f\colon\ V \to V$ un suo endomorfismo. Fissata una base $B \subset V$, sia $A = M_{BB}(f)$ la matrice associata. Dato un vettore v e posto $X = x_B(v) \in \mathbb{K}^n$ il vettore delle sue coordinate rispetto a B, osserviamo che l'uguaglianza $f(v) = kv$, scritta nelle coordinate rispetto a B, equivale all'uguaglianza $AX = kX$, ovvero $(A - kI)X = 0$. Ne deduciamo:

PROPOSIZIONE 9.2. *$k \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $f\colon V \to V$ se e solo se la matrice $A - kI$ è singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già visto che se $v \in V\setminus\{0\}$ e $f(v) = kv$ allora $(A-kI)X = 0$, dove $X = x_B(v)$. Poiché $v \neq 0$ abbiamo $X \neq 0$, dunque $A - kI$ è singolare . Viceversa, se $A - kI$ è singolare esiste $X \neq 0$ tale che $(A - kI)X = 0$, ovvero $AX = kX$. Questo implica che se $v \in V \setminus \{0\}$ è il vettore di coordinate X allora $f(v) = kv$, v è un autovettore e k un autovalore di f. $\square$

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, possiamo definire la funzione $p_A\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ponendo $p_A(k) = \det(A - kI)$ per ogni $k \in \mathbb{K}$. Chiaramente, $k \in \mathbb{K}$ è un autovalore per f se e solo se $p_A(k) = 0$.

ESEMPIO. Cerchiamo gli autovalori di $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, data da $f(x, y) = (2x + y, -x)$. Abbiamo $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, quindi $A - kI$ è singolare se e solo se

$$p_A(k) = \det(A - kI) = \det \begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 = 0,$$

ovvero se e solo se $k = 1$. Determiniamo l'1-autospazio: il sistema lineare omogeneo $(A - I)X = 0$ ha matrice associata $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque $V_1 = \ker(A - I) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

4. Polinomio caratteristico di una matrice

DEFINIZIONE. Data $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$, definiamo il *polinomio caratteristico* $p_A(t) \in \mathbb{K}[t]$ di A ponendo:

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[t]$$

Osserviamo che il polinomio caratteristico $p_A(t)$ è effettivamente un polinomio in t. Questo deriva semplicemente dalla definizione. Infatti, sviluppando ad esempio rispetto alla prima colonna e ragionando per induzione si arriva rapidamente alla conclusione. Non è difficile inoltre ricavare dall'espressione data sopra per $p_A(t)$ che il monomio di grado più alto in t è $(-1)^n t^n$ e che il termine noto è $\det(A)$. In particolare, il grado di $p_A(t)$ è n. Ad esempio, se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$,

$$p_A(t) = \det \left(\begin{smallmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{smallmatrix}\right) = t^2 - (a + d)t + (ad - bc) = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

Riassumendo quanto finora visto, possiamo affermare che se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, allora ogni autovalore di f è una radice del polinomio $p_A(t)$, dove $A = M_{BB}(f)$ per una qualunque base $B \subset V$. A questo punto è bene tenere presente che i campi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno proprietà molto diverse riguardo all'esistenza di radici di polinomi. Ad esempio, il polinomio

$$p(t) = (t^2 - 2)(t^2 + 1) \in \mathbb{Q}[t] \subset \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$$

non ha radici razionali, mentre ha le due radici reali $\pm\sqrt{2}$ e le quattro radici complesse $\pm\sqrt{2}, \pm i$. I seguenti esempi illustrano le conseguenze di questo fenomeno sul problema della ricerca degli autovettori e degli autovalori di un endomorfismo.

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, data da $f(x,y) = (2x+4y, -2x-2y)$. $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ e $p_A(t) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2-t & 4 \\ -2 & -2-t \end{smallmatrix}\right) = t^2+4$, quindi f non ha autovalori né autovettori.

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, data da $f(x,y) = (2x+4y, -2x-2y)$. $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ e $p_A(t) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2-t & 4 \\ -2 & -2-t \end{smallmatrix}\right) = t^2+4 = (t+2i)(t-2i)$. Poiché $A \pm 2iI = \left(\begin{smallmatrix} 2\pm 2i & 4 \\ -2 & -2\pm 2i \end{smallmatrix}\right)$, vediamo che $V_{2i} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1+i \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $V_{-2i} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1-i \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

PROPOSIZIONE 9.3. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con n dispari. Allora A, vista come endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, ha almeno un autovalore reale.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto p_A(t)$. Per ogni $t \neq 0$ abbiamo

$$p_A(t) = -t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \det(A) = -t^n(1 + a_{n-1}/t + \cdots - \det(A)/t^n),$$

che implica $\lim_{t\to\pm\infty} p_A(t) = \mp\infty$, e quindi $p_A(t)$, essendo una funzione continua, deve avere almeno uno zero. □

ESEMPIO. Consideriamo l'endomorfismo $\varphi_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Abbiamo

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(t^2+1) \in \mathbb{R}[t].$$

Vediamo che l'endomorfismo φ_A ha l'unica radice reale 1 (quindi la proposizione precedente non può essere, in generale, migliorata). Poiché $A - I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\dim V_1 = \dim\ker(A-I) = 3 - \operatorname{rg}(A-I) = 3-2 = 1$, $V_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

ESEMPIO. Consideriamo l'endomorfismo $\varphi_A^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ associato alla stessa matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dell'esempio precedente. In questo caso

$$p_A(t) = (1-t)(t^2+1) = (1-t)(t-i)(t+i) \in \mathbb{C}[t].$$

L'endomorfismo $\varphi_A^{\mathbb{C}}$ ha quindi 3 autovalori complessi: 1, i e $-i$. Inoltre, è facile verificare che $\operatorname{rg}(A-I) = \operatorname{rg}(A-iI) = \operatorname{rg}(A+iI) = 2$ e

$$V_1 = \ker(A-I) = \langle v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle,$$

$$V_i = \ker(A-iI) = \langle v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{smallmatrix}\right) \rangle,$$

$$V_{-i} = \ker(A+iI) = \langle v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

L'insieme $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base, e $M_{BB}(\varphi_A^{\mathbb{C}}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$.

ESERCIZIO. Esibire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $S = \{(x,y,z) \mid x-y = y+z = 0\}$ ne sia un autospazio.

SVOLGIMENTO. Basta definire $f(x,y,z) = (x-y, x-y, y+z)$. Per costruzione $\ker(f) = V_0 = S = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Se volessimo scegliere l'applicazione lineare in modo che $S = V_r$ per un qualunque $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, potremmo procedere nel modo seguente. Sia $B \subset \mathbb{R}^3$ la base data da $B = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $g(v_1) = g(v_2) = 0$ e $g(v_3) = rv_3$. Si verifica facilmente che, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, $g(v) = rv$ se e solo se $v \in \langle v_3 \rangle = S$, quindi $V_r = S$. □

5. Polinomio caratteristico di un endomorfismo

Abbiamo visto che gli autovalori di un endomorfismo $f\colon V \to V$ sono le radici del polinomio $p_A(t)$, dove A è la matrice associata ad f tramite *qualsiasi* base di V. Vogliamo capire meglio il motivo per cui il calcolo degli autovalori non dipende dalla scelta della base.

Ricordiamoci che due matrici quadrate $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che

$$A = P^{-1}BP, \quad \text{ovvero} \quad B = PAP^{-1}.$$

Ad esempio, le matrici reali $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sono simili perché $B = PAP^{-1}$, dove $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE 9.4. *Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrici simili. Allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $A = P^{-1}BP$, dove $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile. Allora per ogni $k \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$\begin{aligned} p_A(k) = \det(A - kI) &= \det(P^{-1}BP - kP^{-1}P) = \det(P^{-1}(B-kI)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(B-kI)\det(P), \end{aligned} \tag{7}$$

dove l'ultima uguaglianza segue applicando il teorema di Binet sul determinante del prodotto di matrici. Sempre applicando il teorema di Binet si ottiene

$$1 = \det(I) = \det(P^{-1}P) = \det(P^{-1})\det(P),$$

e quindi dall'equazione (7) si conclude

$$p_A(k) = \det(B - kI) = p_B(k)$$

per ogni $k \in \mathbb{K}$. Il principio di identità dei polinomi implica $p_A(t) = p_B(t)$. □

Ritornando all'esempio delle matrici simili $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, è facile verificare che

$$p_A(t) = p_B(t) = t^2 - t - 2.$$

Dalla proposizione segue subito il seguente:

COROLLARIO 9.5. *Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo, B, C sono basi dello spazio vettoriale V e $M = M_{BB}(f)$, $N = M_{CC}(f)$, allora $p_M(t) = p_N(t)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che

$$N = M_{CC}(f) = M_{BC}(\mathrm{id}_V)M_{BB}(f)M_{CB}(\mathrm{id}_V) = P^{-1}MP,$$

dove $P = M_{CB}(\mathrm{id}_V)$ è la matrice del cambiamento di base. □

In virtù del corollario possiamo dunque introdurre la seguente

DEFINIZIONE. Fissato un endomorfismo $f\colon V \to V$, il *polinomio caratteristico* di f, indicato con $p_f(t)$, è il polinomio $p_A(t)$, dove $A = M_{BB}(f)$ e $B \subset V$ è una qualunque base di V.

6. Il criterio di diagonalizzabilità

In questa sezione stabiliremo il cosiddetto *criterio di diagonalizzabiltà*, ovvero delle condizioni necessarie e sufficienti affinché un endomorfismo sia diagonalizzabile. Ricordiamoci che gli autovalori di un endomorfismo $f\colon V \to V$ sono le radici in $\mathbb{K}$ del suo polinomio caratteristico $p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$.

DEFINIZIONE. Sia $k \in \mathbb{K}$ un autovalore dell'endomorfismo $f\colon V \to V$. La *molteplicità algebrica* di k, indicata con a_k, è la molteplicità di k come radice di $p_f(t)$. La *molteplicità geometrica* di k, indicata con m_k, è la dimensione dell'autospazio V_k.

Ad esempio, la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ è associata tramite la base canonica ad un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $p_f(t) = (t-1)^2$. L'autovalore $k = 1$ ha molteplicità algebrica $a_1 = 2$, perché 1 è una radice doppia del polinomio $p_f(t)$. D'altra parte, l'autospazio $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ è dato dalle soluzioni del sistema $(M - I)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Poiché $M - I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 1, la molteplicità geometrica di 1 è

$$m_1 = \dim(V_1) = \dim \mathbb{R}^2 - 1 = 1.$$

Riassumendo quanto abbiamo visto finora, se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$, allora $p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ è un polinomio di grado n che avrà in generale una fattorizzazione del tipo

$$p_f(t) = (t - k_1)^{a_{k_1}} \cdots (t - k_s)^{a_{k_s}} q(t),$$

dove $k_1, \dots, k_s$ sono gli autovalori di f, con ciascun k_i di molteplicità algebrica a_{k_i}, $i = 1, \dots, s$ e

$$n = \deg p(t) = \sum_{i=1}^{s} a_{k_i} + \deg q(t).$$

Poiché ogni polinomio a coefficienti complessi ammette almeno una radice complessa, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ avremo $q(t) = \pm 1$.

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ con $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Allora $s = 1$ e

$$p_f(t) = -(t-1)(t^2+1), \quad k_1 = 1,\ a_{k_1} = 1, \quad q(t) = -(t^2+1).$$

ESEMPIO. Sia $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ con $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Allora $s = 3$ e

$$p_f(t) = -(t-1)(t+i)(t-i),\ (k_1,k_2,k_3) = (1,i,-i),\ (a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}) = (1,1,1),\ q(t) = -1.$$

Tornando alla discussione generale, vogliamo capire quando un endomorfismo $f\colon V \to V$ ammette una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di autovettori. Notiamo che la base B è composta di autovettori se e solo se

$$f(v_i) = 0 \cdot v_1 + \cdots + k_i v_i + \cdots + 0 \cdot v_n \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n,$$

ovvero

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ è detto *diagonalizzabile* se esiste una base $B \subset V$ composta di autovettori di f. Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta *diagonalizzabile* se A è simile ad una matrice diagonale.

OSSERVAZIONE. Se $f\colon V \to V$ è diagonalizzabile, allora per ogni base $C \subset V$ la matrice $M_{CC}(f)$ è diagonalizzabile. Infatti, $M_{CC}(f)$ è simile alla matrice $M_{BB}(f)$, dove $B \subset V$ è una base di autovettori di f.

ESEMPIO. Cerchiamo di capire se l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$f(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)$$

è diagonalizzabile. Abbiamo $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e

$$p_f(t) = p_A(t) = \det(A-tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t+t^2-1)+t-1 = (1-t)(t+1)(t-2).$$

Quindi f ha i tre autovalori $(k_1, k_2, k_3) = (1, -1, 2)$ con $(a_1, a_{-1}, a_2) = (1, 1, 1)$. Determiniamo gli autospazi:

$$V_1 = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$V_{-1} = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$V_2 = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Abbiamo verificato che $(m_1, m_{-1}, m_2) = (1, 1, 1)$. Osserviamo che $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ è una base di autovettori per f, quindi f è diagonalizzabile. Inoltre, $D = M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = M_{BB}(f) = M_{\mathcal{E}B}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) M_{B\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, ovvero $D = P^{-1}AP$, con $P = M_{B\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Abbiamo dunque verificato che la matrice A è diagonalizzabile.

Il seguente lemma è molto importante per stabilire il criterio di diagonalizzabilità.

LEMMA 9.6. *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e $v_1, \ldots, v_m \in V$ autovettori corrispondenti ad autovalori distinti. Allora $v_1 + \cdots + v_m \neq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m \geq 1$. La base dell'induzione ($m = 1$) segue dalla definizione di autovettore, quindi supponiamo $m > 1$. Per assurdo, sia $v_1 + \cdots + v_m = 0$. Applicando f ad ambo i membri otteniamo $k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m = 0$, mentre moltiplicando per k_m otteniamo $k_m v_1 + \cdots + k_m v_m = 0$. Sottraendo membro a membro le due equazioni otteniamo $(k_1 - k_m)v_1 + \cdots + (k_{m-1} - k_m)v_{m-1} = 0$. Ma questo è impossibile, perché ogni vettore $w_i = (k_i - k_m)v_i$, $i = 1, \ldots, m-1$, è un k_i-autovettore essendo $k_i - k_m \neq 0$, quindi per l'ipotesi induttiva $w_1 + \cdots + w_{m-1} \neq 0$. $\square$

PROPOSIZIONE 9.7. *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo, $k_1, \ldots, k_m$ suoi autovalori distinti e $B_i \subset V_{k_i}$, $i = 1, \ldots, m$, basi dei rispettivi autospazi. Allora $\bigcup_{i=1}^m B_i$ è una base di $\sum_{i=1}^m V_{k_i}$. In particolare,*

$$\dim(V_{k_1} + \cdots + V_{k_m}) = m_{k_1} + \cdots + m_{k_m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni combinazione lineare non banale di vettori di B_i è un k_i-autovettore per ogni $i = 1, \dots, m$. Quindi ogni combinazione lineare non banale di vettori di $\bigcup_{i=1}^m B_i$ è del tipo $v_1 + \cdots + v_s$, con i v_i autovettori corrispondenti ad autovettori distinti. Poiché i k_i sono distinti, per il lemma ogni tale combinazione lineare è un vettore non nullo. Quindi i vettori di $\bigcup_{i=1}^m B_i$ sono linearmente indipendenti e la conclusione segue immediatamente. $\square$

Prima di enunciare il criterio di diagonalizzabilità ci occorre il seguente:

LEMMA 9.8. *Sia $k \in \mathbb{K}$ un autovalore dell'endomorfismo $f\colon V \to V$. Allora $a_k \geq m_k \geq 1$.*

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza $m_k \geq 1$ segue immediatamente dalla definizione di autospazio. Sia ora B una base di V ottenuta completando una base del sottospazio $V_k \subset V$. Allora la matrice $M = M_{BB}(f)$ associata ad f tramite B è della forma $\begin{pmatrix} kI & N \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Da questo segue facilmente che $p_f(t) = \det(M - tI) = (k-t)^{m_k} p_C(t)$. Questa uguaglianza implica immediatamente che la molteplicità di k come radice di $p_f(t)$ è almeno pari a m_k. $\square$

TEOREMA 9.9 (Criterio di diagonalizzabilità). *Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e $k_1, \dots, k_s$ i suoi autovalori distinti. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *f è diagonalizzabile;*
(2) *$\sum_{i=1}^s m_{k_i} = \dim V$;*
(3) *$\sum_{i=1}^s a_{k_i} = \dim V$ e $m_{k_i} = a_{k_i}$ per ogni $i = 1, \dots, s$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) $\Rightarrow$ (2): $\sum_i V_{k_i}$ contiene una base di V composta di autovettori per f, quindi $\sum_i V_{k_i} = V$ e per la proposizione 9.7 $\sum_i m_{k_i} = \dim(\sum_i V_{k_i})$. (2) $\Rightarrow$ (3):

$$\dim V = \deg p_f(t) \geq \sum_i a_{k_i} \geq \sum_i m_{k_i} = \dim V,$$

quindi $\dim V = \sum_i a_{k_i} = \sum_i m_{k_i}$ e $m_{k_i} = a_{k_i}$ per ogni $i = 1, \dots, s$ perché $a_{k_i} \geq m_{k_i}$. (3) $\Rightarrow$ (1): sia $B_i \subset V_{k_i}$ una base per $i = 1, \dots, s$. I vettori indipendenti di $\bigcup_{i=1}^m B_i$ sono

$$\sum_i m_{k_i} = \sum_i a_{k_i} = \dim V,$$

quindi sono una base di V composta di autovettori per f. $\square$

COROLLARIO 9.10. *Se f è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n, ed f ha n autovalori distinti, allora f è diagonalizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $k_1, \dots, k_n$ gli autovalori distinti di f. Poiché per definizione $m_{k_i} \geq 1$ per ogni i, abbiamo $n \leq \sum_i m_i = \dim(\sum_i V_{k_i}) \leq n$, quindi $\sum_i m_{k_i} = n$ e la conclusione segue subito dal criterio di diagonalizzabilità. $\square$

OSSERVAZIONE. Non è detto che un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale di dimensione n abbia n autovalori distinti. Ad esempio, $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ ha sempre 1 come unico autovalore, ed ogni base di B è costituita di suoi autovettori.

ESEMPIO. Sia $k \in \mathbb{R}$ e $f_k \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo dato da $f_k(x, y) = (y, kx + y)$. Stabiliamo per quali $k \in \mathbb{R}$ f_k è diagonalizzabile. Sia $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_k) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$p_{f_k}(t) = p_A(t) = \det \left(\begin{smallmatrix} -t & 1 \\ k & 1-t \end{smallmatrix}\right) = t^2 - t - k.$$

Gli autovalori di f_k sono $k_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4k})$. Dunque per ogni $k < -1/4$ f_k non ammette autovettori e quindi non è diagonalizzabile. Se $k > -1/4$ f_k ammette due autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile. Se $k = -1/4$ l'unico autovalore è $1/2$, con $a_{1/2} = 2$. Inoltre,

$$m_{1/2} = 2 - \operatorname{rg}(A - \frac{1}{2}I) = 2 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = 1.$$

Dunque $f_{-1/4}$ non è diagonalizzabile. Osserviamo che, poiché $f_{-1/4}$ ammette un unico autovalore, è possibile stabilire che non è diagonalizzabile senza utilizzare la matrice $A - \frac{1}{2}I$. Infatti, ragionando per assurdo, se $f_{-1/4}$ fosse diagonalizzabile esisterebbe una base B di $\mathbb{R}^2$ composta di $1/2$-autovettori. Ma allora avremmo $V_{1/2} = \mathbb{R}^2$ e $f_{-1/4} = \frac{1}{2}\operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$, che è chiaramente falso.

ESERCIZIO. Stabilire se l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dato da $f(x,y,z,w) = (w,z,y,x)$ è diagonalizzabile.

SVOLGIMENTO. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$, quindi

$$\begin{aligned} p_f(t) = p_A(t) &= \det\begin{pmatrix} -t&0&0&1 \\ 0&-t&1&0 \\ 0&1&-t&0 \\ 1&0&0&-t \end{pmatrix} = -t\cdot\det\begin{pmatrix} -t&1&0 \\ 1&-t&0 \\ 0&0&-t \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ -t&1&0 \\ 1&-t&0 \end{pmatrix} \\ &= t^2(t^2-1) - (t^2-1) = (t^2-1)^2. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque i due autovalori 1 e -1, con $a_1 = a_{-1} = 2$. Gli autospazi sono

$$V_1 = \ker(A-I) = \ker\begin{pmatrix} -1&0&0&1 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 1&0&0&-1 \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \ker(A+I) = \ker\begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Poiché la prima e quarta riga e la seconda e terza riga di $A-I$ sono proporzionali, $\operatorname{rg}(A-I) = 2$. Quindi $m_1 = \dim V_1 = 4 - \operatorname{rg}(A-I) = 2$. Analogamente, $\operatorname{rg}(A+I) = 2$ e $m_{-1} = 2$. Poiché $m_1 + m_{-1} = 2$, dal criterio di diagonalizzabilità deduciamo che f è diagonalizzabile. Delle basi per V_1 e per V_{-1} si determinano facilmente: $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix} \rangle$. Quindi una base di autovettori per f è $\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix} \}$. □

ESERCIZIO. Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da $f_{a,b}(x,y) = (x+ay, bx+y)$ è diagonalizzabile e quando lo è determinare una base di autovettori.

SVOLGIMENTO. Abbiamo $A = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1&a \\ b&1 \end{pmatrix}$ e

$$p_{f_{a,b}}(t) = p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & a \\ b & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + (1-ab).$$

Il polinomio $t^2 - 2t + (1-ab)$ ha $\Delta = 4ab$, quindi ha radici reali se e solo se $ab \geq 0$. Più precisamente:

- se $ab > 0$ $f_{a,b}$ ha due autovalori distinti $1 \pm \sqrt{ab}$, ed è diagonalizzabile;
- se $ab < 0$ $f_{a,b}$ non ha autovalori reali e quindi non è diagonalizzabile;
- se $ab = 0$ $f_{a,b}$ ha l'unico autovalore 1 di molteplicità algebrica 2.

Nel caso $ab = 0$ abbiamo

$$m_1 = 2 - \mathrm{rg}(A - I) = 2 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a,b) \neq (0,0), \\ 2 & \text{se } (a,b) = (0,0). \end{cases}$$

Usando il criterio di diagonalizzabilità concludiamo che $f_{a,b}$ è diagonalizzabile se e solo se $ab > 0$ oppure $a = b = 0$. Nel caso $a = b = 0$ abbiamo $f_{0,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, quindi una base di autovettori è ad esempio la base canonica. Quando $ab > 0$ abbiamo

$$V_{1+\sqrt{ab}} = \ker\begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & a \\ b & -\sqrt{ab} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{ab} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{1-\sqrt{ab}} = \ker\begin{pmatrix} \sqrt{ab} & a \\ b & \sqrt{ab} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{ab} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

e una base di autovettori è $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{ab} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{ab} \end{pmatrix} \right\}$. □

Esercizi - 1: polinomio caratteristico di matrici

Esercizio 1
Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2
Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3
Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni degli esercizi - 1

Esercizio 1

$$t^2+2\,t+1, \qquad t^2+2\,t+3, \qquad t^2, \qquad t^2-1$$

Esercizio 2

$$-t^3+2\,t^2-4\,t+1, \qquad -t^3-4\,t^2-3\,t, \qquad -t^3-2\,t^2+t+1, \qquad -t^3+2\,t^2-3\,t$$

Esercizio 2

$$t^4+2\,t^3-3\,t^2-8\,t+1, \quad t^4+4\,t^3-2\,t^2-17\,t-12, \quad t^4+2\,t^3-t^2-10\,t-10, \quad t^4+4\,t^3+3\,t^2-8\,t-12$$

Esercizi - 2: polinomio caratteristico di endomorfismi

Esercizio 1
Sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbb{K}$ ed $f\colon V \to V$ l'endomorfismo dato da $f(ax^2+bx+c) = (2a+b)x^2+(a+c)x+(3b+c)$. Calcolare il polinomio caratteristico di f.

Esercizio 2
Sia $V = \mathbb{K}^{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{K}$ ed $f\colon V \to V$ l'endomorfismo dato da $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-c & a+d \\ -b+3c & 2a-b+d \end{pmatrix}$. Calcolare il polinomio caratteristico di f.

Soluzioni degli esercizi - 2

Esercizio 1
La matrice di f rispetto alla base $B = \{x^2, x, 1\}$ è data da $M = M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolando si ottiene $p_f(t) = p_M(t) = -t^3+3\,t^2+2\,t-7$.

Esercizio 2

La matrice di f rispetto alla base $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ è data da $M = M_{BB}(f) = \left(\begin{smallmatrix}0&2&-1&0\\1&0&0&1\\0&-1&3&0\\2&-1&0&1\end{smallmatrix}\right)$. Calcolando si ottiene $p_f(t) = p_M(t) = t^4 - 4\,t^3 + 2\,t^2 + 5$.

Esercizi - 3: diagonalizzabilità

Esercizio 1

Si consideri, al variare di $a, b \in \mathbb{C}$, la matrice a coefficienti complessi:

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} b+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b^2-b & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare il polinomio caratteristico $p_{M_{a,b}}(x)$ di $M_{a,b}$;
(2) determinare gli autovalori di $M_{a,b}$ e le loro molteplicità come radici di $p_{M_{a,b}}(x)$ al variare di $a, b \in \mathbb{C}$;
(3) determinare l'insieme delle coppie $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tali che $M_{a,b}$ è diagonalizzabile;

Esercizio 2

Considerare, al variare di $a \in \mathbb{C}$, la matrice

$$N_a = \begin{pmatrix} 1+2a & 2 & 3 & -a(a-2) \\ 0 & 2a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1+2a & a(a-2) \\ 0 & 0 & 0 & 2a-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}.$$

(1) calcolare gli autovalori di N_a e le loro molteplicità algebriche;
(2) calcolare il rango di N_a per ogni $a \in \mathbb{C}$;
(3) determinare i valori di a per cui N_a è diagonalizzabile.

Esercizio 3

Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_\lambda\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da:

$$f_\lambda(x, y, z) = (-x, x + (1-\lambda)z, y + \lambda z).$$

(1) Calcolare gli autovalori di f_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
(2) determinare i valori di λ per cui f_λ è diagonalizzabile;
(3) per ogni λ tale che f_λ è diagonalizzabile determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori per f_λ.

Esercizio 4
Si consideri, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'endomorfismo $f_{a,b} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da:

$$f_{a,b}(x, y, z) = (ax - 3z, x + by - z, -2x - az).$$

(1) Calcolare gli autovalori di $f_{a,b}$ per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$;
(2) determinare le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tali che $f_{a,b}$ è diagonalizzabile;
(3) per ogni (a, b) tale che $f_{a,b}$ è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori per $f_{a,b}$.

Esercizio 5
Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$f_a(x, y, z) = (ax, -ax + y + (1 - a^2)z, ax + a^2 z).$$

(1) Calcolare gli autovalori di f_a per ogni $a \in \mathbb{R}$;
(2) determinare l'insieme degli $a \in \mathbb{R}$ tali che f_a è diagonalizzabile;
(3) determinare, per almeno due valori distinti di a, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita di autovettori per f_a .

Esercizio 6
Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da:

$$f_k(x, y, z) = (kx + y, (k - 1)x + y + z, y + kz).$$

(1) Calcolare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(2) determinare l'insieme $D = \{k \in \mathbb{R} \mid f_k \text{ è diagonalizzabile}\}$;
(3) determinare, per almeno due valori distinti di k, una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori per f_k .

Esercizio 7
Siano $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ed $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari definite da:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y + 3z, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che:

(1) La matrice A associata all'endomorfismo f tramite la base canonica è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(2) $\ker\varphi$ è un autospazio per A e il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un autovettore per A.

(3) f è diagonalizzabile.

Esercizio 8
Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2,2}$. Si determinino gli $n > 0$ tali che $A^n \in \mathbb{R}^{2,2}$ è diagonalizzabile.

Esercizio 9
Si determini per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$M_a = \begin{pmatrix} 2a+2 & 0 & a+4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & a & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10
Si determini per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 2a & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 2 & 1-2a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 11
Sia $\phi_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Dimostrare che ϕ_A è diagonalizzabile.
(2) Determinare, se possibile, un endomorfismo $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\psi^2 = \phi$ e calcolarne la matrice associata tramite la base canonica.

Esercizio 12
Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_k \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ data da:

$$f_k(x, y, z, w) = (x + kz, -2y + (k+4)z, (k+1)z, -(k+1)y + (k+4)z + (k-1)w).$$

(a) Calcolare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare l'insieme $D = \{k \in \mathbb{R} \mid f_k \text{ è diagonalizzabile}\}$;

(c) determinare, per almeno tre valori distinti di k, una base di $\mathbb{R}^4$ fatta di autovettori per f_k .

Esercizio 13
Sia $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare data da

$$f_k(x, y, z) = (2x + kz, x + 2ky - z, kx - 2z).$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di f_k per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare i valori di k per cui f_k non è diagonalizzabile;
(d) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori per f_1.

Esercizio 14
Sia $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare data da

$$f_k(x, y, z) = (x + (k + 1)z, 2x + (k^2 - 2)y - z, (k - 1)x - z).$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di f_k per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) determinare i valori di k per cui f_k non è diagonalizzabile;
(d) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori per f_3.

Esercizio 15
Sia $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare data da

$$f_k\,(x, y, z) = \big(\big(k^2 - 1\big)x - \big(k^2 - 2\big)y,\ \big(k^2 - 2\big)x - \big(k^2 - 3\big)y,\ -(k - 1)x + (k - 1)y + kz\big)\,.$$

(a) Calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di f_k sapendo che è della forma $(k - t)g(t)$, dove $g(t)$ è un polinomio di secondo grado che non dipende da k;
(b) calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche;
(c) determinare i valori di k per cui f_k è diagonalizzabile;
(d) trovare, per ogni k del punto (c), una base di autovettori per f_k.

Esercizio 16
Sia $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare data da

$$f_k\,(x, y, z) = (-(k - 2)x + 2\,y - z,\ -x + y + z,\ -(k - 3)x + 2\,y - 2\,z)\,.$$

(a) Calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di f_k;
(b) sapendo che un autovalore di f_k è 1 per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di f_k;
(c) determinare i $k \in \mathbb{R}$ per cui f_k è diagonalizzabile;
(d) determinare una base di autovettori per f_1.

Esercizio 17
Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_k\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dato da:

$$f_k(x,y,z,w) = \big(2\,kx,\ (k+2)x + k^2y,\ 4\,z,\ (k+2)x + \big(k^2-4\big)y + (k+2)z + 4\,w\big)\,.$$

(a) Determinare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, le molteplicità algebriche degli autovalori di f_k;
(b) determinare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, le molteplicità geometriche degli autovalori di f_k;
(c) determinare l'insieme dei valori di k tali che f_k è diagonalizzabile.

Esercizio 18
Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi reali di grado al più due. Sia $f_k\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare data da

$$f_k(a + bx + cx^2) = a(k+2) + b(k-2) + 2bkx + (a(k+1) + c)x^2$$

per ogni $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

(a) Determinare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare l'insieme D dei valori di k per cui f_k è diagonalizzabile;
(c) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ composta di autovettori di f_k per ogni $k \in D$.

Esercizio 19
Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi reali di grado al più due. Sia $f_k\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l' unica applicazione lineare tale che

$$f_k(1) = 1 + (k^2 - 1/4)x^2, \quad f_k(x) = x, \quad f_k(x^2) = 1.$$

(a) Determinare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare l'insieme D dei valori di k per cui f_k è diagonalizzabile;
(c) determinare una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ composta di autovettori di f_k per ogni $k \in D$.

Esercizio 20
Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi reali di grado al più due. Sia $f_k\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l' unica applicazione lineare tale che

$$f_k(1) = k + 2x^2, \quad f_k(x) = k^2x, \quad f_k(x^2) = 2 + kx^2.$$

(a) Determinare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare l'insieme D dei valori di k per cui f_k è diagonalizzabile;
(c) determinare una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ composta di autovettori di f_k per ogni $k \in D$;
(d) determinare, per ogni $k \geq 2$, un'applicazione lineare $g_k\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che $g_k \circ g_k = f_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 21
Sia $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f_k(x,y,z) = ((k-5)x + (k-2)z, -(k+2)x - 3y, (10-k)x + (7-k)z).$$

(a) Determinare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare l'insieme D dei valori di k per cui f_k è diagonalizzabile;
(c) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ composta di autovettori di f_k per ogni $k \in D$.

Esercizio 22
Sia $f_k \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$f_k(x, y, z, w) = (kx, -2x + y, -(k+2)x - 2z, (-k^2 + k + 5)x - 3y + (1 - k^2)z - 2w).$$

(a) Determinare gli autovalori di f_k e le loro molteplicità algebriche per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) determinare l'insieme D dei valori di k per cui f_k è diagonalizzabile;
(c) determinare una base di $\mathbb{R}^4$ composta di autovettori di f_k per ogni $k \in D$.

Soluzioni degli esercizi - 3

Esercizio 1

(1) Calcolando si trova $p_{M_{a,b}}(t) = \det(M_{a,b} - tI) = (t-1)^2(t-2)(t-b-2)$. (2) Se $b \notin \{-1, 0\}$ gli autovalori di $M_{a,b}$ sono 1, 2 e $b+2$ di molteplicità algebriche, rispettivamente, due, uno e uno. Se $b = -1$ gli autovalori sono 1 e 2, di molteplicità algebriche tre ed uno, mentre se $b = 0$ gli autovalori sono 1 e 2 e le molteplicità algebriche sono due e due. (3) La dimensione dell'autospazio relativo ad 1 è uguale a $4 - \mathrm{rg}(M_{a,b} - I)$, e

$$M_{a,b} - I = \begin{pmatrix} b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b^2-b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La seconda colonna e la terza riga di questa matrice sono nulle, mentre il determinante della sottomatrice ottenuta eliminandole è $-(b+1)(a^2+1)$. Da questo, ispezionando la matrice si deduce che

$$\mathrm{rg}(M_{a,b} - I) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (a,b) \in \{(i,-1), (-i,-1)\}, \\ 2 & \text{se} \quad (b+1)(a^2+1) = 0 \quad \text{ma} \quad (a,b) \notin \{(i,-1), (-i,-1)\}, \\ 3 & \text{se} \quad (b+1)(a^2+1) \neq 0 \end{cases}.$$

Per il criterio di diagonalizzabilità, se $b \notin \{-1, 0\}$ affinché $M_{a,b}$ sia diagonalizzabile è necessario e sufficiente che $\mathrm{rg}(M_{a,b} - I) = 2$, ovvero $a = \pm i$. Analogamente, $M_{a,-1}$ è diagonalizzabile se e solo se $a = \pm i$. Infine, poiché

$$M_{a,0} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango due per ogni $a \in \mathbb{C}$, anche $M_{a,0}$ è diagonalizzabile se e solo se $a = \pm i$. Riassumendo, $M_{a,b}$ è diagonalizzabile se e solo se $a = \pm i$, indipendentemente da b.

Esercizio 2

(1) Sviluppando il determinante di $N_a - tI$ rispetto all'ultima riga si ottiene $p_{N_a}(t) = (t - 2(a-1))^2(t-2a)(t-2(a+2))$. Quindi gli autovalori di N_a sono $2(a-1)$ di molteplicità due e $2a$ e $2(a+2)$, entrambi di molteplicità uno. (2) A meno del segno, il determinante di N_a è $p_{N_a}(0) = 16a(a-1)^2(a+2)$. Quindi il rango di N_a è quattro per $a \notin \{-2, 0, 1\}$. Inoltre, si verifica facilmente che $\mathrm{rg}(N_{-2}) = \mathrm{rg}(N_0) = \mathrm{rg}(N_1) = 3$. (3) Si verifica facilmente che gli autovalori $2(a-1)$, $2a$ e $2(a+2)$ sono sempre distinti a due a due, perciò per il criterio di diagonalizzabilità N_a risulta diagonalizzabile se e solo se la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $2(a-1)$ è uguale a due, ovvero se e solo se il rango di $N_a - 2(a-1)I$ è uguale a

$4-2=2$. Abbiamo

$$N_a - 2(a-1)I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -a(a-2) \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & a(a-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e la sottomatrice di $N_a - 2(a-1)I$ determinata dalle prime tre righe ed ultime tre colonne ha determinante pari a $-12a(a-2)$. Quindi se $a \notin \{0,2\}$ la matrice $N_a - 2(a-1)I$ ha rango tre ed N_a non è diagonalizzabile. Se invece $a \in \{0,2\}$ la matrice $N_a - 2(a-1)I$ ha rango due ed N_a è diagonalizzabile.

Esercizio 3

(1) La matrice associata ad f_λ tramite la base canonica è $M_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Da quest'ultima si calcola il polinomio caratteristico $p_{f_\lambda}(t) = (1-t)(t+1)(t-\lambda+1)$, quindi gli autovalori di f_λ sono 1, -1 e $\lambda-1$.

(2) Se $\lambda \neq 0, 2$ allora $\lambda - 1 \notin \{1,-1\}$ ed f_λ, avendo tre autovalori distinti, è diagonalizzabile. Inoltre, si verifica facilmente che le matrici

$$M_0 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad M_2 - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe rango 2. Questo implica che il -1–autospazio di f_0 e l'1–autospazio di f_2 hanno entrambi dimensione uno, e quindi che né f_0 né f_2 sono diagonalizzabili.

(3) Per il punto (2), ora possiamo supporre $\lambda \neq 0, 2$. Per trovare la base cercata basta determinare un autovettore per ognuno dei tre autovalori distinti 1, -1 e $\lambda-1$. In altre parole, si tratta di trovare vettori non nulli nei nuclei delle matrici

$$M_\lambda - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}, \quad M_\lambda + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_\lambda - (\lambda-1)I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Impostando i relativi sistemi omogenei si trovano facilmente gli autovettori cercati: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1-\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\lambda \\ -1-\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4

(1) La matrice associata ad $f_{a,b}$ tramite la base canonica è $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & -3 \\ 1 & b & -1 \\ -2 & 0 & -a \end{pmatrix}$. Da quest'ultima si calcola il polinomio caratteristico $p_{f_{a,b}}(t) = (t^2 - a^2 - 6)(b-t)$, quindi gli autovalori di $f_{a,b}$ sono b, $\sqrt{a^2+6}$ e $-\sqrt{a^2+6}$.

(2) Poiché $a^2 + 6 > 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, gli autovalori $\sqrt{a^2+6}$ e $-\sqrt{a^2+6}$ sono sempre distinti. Perciò se $b \neq \pm\sqrt{a^2+6}$ l'applicazione $f_{a,b}$ ha tre autovalori distinti ed è quindi diagonalizzabile. Invece se $b = \sqrt{a^2+6}$ oppure $b = -\sqrt{a^2+6}$, utilizzando il criterio di diagonalizzabilità vediamo che $f_{a,b}$ è diagonalizzabile se e solo se l'autovalore b ha molteplicità algebrica e geometrica 2, ovvero se e solo se $M_{a,b} - bI$ ha rango 1. Abbiamo

$$M_{a,b} - bI = \begin{pmatrix} a-b & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -a-b \end{pmatrix},$$

che ha rango 1 se e solo se la sua prima e terza colonna sono una l'opposta dell'altra, ovvero se e solo se $a-b=3$ e $a+b=-2$. Questo sistema ha l'unica soluzione $(a,b)=(1/2,-5/2)$, e inoltre $(-5/2)^2=(1/2)^2+6$. Riassumendo, $f_{a,b}$ è diagonalizzabile se e solo se $b\neq\pm\sqrt{a^2+6}$ oppure $(a,b)=(1/2,-5/2)$.

(3) Per il punto (2), ora possiamo supporre $b\neq\pm\sqrt{a^2+6}$ oppure $(a,b)=(1/2,-5/2)$. *Primo caso:* $b\neq\pm\sqrt{a^2+6}$. Per semplificare la notazione poniamo $\lambda:=\sqrt{a^2+6}$. Abbiamo i 3 autovalori distinti b, λ e $-\lambda$, quindi ognuno avente molteplicità algebrica e geometrica uguale ad 1. Dunque le matrici

$$M_1=M_{a,b}-bI=\begin{pmatrix} a-b & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & -a-b\end{pmatrix},\quad M_2=M_{a,b}-\lambda I=\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & -3\\ 1 & b-\lambda & -1\\ -2 & 0 & -a-\lambda\end{pmatrix},$$
$$M_3=M_{a,b}+\lambda I=\begin{pmatrix} a+\lambda & 0 & -3\\ 1 & b+\lambda & -1\\ -2 & 0 & -a+\lambda\end{pmatrix}$$

hanno tutte rango 2. La base di autovettori si trova risolvendo gli associati sistemi lineari omogenei. Nel primo caso è ovvio che $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla, quindi l'autovettore cercato. Nel secondo e terzo caso si trovano, rispettivamente, $v_2=\begin{pmatrix}-(a+\lambda)/2\\ \frac{a+\lambda+2}{2(b-\lambda)}\\ 1\end{pmatrix}$ e $v_3=\begin{pmatrix}-(a-\lambda)/2\\ \frac{a-\lambda+2}{2(b+\lambda)}\\ 1\end{pmatrix}$. Allora $\{v_1,v_2,v_3\}$ è una base di autovettori di $f_{a,b}$ quando $b\neq\pm\sqrt{a^2+6}$. *Secondo caso:* $(a,b)=(1/2,-5/2)$. Gli autovalori della matrice $M_{1/2,-5/2}$ sono $5/2$ e $-5/2$, di molteplicità geometriche 1 e 2 rispettivamente. La base cercata si ottiene come unione di basi dei nuclei delle matrici

$$M_{1/2,-5/2}-\frac{5}{2}I=\begin{pmatrix}-2&0&-3\\1&-5&-1\\-2&0&-3\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad M_{1/2,-5/2}+\frac{5}{2}I=\begin{pmatrix}3&0&-3\\1&0&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}.$$

Risolvendo i relativi sistemi omogenei si trova: $\left\{\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 5

(1) La matrice associata ad f_a tramite la base canonica è $M_a=\begin{pmatrix}a&0&0\\-a&1&1-a^2\\a&0&a^2\end{pmatrix}$. Da quest'ultima si calcola il polinomio caratteristico $p_{f_a}(t)=(1-t)(t-a)(t-a^2)$, quindi gli autovalori di f_a sono 1, a e a^2.

(2) Due autovalori coincidono se e solo se $a=1$, $a^2=1$ oppure $a^2=a$, ovvero se e solo se $a\in\{-1,0,1\}$. Quindi se $a\notin\{-1,0,1\}$ l'applicazione ha 3 autovalori distinti ed è dunque diagonalizzabile. Se $a=-1$ gli autovalori sono -1 e 1, di molteplicità algebriche rispettivamente 1 e 2. Per il criterio di diagonalizzabilità, f_{-1} è diagonalizzabile se e solo se $\dim\ker(f_{-1}-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=2$. Poiché $M_{-1}-I=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ ha rango 1, f_{-1} risulta diagonalizzabile. Se $a=0$ gli autovalori sono 0 e 1, di molteplicità algebriche rispettivamente 2 e 1. Per il criterio di diagonalizzabilità, f_0 è diagonalizzabile se e solo se $\dim\ker(f_0)=2$. Poiché $M_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ ha rango 1, f_0 risulta diagonalizzabile. Se $a=1$ c'è l'unico autovalore 1 di molteplicità algebrica 3, e se f_1 fosse diagonalizzabile sarebbe l'identità di $\mathbb{R}^3$. Ma M_1 non è la matrice identità, quindi f_1 non è diagonalizzabile. Riassumendo, f_a è diagonalizzabile se e solo se $a\neq 1$.

(3) Determiniamo una base di autovettori per $a=-1$ e $a=0$. Per $a=-1$ gli autovalori sono -1 e 1, di molteplicità algebrica e geometrica rispettivamente 1 e 2. Il vettore $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di $M_{-1}+I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$, quindi è un -1–autovettore, mentre i vettori $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ sono 1–autovettori perché appartengono al nucleo di $M_{-1} - I = \begin{pmatrix} -2&0&0\\1&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix}$. I tre vettori considerati sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di autovettori per f_{-1}. Se $a = 0$ gli autovalori sono 0 e 1, di molteplictà algebrica e geometrica rispettivamente 2 e 1. I vettori $\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}$ appartengono al nucleo di $M_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$, quindi sono 0-autovettori, mentre il vettore $\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di $M_0 - I = \begin{pmatrix} -1&0&0\\0&0&1\\0&0&-1 \end{pmatrix}$, quindi è un 1-autovettore. Questi tre vettori sono linearmente indipendenti, dunque sono una base di autovettori per f_0.

Esercizio 6

(1) La matrice associata ad f_k tramite la base canonica è $M_k = \begin{pmatrix} k&1&0\\k-1&1&1\\0&1&k \end{pmatrix}$. Da quest'ultima si calcola il polinomio caratteristico $p_{f_k}(t) = t(k-t)(t-k-1)$, quindi gli autovalori di f_k sono 0, k e $k+1$. Poiché k e $k+1$ sono sempre distinti, un autovalore può avere molteplicità maggiore di uno solo se $k = 0$ oppure $k = -1$. Quindi (i) per $k = 0$ gli autovalori sono 0 e 1, di molteplicità algebriche rispettivamente due ed uno, (ii) per $k = -1$ gli autovalori sono 0 e -1, di molteplicità algebriche rispettivamente due ed uno, e (iii) per ogni $k \notin \{-1, 0\}$ gli autovalori sono 0, k e $k+1$, tutti di molteplicità algebrica uno.

(2) Quando f_k ha tre autovalori distinti è diagonalizzabile. Quindi dal punto (a) segue che f_k è diagonalizzabile se $k \neq -1, 0$. Se $k \in \{-1, 0\}$ l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica due, quindi per stabilire la diagonalizzabilità o meno di f_k è necessario e sufficiente calcolarne la moteplicità geometrica. Abbiamo $M_0 = M_0 - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0&1&0\\-1&1&1\\0&1&0 \end{pmatrix}$, che ha rango due. Perciò se $k = 0$ l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica $3 - 2 = 1 \neq 2$, ed f_0 non è diagonalizzabile. Analogamente $M_{-1} = M_{-1} - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} -1&1&0\\-2&1&1\\0&1&-1 \end{pmatrix}$, che ha rango due, e per lo stesso motivo appena visto f_{-1} non è diagonalizzabile. In conclusione, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

(3) Determiniamo una base di autovettori per $k = 1$ e $k = 2$. Per $k = 1$ gli autovalori sono 0, 1 e 2. Risolvendo i sistemi omogenei associati alle matrici $M_1 - 0 \cdot I$, $M_1 - 1 \cdot I$ e $M_1 - 2 \cdot I$ si trovano rispettivamente gli autovettori $\begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$, che formano una base di autovettori per f_1. Invece per $k = 2$ gli autovalori sono 0, 2 e 3. Risolvendo i sistemi omogenei associati alle matrici $M_2 - 0 \cdot I$, $M_2 - 2 \cdot I$ e $M_2 - 3 \cdot I$ si trovano rispettivamente gli autovettori $\begin{pmatrix} 1\\-2\\1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$, che formano una base di autovettori per f_2.

Esercizio 7

(1) Basta verificare che le colonne della matrice A sono le immagini tramite f dei vettori della base canonica. (2) È chiaro che se $\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \ker\varphi$ allora $f\left(\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$, quindi $\ker\varphi \subseteq V_1(f)$. Viceversa, se $\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in V_1(f)$ allora $\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} + \varphi\left(\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix}$, che implica $\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \ker\varphi$. Inoltre,

$$f\begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix} = \left(1 + \phi\begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix}.$$

(3) Calcolando si trova $-p_A(t) = t^3 - 12t^2 + 21t - 10$. Sappiamo già che $p_A(1) = 0$, quindi possiamo fattorizzare: $p_A(t) = (1-t)(t^2 - 11t + 10) = (t-1)^2(10-t)$. Calcolando risulta $m_1 = 2$, che implica subito che f è diagonalizzabile.

Esercizio 8

Calcolando si trova $A^2 = -I$, $A^3 = A^2 \cdot A = -A$, $A^4 = A^2 \cdot A^2 = I$. Dunque $A^n = A^r$, dove r è il resto della divisione di n per 4. Per gli n della forma $4q+1$ la matrice $A^n = A$ non è diagonalizzabile perché $p_A(x) = x^2+1$ non ha radici reali. A^n non è diagonalizzabile neanche per gli n della forma $4q+3$, perché se $A^{4q+3} = A^3 = -A$ fosse diagonalizzabile lo sarebbe anche A. D'altra parte, A^2 e A^4 sono diagonali, e quindi lo stesso vale per A^n per ogni n pari. Riassumendo, A^n è diagonalizzabile se e solo se n è pari.

Esercizio 9

$p_{M_a}(t) = (2-t)(t^2 - 3t(a+1) + 2a^2 + a - 10)$, con radici $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2a+5$ e $\lambda_3 = a-2$. Abbiamo $\lambda_1 = \lambda_2$ se e solo se $a = -3/2$, $\lambda_2 = \lambda_3$ se e solo se $a = -7$ e $\lambda_1 = \lambda_3$ se e solo se $a = 4$. Quindi se $a \notin \{-3/2, 4, -7\}$ la matrice M_a è diagonalizzabile. Per ogni $a \in \{-3/2, 4, -7\}$ si trova $\mathrm{rg}(aI - M_a) = 2$, quindi a ha molteplicità geometrica 1, e dunque M_a non è diagonalizzabile.

Esercizio 10

$p_{M_a}(x) = (a-1-t)(t+1)(t-a-1)$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = a+1$, $\lambda_3 = a-1$. Poiché λ_2 e λ_3 non possono mai essere uguali, i casi da analizzare sono $\lambda_1 = \lambda_2$, cioè $a = -2$, e $\lambda_1 = \lambda_3$, cioè $a = 0$. Se $a = -2$ abbiamo l'autovalore doppio $\lambda = -1$, con $m_{-1} = 3 - \mathrm{rg}(-I - M_{-2}) = 3 - 2 = 1$, quindi M_{-2} non è diagonalizzabile. Se $a = 0$ abbiamo l'autovalore doppio $\lambda = -1$ con $m_{-1} = 3 - \mathrm{rg}(-I - M_0) = 3 - 1 = 2$, quindi la matrice è diagonalizzabile. Se poi $a \neq 0, -2$ la matrice è diagonalizzabile in quanto ha tre autovalori distinti.

Esercizio 11

$p_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, ϕ ha autovalori distinti $\{1,2,3\}$ e quindi è diagonalizzabile. Risolvendo i sistemi $AX = \lambda X$ per $\lambda = 1,2,3$ si ottengono gli autospazi: $V_1(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_2(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V_3(\phi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dunque la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le cui colonne sono i tre autovettori diagonalizza A: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Quindi la matrice

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

rappresenta, rispetto alla base canonica, un endomorfismo ψ tale $\psi^2 = \phi$.

Esercizio 12

(a) La matrice associata ad f_k tramite la base canonica è $M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & k+4 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & -k-1 & k+4 & k-1 \end{pmatrix}$. Da quest'ultima si calcola il polinomio caratteristico $p_{f_k}(x) = (x-1)(x+2)(x-k+1)(x-k-1)$, quindi gli autovalori di f_k sono 1, -2, $k-1$e $k+1$. Poiché $k-1$ e $k+1$ sono sempre distinti, c'è un autovalore di molteplicità maggiore di uno se e solo se $k-1 \in \{-2, 1\}$ oppure $k+1 \in \{-2, 1\}$, ovvero se e solo se $k \in \{-3, -1, 0, 2\}$. Quindi (i) per $k = -3$ gli autovalori sono -4, -2 e 1, di molteplicità algebriche rispettivamente 1, 2 e 1, (ii) per $k = -1$ gli autovalori sono -2, 0 e 1, di

molteplicità algebriche rispettivamente 2, 1 e 1, (iii) per $k = 0$ gli autovalori sono -2, -1 e 1, di molteplicità algebriche rispettivamente 1, 1 e 2, (iv) per $k = 2$ gli autovalori sono -2, 1 e 3, di molteplicità algebriche rispettivamente 1, 2 e 1, e (v) per ogni $k \notin \{-3, -1, 0, 2\}$ gli autovalori sono 1, -2, $k-1$ e $k+1$, tutti di molteplicità algebrica 1.
(b) Quando f_k ha quattro autovalori distinti è diagonalizzabile. Quindi dal punto (a) segue che f_k è diagonalizzabile se $k \notin \{-3, -1, 0, 2\}$. Quando $k \in \{-3, -1, 0, 2\}$ segue dal punto (a) che f_k ha tre autovalori distinti, di cui uno di molteplicità algebrica 2. Quindi per stabilire la diagonalizzabilità in ognuno di questi quattro casi è necessario e sufficiente calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore di molteplicità maggiore di 1. Calcolando si trova $\mathrm{rg}(M_{-3} - (-2)I) = 3$ e $\mathrm{rg}(M_{-1} - (-2)I) = \mathrm{rg}(M_0 - I) = \mathrm{rg}(M_2 - I) = 2$, perciò $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
(c) Determiniamo una base di autovettori per $k = -1$, $k = 0$ e $k = 2$. Per $k = -1$ gli autovalori sono -2, 0 e 1. Risolvendo i sistemi omogenei associati alle matrici $M_{-1} - (-2)I$, M_{-1} e $M_{-1} - I$ si trova la base di autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per $k = 0$ gli autovalori sono -2, -1 e 1. Risolvendo i sistemi omogenei associati alle matrici $M_0 - (-2)I$, $M_0 - (-1)I$ e $M_0 - I$ si trova la base di autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per $k = 2$ gli autovalori sono -2, 1 e 3. Risolvendo i sistemi omogenei associati alle matrici $M_2 - (-2)I$, $M_2 - I$ e $M_2 - 3I$ si trova la base di autovettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \\ 1 \\ 6/5 \end{pmatrix}$.

Esercizio 13
(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ 1 & 2k & -1 \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcolando si trova il polinomio caratteristico $p_k(t) = \det(A_k - tI) = (2k - t)(t^2 - k^2 - 4)$. (b) Gli autovalori di f_k sono le radici di $p_k(t)$, ovvero $2k$, $\sqrt{k^2+4}$ e $-\sqrt{k^2+4}$. Le radici $\sqrt{k^2+4}$ e $-\sqrt{k^2+4}$ sono chiaramente sempre distinte, mentre $2k = \pm\sqrt{k^2+4}$ se e solo se $4k^2 = k^2 + 4$, ovvero se e solo se $k = \pm 2/\sqrt{3}$. Riassumendo, le radici di $2k$, $\sqrt{k^2+4}$ e $-\sqrt{k^2+4}$ sono tutte distinte, e quindi tutte di molteplicità algebrica 1, se $k \neq \pm 2/\sqrt{3}$. Se $k = \pm 2/\sqrt{3}$ gli autovalori sono $\pm 4/\sqrt{3}$ e $\mp 4/\sqrt{3}$, rispettivamente di molteplicità 2 e 1. (c) Per stabilire la diagonalizzabilità o meno delle f_k dobbiamo calcolare le molteplicità geometriche degli autovalori. Quando questi sono tutti distinti ($k \neq \pm 2/\sqrt{3}$), le molteplicità geometriche sono tutte uguali ad 1 ed f_k è diagonalizzabile. Quando $k = \pm 2/\sqrt{3}$ si verifica che il rango di $A_{2k} - 2kI$ è 2, quindi la molteplicità geometrica di $2k$ è 1, cioè diversa da quella algebrica ed f_k non è diagonalizzabile. Perciò questi due casi sono quelli cercati. (d) Quando $k = 1$ gli autovalori sono 2, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$, e sappiamo che hanno tutti molteplicità geometriche uguali ad 1. Calcolando si trova che il nucleo di $A_1 - 2I$ è generato da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quello di $A_1 - \sqrt{5}I$ da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$ e quello di $A_1 + \sqrt{5}I$ da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{5} \\ -\sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$. Quindi la base cercata è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{5} \\ -\sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 14
(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 2 & k^2-2 & -1 \\ k-1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolando si trova il polinomio caratteristico $p_k(t) = \det(A_k - tI) = (k - t)(t + k)(t - k^2 + 2)$. (b) Gli autovalori

di f_k sono le radici di $p_k(t)$, ovvero k, $-k$ e k^2-2. Abbiamo $k=-k$ se e solo se $k=0$, $k=k^2-2$ se e solo se $k\in\{-1,2\}$ e $-k=k^2-2$ se e solo se $k\in\{-2,1\}$. Quindi se $k\notin\{-2,-1,0,1,2\}$ le radici k, $-k$ e k^2-2 sono tutte distinte e dunque tutte di molteplicità algebrica 1. Per i rimanenti valori di k gli autovalori e le loro molteplicità algebriche sono come segue:

- $k=\pm2$: autovalore -2 semplice, autovalore 2 doppio;
- $k=\pm1$: autovalore -1 doppio, autovalore 1 semplice;
- $k=0$: autovalore -2 semplice, autovalore 0 doppio.

(c) Per stabilire la diagonalizzabilità o meno delle f_k dobbiamo calcolare le molteplicità geometriche degli autovalori. Quando questi sono tutti distinti ($k\notin\{-2,-1,0,1,2\}$) le molteplicità geometriche sono tutte uguali ad 1 ed f_k è diagonalizzabile. Negli altri casi ci sono due autovalori distinti e bisogna calcolare la molteplicità geometrica dell'unico autovalore doppio. Si trova $\operatorname{rg}(A_{\pm2}-2I)=\operatorname{rg}(A_{\pm1}+I)=\operatorname{rg}(A_0)=2$, quindi f_k non è diagonalizzabile per $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$. (d) Quando $k=3$ gli autovalori sono 3, -3 e 7, tutti semplici e di molteplicità geometrica uguale ad 1. Calcolando si trova che il nucleo di A_3-3I è generato da $\begin{pmatrix}8\\-3\\4\end{pmatrix}$, quello di A_3+3I da $\begin{pmatrix}10\\-3\\-10\end{pmatrix}$ e quello di A_3-7I da $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Quindi una base di autovettori per f_3 è $\left\{\begin{pmatrix}8\\-3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\-3\\-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 15

(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $A_k=\begin{pmatrix}k^2-1&-k^2+2&0\\k^2-2&-k^2+3&0\\-k+1&k-1&k\end{pmatrix}$. Calcolando il polinomio caratteristico si trova

$$p_k(t)=\det(A_k-tI)=(k-t)\det\begin{pmatrix}k^2-t-1&-k^2+2\\k^2-2&-k^2-t+3\end{pmatrix}=$$
$$(k-t)\left[(t-3+k^2)(t+1-k^2)+(k^2-2)^2\right]=(k-t)(t-1)^2.$$

(b) Gli autovalori di f_k sono le radici di $p_k(t)$, ovvero 1 e k. Per $k\neq1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e k molteplicità algebrica 1, mentre per $k=1$ l'unico autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3.

(c) Per stabilire la diagonalizzabilità o meno delle f_k dobbiamo calcolare le molteplicità geometriche degli autovalori e verificare se coincidono con quelle algebriche. Se $k=1$ l'autovalore 1 non può avere molteplicità geometrica 3 perché $f_1\neq\mathrm{id}^3_{\mathbb{R}}$, quindi f_1 non è diagonalizzabile. Se $k\neq1$, osserviamo che la matrice $A_k-I=\begin{pmatrix}k^2-2&-k^2+2&0\\k^2-2&-k^2+2&0\\-k+1&k-1&k-1\end{pmatrix}$ ha rango 2 per $k\neq\pm\sqrt2$, e rango 1 per $k=\pm\sqrt2$. Dunque per il criterio di diagonalizzabilità f_k è diagonalizzabile se e solo $k=\pm\sqrt2$.

(d) Poiché $A_{\pm\sqrt2}-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\mp\sqrt2+1&\pm\sqrt2-1&\pm\sqrt2-1\end{pmatrix}$, l'1–autospazio di $f_{\pm\sqrt2}$ è generato (per entrambi le scelte del segno) dai vettori linearmente indipendenti $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. D'altra parte, il $\pm\sqrt2$–autospazio di $f_{\pm\sqrt2}$ è uguale al nucleo della matrice $A_{\pm\sqrt2}\mp\sqrt2I=\begin{pmatrix}-\sqrt2+1&0&0\\0&-\sqrt2+1&0\\-\sqrt2+1&\sqrt2-1&0\end{pmatrix}$,

che è generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi la base $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ è fatta di autovettori sia per $f_{\sqrt{2}}$ che per $f_{-\sqrt{2}}$.

Esercizio 16

(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $A_k = \left(\begin{smallmatrix} -k+2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -k+3 & 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Calcolando il polinomio caratteristico di A_k si trova $p_k(t) = \det(A_k - tI) = -t^3 + (1-k)t^2 + t + k - 1$.
(b) Sapendo che $p_k(1) = 0$ si ottiene facilmente

$$p_k(t) = -t^3 + (1-k)t^2 + t + k - 1 = -(t-1)(t^2 + kt + k - 1) = -(t-1)(t+1)(t+k-1).$$

Quindi gli autovalori di f_k sono -1, 1 e $1-k$. Per $1-k \neq -1, 1$, ovvero $k \neq 0, 2$ ci sono tre autovalori distinti -1, 1 e $1-k$, tutti e tre di molteplicità algebrica 1. Per $k = 0$ gli autovalori sono -1 ed 1, il primo semplice e il secondo doppio. Per $k = 2$ gli autovalori sono ancora -1 e 1, ma il primo è doppio e il secondo semplice.
(c) Per stabilire la diagonalizzabilità o meno delle f_k dobbiamo calcolare le molteplicità geometriche degli autovalori e verificare se coincidono con quelle algebriche. Per ogni $k \neq 0, 2$ f_k è diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. Per $k = 0$ la molteplicità geometrica di 1 è uguale a $3 - \mathrm{rg}(A_0 - I)$. Poiché $A_0 - I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 2, in questo caso 1 ha molteplicità geometrica diversa dalla molteplicità algebrica. Quindi f_0 non è diagonalizzabile. Analogamente, il rango di $A_2 + I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ è 2, e quindi la molteplicità geometrica di -1 è 1, diversa da quella algebrica. Dunque f_2 non è diagonalizzabile.
(d) f_1 ha tre autovalori distinti: -1, 0 e 1. Risolvendo i tre sistemi lineari $(A_1 + I)X = 0$, $A_1 X = 0$ e $(A_1 - I)X = 0$ si trovano i corrispondenti autovettori $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ che formano la base cercata.

Esercizio 17

(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 \\ k+2 & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ k+2 & k^2-4 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$, quindi il polinomio caratteristico di f_k è $p_{f_k}(t) = (t-2k)(t-k^2)(t-4)^2$ e i suoi autovalori sono 4, $2k$ e k^2. I valori di k per cui due di essi coincidono sono 0 e ± 2. Per $k \notin \{0, \pm 2\}$ gli autovalori sono 4, $2k$ e k^2, il primo doppio e gli altri due semplici. Se $k = 0$ gli autovalori sono 4 e 0, entrambi doppi. Se $k = -2$ gli autovalori sono -4 e 4, il primo semplice e il secondo di molteplicità algebrica 3. Se $k = 2$ l'unico autovalore è 4, di molteplicità algebrica 4.
(b) La molteplicità geometrica di 4 è sempre uguale alla dimensione del nucleo della matrice $A_k - 4I = \left(\begin{smallmatrix} 2k-4 & 0 & 0 & 0 \\ k+2 & k^2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k+2 & k^2-4 & k+2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Se $k \notin \{0, \pm 2\}$, la sottomatrice 3×3 di $A_k - 4I$ individuata dalle prime tre colonne e dalla prima seconda e quarta riga è non singolare. Se ne deduce che per quei valori di k la matrice $A_k - 4I$ ha rango 3 e quindi 4 ha molteplicità geometrica 1. Inoltre, $\mathrm{rg}(A_0 - 4I) = 3$, $\mathrm{rg}(A_2 - 4I) = 2$ e $\mathrm{rg}(A_{-2} - 4I) = 1$, quindi 4 ha molteplicità geometrica 1, 2 e 3 rispettivamente per $k = 0$, 2 e -2. Per ogni $k \notin \{0, \pm 2\}$ gli autovalori $2k$ e

k^2 hanno molteplicità geometrica 1 perché hanno molteplicità algebrica 1. Poiché $\mathrm{rg}(A_0) = 3$, l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 1 per $k = 0$. Poiché $\mathrm{rg}(A_{-2}+4I) = 3$, l'autovalore -4 ha molteplicità geometrica 1 per $k = -2$. Poiché $\mathrm{rg}(A_2-4I) = 2$, l'autovalore 4 ha molteplicità geometrica 2 per $k = 2$. Riassumiamo i risultati ottenuti nella tabella:

Valori di k	-2		0		2	$k \notin \{0, \pm 2\}$		
autovalori	-4	4	4	0	4	4	$2k$	k^2
molt. alg.	1	3	2	2	4	2	1	1
molt. geom.	1	3	1	1	2	1	1	1

(c) In base ad (a) e (b), per $k \notin \{0, \pm 2\}$ la molteplicità algebrica di 4 è sempre diversa da quella geometrica, quindi f_k non è diagonalizzabile. Lo stesso è vero per $k = 0$ e $k = 2$, mentre per $k = -2$ le molteplicità algebriche e geometriche dei due autovalori -4 e 4 coincidono, e sono uguali ad 1 nel primo caso e a 3 nel secondo. Il fatto che f_{-2} è diagonalizzabile segue anche direttamente dal fatto che A_{-2} è diagonale. Dunque l'insieme cercato è $\{-2\}$.

Esercizio 18

(a) Vogliamo calcolare la matrice A_k di f_k rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Dalla definizione di f_k otteniamo $f_k(1) = k + 2 + (k + 1)x^2$, $f_k(x) = k - 2 + 2kx$ e $f_k(x^2) = x^2$. Poiché le colonne di A_k sono, per definizione, le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$, otteniamo $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & k-2 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e il polinomio caratteristico di f_k risulta $(1-t)(2k-t)(k+2-t)$. Quindi gli autovalori di f_k sono 1, $2k$ e $k+2$, due dei quali coincidono se e solo se $k \in \{-1, 1/2, 2\}$. Se ne deduce che gli autovalori di f_k sono 1, $2k$ e $k + 2$, tutti e tre semplici se $k \notin \{-1, 1/2, 2\}$, 1 doppio e -2 semplice se $k = -1$, 1 doppio e $5/2$ semplice se $k = 1/2$, e 4 doppio e 1 semplice se $k = 2$.

(b) Gli autovalori semplici hanno tutti molteplicità geometrica uno. Rimangono da stabilire le molteplicità geometriche degli autovalori doppi. Poiché $\mathrm{rg}(A_{-1} - I) = 1$, $\mathrm{rg}(A_{1/2} - I) = 2$ e $\mathrm{rg}(A_2 - 4I) = 1$, f_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1/2$.

(c) Risolvendo il sistema $(A_k - 2kI)X = 0$ si trova il $2k$-autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 2k-1 \\ k+1 \end{pmatrix}$, risolvendo il sistema $(A_k - (k + 2)I)X = 0$ il $(k + 2)$-autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e risolvendo il sistema $(A_k - I)X = 0$ l'1-autovettore $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Inoltre, per $k \neq 1/2$ i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è la base cercata per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 19

(a) Le colonne della matrice A_k di f_k rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ sono, per definizione, le coordinate di $f(1)$, $f(x)$ ed $f(x^2)$ rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$. Quindi $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k^2-1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il polinomio caratteristico di f_k risulta $(1 - t)(t^2 - t + 1/4 - k^2)$. Quindi gli autovalori di f_k sono 1, $1/2 - k$ e $1/2 + k$, che sono distinti se $k \notin \{-1/2, 0, 1/2\}$. Invece per $k = 0$ sono $1/2$ e 1, il primo doppio e il secondo semplice, per $k = \pm 1/2$ sono 0 e 1, il primo semplice e il secondo doppio.

(b) Gli autovalori semplici hanno tutti molteplicità geometrica uno. Rimangono da stabilire le molteplicità geometriche degli autovalori doppi. Poiché $\mathrm{rg}(A_0 - \frac{1}{2}I) = 2$ e $\mathrm{rg}(A_{1/2} - I) = \mathrm{rg}(A_{-1/2} - I) = 1$, f_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 0$, quindi $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(c) Risolvendo i sistemi $(A_k - I)X = 0$, $(A_k - (1/2 - k)I)X = 0$ e $(A_k - (1/2 + k)I)X = 0$ si ottengono lo 0-autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'$(1/2 - k)$-autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k+1/2 \end{pmatrix}$ e l'$(1/2 + k)$-autovettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k-1/2 \end{pmatrix}$. Questi tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 0$. La base cercata si ottiene passando dalle coordinate ai vettori (che in questo caso sono polinomi), quindi è data da $\{x, -1 + (k + 1/2)x^2, 1 + (k - 1/2)x^2\}$.

Esercizio 20

(a) Le colonne della matrice A_k di f_k rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ sono, per definizione, le coordinate di $f(1)$, $f(x)$ ed $f(x^2)$ rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$. Quindi $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$ e il polinomio caratteristico di f_k risulta $(t - k - 2)(t - k + 2)(t - k^2)$. Quindi gli autovalori di f_k sono $k + 2$, $k - 2$ e k^2, ciascuno di molteplicità algebrica uno se $k \notin \{-1, 2\}$. Invece per $k = -1$ sono 1 e -3, il primo doppio e il secondo semplice, per $k = 2$ sono 0 e 4, il primo semplice e il secondo doppio.
(b) Gli autovalori semplici hanno tutti molteplicità geometrica uno. Rimangono da stabilire le molteplicità geometriche degli autovalori doppi. Poiché $\mathrm{rg}(A_{-1} - I) = \mathrm{rg}(A_2 - 4I) = 1$, f_k è diagonalizzabile per ogni k, quindi $D = \mathbb{R}$.
(c) Risolvendo i sistemi $(A_k - (k - 2)I)X = 0$, $(A_k - (k + 2)I)X = 0$ e $(A_k - k^2 I)X = 0$ si ottengono il $k + 2$-autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, il $(k - 2)$-autovettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il k^2-autovettore $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Questi tre vettori sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$, quindi la base cercata, ottenuta passando dalle coordinate ai polinomi, è data da $\{1 + x^2, 1 - x^2, x\}$.
(d) Per il punto (c) abbiamo $f_k(1 + x^2) = (k + 2)(1 + x^2)$, $f_k(1 - x^2) = (k - 2)(1 - x^2)$ e $f_k(x) = k^2 x$. Quindi per $k \geq 2$ si può definire come g_k l'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ a $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ che manda $1 + x^2$ in $\sqrt{k + 2}(1 + x^2)$, $1 - x^2$ in $\sqrt{k - 2}(1 - x^2)$ e x in kx. L'uguaglianza $g_k \circ g_k = f_k$ segue dal fatto che le applicazioni lineari $g_k \circ g_k$ ed f_k assumono gli stessi valori sulla base $\{1 + x^2, 1 - x^2, x\}$.

Esercizio 21

(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $M = \begin{pmatrix} k-5 & 0 & k-2 \\ -2-k & -3 & 0 \\ 10-k & 0 & 7-k \end{pmatrix}$. Calcolando il determinante di $tI - M$ otteniamo che il polinomio caratteristico di f_k è $(t+3)(t^2-2t-15) = (t+3)^2(t-5)$. Quindi gli autovalori di f_k sono -3, doppio, e 5, semplice, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(b) L'autovalore semplice 5 ha sempre molteplicità geometrica uno. Quindi basta stabilire la molteplicità geometrica di 3. Poiché

$$\mathrm{rg}(M + 3I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} k-2 & 0 & k-2 \\ -2-k & 0 & 0 \\ 10-k & 0 & 10-k \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-2 \\ -2-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = -2, \\ 2 & \text{se } k \neq -2, \end{cases}$$

concludiamo che $D = \{-2\}$.

(c) Per $k = -2$ la matrice $M - 5I = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e, come si trova facilmente, nucleo generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Invece, sempre per $k = -2$, la matrice $M + 3I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e nucleo generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque una base di autovettori per f_{-2} è $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Esercizio 22

(a) La matrice di f_k rispetto alla base canonica è $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -k-2 & 0 & -2 & 0 \\ -k^2+k+5 & -3 & 1-k^2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcolando il determinante di $tI - M_k$ otteniamo che il polinomio caratteristico di f_k è $(t-k)(t-1)(t+2)^2$. Quindi gli autovalori di f_k sono: k semplice, -2 doppio e 1 semplice se $k \neq -2, 1$; -2 triplo e 1 semplice per $k = -2$; -2 e 1 doppi per $k = 1$.

(b) Abbiamo

$$M_k + 2I = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -k-2 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2+k+5 & -3 & 1-k^2 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha prima e terza riga proporzionali e quindi rango al massimo 3 per ogni k. Inoltre, la sottomatrice formata dalle prime tre colonne e dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante $3(k+2)(1-k^2)$. Quindi $\mathrm{rg}(M_k + 2I) = 3$ per $k \neq -2, \pm 1$. Da quanto visto al punto (a) deduciamo che se $k \neq -2, \pm 1$ allora f_k non è diagonalizzabile perché l'autovalore doppio -2 ha molteplicità geometrica 1. Discutendo separatamente gli altri casi, si vede facilmente che: (i) il rango di $M_{-1} + 2I$ è 2, quindi f_{-1} è diagonalizzabile; (ii) il rango di $M_{-2} + 2I$ è 2, quindi f_{-2} non è diagonalizzabile perché l'autovalore -2 è triplo ma ha molteplicità geometrica 2; (iii) $M_1 - I$ ha rango 3, quindi f_1 non è diagonalizzabile perché l'autovalore 1 è doppio ma ha molteplicità geometrica 1. Concludiamo che $D = \{-1\}$.

(c) Abbiamo

$$M_{-1} + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{-1} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{-1} - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

da cui deduciamo che il (-2)-autospazio è $V_{-2} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, mentre $V_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. La base di autovettori per f_{-1} è quindi $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

CAPITOLO 10

Spazi Euclidei

Possiamo definire un *vettore geometrico* $\overrightarrow{v}$ come un segmento orientato nello spazio tridimensionale della geometria Euclidea elementare, dotato (se non nullo) di *direzione* (la retta da esso individuata), *verso* (di percorrenza della suddetta retta) e *lunghezza* $|\overrightarrow{v}|$. L'insieme dei vettori geometrici con lo stesso punto iniziale O è dotato di una struttura di spazio vettoriale reale: la somma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ è definita tramite la regola del parallelogramma e la moltiplicazione per un numero $r \in \mathbb{R}$ è definita ponendo $r\overrightarrow{v}$ uguale al segmento nullo se $r = 0$, al segmento orientato con la stessa direzion di $\overrightarrow{v}$ e verso uguale oppure opposto a seconda che $r > 0$ o $r < 0$, e lunghezza $|r||\overrightarrow{v}|$.

Oltre alla nozione di lunghezza, nello spazio della geometria elementare esiste anche la nozione di angolo tra due segmenti orientati. Usando entrambe queste nozioni possiamo definire il *prodotto scalare* $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}$ tra due vettori geometrici $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, ponendo

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| \cos\theta,$$

dove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo tra $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Osserviamo che $|\overrightarrow{w}| \cos\theta$ è la lunghezza della proiezione ortogonale $\overrightarrow{w}_{\overrightarrow{v}}$ di $\overrightarrow{w}$ lungo $\overrightarrow{v}$, così come $|\overrightarrow{v}| \cos\theta$ è la lunghezza della proiezione ortogonale $\overrightarrow{v}_{\overrightarrow{w}}$ di $\overrightarrow{v}$ lungo $\overrightarrow{w}$. Notiamo che $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ se e solo se $\overrightarrow{v} = 0$, $\overrightarrow{w} = 0$ oppure $\theta = \pi/2$. Inoltre, il prodotto scalare tra vettori geometrici gode delle seguenti proprietà, di facile verifica.

- (commutatività): $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$ per ogni $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$;
- (distributività): $(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w}$ e $(\alpha\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \alpha(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$.
- (positività): $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0$ per ogni $\overrightarrow{v}$, e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ se e solo se $\overrightarrow{v} = 0$.

Siano $\overrightarrow{i}$ e $\overrightarrow{j}$ due vettori geometrici del piano Euclideo di lunghezza 1, con lo stesso punto iniziale O e perpendicolari tra loro. Un qualunque vettore $\overrightarrow{v}$ del piano e punto iniziale O si scrive come somma delle sue proiezioni ortogonali lungo $\overrightarrow{i}$ e $\overrightarrow{j}$:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{\overrightarrow{i}} + \overrightarrow{v}_{\overrightarrow{j}} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}.$$

Inoltre, si vede subito che $a = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{i}$ e $b = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{j}$. Se $w = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$ è un altro vettore del piano, possiamo calcolare, usando il fatto che $|\overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{j}| = 1$ e $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}) \cdot (c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}) = ac + bd.$$

Questa formula ci suggerisce come definire in modo astratto un "prodotto scalare" $\cdot\colon\ \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ per qualunque $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto ac + bd.$$

Vedremo successivamente come un prodotto scalare con le proprietà di commutatività, distributività e positività permetta di definire le nozioni di "lunghezza" e di "angolo". Per ora possiamo generalizzare la definizione appena introdotta: definiamo un "prodotto scalare" $\cdot\colon\ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ponendo

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

OSSERVAZIONE. Le proprietà commutativa e distributiva sono facilmente verificabili, e lo stesso vale per la positività quando $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, mentre se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ quest'ultima proprietà non ha senso.

ESEMPIO. Consideriamo il prodotto scalare appena introdotto nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dato un vettore $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, abbiamo $X \cdot X = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$. Quindi $X \cdot X = 0$ se e solo se $X = 0$.

DEFINIZIONE. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un'applicazione $\cdot\colon\ V \times V \to \mathbb{R}$ è un *prodotto scalare (positivo)* se valgono le seguenti proprietà. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$:

- (commutatività): $u \cdot v = v \cdot u$;
- (distributività): $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ e $(ru) \cdot w = r(u \cdot w)$;
- (positività): $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = 0$.

La coppia $(V, \cdot)$ si chiama *spazio Euclideo*.

Osserviamo che il vettore nullo 0_V è ortogonale ad ogni vettore di uno spazio Euclideo $(V, \cdot)$. Infatti, per ogni $v \in V$ abbiamo $v \cdot 0_V = v \cdot (0\, 0_V) = 0(v \cdot 0_V) = 0 \in \mathbb{R}$.

Il prodotto scalare $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che abbiamo già definito:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

è detto *prodotto scalare standard* su $\mathbb{R}^n$, ed $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, denotato $\mathbb{E}^n$, è lo *spazio Euclideo standard*.

ESEMPIO. L'applicazione $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \right) \mapsto a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + 4a_4b_4$$

è un prodotto scalare positivo (diverso dal prodotto scalare standard).

ESEMPIO. Sia $V = C[a, b] = \{f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$. Definiamo un prodotto scalare su V ponendo

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Le proprietà di commutatività e distributività seguono subito dalle note proprietà dell'integrale. Inoltre, è ovvio che $f \cdot f = \int_a^b f(x)^2dx \geq 0$. Se $f \neq 0$ allora per continuità $f \neq 0$ su un intervallo $I \subseteq [a, b]$, e poiché $f(x)^2 \geq 0$ abbiamo

$$\int_a^b f(x)^2dx \geq \int_I f(x)^2dx > 0.$$

Dunque $(C[a, b], \cdot)$ è uno spazio Euclideo.

DEFINIZIONE. Sia $(V, \cdot)$ uno spazio Euclideo. Per ogni $v \in V$, definiamo la *norma* $\|v\|$ di v ponendo $\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$.

ESEMPIO. Dato $X = \binom{a}{b} \in \mathbb{E}^2$, $\|X\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

PROPOSIZIONE 10.1. *Sia* $(V,\cdot)$ *uno spazio Euclideo. Allora la norma su* V *soddisfa le seguenti proprietà. Per ogni* $r \in \mathbb{R}$ *e* $v, w \in V$*:*

(1) $\|v\| \geq 0$, *e* $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0_V$*;*
(2) $\|rv\| = |r|\|v\|$*;*
(3) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2v\cdot w + \|w\|^2$*;*
(4) *(disuguaglianza di Cauchy-Schwartz):* $\|v\|\|w\| \geq |v \cdot w|$*;*
(5) *(disuguaglianze triangolari):* $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Chiaramente $\|v\| = \sqrt{v\cdot v} \geq 0$. Se vale l'uguaglianza allora $v \cdot v = 0$ e per la positività $v = 0_V$. (2) $\|rv\| = \sqrt{(rv)\cdot(rv)} = \sqrt{r^2 v\cdot v} = |r|\sqrt{v \cdot v} = |r|\|v\|$. (3) Abbiamo

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + v\cdot w + w \cdot v + w\cdot w =$$
$$v\cdot v + 2v\cdot w + w\cdot w = \|v\|^2 + 2v\cdot w + \|w\|^2.$$

(4) Possiamo supporre $\|w\| > 0$, perché se $\|w\| = 0$ allora $w = 0_V$ e la disuguaglianza è ovvia. Consideriamo la funzione $f(t) = \|v + tw\|^2 \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$f(t) = (v+tw)\cdot(v+tw) = \|v\|^2 + 2tv\cdot w + t^2\|w\|^2.$$

Il grafico $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ è una parabola con la concavità verso l'alto. L'ascissa t_0 del vertice è l'unico punto di minimo di $f(t)$, quindi possiamo calcolarla come unica soluzione dell'equazione $f'(t) = 0$. Poiché $f'(t) = 2v\cdot w + 2t\|w\|^2$, troviamo $t_0 = -v\cdot w/\|w\|^2$. Poiché $f(t) \geq 0$ per ogni t, dobbiamo avere in particolare $f(t_0) \geq 0$, ovvero

$$f(t_0) = \|v\|^2 - 2\frac{(v\cdot w)^2}{\|w\|^2} + \frac{(v\cdot w)^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 - \frac{(v\cdot w)^2}{\|w\|^2} \geq 0,$$

che equivale a $\|v\|^2\|w\|^2 \geq (v\cdot w)^2$, e passando alle radici quadrate di entrambi i membri si ottiene la disuguaglianza voluta. (5) Osserviamo che la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz equivale a $-\|v\|\|w\| \leq v\cdot w \leq \|v\|\|w\|$. Applicando queste disuguaglianze otteniamo:

$$(\|v\| - \|w\|)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2v\cdot w$$
$$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Ma per il punto (3) abbiamo $\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2v\cdot w = \|v+w\|^2$, quindi passando alle radici quadrate si ottiene la tesi. □

Ora possiamo introdurre le nozioni di distanza e di angolo in uno spazio Euclideo.

DEFINIZIONI. Sia $(V,\cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo.

(1) Dati $v, w \in V$, la *distanza* tra v e w è il numero reale $d(v,w) = \|v - w\|$;
(2) Per ogni $v, w \in V$ con $v, w \neq 0$, l'*angolo* $\theta \in [0,\pi]$ tra v e w è definito ponendo

$$\theta = \arccos\left(\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}\right).$$

Chiaramente, $d(v,w) = 0$ se e solo se $v = w$. Se $v\cdot w = 0$ scriveremo $v \perp w$ e diremo che v e w sono *ortogonali*.

ESEMPI. Vediamo la definizione di distanza ed ortogonalità in alcuni casi concreti:

(1) Se $v = (a_1, \dots, a_n), w = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{E}^n$, abbiamo
$$d(v,w) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$
(2) Siano $v = (2,0,1,k), w = (0,1,k,-1) \in \mathbb{E}^4$, con $k \in \mathbb{R}$. Allora
$$d(v,w) = \sqrt{4 + 1 + (1-k)^2 + (k+1)^2} = \sqrt{7 + 2k^2}.$$
Calcoliamo per quali $k \in \mathbb{R}$ i vettori v e w sono ortogonali:
$$v \cdot w = k - k = 0,$$
quindi v e w sono ortogonali per ogni $k \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO. Mostriamo che se $\{E_1, E_2, E_3\} \subset \mathbb{E}^3$ è la base canonica e $X \in \mathbb{E}^3$ allora
$$X = (X \cdot E_1)E_1 + (X \cdot E_2)E_2 + (X \cdot E_3)E_3.$$
Infatti, osserviamo che $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ per $i, j \in \{1,2,3\}$. Quindi se $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$ abbiamo $X \cdot E_i = (x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3) \cdot E_i = x_i$ per $i = 1,2,3$.

ESEMPIO. In questo esempio vedremo un'applicazione della formula di Cramer. Siano $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ e $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{smallmatrix}\right)$ due vettori non allineati di $\mathbb{E}^3$. Vogliamo ricavare una formula che fornisca, in funzione delle coordinate di u_1 ed u_2, un vettore ortogonale ad entrambi. Consideriamo la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{smallmatrix}\right)$. Allora $X \in \mathbb{E}^3$ è ortogonale sia a u_1 che a u_2 se e solo se $AX = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Poiché u_1 e u_2 non sono allineati il rango di A è due, quindi
$$(d_1, d_2, d_3) = \left(\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right), \det\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right), \det\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ b' & c' \end{smallmatrix}\right)\right) \neq (0,0,0).$$
Supponiamo ad esempio $d_1 \neq 0$, e risolviamo il sistema $AX = 0$ rispetto alle prime due variabili usando Cramer:
$$x = \frac{\det\left(\begin{smallmatrix} -cz & b \\ -c'z & b' \end{smallmatrix}\right)}{d_1} = \frac{d_3}{d_1}z, \quad y = \frac{\det\left(\begin{smallmatrix} a & -cz \\ a' & -c'z \end{smallmatrix}\right)}{d_1} = -\frac{d_2}{d_1}z.$$
Abbiamo quindi la soluzione $X = \left(\begin{smallmatrix} d_3 \\ -d_2 \\ d_1 \end{smallmatrix}\right)$. Osserviamo che questa formula per X si può scrivere anche se $d_1 = 0$. Infatti, si può verificare con un calcolo diretto che $A\left(\begin{smallmatrix} d_3 \\ -d_2 \\ d_1 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Abbiamo quindi la formula cercata, che possiamo scrivere in modo succinto in questo modo:
$$u_1 \times u_2 := d_3e_1 - d_2e_2 + d_1e_3 = \det\left(\begin{smallmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{smallmatrix}\right).$$
Osserviamo ora che se u_1 ed u_2 sono allineati oppure uno di loro è nullo, allora $u_1 \times u_2$ è ancora ben definito ma, poiché il rango della matrice A è minore di due, $u_1 \times u_2$ è il vettore nullo.

DEFINIZIONE. Il vettore $u_1 \times u_2$, costruito nell'esempio precedente a partire dai due vettori $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ ed ortogonale sia ad u_1 che ad u_2, si dice *prodotto vettoriale* di u_1 e u_2.

DEFINIZIONE. Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo. Fissato un vettore $w \in V$, il sottoinsieme
$$w^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0\}$$
è il *sottospazio ortogonale* di w. Analogamente, fissato un sottospazio vettoriale $W \subset V$, il sottoinsieme
$$W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0 \text{ per ogni } w \in W\}$$

è il *sottospazio ortogonale* di W.

PROPOSIZIONE 10.2. *Sia $(V,\cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, $w \in V$ e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora, $w^\perp$ e $W^\perp$ sono sottospazi vettoriali di V.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $0_V \in w^\perp$. Inoltre, se $v_1, v_2 \in w^\perp$, $(v_1+v_2)\cdot w = v_1\cdot w + v_2 \cdot w = 0+0 = 0$, quindi $w^\perp$ è chiuso rispetto alla somma. Analogamente, se $v \in w^\perp$ e $r \in \mathbb{R}$, abbiamo $(rv)\cdot w = r(v\cdot w) = r0 = 0$. Questo mostra che $w^\perp$ è un sottospazio di V. La verifica per $W^\perp$ è perfettamente analoga ed è lasciata per esercizio. □

ESEMPIO. Verifichiamo che se $(V,\cdot)$ è uno spazio vettoriale Euclideo e

$$W = \langle w_1, \dots, w_k\rangle \subset V,$$

allora $W^\perp = w_1^\perp \cap \cdots \cap w_k^\perp$. Infatti, l'inclusione $\subseteq$ è ovvia perché ogni vettore di $W^\perp$ è ortogonale, per definizione, ai vettori w_i. Viceversa, sia v ortogonale a $w_1, \dots, w_k$. Se $w \in W$ allora $w = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k$, quindi

$$v\cdot w = v\cdot(a_1w_1+\cdots+a_kw_k) = a_1(v\cdot w_1)+\cdots+a_k(v\cdot w_k) = 0,$$

dunque abbiamo l'inclusione $\supseteq$.

ESEMPIO. Vogliamo determinare il sottospazio ortogonale di

$$W = \{(x,y,z)\in\mathbb{E}^3 \mid \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \} \subseteq \mathbb{E}^3.$$

Osserviamo che

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp \cap \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

È naturale quindi aspettarsi che $W^\perp$ coincida con il sottospazio $S = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Per ora osserviamo che $W = \ker(A)$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dopo un passaggio di eliminazione otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Risolvendo il corrispondente sistema si ottiene $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, quindi

$$W^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3 \mid x+2y+z=0\} = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dopo la proposizione che segue verificheremo che $W^\perp = S$.

Facciamo ora delle considerazioni generali. Prima di tutto osserviamo che se $(V,\cdot)$ è un qualunque spazio vettoriale Euclideo e $W \subset V$ è un suo sottospazio allora

$$\boxed{W \cap W^\perp = \{0\}}$$

Questo segue immediatamente dal fatto che se $w \in W \cap W^\perp$ allora $w\cdot w = 0$ e quindi $w = 0$. Quindi per la formula di Grassmann:

$$\boxed{\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp}$$

È naturale chiedersi a questo punto se $V = W \oplus W^\perp$. La prossima proposizione risponde a questa domanda in un caso particolare.

PROPOSIZIONE 10.3. *Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\ker(A) = \{X \in \mathbb{E}^n \mid AX = 0\} \subset \mathbb{E}^n$. Allora*

$$\ker(A)^\perp = \langle A_1, \dots, A_m\rangle,$$

dove $A_1, \dots, A_m$ *sono le righe di* A*. In particolare,* $\dim\ker(A)^\perp = \mathrm{rg}(A) = n - \dim\ker(A)$ *e* $\mathbb{E}^n = \ker(A) \oplus \ker(A)^\perp$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\dim\ker(A) = n - \mathrm{rg}(A)$. Se indichiamo con A_i l'i-esima riga di A, allora $AX = 0$ se e solo se $A_1 \cdot X = A_2 \cdot X = \cdots = A_m \cdot X = 0$. Quindi

$$\ker(A) = A_1^\perp \cap \cdots \cap A_m^\perp = \langle A_1, \dots, A_m\rangle^\perp.$$

Poiché l'inclusione

$$\langle A_1, \dots, A_m\rangle \subset (\langle A_1, \dots, A_m\rangle^\perp)^\perp = \ker(A)^\perp$$

è ovvia e $\mathrm{rg}(A) = \dim\langle A_1, \dots, A_m\rangle$, per concludere è sufficiente verificare che

$$\dim\ker(A)^\perp \leq \dim\langle A_1, \dots, A_m\rangle = \mathrm{rg}(A).$$

Ma questo segue subito da:

$$\begin{aligned} n = \dim\mathbb{E}^n \geq \dim(\ker(A) + \ker(A)^\perp) = \dim\ker(A) + \dim\ker(A)^\perp = \\ = n - \mathrm{rg}(A) + \dim\ker(A)^\perp. \end{aligned}$$

□

Torniamo all'ultimo esempio. Se $W = \ker(A)$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, le considerazioni generali che abbiamo appena fatto ci dicono che $W^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. D'altronde, nell'esempio avevamo identificato $W^\perp$ con il sottospazio $S = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Per far vedere che le due risposte coincidono, poiché chiaramente $\dim W = \dim S = 2$ è sufficiente mostrare che $W^\perp \subset S$. Ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$, dunque otteniamo l'inclusione voluta.

ESEMPIO. Per la proposizione precedente, se $\pi \subset \mathbb{E}^3$ è il sottospazio dato da

$$\pi = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 2y + z = 0\} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $\pi^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Torniamo al caso generale di uno spazio vettoriale Euclideo $(V, \cdot)$. La seguente proposizione mostra che la decomposizione della proposizione precedente vale in questo contesto più generale, se $W \subset V$ è il sottospazio generato da un vettore non nullo.

PROPOSIZIONE 10.4. *Sia* $(V, \cdot)$ *uno spazio vettoriale Euclideo. Per ogni vettore* $w \in V \setminus \{0\}$ *si ha la decomposizione*

$$\boxed{V = \langle w\rangle \oplus \langle w\rangle^\perp}$$

Più precisamente, per ogni vettore $v \in V$ *si ha* $v = v_w + v'$*, dove* $v' \in \langle w\rangle^\perp$ *e*

$$\boxed{v_w = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w \in \langle w\rangle}$$

Il vettore v_w *è la* componente di v lungo $\langle w\rangle$ *e lo scalare* $\dfrac{v \cdot w}{\|w\|^2}$ *si dice* coefficiente di Fourier *di* v *rispetto a* w.

DIMOSTRAZIONE. Certamente $\langle w\rangle \cap \langle w\rangle^\perp = \{0\}$ per la positività del prodotto scalare. Vorremmo verificare che
$$V = \langle w\rangle + \langle w\rangle^\perp.$$
Consideriamo allora un qualunque vettore $v \in V$, e cerchiamo uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v = \lambda w + v'$, dove $v' \in \langle w\rangle^\perp$. Calcolando il prodotto scalare con w di ambo i membri dell'ultima uguaglianza otteniamo $v \cdot w = \lambda \|w\|^2$, dunque
$$\lambda = (v \cdot w)/\|w\|^2.$$
Per costruzione,
$$v_w := \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w \in \langle w\rangle, \quad v' = v - \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w \in \langle w\rangle^\perp,$$
e la scrittura
$$v = v_w + v'$$
dimostra che vale l'uguaglianza $V = \langle w\rangle + \langle w\rangle^\perp$. □

Consideriamo ora il caso generale di un sottospazio $W \subset V$ di uno spazio vettoriale Euclideo $(V, \cdot)$. Visto quanto accade nel caso $W = \langle w\rangle$, ci aspettiamo che $V = W \oplus W^\perp$. Infatti, già sappiamo che $W \cap W^\perp = \{0\}$, e ci rimane da capire se è vero che $V = W + W^\perp$.

Vorremmo definire una "proiezione ortogonale" $\pi_W \colon V \to W$ analoga all'applicazione $v \mapsto v_w$ del caso $W = \langle w\rangle$, fatta in modo tale che, per ogni $v \in V$, si abbia $v - \pi_W(v) \in W^\perp$. A quel punto basterebbe porre $v = \pi_W(v) + (v - \pi_W(v))$. Il prossimo lemma ci dice che sappiamo costruire π_W se riusciamo a trovare in W una base come nella seguente definizione.

DEFINIZIONE. Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione n. Una base $u_1, \ldots, u_n$ di V è *ortogonale* se $u_i \cdot u_j = 0$ per ogni $i \neq j$.

ESEMPI. Le seguenti sono basi ortogonali:

(1) La base canonica di $\mathbb{E}^n$.
(2) La base $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\}$ di $\mathbb{E}^2$.

LEMMA 10.5. *Sia $W \subseteq (V, \cdot)$ un sottospazio di uno spazio Euclideo. Se W possiede una base $\{u_1, \ldots, u_k\}$* ortogonale*, ovvero tale che $u_i \cdot u_j = 0$ per $i \neq j$, allora l'applicazione $\pi_W \colon V \to W$ data da*
$$\pi_W(v) = \frac{u_1 \cdot v}{\|u_1\|^2} u_1 + \cdots + \frac{u_k \cdot v}{\|u_k\|^2} u_k$$
è lineare, e $v - \pi_W(v) \in W^\perp$ per ogni $v \in V$. In particolare, $V = W \oplus W^\perp$.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che π_W è lineare segue immediatamente dalle proprietà del prodotto scalare. Inoltre, un semplice calcolo mostra che
$$(v - \pi_W(v)) \cdot u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$
quindi $v - \pi_W(v) \in W^\perp$. La scrittura $v = \pi_W(v) + v - \pi_W(v)$ mostra che $V = W + W^\perp$ e quindi $V = W \oplus W^\perp$. □

Il seguente teorema ci spiega come costruire basi ortogonali di qualunque spazio vettoriale Euclideo (ed è immediato verificare che ogni sottospazio di uno spazio vettoriale Euclideo è a sua volta uno spazio vettoriale Euclideo rispetto al prodotto scalare dello spazio ambiente).

TEOREMA 10.6. *[Algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt] Sia* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base dello spazio Euclideo* $(V, \cdot)$. *Siano* $w_1, \ldots, w_n \in V$ *i vettori definiti ricorsivamente ponendo* $w_1 = v_1$ *e*

$$w_k = v_k - \frac{w_1 \cdot v_k}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{w_{k-1} \cdot v_k}{\|w_{k-1}\|^2} w_{k-1}, \quad \textit{per} \quad k = 2, \ldots, n.$$

Allora $\{w_1, \ldots, w_n\}$ *è una base ortogonale di* V *tale che* $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ *per ogni* $1 \leq k \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'enunciato per induzione sulla dimensione $n \geq 1$. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare, quindi procediamo supponendo che $n > 1$ e che i vettori w_k siano stati definiti come nell'enunciato. Per ipotesi induttiva applicata alla base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ dello spazio Euclideo $\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$, sappiamo che i vettori $w_1, \ldots, w_{n-1}$ sono a dua a due ortogonali e che $\langle w_1, \ldots, w_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ per ogni $1 \leq k \leq n-1$. Inoltre, dalla definizione di w_n abbiamo

$$w_n = v_n - \frac{w_1 \cdot v_n}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{w_{n-1} \cdot v_n}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}.$$

Poiché $v_n \notin \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$, abbiamo $w_n \notin \langle w_1, \ldots, w_{n-1} \rangle$ e dunque $\{w_1, \ldots, w_n\}$ è una base di V. Inoltre, si verifica immediatamente che w_n è ortogonale a $w_1, \ldots, w_{n-1}$. $\square$

DEFINIZIONE. Una base ortogonale $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di uno spazio Euclideo $(v, \cdot)$ è detta *ortonormale* se i vettori w_i hanno tutti norma 1, ovvero se $\|w_i\| = 1$ per $i = 1, \ldots, n$.

OSSERVAZIONI.

(1) È facile verificare che se i primi s vettori di una base $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset (V, \cdot)$ sono già ortogonali tra loro, allora i vettori $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ottenuti applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Grami-Schmidt soddisfano $w_i = v_i$ per $i = 1, \ldots, s$.

(2) Data una base ortogonale $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset (V, \cdot)$, è facile costruirne una ortonormale $\{w_1', \ldots, w_n'\}$: basta *normalizzare i vettori* w_i, ovvero porre $w_i' = \frac{w_i}{\|w_i\|}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Infatti, $\|w_i'\| = \|w_i / \|w_i\|\| = \|w_i\| / \|w_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

(3) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio Euclideo e $v_1, \ldots, v_k \in (V, \cdot)$ vettori non nulli e ortogonali tra loro. Allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti. Infatti, se $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$, prendendo il prodotto scalare di ambo i membri con v_j si ottiene $a_j \|v_j\|^2 = 0$. Poiché $\|v_j\| \neq 0$ perché v_j è non nullo, $a_j = 0$ per $j = 1, \ldots, k$.

ESEMPI. Vediamo alcuni esempi di basi ortonormali.

(1) La base canonica di $\mathbb{E}^n$.

(2) Troviamo una base ortogonale di $\mathbb{E}^2$ contenente $w_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ e rendiamola ortonormale. Chiaramente $w_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ è ortogonale a $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ e indipendente da esso. Inoltre, $\|w_1\| = \|w_2\| = \sqrt{5}$, quindi la base ortonormale cercata è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$.

(3) Normalizzando la base ortogonale $\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{E}^3$ si ottiene la base ortonormale $\left\{ w_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, w_2' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, w_3' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

(4) Applichiamo l'algoritmo di ortogonalizzazione alla base

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Otteniamo $w_1 = v_2$,

$$w_2 = v_2 - \frac{w_1 \cdot v_2}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

e

$$w_3 = v_3 - \frac{w_1 \cdot v_3}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{w_2 \cdot v_3}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3/2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 10.7. *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita e $W \subseteq V$ un sottospazio. Allora*

$$\boxed{V = W \oplus W^\perp} \qquad e \qquad \boxed{W = (W^\perp)^\perp}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo W come spazio Euclideo rispetto al prodotto scalare ereditato da $(V, \cdot)$. Applicando il teorema 10.6 ad una base qualunque di W otteniamo una base ortogonale di W e quindi, per il lemma 10.5, $V = W \oplus W^\perp$. Ponendo $n = \dim V$, abbiamo $\dim W^\perp = n - \dim W$ e per lo stesso motivo $\dim(W^\perp)^\perp = n - (n - \dim W) = \dim W$. Poiché è chiaro che $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, dall'uguaglianza delle dimensioni segue $W = (W^\perp)^\perp$. □

Come abbiamo accennato in precedenza, ora siamo in grado di definire le "proiezioni ortogonali" su sottospazi di spazi vettoriali Euclidei. Il lemma 10.5 ci dice che se $W \subset (V, \cdot)$ è un sottospazio avente base ortogonale $\{w_1, \ldots, w_k\}$, l'applicazione $\pi_W \colon V \to W$ definita ponendo, per ogni $v \in V$,

$$\pi_W(v) = \frac{v \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{v \cdot w_k}{\|w_1\|^2} w_k,$$

è lineare e la scrittura

$$v = \pi_W(v) + (v - \pi_W(v))$$

fornisce le componenti di v rispetto alla decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Concludiamo con la sequente proposizione, la quale afferma che, in uno spazio Euclideo, la proiezione ortogonale di un vettore v su un sottospazio non ha mai norma maggiore di quella di v.

PROPOSIZIONE 10.8 (Disuguaglianza di Bessell). *Sia $W \subseteq (V, \cdot)$ un sottospazio di uno spazio Euclideo. Allora*

$$\|\pi_W(v)\| \leq \|v\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se $v \in W$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $v - \pi_W(v) \in W^\perp$ abbiamo $\pi_W(v) \cdot (v - \pi_W(v)) = 0$. Calcolando il prodotto scalare di $v = \pi_W(v) + (v - \pi_W(v))$ con sé stesso otteniamo

$$\|v\|^2 = (\pi_W(v) + (v - \pi_W(v))) \cdot (\pi_W(v) + (v - \pi_W(v))) =$$
$$\|\pi_W(v)\|^2 + \|v - \pi_W(v)\|^2 \geq \|\pi_W(v)\|^2.$$

Passando alle radici quadrate otteniamo la disuguaglianza enunciata. Infine, è chiaro che l'uguaglianza vale se e solo se $\|v - \pi_W(v)\| = 0$, ovvero $v = \pi_W(v)$, che equivale a dire $v \in W$. □

ESEMPIO. Vogliamo calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$ sul sottospazio $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + y - z = 0\} \subset \mathbb{E}^3$. Osserviamo che

$$W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}^{\perp} \quad \text{e} \quad W^{\perp} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle,$$

quindi, posto $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, abbiamo $v = \pi_W(v) + \pi_{W^{\perp}}(v) = \pi_W(v) + \dfrac{v \cdot u}{\|u\|^2} u$, quindi

$$\pi_W(v) = v - \frac{v \cdot u}{\|u\|^2} u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO. Vogliamo calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4$ sul sottospazio $W \subset \mathbb{E}^4$ definito dalla equazioni $x + y + z - t = x - y + z = 0$. Determiniamo una base ortogonale di W. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ costruita con i coefficienti delle equazioni definisce W come insieme delle soluzioni del sistema $AX = 0$. Poiché $\mathrm{rg}(A) = 2$ sappiamo che $\dim W = 2$ e si verifica facilmente che $\{v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (1, 1, 0, 2)\} \subset W$ è una base. Ora poniamo $w_1 = v_1$ e

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\pi_W(v) = \frac{v \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{\|w_2\|^2} w_2 = 0$$

perché $v \cdot w_1 = v \cdot w_2 = 0$. Risulta dunque $v = \pi_{W^{\perp}}(v) \in W^{\perp}$ e $\pi_W(v) = 0$. Alternativamente, le equazioni che definiscono W ci dànno $W^{\perp} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e vediamo subito che

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W^{\perp}.$$

ESERCIZIO. Sia $U \subset \mathbb{E}^4$ il sottospazio definito dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}.$$

(1) Determinare una base ortogonale di $U^{\perp}$.
(2) Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare le componenti di v rispetto alla decomposizione $\mathbb{E}^4 = U \oplus U^{\perp}$.

SVOLGIMENTO. (1) Dalle equazioni che definiscono U deduciamo che

$$U^{\perp} = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Ortogonalizzando questa base troviamo: $w_1 = u_1$,

$$w_2 = u_2 - \frac{w_1 \cdot u_2}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = u_3 - \frac{w_1 \cdot u_3}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{w_2 \cdot u_3}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Possiamo calcolare $\pi_{U^\perp}(v)$ usando i coefficienti di Fourier di v rispetto alla base ortogonale calcolata nel punto precedente:

$$\pi_{U^\perp}(v) = \frac{w_1 \cdot v}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{w_2 \cdot v}{\|w_2\|^2} w_2 + \frac{w_3 \cdot v}{\|w_3\|^2} w_3 = \frac{3}{4} w_1 + \frac{3}{4} w_2 - \frac{1}{5} w_3 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Inoltre abbiamo $v = \pi_U(v) + \pi_{U^\perp}(v)$, quindi

$$\pi_U(v) = v - \pi_{U^\perp}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, manipolando le equazioni di U otteniamo $x = -2y$, $t = -y$ e $z = 2y$, quindi $U = \langle u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Dunque

$$\pi_U(v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}, \quad \pi_{U^\perp}(v) = v - \pi_U(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizi

(1) Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ tale che i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{E}^3$ siano ortogonali.

(2) In $\mathbb{E}^3$ calcolare la proiezione ortogonale di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ su $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) Posto $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{E}^3$, determinare una base di $W^\perp$.

(4) Determinare se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che (1) i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ h \end{pmatrix}$ di $\mathbb{E}^4$ formano un angolo di 45 gradi.

(5) Determinare se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che (2) i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 3 \\ -h \end{pmatrix}$ di $\mathbb{E}^4$ formano un angolo di 60 gradi.

(6) Sia $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3 \mid x = 2y = x - z \} \subseteq \mathbb{E}^3$. Determinare basi di W e $W^\perp$.

(7) Sia $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4 \mid x - y = z \} \subseteq \mathbb{E}^4$. Determinare basi di W e $W^\perp$.

(8) Sia $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4 \mid x + z = 2y - t = 0 \} \subseteq \mathbb{E}^4$. Determinare basi di W e $W^\perp$.

(9) Calcolare la decomposizione $v = v_w + v'$, dove $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$. Calcolare anche l'angolo θ tra v e w.

(10) Sia $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{E}^3$. Determinare $W^\perp$ e $S = \{ w \in W^\perp \mid \|w\| = 1 \}$.

(11) Sia $W : \begin{cases} x - y = 3x \\ 3x = -x + z \end{cases} \subset \mathbb{E}^3$. Determinare una base di $W^\perp$.

(12) Sia $L : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0. \end{cases} \subset \mathbb{E}^3$. Determinare una base di $L^\perp$.

(13) Sia $U : \begin{cases} x + z = 0 \\ x - t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \subset \mathbb{E}^4$. Determinare una base di $U^\perp$.

(14) Sia $W : \begin{cases} x + z - u = 0 \\ y + z + u = 0 \\ x + 2y + 3z + u = 0 \\ x - v = 0 \end{cases} \subset \mathbb{E}^5$. Determinare una base di $W^\perp$.

(15) Data la base $\mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ di $\mathbb{E}^3$, determinare una base ortonormale $\mathcal{B}'_1$ di $\mathbb{E}^3$ applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando i vettori.

(16) Data la base $\mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ di $\mathbb{E}^3$, determinare una base ortonormale $\mathcal{B}'_2$ di $\mathbb{E}^3$ applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando i vettori.

(17) Data la base $\mathcal{B}_3 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ di $\mathbb{E}^3$, determinare una base ortonormale $\mathcal{B}'_3$ di $\mathbb{E}^3$ applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando i vettori.

(18) Si consideri, nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, il sottospazio U di equazioni:

$$\begin{cases} x+z-t=0 \\ 2y+z+t=0 \\ 2x-y+t=0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base ortogonale del sottospazio ortogonale $U^\perp \subset \mathbb{E}^4$;

(b) sia $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = w_1 + w_2$ la decomposizione di w corrispondente alla decomposizione $\mathbb{E}^4 = U \oplus U^\perp$; determinare le coordinate di $w_2 \in U^\perp$ nella base trovata nel punto (a);

(c) determinare il vettore $w_1 \in U$.

(19) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ dotato del prodotto scalare standard. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y+z+w=0 \\ x+z+w=0 \end{cases} .$$

(a) Determinare una base B del sottospazio ortogonale $U^\perp$;

(b) applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt a B per trovare una base ortogonale di $U^\perp$;

(c) determinare due vettori $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^\perp$ tali che $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(20) Sia $\mathbb{E}^4$ lo spazio Euclideo standard di dimensione 4, e sia $H \subset \mathbb{E}^4$ il sottospazio vettoriale definito dall'equazione $2x - y + 3z + w = 0$.

(a) Determinare una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{E}^4$, ortogonale rispetto al prodotto scalare standard, tale che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale del sottospazio H;

(b) determinare vettori $w_1 \in H$, $w_2 \in H^\perp$, $u_1 \in \langle v_1, v_2\rangle$ e $u_2 \in \langle v_3, v_4\rangle$ tali che $w_1 + w_2 = u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(c) sia $f\colon H \to H$ l'unica applicazione lineare tale che $f(v_1) = v_1 + v_3$, $f(v_2) = v_2 + v_3$ e $f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3$. Determinare una base di H fatta di autovettori per f.

Soluzioni degli esercizi

(1) $h=4$. (2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. (3) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. (4) Non esistono valori di h. (5) $h=0$.

(6) $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. (7) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\}$ e $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(8) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

(9) $v = \frac{1}{2}w + (v - \frac{1}{2}w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$, $\theta = \arccos(1/2\sqrt{7})$.

(10) $W^\perp = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $S = \{\pm \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\}$. (11) $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(12) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. (13) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. (14) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

(15) $\mathcal{B}'_1 = \{\begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\}$. (16) $\mathcal{B}'_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{22}/11 \\ 3\sqrt{22}/22 \\ 3\sqrt{22}/22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\sqrt{11}/11 \\ -\sqrt{11}/11 \\ -\sqrt{11}/11 \end{pmatrix}\}$. (17) $\mathcal{B}'_3 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\}$.

(18) (a) Dai coefficienti delle equazioni di U si ricava subito che U è il sottospazio ortogonale al sottospazio generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che sono linearmente indipendenti. Quindi v_1, v_2 e v_3 sono una base di $U^\perp$, e possiamo applicare l'algoritmo di Gram–Schmidt per determinare una base ortogonale di $U^\perp$:

$$v'_1 := v_1, \quad v'_2 := v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v'_3 := v_3 - \frac{v_3 \cdot v'_2}{v'_2 \cdot v'_2} v'_2 - \frac{v_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -2/3 \\ -1/6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

(b) Sappiamo che $w = w_1 + w_2 = au + b_1 v'_1 + b_2 v'_2 + b_3 v'_3$ per qualche $a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, dove $U = \langle u \rangle$. Poiché u è ortogonale a v'_i per ogni $i = 1,2,3$, abbiamo

$$w \cdot v'_i = b_i v'_i \cdot v'_i, \quad i = 1,2,3,$$

da cui facendo i conti si ricavano le coordinate cercate $b_1 = 2/3$, $b_2 = 1/6$ e $b_3 = 3/11$. (c) Risolvendo il sistema dato dalle equazioni di U si ricava che U è generato dal vettore $u = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, quindi

$$w_1 = \frac{w \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{1}{33} u = \begin{pmatrix} -4/33 \\ -5/33 \\ 7/33 \\ 1/11 \end{pmatrix}.$$

(19) (a) Dalle equazioni di U si ricava immediatamente che $U^\perp = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Si verifica facilmente che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, quindi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è la base cercata. (b) Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt alla base B si ottiene

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = \begin{pmatrix} 19/17 \\ -10/17 \\ 9/17 \\ 11/17 \end{pmatrix}.$$

(c) Risolvendo il sistema lineare che definisce U si trova la soluzione $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, quindi $U = \langle n \rangle$. I vettori u_1 e u_2 sono le componenti di u rispetto alla decomposizione ortogonale $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$, dunque

$$u_1 = u - \frac{u \cdot n}{n \cdot n} n = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ -5/3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = u - u_1 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 20/3 \\ -1 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

(20) (a) Si vede subito che $H = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle^\perp$, quindi possiamo costruire la base cercata ponendo $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt alla base $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ di H. Otteniamo così i seguenti vettori a due a due ortogonali:

$$\hat{v}_1 = w_1, \quad \hat{v}_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot \hat{v}_1}{\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_1} \hat{v}_1 = \begin{pmatrix} -6/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_3 = w_3 - \frac{w_3 \cdot \hat{v}_1}{\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_1} \hat{v}_1 - \frac{w_3 \cdot \hat{v}_2}{\hat{v}_2 \cdot \hat{v}_2} \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -3/14 \\ 9/14 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Per semplificare i calcoli successivi, definiamo i vettori v_1, v_2 e v_3 riscalando opportunamente i tre vettori $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ e $\hat{v}_3$:

$$v_1 = \hat{v}_1, \quad v_2 = 5\hat{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{14}{3} \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

(b) Posto $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$w_2 = \frac{w \cdot v_4}{v_4 \cdot v_4} v_4 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad w_1 = w - w_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix},$$

e

$$u_1 = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 18/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = w - u_1 = \begin{pmatrix} 8/7 \\ -4/7 \\ 12/7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è data da $M_{\mathcal{BB}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, da cui si ricava il polinomio caratteristico $p_f(t) = (1-t)(t^2 - 2t - 1)$, avente radici 1 e $1 \pm \sqrt{2}$. Calcolando i corrispondenti autospazi usando le coordinate determinate da $\mathcal{B}$ si trova:

$$V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad V_{1+\sqrt{2}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle, \quad V_{1-\sqrt{2}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle.$$

Quindi la base cercata di H è:

$$\{v_1 - v_2, v_1 + v_2 + \sqrt{2} v_3, v_1 + v_2 - \sqrt{2} v_3\}.$$

CAPITOLO 11

Trasformazioni autoaggiunte ed ortogonali di spazi Euclidei

1. Definizioni e prime proprietà

Cominciamo questa sezione con un'osservazione che ci sarà molto utile in seguito. Sia $(V, \cdot)$ uno spazio Euclideo e $B = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ una base ortonormale. Allora l'isomorfismo $x_B \colon V \to \mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nelle sue coordinate rispetto alla base B trasforma il prodotto scalare su V nel prodotto scalare standard, nel senso che

$$x_B(v) \cdot x_B(w) = v \cdot w, \quad \text{per ogni } v, w \in V.$$

Infatti, se $v = \sum_h a_h u_h$ e $w = \sum_k b_k u_k$, e quindi $v \cdot w = \sum_i a_i b_i$, che è il prodotto scalare standard tra $x_B(v)$ e $x_B(w)$. In altre parole, l'osservazione dice che x_B è un isomorfismo di $(V, \cdot)$, come spazio Euclideo, con lo spazio Euclideo standard $\mathbb{E}^n$.

Gli spazi Euclidei ammettono due tipi di endomorfismi notevoli: le trasformazioni autoaggiunte e le trasformazioni ortogonali, definite come segue.

DEFINIZIONE. Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo. Un endomorfismo $f \colon V \to V$ è:

- una *trasformazione autoaggiunta* se $f(v) \cdot w = v \cdot f(w)$ per ogni $v, w \in V$;
- una *trasformazione ortogonale* se $f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$ per ogni $v, w \in V$.

ESEMPI. Sia $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\varphi_M \colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ l'endomorfismo dato da $\varphi_M(X) = MX$.

(1) Se ${}^tM = M$, ovvero M è *simmetrica*, allora φ_M è una trasformazione autoaggiunta di $\mathbb{E}^n$:
$$(MX) \cdot Y = {}^t(MX)Y = {}^tX(MY) = {}^tX \cdot (MY);$$

(2) Se ${}^tMM = I$, ovvero M è *ortogonale*, allora φ_M è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{E}^n$:
$$(MX) \cdot (MY) = {}^t(MX)(MY) = {}^tX({}^tMM)Y = {}^tXY = X \cdot Y.$$

Sia $GL(n;\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili e $O(n)$ l'insieme delle matrici ortogonali. Osserviamo le inclusioni

$$O(n) \subseteq GL(n;\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n,n}.$$

Come è facile verificare, gli insiemi di matrici $GL(n;\mathbb{R})$ ed $O(n)$ sono in realtà gruppi rispetto alla moltiplicazione righe per colonne e si chiamano rispettivametne il *gruppo lineare* e il *gruppo ortogonale*. Dalla definizione segue subito che $O(n)$ è l'insieme delle matrici reali le cui colonne formano basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$. In particolare, $\pm I \in O(n)$.

ESEMPI. Le seguenti sono matrici ortogonali:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \in O(2); \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in O(3).$$

PROPOSIZIONE 11.1. *Sia* $(V, \cdot)$ *uno spazio Euclideo e* $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ *una sua base ortonormale. Sia* $f\colon V \to V$ *un endomorfismo di* V *ed* $M = M_{BB}(f)$*. Allora*

(1) f *è una trasformazione autoaggiunta se e solo se e solo se* M *è simmetrica;*
(2) f *è una trasformazione ortogonale se e solo se* M *è ortogonale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X = x_B(v)$ e $Y = x_B(w)$, la condizione $f(v)\cdot w = v\cdot f(w)$ equivale a $(MX)\cdot Y = X\cdot(MY)$ e la condizione $f(v)\cdot f(w) = v\cdot w$ a $(MX)\cdot(MY) = X\cdot Y$. Quindi se M è simmetrica f è autoaggiunta e se M è ortogonale f è una trasformazione ortogonale. Viceversa, se f è autoaggiunta allora $(MX)\cdot Y = X\cdot(MY)$ per ogni $X, Y \in \mathbb{E}^n$. In particolare, se $X = E_j$ e $Y = E_i$ abbiamo

$$(ME_j)\cdot E_i = M^j \cdot E_i = m_{ij} \quad \text{e} \quad E_j\cdot(ME_i) = E_j\cdot M^i = m_{ji},$$

quindi M è simmetrica. Se invece f è una trasformazione ortogonale allora $(MX)\cdot(MY) = X\cdot Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{E}^n$, quindi

$$M^i \cdot M^j = (ME_i)\cdot(ME_j) = E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$$

per ogni i, j. Questo mostra che le colonne di M formano una base ortonormale e dunque M è una matrice ortogonale. $\square$

2. Diagonalizzabilità delle trasformazioni autoaggiunte

Una notevole proprietà di tutte le trasformazioni autoaggiunte degli spazi Euclidei è il fatto che sono diagonalizzabili. Cominceremo col verificare che ogni matrice simmetrica ammette almeno un autovalore reale. Per fare ciò useremo un prodotto su $\mathbb{C}^n$ analogo al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ (ma non positivo): dati $Z = (z_i)$ e $W = (w_i)$ vettori di $\mathbb{C}^n$, poniamo

$$Z\cdot W := {}^tZW = \sum_i z_i w_i.$$

Indichiamo con $\overline{Z}$ il vettore ottenuto coniugando tutte le componenti di Z. Utilizzeremo le seguenti proprietà, tutte di facile verifica:

- $Z\cdot W = \sum_i z_i w_i = \sum_i w_i z_i = W\cdot Z$;
- $\overline{Z\cdot W} = \overline{\sum_i z_i w_i} = \sum_i \overline{z_i}\,\overline{w_i} = \overline{Z}\cdot\overline{W}$;
- $Z\cdot\overline{Z} = \sum_i |z_i|^2 \geq 0$ e vale l'ugualianza se e solo se $Z = 0$;

Sia ora $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica. Allora

- $(AZ)\cdot W = {}^t(AZ)W = {}^tZ(AW) = Z\cdot(AW)$;
- $\overline{AZ} = \overline{(\sum_k a_{ik}z_k)} = (\sum_k a_{ik}\overline{z_k}) = A\overline{Z}$.

PROPOSIZIONE 11.2. *Se* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *è una matrice simmetrica allora il suo polinomio caratteristico ammette almeno una radice reale.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo A come matrice a coefficienti complessi e osserviamo che il suo polinomio caratteristico è lo stesso di quello di A pensata a coefficienti reali, perché la formula $p_A(t) = \det(A - tI) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ non si accorge del nostro punto di vista. L'appplicazione lineare $\varphi_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ data da $\varphi_A(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{C}^n$ ammette almeno un autovettore perché $p_A(t)$, visto come polinomio in $\mathbb{C}[t]$, ammette almeno una radice $\lambda \in \mathbb{C}$ per il teorema fondamentale dell'algebra. Dunque esiste $Z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tale che $AZ = \lambda Z$.

Prendendo il prodotto scalare standard di ambo i membri con $\overline{Z}$ otteniamo

$$(AZ)\cdot\overline{Z} = \lambda Z\cdot\overline{Z}.$$

D'altronde,

$$(AZ)\cdot\overline{Z} = Z\cdot A\overline{Z} = Z\cdot\overline{AZ} = \overline{AZ}\cdot Z = \overline{(AZ)\cdot\overline{Z}}.$$

Quindi $(AZ)\cdot\overline{Z}\in\mathbb{R}$. Ma $Z\cdot\overline{Z}\in\mathbb{R}$ e $Z\cdot\overline{Z}>0$, perciò $\lambda\in\mathbb{R}$, che era ciò che volevamo. $\square$

TEOREMA 11.3 (spettrale). *Ogni trasformazione autoaggiunta di uno spazio Euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale di autovettori.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente è sufficiente far vedere che esiste una base ortogonale di autovettori. Sia dunque f una trasformazione autoaggiunta dello spazio Euclideo di dimensione finita $(V,\cdot)$, e sia $B\subset V$ una base ortonormale. Sappiamo da quanto visto che $M = M_{BB}(f)$ è simmetrica e quindi $p_f(t) = p_M(t)$ ha una radice reale λ. Quindi f ammette un λ-autovettore $v_1\in V$. Ragionando per induzione sulla dimensione di V, se $\dim V = 1$ non c'è niente da dimostrare, quindi possiamo supporre che $\dim V > 1$ e che l'enunciato valga per gli spazi Euclidei di dimensione minore di quella di V. Notiamo che se $w\cdot v_1 = 0$ allora $f(w)\cdot v_1 = w\cdot f(v_1) = \lambda w\cdot v_1 = 0$. Dunque f manda in sé il sottospazio $W = v_1^\perp$ e può essere vista come trasformazione autoaggiunta di esso. Per induzione sulla dimensione, f ristretta a W ha una base ortogonale di autovettori. Aggiungendo a questa il vettore v_1 si ottiene la base cercata. $\square$

COROLLARIO 11.4. *Sia $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale $M\in O(n)$ tale che ${}^tMAM$ è diagonale.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo verificato che l'applicazione lineare φ_A associata ad A è una trasformazione autoaggiunta di $\mathbb{E}^n$. Quindi per il teorema spettrale esiste una base B ortonormale di autovettori per φ_A. La matrice

$$M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^n})M_{EE}(\varphi_A)M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^n}) = M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^n})AM_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^n}) = M_{BB}(\varphi_A)$$

è diagonale. Poiché le colonne della matrice $M = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^n})$ coincidono con i vettori della base B che è ortonormale, $M\in O(n)$ e $M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^n}) = M^{-1} = {}^tM$. $\square$

ESERCIZIO. Sia $\varphi_A\colon\ \mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ la trasformazione autoaggiunta associata alla matrice $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di autovettori per φ_A e una matrice $M\in O(3)$ tale che ${}^tMAM$ è diagonale.

SVOLGIMENTO.

$$p_{\varphi_A}(t) = \det\begin{pmatrix}1-t&0&1\\0&1-t&0\\1&0&1-t\end{pmatrix} = (1-t)(1+t^2-2t-1) = t(1-t)(t-2).$$

Chiaramente $V_0 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle$, $V_1 = \langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$, $V_2 = \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$, quindi $\{\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\0\\-1/\sqrt2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\0\\1/\sqrt2\end{pmatrix}\}$ è la base ortonormale cercata. Posto $M = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\in O(3)$, abbiamo ${}^tMAM = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. $\square$

ESERCIZIO. Dimostrare che se $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ sono due autovalori distinti di una trasformazione autoaggiunta f, allora ogni λ-autovettore di f è ortogonale ad ogni μ-autovettore di f.

SVOLGIMENTO. Se v è un λ-autovettore e w un μ-autovettore di f, abbiamo

$$\lambda(v \cdot w) = f(v) \cdot w = v \cdot f(w) = \mu(v \cdot w),$$

quindi $(\lambda - \mu)v \cdot w = 0$, e poiché $\lambda \neq \mu$ concludiamo $v \cdot w = 0$. □

Riassumendo quanto visto finora, abbiamo la seguente *procedura per la diagonalizzazione di una matrice simmetrica* A:

- calcolare il polinomio caratteristico $p_A(t)$ e le sue radici;
- determinare gli autospazi dell'applicazione lineare φ_A associata ad A;
- determinare basi di ciascun autospazio e applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt per renderle ortogonali. Quindi rendere ciascuna base ortonormale;
- una base ortonormale di autovettori per φ_A è data dall'unione delle basi ortonormali dei vari autospazi;
- una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ è diagonale ha per colonne i vettori della base ortonormale di autovettori per A.

ESERCIZIO. Trovare una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ è diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

SVOLGIMENTO. Calcolando si trova $p_A(t) = (t-1)^2(t^2 - 10)$. L'1-autospazio V_1 risulta

$$\ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Applicando Gram-Schmidt se ne trova la base ortogonale: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. D'altra parte, abbiamo

$$V_{\sqrt{10}} = \ker \begin{pmatrix} -1-\sqrt{10} & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\sqrt{10} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-\sqrt{10} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1+\sqrt{10} \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e

$$V_{-\sqrt{10}} = \ker \begin{pmatrix} -1+\sqrt{10} & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{10} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1+\sqrt{10} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1-\sqrt{10} \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Normalizzando i vettori trovati si ottiene la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{10}}{n_1} & \frac{-1-\sqrt{10}}{n_2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/n_1 & 2/n_2 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/n_1 & 1/n_2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/n_1 & 2/n_2 \end{pmatrix},$$

dove $n_1 = \sqrt{20 - 2\sqrt{10}}$ ed $n_2 = \sqrt{20 + 2\sqrt{10}}$. □

ESERCIZIO. Trovare una base ortogonale di autovettori dell'endomorfismo $\Phi_\alpha \colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ dato da

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = (2x + \alpha y, \alpha x - y, 2z)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO. La matrice di Φ_α rispetto alla base canonica è

$$A = M_{EE}(\Phi_\alpha) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Quindi $p_A(t) = \det(A - tI) = (2-t)(t^2 - t - \alpha^2 - 2)$. Gli autovalori λ_i, $i = 1,2,3$, sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{4\alpha^2+9}}{2}$. Sono sempre distinti tranne per $\alpha = 0$, nel qual caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ha moltiplicità algebrica 2 e $\lambda_3 = -1$ è semplice. D'altronde, come base ortogonale di autovettori per Φ_0 si può prendere la base canonica perché A è diagonale per $\alpha = 0$. Se $\alpha \neq 0$ gli autospazi sono:

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \ker \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle,$$

$$V_{\lambda_{2,3}} = \ker(A - \lambda_{2,3}I) = \left(\begin{smallmatrix} 2-\lambda_{2,3} & \alpha & 0 \\ \alpha & -1-\lambda_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_{2,3} \end{smallmatrix}\right) = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \lambda_{2,3}-2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

□

3. Trasformazioni ortogonali del piano Euclideo

PROPOSIZIONE 11.5. *Sia $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ una trasformazione ortogonale, $E \subset \mathbb{E}^2$ la base canonica ed $A = M_{EE}(f)$. Allora esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che A coincide con una delle seguenti matrici:*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso indicheremo f con f_θ e la chiameremo rotazione*, nel secondo caso indicheremo f con g_θ e la chiameremo* riflessione.

DIMOSTRAZIONE. La matrice $A = M_{EE}(f)$ è ortogonale: ${}^tAA = I$. Se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, questo equivale a dire che $\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{E}^2$, ovvero

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Per la prima e terza equazione esistono $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ tali che $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $b = \sin\varphi$ e $d = \cos\varphi$, e per la seconda equazione (e la formula di addizione del seno),

$$0 = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta + \varphi),$$

che, poiché $\theta + \varphi \in [0, 4\pi)$, equivale a $\theta + \varphi \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$.

Se $\theta + \varphi \in \{0, 2\pi\}$ allora $\theta = \varphi = 0$ oppure $\varphi = 2\pi - \theta$, ma in entrambi i casi $\cos\varphi = \cos\theta$ e $\sin\varphi = -\sin\theta$. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Se $\theta + \varphi \in \{\pi, 3\pi\}$ allora $\varphi = \pi - \theta$ oppure $\varphi = 3\pi - \theta$, e in entrambi i casi $\cos\varphi = -\cos\theta$ e $\sin\varphi = \sin\theta$, quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\square$

Osserviamo che *le rotazioni di* $\mathbb{E}^2$ *hanno determinante* $+1$*, mentre le riflessioni di* $\mathbb{E}^2$ *hanno determinante* -1.

Vediamo esplicitamente come agiscono le rotazioni sui vettori di $\mathbb{E}^2$. Introduciamo coordinate polari (ρ, α). Allora, per le formule di addizione del seno e del coseno,

$$f_\theta \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(\cos\theta\sin\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ \rho(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$= \rho \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}.$$

Dunque f_θ ruota rigidamente il piano $\mathbb{E}^2$ in senso antiorario di un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che f_θ non ha rette invarianti e quindi non ha autovettori se $\theta \neq 0, \pi$. Inoltre $f_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$ e $f_\pi = -\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$.

Sia ora

$$A_\theta = M_{EE}(g_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

la matrice di una riflessione. Poiché $\det(A_\theta) = -1$ e $tr(A_\theta) = 0$, gli autovalori di g_θ sono -1 e 1. Quindi l'1-autospazio di g_θ è l'asse delle x se $\theta = 0$, e la retta $\ker(A_\theta - I) = \langle \left(\begin{smallmatrix} \sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{smallmatrix} \right) \rangle$ se $\theta \neq 0$. Invece il (-1)-autospazio è l'asse delle y se $\theta = 0$ e la retta $\ker(A_\theta + I) = \langle \left(\begin{smallmatrix} -\sin\theta \\ 1+\cos\theta \end{smallmatrix} \right) \rangle$ se $\theta \neq 0$. Osserviamo che i due autospazi sono sempre ortogonali tra loro. Infine, poiché

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

abbiamo $g_\theta = f_\theta \circ g_0$, dove g_0 è una riflessione rispetto all'asse delle x. Indichiamo con $r_{\theta/2}$ la retta per l'origine che forma un angolo di $\theta/2$ (misurato in senso antiorario) con l'asse delle x. Poiché g_θ è ottenuta prima riflettendo rispetto all'asse delle x e poi ruotando in senso antiorario di un angolo θ, la retta $r_{\theta/2}$ è fissata da g_θ e quindi coincide con l'1-autospazio. Da questo possiamo dedurre che g_θ agisce riflettendo il piano Euclideo ortogonalmente rispetto alla retta $r_{\theta/2}$.

Infine notiamo che, poiché $g_0^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$, da $g_\theta = f_\theta \circ g_0$ segue, componendo ambo i membri con g_0, che $f_\theta = g_\theta \circ g_0$. Quindi concludiamo che ogni rotazione non banale di $\mathbb{E}^2$ è composizione di due riflessioni.

Possiamo riassumere quanto visto dicendo che *ogni trasformazione ortogonale di* $\mathbb{E}^2$ *ha determinante* 1 *o* -1*. Nel primo caso è una rotazione ed è o l'identità oppure composizione di due riflessioni, nel secondo caso è una riflessione*.

ESERCIZIO. Sia $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^2$ la trasformazione ortogonale che, rispetto alla base canonica, ha matrice $M_{EE}(f) = \left(\begin{smallmatrix} -\sqrt{3}/2 & a \\ 1/2 & b \end{smallmatrix} \right)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

(1) f sia una rotazione;
(2) f sia una riflessione.

Nel primo caso determinare l'angolo di rotazione, nel secondo la retta fissata.

SVOLGIMENTO. (1) Se f è una rotazione di angolo θ allora si deve avere $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ e $\sin\theta = 1/2$, quindi $\theta = 5\pi/6$ e $a = -\sin\theta = -1/2$, $b = \cos\theta = -\sqrt{3}/2$. (2) Se f è una riflessione con retta fissata $r_{\theta/2}$, allora come prima $\theta = 2\pi/3$, ma $a = \sin\theta = 1/2$ e $b = -\cos\theta = \sqrt{3}/2$. La retta $r_{\theta/2}$ è

$$r_{\theta/2} = \ker\begin{pmatrix}\cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1\end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix}\sin\theta \\ 1-\cos\theta\end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix}1/2 \\ 1+\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\rangle.$$

□

ESERCIZIO. Mostrare che se g_θ e g_φ sono riflessioni di $\mathbb{E}^2$ che fissano rispettivamente le rette $r_{\theta/2}$ ed $r_{\varphi/2}$, allora $g_\theta \circ g_\varphi = f_{\theta-\varphi}$.

SVOLGIMENTO. Sappiamo che $f_\theta = g_\theta \circ g_0$ e $f_\varphi = g_\varphi \circ g_0$. Quindi, poiché ogni riflessione coincide con la propria inversa, $f_{-\varphi} = f_\varphi^{-1} = g_0 \circ g_\varphi$ e

$$f_{\theta-\varphi} = f_\theta \circ f_{-\varphi} = g_\theta \circ g_0 \circ g_0 \circ g_\varphi = g_\theta \circ g_\varphi.$$

□

ESERCIZIO. Siano r ed s le rette di $\mathbb{E}^2$ di equazioni, rispettivamente, $x + 2y = 0$ e $x - y = 0$. Calcolare le matrici, rispetto alla base canonica, di:

(1) una rotazione f_θ, con $0 \le \theta < \pi$ tale che $f_\theta(r) = s$;
(2) la riflessione con retta fissata r;
(3) la riflessione con retta fissata s;

SVOLGIMENTO. (1) Abbiamo $r = \langle\left(\begin{smallmatrix}2 \\ -1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ ed $s = \langle\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Quindi l'angolo $\theta \in [0,\pi)$ tra r ed s è l'angolo tra i vettori $v_r = \left(\begin{smallmatrix}2 \\ -1\end{smallmatrix}\right)$ e $v_s = \left(\begin{smallmatrix}1 \\ 1\end{smallmatrix}\right)$. Dunque

$$1 = v_r \cdot v_s = \|v_r\|\|v_s\|\cos\theta = \sqrt{5}\sqrt{2}\cos\theta$$

e $\cos\theta = 1/\sqrt{10}$, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 3/\sqrt{10}$. Concludiamo che

$$M_{EE}(f_\theta) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{10} & -3\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10}\end{pmatrix}.$$

(2) Possiamo normalizzare il generatore $\left(\begin{smallmatrix}2 \\ -1\end{smallmatrix}\right)$ di r e completarlo ad una base ortonormale $B = \{\left(\begin{smallmatrix}2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5}\end{smallmatrix}\right)\}$. Rispetto alla base B la riflessione g_r con retta fissata r ha matrice $M_{BB}(g_r) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, quindi $M_{EE}(g_r) = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2})M_{BB}(g_r)M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2})$ è la matrice

$$\begin{pmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5\end{pmatrix}.$$

(3) come nel punto (2), $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right)\}$ è una base ortogonale e $M_{BB}(g_s) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, quindi $M_{EE}(g_s) = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2})M_{BB}(g_s)M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2})$ è data da

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

□

4. Trasformazioni ortogonali di $\mathbb{E}^3$

Vogliamo analizzare le trasformazioni ortogonali dello spazio Euclideo $\mathbb{E}^3$ procedendo come nel caso del piano Euclideo $\mathbb{E}^2$. Sia dunque $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ una trasformazione ortogonale. Il polinomio caratteristico $p_f(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha grado 3, quindi ha una radice $\lambda \in \mathbb{R}$ che è un autovalore di f. Inoltre, si deve avere $\lambda = \pm 1$. Infatti, sia $v \in \mathbb{E}^3$ un λ-autovettore per f. Poiché f è ortogonale abbiamo

$$v \cdot v = f(v) \cdot f(v) = (\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda^2 v \cdot v,$$

dunque $\lambda = \pm 1$. Sia ora $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{E}^3$ con $u_1 = v/\|v\|$. La matrice $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ è ortogonale, ovvero

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tBB \end{pmatrix} = I,$$

da cui deduciamo che $\det(A)^2 = 1$ e B è una matrice ortogonale. Inoltre, $p_f(t) = p_A(t) = (\lambda - t)p_B(t)$. Osserviamo che B è la matrice della restrizione di f a piano $u_1^\perp = \langle u_2, u_3 \rangle$ rispetto alla base $\{u_2, u_3\}$.

<u>Primo caso: B è una matrice di rotazione</u>. Se $\lambda = 1$ allora $\det A = \det B = 1$ ed f è una rotazione intorno all'asse $< u_1 >$. Se $\lambda = -1$ abbiamo $\det A = -\det B = -1$ e possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

quindi f è la composizione di una 'riflessione' rispetto al piano $u_1^\perp$ e di una rotazione intorno alla retta $\langle u_1 \rangle$, che commutano tra loro.

<u>Secondo caso: B è una matrice di riflessione</u>. Allora f ha un 1-autovettore ed un (-1)-autovettore in $u_1^\perp$, e possiamo scegliere una base ortonormale u_2', u_3' di $u_1^\perp$ in modo che rispetto alla base $B' = \{u_1, u_2', u_3'\}$ f abbia matrice

$$A' = M_{B'B'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda = 1$ allora $\det A = -1$ ed f è una riflessione rispetto al piano $\langle u_1, u_2' \rangle$, mentre se $\lambda = -1$ allora $\det A = 1$. In quest'ultimo caso f fissa la retta $\langle u_2' \rangle$ ed agisce come una rotazione su $\langle u_2' \rangle^\perp = \langle u_1, u_3' \rangle$, ovvero è una rotazione di angolo π intorno alla retta $\langle u_2' \rangle$.

<u>Riassumendo</u>: se $\det(A) = 1$ allora f è una rotazione intorno ad una retta fissata, mentre se $\det(A) = -1$ è la composizione di una riflessione rispetto ad un piano fissato con una rotazione rispetto ad una retta ad esso ortogonale.

ESEMPIO. Sia f la trasformazione ortogonale di $\mathbb{E}^3$ con matrice associata, rispetto alla base canonica, uguale ad $A = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\det(A) = 1$, f deve essere una rotazione. Una soluzione dell'equazione $(A - I)X = 0$ è data da $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e il vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\langle v \rangle^{\perp}$. Inoltre, $f(w) = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -1 \\ 3/5 \end{pmatrix}$. Osserviamo che $f(w) \cdot v = 0$, come deve essere perché, essendo f una trasformazione ortogonale, $f(w) \cdot v = f(w) \cdot f(v) = w \cdot v$. Inoltre, $w \cdot f(w) = -2/5$. Poiché $\|w\| = \|f(w)\| = \sqrt{2}$, se θ è l'angolo convesso tra w e $f(w)$ abbiamo

$$w \cdot f(w) = \|w\| \|f(w)\| \cos(\theta) = 2 \cos \theta = -2/5,$$

quindi f è una rotazione intorno alla retta $\langle v \rangle$ di angolo $\theta = \arccos(-1/5) \approx 101.5°$.

ESEMPIO. Vogliamo scrivere la matrice, rispetto alla base canonica, della riflessione f di $\mathbb{E}^3$ rispetto al piano di equazione $x - y + z = 0$. Un versore ortogonale al piano è $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Il piano ha una base data da $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Rendendola ortogonale otteniamo $w_2 = v_2$ e

$$w_3 = v_3 - (v_3 \cdot w_2)/\|w_2\|^2 w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando w_2 e w_3 otteniamo la base ortonormale

$$B = \{u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}\}.$$

Rispetto a B la riflessione f ha matrice $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché la matrice $M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})$ è una matrice ortogonale, abbiamo $M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})^{-1} = {}^t M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})$, quindi

$$M_{EE}(f) = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) M_{BB}(f) {}^t M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO. Sia $f \colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ una rotazione di asse $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e angolo di rotazione $\pi/4$. Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.

SVOLGIMENTO. Completiamo il versore $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ che genera l'asse di rotazione ad un base ortonormale di $\mathbb{E}^3$ aggiungendo i versori $u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rispetto alla base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ la rotazione f ha matrice

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ 0 & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice $M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})$ è ortogonale, $M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})^{-1} = {}^tM_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})$. Quindi

$$M_{EE}(f) = M_{BE}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) M_{BB}(f) M_{EB}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) = \begin{pmatrix} (1-1/\sqrt{2})/2 & 1/2 & -(1+1/\sqrt{2})/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ (1+1/\sqrt{2})/2 & 1/2 & -(1-1/\sqrt{2})/2 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO. Scrivere la matrice, rispetto alla base canonica di una trasformazione ortogonale di $\mathbb{E}^3$ ottenuta componendo una riflessione rispetto al piano xy con una rotazione di angolo θ intorno all'asse delle z.

SVOLGIMENTO. La riflessione rispetto al piano xy ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la rotazione intorno all'asse delle z ha matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Esercizi

Esercizio 1
Determinare una base ortonormale di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ avente matrice associata rispetto alla base canonica data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2
Trovare una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ è diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Esercizio 3
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\phi_\lambda : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'endomorfismo dato da

$$\phi_\lambda(x, y, z) = (x + \lambda y, \lambda x, z).$$

Determinare una base ortogonale di autovettori di ϕ_λ al variare di λ.

Esercizio 4
Determinare una base ortogonale di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ avente matrice associata rispetto alla base canonica data da:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5
Trovare una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ è diagonale, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Esercizio 6
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\phi_\lambda : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'endomorfismo dato da

$$\phi_\lambda(x, y, z) = (\lambda z - 2x, -y, \lambda x + 2z).$$

Determinare una base ortogonale di autovettori di ϕ_λ al variare di λ.

Esercizio 7
Sia $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ una trasformazione ortogonale con asse $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e angolo di rotazione $\pi/3$. Trovare la matrice di f rispetto alla base canonica.

Esercizio 8
Sia $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ una trasformazione ortogonale con matrice $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{2} & b \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica, dove $a, b \in \mathbb{R}$. Calcolare a e b in modo che (1) f sia una rotazione e (2) f sia una riflessione. Nel primo caso calcolare l'angolo di rotazione, nel secondo caso determinare l'asse di riflessione.

Esercizio 9
Siano r ed s le rette di $\mathbb{E}^2$ di equazioni rispettivamente $2x - 3y = 0$ e $x + y = 0$. Calcolare la

matrice, rispetto alla base canonica, di (1) la rotazione f_1 di angolo $0 \leq \theta < \pi$ che manda r in s, (2) la riflessione f_2 rispetto ad r e (3) la riflessione f_3 rispetto ad s.

Esercizio 10
Scrivere la matrice, rispetto alla base canonica, di una trasformazione ortogonale ottenuta componendo una riflessione rispetto al piano xz con una rotazione di angolo $3\pi/4$ intorno all'asse delle y.

Esercizio 11
Classificare la trasformazione ortogonale di $\mathbb{E}^3$ avente matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

Esercizio 12
Classificare la trasformazione ortogonale di $\mathbb{E}^3$ avente matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

Esercizio 13
Determinare la matrice, rispetto alla base canonica, della trasformazione ortogonale dello spazio Euclideo $\mathbb{E}^3$ ottenuta componendo una rotazione di angolo $3\pi/4$ intorno all'asse delle y con la riflessione di rispetto al piano xz.

Esercizio 14
Determinare la matrice, rispetto alla base canonica, della trasformazione ortogonale $\Psi \circ \Phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, dove Φ è una rotazione di angolo $\pi/6$ intorno all'asse delle x e Ψ è la riflessione rispetto al piano xy. Tale trasformazione ortogonale deve essere composizione di una rotazione con una riflessione rispetto al piano ortogonale all'asse di rotazione: determinare l'asse di rotazione.

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1
Il polinomio caratteristico di ϕ è $(3-x)(x-1)^2$ e una base è data da $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Se P è la matrice le cui colonne sono i vettori v_1, v_2 e v_3, si ha ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2
Si trova $p_A(x) = (x-1)^2(x+2)(x-4)$, $V_{-2}(A) = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $V_4(A) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $V_1(A) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. La proiezione di $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella direzione ortogonale a $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

quindi $V_1(A) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$, e tutti i generatori degli autospazi sono tra loro ortogonali. Normalizzandoli si ottiene

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{5}/3 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3
Rispetto alla base canonica ϕ_λ ha matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e $p_{A_\lambda}(x) = (1-x)(x^2 - x - \lambda^2)$. Gli autovalori di ϕ_λ sono quindi $x_1 = 1$, $x_2 = (1+\sqrt{1+4\lambda^2})/2$ e $x_3 = (1-\sqrt{1+4\lambda^2})/2$, che sono distinti a due a due se $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ A_λ è già in forma diagonale quindi la base ortogonale di autovettori è ovvia. Supponiamo dunque $\lambda \neq 0$. Gli autospazi sono $V_{x_1}(\phi_\lambda) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $V_{x_2}(\phi_\lambda) = \langle \begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_{x_3}(\phi_\lambda) = \langle \begin{pmatrix} x_3 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, e la base si ottiene mettendo insieme i generatori trovati dei tre autospazi.

Esercizio 4
Si trova $p_A(x) = -(x+3)(x-6)^2$, $V_6(\phi) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $V_{-3}(\phi) = \langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Ortogonalizzando la base di $V_6(\phi)$ si trova la base ortogonale di autovettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 5
Si trova $p_A(x) = (x-5)^2(x+5)^2$, $V_5(A) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_{-5}(A) = \langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Ortonormalizzando le basi di $V_5(A)$ e di $V_{-5}(A)$ si trova la matrice P come unione dei corrispondenti vettori colonna:

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6
Rispetto alla base canonica ϕ_λ ha matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$, e $p_{A_\lambda}(x) = -(x+1)(x^2 - \lambda^2 - 4)$. Gli autovalori di ϕ_λ sono quindi $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt{\lambda^2+4}$ e $x_3 = -\sqrt{\lambda^2+4}$, distinti a due a due per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, gli autospazi sono $V_{x_1}(\phi_\lambda) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_{x_2}(\phi_\lambda) = \langle \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \sqrt{\lambda^2+4}-2 \end{pmatrix} \rangle$ e $V_{x_3}(\phi_\lambda) = \langle \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \sqrt{\lambda^2+4}-2 \end{pmatrix} \rangle$, e la base si ottiene mettendo insieme i generatori trovati dei tre autospazi.

Esercizio 7
L'asse è generato dal versore $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Completando u_1 a base ortonormale si trovano $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nella base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ la trasformazione ortogonale f ha matrice

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix},$$

Poiché $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})$ è ortogonale, abbiamo $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})^{-1} = {}^tM_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})$. Quindi, indicando con $\mathcal{E}$ la base canonica, calcolando si trova

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3})M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^3}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8
(1) Se f è una rotazione di angolo θ allora $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ e $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$, quindi $\theta = 3\pi/4$. Da questo segue $a = -\sin\theta = -1/\sqrt{2}$ e $b = \cos\theta = -1/\sqrt{2}$.

(2) Se f è una riflessione $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ e $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$, quindi $a = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$ e $b = -\cos\theta = 1/\sqrt{2}$. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

L'asse di riflessione è generato da un vettore v tale che $f(v) = v$. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A - I$ si trova il generatore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Esercizio 9
(1) Abbiamo $r = \langle u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\rangle$ e $s = \langle v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$. L'angolo $0 \le \theta < \pi$ cercato è quello tra i versori u e v, quindi $\cos\theta = u \cdot v = -1/\sqrt{26}$, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 25/26$, $\sin\theta = 5/\sqrt{26}$, e concludiamo che la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{26} & -5/\sqrt{26} \\ 5/\sqrt{26} & -1/\sqrt{26} \end{pmatrix}.$$

(2) Il generatore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ della retta r può essere completato alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, e $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{E}^2}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Quindi la matrice cercata è

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_2) = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2})M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_2)M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

(3) Il generatore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ della retta r può essere completato alla base $\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, e $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}'\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathcal{E}^2}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi la matrice cercata

è

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_3) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f_3) M_{\mathcal{E}\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10

La riflessione ha matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e la rotazione ha matrice

$$B = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & 0 & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{3\pi}{4} & 0 & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

quindi la matrice cercata è

$$AB = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11

Il determinante della matrice è -1, quindi si tratta di una rotazione composta con una riflessione rispetto al piano ortogonale all'asse di rotazione. Per determinare l'asse di rotazione cerchiamo il (-1)-autospazio risolvendo il sistema omogeneo $(A+I)X = 0$. Si trova la soluzione $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che quindi genera l'asse della rotazione. Per calcolare l'angolo di rotazione, applichiamo A al vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in v_1^\perp$, ottenendo $Av_2 = v_3 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{pmatrix}$. Poiché $v_2 \cdot v_3 = 8/5 = \|v_2\|\|v_3\|\cos(\theta) = 2\cos(\theta)$, ricaviamo $\cos(\theta) = 4/5$. In conclusione, A rappresenta la composizione di una rotazione di asse generato da v_1 e angolo $\arccos(4/5)$, con la riflessione rispetto al piano $v_1^\perp$, di equazione $2x - 2y + z = 0$.

Esercizio 12

Questo esercizio si risolve come l'esercizio 11. Si ottiene che A è la matrice di una rotazione di angolo $\arccos(-1/10)$ e asse generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 13

Rispetto alla base canonica, la rotazione ha matrice $A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, mentre la riflessione rispetto al piano xz ha matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi la matrice della composizione è $AB = BA = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Esercizio 14

La rotazione ha matrice, rispetto alla base canonica, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, mentre la riflessione rispetto al piano xy ha matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la composizione ha matrice $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Per determinare l'asse di rotazione cerchiamo il (-1)-autospazio, ovvero un generatore delle soluzioni del sistema omogeneo $(BA + I)X = 0$. Risolvendo il sistema si trova la soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, che genera l'asse di rotazione.

CAPITOLO 12

Geometria analitica: sottospazi affini

1. Sottospazi affini: definizioni generali

Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{E}^n$ dello spazio Euclideo standard è detto *sottospazio affine* se coincide con l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$:

$$S = \{X \in \mathbb{E}^n \mid AX = b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m,n},\ b \in \mathbb{R}^m.$$

La *giacitura* $\mathrm{giac}(S)$ (o *direzione*) del sottospazio affine S è il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$\mathrm{giac}(S) = \{X \in \mathbb{E}^n \mid AX = 0\}.$$

La *dimensione* di S è, per definizione, la dimensione di $\mathrm{giac}(S)$, che è pari ad $n - \mathrm{rg}(A)$. Se $n = 3$, $m = 1$ e $\mathrm{rg}(A) = 1$, allora $S \subset \mathbb{E}^3$ ha dimensione 2 e si dice *piano affine*. Se $n = 3$, $m = 2$ e $\mathrm{rg}(A) = 2$, allora $S \subset \mathbb{E}^3$ ha dimensione 1 e si dice *retta affine*.

ESEMPI. Vediamo alcuni esempi di sottospazi affini e delle loro giaciture.

(1) I sottoinsiemi $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \subset \mathbb{E}^3$, definiti rispettivamente dalle equazioni $x - 2y + z = 1$, $x + y = 0$ e $z = 1$ sono piani affini. Le loro giaciture sono

$$\mathrm{giac}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}, \quad \mathrm{giac}(\pi_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\perp}, \quad \mathrm{giac}(\pi_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}.$$

(2) Il sottoinsieme $r \subset \mathbb{E}^3$ definito dal sistema di equazioni $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ è una retta affine perché $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$. La sua giacitura è

$$\mathrm{giac}(r) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

In base alla nostra definizione, un sottospazio affine $\pi \subset \mathbb{E}^3$ definito da una singola equazione $ax + by + cz + d = 0$ è un piano affine se e solo se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Di solito scriveremo:

$$\boxed{\pi\colon\ \ ax + by + cz + d = 0}$$

per indicare che il piano affine π è definito dall'equazione $ax+by+cz+d = 0$, la quale verrà detta *equazione cartesiana* di π. Osserviamo che π non è definito da un'unica equazione cartesiana, perché ogni equazione del tipo $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ con $(a', b', c', d') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$, $\lambda \neq 0$, definisce lo stesso sottoinsieme di $\mathbb{E}^3$.

PROPOSIZIONE 12.1. *Dato un sottospazio affine $S \subset \mathbb{E}^3$ e un punto $P \in S$, si ha*

$$\boxed{S = P + \mathrm{giac}(S) = \{P + w \mid w \in \mathrm{giac}(S)\}}$$

DIMOSTRAZIONE. Se P è soluzione del sistema $AX = b$ che definisce S e $w \in \mathrm{giac}(S)$ è soluzione del sistema $AX = 0$, allora $A(P + w) = AP + Aw = b + 0 = b$, quindi

$P + w \in S$. Questo mostra che $P + \mathrm{giac}(S) \subset S$. Viceversa, basta far vedere che dato $Q \in S$, $\overrightarrow{PQ} := Q - P \in \mathrm{giac}(S)$. Infatti, se $AQ = b$ e $AP = b$ allora $A(Q - P) = AQ - AP = b - b = 0$ e quindi $\overrightarrow{PQ} \in \mathrm{giac}(S)$. In particolare, il ragionamento mostra che se i punti P, Q appartengono al sottospazio affine S allora il vettore differenza $\overrightarrow{PQ}$ appartiene a $\mathrm{giac}(S)$. Dunque $S = P + \mathrm{giac}(S)$. □

PROPOSIZIONE 12.2. *Dato un sottospazio affine $S \subset \mathbb{E}^3$ e un punto $P \in S$, si ha*

$$\boxed{\mathrm{giac}(S) = \{\overrightarrow{s_1 s_2} := s_2 - s_1 \mid s_1, s_2 \in S\}}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, siano $s_1 = P + w_1$ e $s_2 = P + w_2$ due punti di S. Allora $\overrightarrow{s_1 s_2} = w_2 - w_1 \in \mathrm{giac}(S)$. Viceversa, se $w \in \mathrm{giac}(S)$ e $P \in S$, allora $w = (P + w) - P = \overrightarrow{s_1 s_2}$, dove $s_1 = P$ ed $s_2 = P + w$. Dunque abbiamo l'uguaglianza voluta. □

OSSERVAZIONE. Le ultime due proposizioni ci dicono due cose. La prima è che ogni sottospazio affine S è un traslato della propria giacitura $\mathrm{giac}(S)$. La seconda che il sottospazio $\mathrm{giac}(S)$ non dipende dalla scelta del sistema lineare che definisce S ma è univocamente determinato da S, pensato come sottoinsieme di $\mathbb{E}^n$.

ESEMPI. Vediamo come scrivere due sottospazi affini come traslati delle loro giaciture.

(1) Il piano $\pi\colon\ x - 2y + z = 1$ si può descrivere come $P + \mathrm{giac}(\pi)$, dove $P = (2, 1, 1) \in \pi$ e $\mathrm{giac}(\pi)$ è il sottospazio vettoriale $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle^\perp$ di equazione $x - 2y + z = 0$;

(2) La retta $r\colon \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ si può descrivere come $P + \mathrm{giac}(r)$, dove $P = (4/3, 1/3, 0) \in r$ e $\mathrm{giac}(r) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

2. Piani e rette affini: prima parte

Equazione cartesiana di un piano affine passante per un punto con giacitura assegnata.

PROPOSIZIONE 12.3. *Esiste un unico piano affine contenente un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$ e avente giacitura $\langle \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \rangle^\perp$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. È definito dall'equazione:*

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \tag{8}$$

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che un piano affine contenente P e avente giacitura $\langle \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \rangle^\perp$ coincide con $P + \langle \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \rangle^\perp$, quindi tale piano è unico. È altrettanto chiaro che le coordinate di P soddisfano l'equazione (8), la quale definisce un piano affine di giacitura data dall'equazione $ax + by + cz = 0$. Dunque l'equazione (8) definisce un piano per P avente giacitura $\langle \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \rangle^\perp$. □

Equazioni parametriche di un piano affine. Poiché ogni piano affine π è del tipo

$$\pi = P + \mathrm{giac}(\pi) = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right) \rangle,$$

possiamo scrivere più esplicitamente

$$\pi = \{ \left(\begin{smallmatrix} x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z_0 + ua_3 + vb_3 \end{smallmatrix}\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases} \quad , \quad u, v \in \mathbb{R},$$

che forniscono le coordinate dei punti di π al variare dei due parametri u e v, si dicono *equazioni parametriche* di π.

ESEMPIO. Determiniamo equazioni parametriche del piano $\pi\colon\ x + y + z = 1$. Abbiamo $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \pi$, quindi

$$\pi = P + \mathrm{giac}(\pi) = P + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)^{\perp} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

Ne deduciamo le equazioni parametriche di π:

$$\begin{cases} x = u \\ y = -u + v \\ z = -v + 1 \end{cases}$$

Equazioni parametriche di una retta affine. Nel caso di una retta $r = P + \mathrm{giac}(r)$, se $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathrm{giac}(r) = \langle \left(\begin{smallmatrix} l \\ m \\ n \end{smallmatrix}\right) \rangle$, delle equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Spesso l, m ed n si dicono *parametri direttori* di r.

ESEMPIO. Determiniamo equazioni parametriche della retta $r\colon \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$. Si vede facilmente che $P = (3/2, 1/2, 0) \in r$ e $\mathrm{giac}(r) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Quindi

$$r = P + \mathrm{giac}(r) = \left(\begin{smallmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle,$$

dunque r ha parametri direttori $(3, 1, 2)$ ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3/2 + 3t \\ y = 1/2 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Passaggio da equazioni parametriche ad equazione cartesiana di un piano affine.

ESEMPIO. Vediamo come trovare un'equazione cartesiana di un piano affine sapendone equazioni parametriche. Sia π il piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v + 1 \\ y = 2v + 2 \\ z = -u + 2v + 1 \end{cases} .$$

Le prime due equazioni possono essere viste come un sistema di rango 2 in u e v. Risolvendolo si ottiene l'unica soluzione $u = x - y/2$, $v = y/2 - 1$. Sostituendo nella terza equazione si ottiene

$$z = 1 - x + y/2 + y - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y + 2z + 2 = 0.$$

È utile conoscere il seguente approccio alternativo. Dalle equazioni parametriche vediamo che

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle^{\perp} \subset \mathbb{E}^3.$$

Quindi π è il piano per il punto $(1, 2, 1)$ e giacitura $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}^{\perp}$. Da (8) ricaviamo che π ha equazione $2(x - 1) - 3(y - 2) + (z - 2) = 0$, ovvero $2x - 3y + z + 2 = 0$, che è l'equazione già trovata.

Il nostro prossimo scopo è ricavare una formula generale per l'equazione cartesiana del piano affine per tre punti non allineati. Per facilitare il nostro compito facciamo prima una breve digressione sul prodotto vettoriale, interessante di per sé.

3. Digressione sul prodotto vettoriale

Abbiamo definito il prodotto vettoriale di due vettori $v_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, tramite la formula

$$v_1 \times v_2 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, dati tre vettori $v_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, abbiamo

$$\boxed{v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}} \tag{9}$$

La formula (9) mostra che i vettori v_i sono linearmente dipendenti se e solo se $v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = 0$. Inoltre, svolgendo i calcoli si può verificare che vale la seguente identità:

$$\|v_2 \times v_3\|^2 = \|v_2\|^2 \|v_3\|^2 - (v_2 \cdot v_3)^2.$$

Se usiamo il fatto che $v_2 \cdot v_3 = \|v_2\| \|v_3\| \cos \theta$, dove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo tra v_2 e v_3, otteniamo

$$\|v_2 \times v_3\|^2 = \|v_2\|^2 \|v_3\|^2 \sin^2 \theta.$$

Una semplice riflessione mostra che la quantità $\|v_2 \times v_3\| = \|v_2\| \|v_3\| |\sin \theta|$ può essere interpretata come l'area del parallelogramma individuato da v_2 e v_3. Inoltre, vale la seguente

PROPOSIZIONE 12.4. *Siano $v_i \in \mathbb{E}^3$, $i = 1, 2, 3$. Il numero reale $|v_1 \cdot (v_2 \wedge v_3)|$ è il volume del parallelepipedo individuato dai vettori v_1, v_2 e v_3.*

DIMOSTRAZIONE. Se indichiamo con $\varphi \in [0, \pi/2]$ l'angolo tra v_1 e la retta ortogonale al piano $\langle v_2, v_3 \rangle$, vediamo che il numero reale

$$|v_1 \cdot (v_2 \times v_3)| = \|v_1\| \|v_2 \times v_3\| |\cos \varphi|$$

è il volume del parallelepipedo individuato dai vettori v_1, v_2 e v_3, perché come già osservato $\|v_2 \times v_3\|$ è l'area del parallelogramma individuato da v_2 e v_3, mentre $\|v_1\| |\cos \varphi|$ è l'altezza del suddetto parallelepipedo. $\square$

4. Piani e rette affini: seconda parte

Equazione cartesiana del piano affine per tre punti. Osserviamo ora che se P_1, P_2 e P_3 sono tre punti non allineati di $\mathbb{E}^3$, allora i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono linearmente indipendenti, dunque il piano affine

$$\pi := P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \rangle^\perp$$

è ben definito e contiene i tre punti P_1, P_2, P_3. Inoltre, tale piano è unico perché un piano contenente i punti P_i passa per P_1 ed ha giacitura contenente (e quindi coincidente con) $\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle$.

PROPOSIZIONE 12.5. *L'unico piano affine di $\mathbb{E}^3$ contenente tre punti non allineati*

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

ha equazione cartesiana:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{pmatrix} = 0}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che un punto $P \in \mathbb{E}^3$ appartiene a π se e solo se il parallelogramma individuato dai vettori $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ è degenere, ovvero ha volume 0. Dunque $P \in \pi$ se e solo se

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0.$$

Se $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\overrightarrow{P_1P} = \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \\ z_3-z_1 \end{pmatrix}.$$

Dunque per (9) $P \in \pi$ se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione dell'enunciato. □

ESEMPIO. Sia π il piano passante per $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un'equazione cartesiana di π è data da

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad x + y + z = 1.$$

Equazioni parametriche e cartesiane di una retta affine per due punti. Dati due punti distinti $P_1, P_2 \in \mathbb{E}^3$, l'unica retta che li contiene è chiaramente $r = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle$. Vediamo con degli esempi come determinarne equazioni parametriche e cartesiane.

ESEMPIO. Siano $P_1 = (1, 6, 3)$ e $P_2 = (-1, 0, 2)$. Allora $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -6, -1)$; la retta r per P_1 e P_2 ha giacitura $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + 6t \\ z = 3 + t, \end{cases}$$

dalle quali si deducono equazioni cartesiane di r ricavando t da una delle equazioni e sostituendo nelle altre due. Ad esempio, dalla terza equazione si trova $t = z - 3$, e sostituendo nelle prime due si ottengono le equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y - 6z + 12 = 0 \end{cases}.$$

Posizioni reciproche di due piani affini.

DEFINIZIONE. Due sottospazi affini $S, S' \subset \mathbb{E}^n$ della stessa dimensione si dicono *paralleli* se $\operatorname{giac}(S) = \operatorname{giac}(S')$.

Consideriamo due piani affini $\pi, \pi' \subset \mathbb{E}^3$, di equazioni

$$\pi\colon\ ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad \pi'\colon\ a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

In base alla definizione, π e π' sono paralleli se e solo se $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)^{\perp} = \left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{smallmatrix}\right)^{\perp}$, ovvero se e solo se

$$\boxed{\langle \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{smallmatrix}\right) \rangle}$$

Analizziamo ora l'intersezione $\pi \cap \pi'$. Questa è l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}.$$

Se indichiamo con A e A^c rispettivamente la matrice incompleta e completa del sistema, vediamo che la coppia di numeri $(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} A^c)$ può assumere i valori $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$. Nel primo caso π e π' sono paralleli, il sistema ammette ∞^2 soluzioni, le due equazioni sono proporzionali e $\pi = \pi'$. Nel secondo caso π e π' sono paralleli e il sistema non ammette soluzioni, quindi $\pi \cap \pi' = \emptyset$. Nel terzo caso π e π' non sono paralleli, il sistema ammette ∞^1 soluzioni e $\pi \cap \pi'$ è una retta affine.

Passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche di una retta affine. Illustriamo questo calcolo con il seguente:

ESEMPIO. Sia $r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$. La giacitura di r è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo con matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque

$$\operatorname{giac}(r) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

Chiaramente $(3/4, -1/4, 0) \in r$, e concludiamo

$$r = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rangle, \quad r\colon \begin{cases} x = -5t + 3/4 \\ y = -3t - 1/4 \\ z = 4t \end{cases}$$

Vediamo ora come ricavare equazioni parametriche di r senza utilizzare il prodotto vettoriale. Basta risolvere il sistema delle equazioni cartesiane di r rispetto a due variabili corrispondenti ad una sottomatrice di A di rango due. Nel nostro caso, possiamo risolvere il sistema rispetto ad x e y, ottenendo $x = -5z/4 + 1/4$ e $y = 3z/4 - 1/4$. Otteniamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -5t/4 + 3/4 \\ y = 3t/4 - 1/4 \\ z = t \end{cases},$$

ovvero $r = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Posizioni reciproche di due rette affini. Consideriamo due rette di equazioni:

$$r\colon \begin{cases} P_1(x,y,z)=d_1 \\ P_2(x,y,z)=d_2 \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} P_1'(x,y,z)=d_1' \\ P_2'(x,y,z)=d_2' \end{cases},$$

dove i P_i e i P_i', $i=1,2$, sono polinomi omogenei di primo grado. Allora

$$r\cap r'\colon \begin{cases} P_1(x,y,z)=d_1 \\ P_2(x,y,z)=d_2 \\ P_1'(x,y,z)=d_1' \\ P_2'(x,y,z)=d_2' \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema lineare non omogeneo che possiamo scrivere nella forma $AX=b$, con matrice incompleta $A\in\mathbb{R}^{4,3}$ e matrice completa $A^c=(A,b)\in\mathbb{R}^{4,4}$. Poiché i sistemi che definiscono r ed r' hanno entrambi rango due, per la coppia $(\operatorname{rg}A,\operatorname{rg}A^c)$ abbiamo le seguenti possibilità:

(1) $(\operatorname{rg}A,\operatorname{rg}A^c)=(2,2)$: i due sistemi che definiscono r ed r' sono equivalenti e il sistema che definisce $r\cap r'$ ha $\infty^{3-2=1}$ soluzioni, quindi $r\cap r'=r=r'$, ovvero r ed r' sono *coincidenti*;

(2) $(\operatorname{rg}A,\operatorname{rg}A^c)=(2,3)$: i due sistemi omogenei che definiscono $\operatorname{giac}(r)$ e $\operatorname{giac}(r')$ sono equivalenti e il sistema che definisce $r\cap r'$ non ha soluzioni, quindi $\operatorname{giac}(r)=\operatorname{giac}(r')$ e $r\cap r'=\emptyset$, ovvero r ed r' sono *parallele e disgiunte*;

(3) $(\operatorname{rg}A,\operatorname{rg}A^c)=(3,3)$: il sistema che definisce $r\cap r'$ ha un'unica soluzione, quindi r ed r' sono *incidenti in un punto*;

(4) $(\operatorname{rg}A,\operatorname{rg}A^c)=(3,4)$: il sistema omogeneo $AX=0$ che definisce $\operatorname{giac}(r)\cap\operatorname{giac}(r')$ ha un'unica soluzione, mentre il sistema che definisce $r\cap r'$ non ha soluzioni, quindi r and r' sono non parallele e disgiunte, ovvero *sghembe*.

OSSERVAZIONI. (1) Il caso $(\operatorname{rg}A,\operatorname{rg}A^c)=(2,4)$ non può realizzarsi perché $\operatorname{rg}A^c=4$ implica che le colonne di A^c, e quindi anche quelle di A, sono linearmente indipendenti, dunque $\operatorname{rg}A=3$;

(2) r ed r' sono sghembe se e solo se $\det A^c\neq 0$.

ESEMPIO. Studiamo, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la posizione reciproca delle seguenti rette:

$$r\colon \begin{cases} x-y+z=k \\ x-2y=1 \end{cases}, \quad s\colon \begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=k \end{cases}.$$

Applichiamo l'eliminazione al sistema che descrive $r\cap r'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[R3\to R3-R1]{R2\to R2-R1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & -1 & 1-k \\ 0 & 2 & 0 & 2-k \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[R4\to R4+R2]{R3\to R3+2R2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & -1 & 1-k \\ 0 & 0 & -2 & 4-3k \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3\leftrightarrow R4]{R2\to -R2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-3k \end{pmatrix} \xrightarrow{R4\to R4+2R3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3k \end{pmatrix}.$$

Quindi vediamo che r ed s sono sghembe se $k\neq 2$ e incidenti in un punto se $k=2$. L'unico punto di intersezione per $k=2$ è $(1,0,1)$.

Posizioni reciproche di una retta affine ed un piano affine.

DEFINIZIONE. Due sottospazi affini S ed S' si dicono *paralleli* se $\mathrm{giac}(S) \subseteq \mathrm{giac}(S')$ oppure $\mathrm{giac}(S') \subseteq \mathrm{giac}(S)$.

Consideriamo una retta e un piano di equazioni:

$$r\colon \begin{cases} P_1(x,y,z) = d_1 \\ P_2(x,y,z) = d_2 \end{cases} \qquad \pi\colon\ P_3(x,y,z) = d_3,$$

dove i P_i, $i = 1,2,3$, sono polinomi omogenei di primo grado. Allora

$$r \cap \pi\colon \begin{cases} P_1(x,y,z) = d_1 \\ P_2(x,y,z) = d_2 \\ P_3(x,y,z) = d_3 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema lineare non omogeneo che possiamo scrivere nella forma $AX = b$, con matrice incompleta $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ e matrice completa $A^c = (A, b) \in \mathbb{R}^{3,4}$. Poiché il sistema che definisce r ha rango due, per la coppia $(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, A^c)$ abbiamo le seguenti possibilità:

(1) $(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, A^c) = (2,2)$: l'equazione di π è combinazione lineare di quelle di r, quindi r *è contenuta in* π;
(2) $(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, A^c) = (2,3)$: l'equazione omogenea che definisce $\mathrm{giac}(\pi)$ è combinazione lineare di quelle che definiscono $\mathrm{giac}(r)$ e il sistema che definisce $r \cap r'$ non ha soluzioni, quindi $\mathrm{giac}(r) \subset \mathrm{giac}(\pi)$ ma $r \cap \pi = \emptyset$, ovvero r ed π sono *paralleli e disgiunti*;
(3) $(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, A^c) = (3,3)$: r non è parallela a π e il sistema che definisce $r \cap \pi$ ha un'unica soluzione, quindi r e π sono *incidenti in un punto*;

ESEMPIO. Siano r e π il piano e la retta di equazioni

$$r\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad \pi\colon \begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 3u \\ z = -u - 2v \end{cases}.$$

Per stabilire la posizione reciproca di r e π conviene trovare un'equazione cartesiana di π. Dalle equazioni parametriche abbiamo

$$\mathrm{giac}(\pi) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle, \quad \mathrm{giac}(\pi)^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle,$$

quindi $\pi\colon\ 6x - y + 3z = d$. Poiché il punto $(1,0,0)$, ottenuto ponendo $u = v = 0$, appartiene a π, si deve avere $d = 6$ e quindi $\pi\colon\ 6x - y + 3z = 6$. Sostituendo le espressioni di x, y e z delle equazioni parametriche di r nell'equazione cartesiana di π si ottiene $6(1-t) - t + 3(2-2t) = -13t + 12 = 6$, quindi $t = 6/13$, che significa che r e π sono incidenti in un punto.

Supponiamo ora di voler trovare una retta s per $B = (3,1,-2)$ sghemba con r e parallela a π. Abbiamo $\mathrm{giac}(s) \subset \mathrm{giac}(\pi)$, quindi $\mathrm{giac}(s)$ è generata da una vettore del tipo

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

con a e b scelti in modo tale che $\mathrm{giac}(s) \neq \mathrm{giac}(r) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$ e $r \cap s = \emptyset$. Proviamo a fare la scelta “a caso” $a = 1$, $b = 0$:

$$s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \quad s\colon \begin{cases} x = 3 + u \\ y = 1 + 3u \\ z = -2 - u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo $r \cap s$:

$$r \cap s\colon \begin{cases} 1 - t = 3 + u \\ t = 1 + 3u \\ 2 - t = -2 - u \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5/4 \\ u = -3/4 \\ 2 - t = -2 + 3/4 \end{cases}.$$

Chiaramente il sistema non ha soluzioni, quindi $r \cap s = \emptyset$ ed r ed s sono sghembe.

ESEMPIO. Troviamo equazioni cartesiane della retta r per $Q = (1, -1, 2)$ parallela al piano $\pi\colon\ x + y - 2z = 3$ e incidente alla retta $s\colon \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$. La retta r è contenuta nel piano π' parallelo a π e passante per Q, di equazione ovvero $x + y - 2z = 1 - 1 - 2 \cdot 2 = -4$. Quindi r non è altro che la retta per Q e $P = \pi' \cap s$. Dalle equazioni di s si ricava $x = 1 - y$ e $z = 2 - y$, e sostituendo nell'equazione di π' si ottiene $1 - y + y - 2(2 - y) = -4$, che fornisce $y = -1/2$ e $x = 3/2$, $z = 5/2$, dunque $P = (3/2, -1/2, 5/2)$. Poiché $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, la retta $r = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ ha equazioni parametriche e cartesiane:

$$r\colon \begin{cases} x = 3/2 + t \\ y = -1/2 + t \\ z = 5/2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \implies r\colon \begin{cases} x - z = -1 \\ y - z = -3 \end{cases}.$$

Ortogonalità tra rette e piani affini, distanze e fasci di piani affini.

DEFINIZIONI.

- Una retta r e un piano affine π in $\mathbb{E}^3$ sono *ortogonali* se $\mathrm{giac}(r) = \mathrm{giac}(\pi)^\perp$.
- Due piani affini π e π' in $\mathbb{E}^3$ sono *ortogonali* se $\mathrm{giac}(\pi)^\perp \subset \mathrm{giac}(\pi')$, o equivalentemente $\mathrm{giac}(\pi')^\perp \subset \mathrm{giac}(\pi)$.
- Due rette affini r ed r' si dicono *ortogonali* se $\mathrm{giac}(r) \subset \mathrm{giac}(r')^\perp$, ovvero se $\mathrm{giac}(r') \subset \mathrm{giac}(r)^\perp$.
- Dato un punto P e un piano affine π di $\mathbb{E}^3$, la *distanza* di P da π è la distanza di P dal punto Q di intersezione di π con la retta $P + \mathrm{giac}(\pi)^\perp$.
- La *distanza* tra due piani affini paralleli di $\mathbb{E}^3$ è la distanza di un qualunque punto su uno di essi dall'altro piano.
- La *distanza* di un punto P da una retta r di $\mathbb{E}^3$ è la distanza di P dal punto Q di intersezione di r con il piano affine ortogonale ad r e passante per P.
- Il *fascio di piani* contenente una retta affine r di $\mathbb{E}^3$ è l'insieme dei piani affini contenenti r.

ESEMPI.

(1) Determiniamo l'equazione del piano π per $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$, parallelo al vettore $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, ovvero con $v \in \operatorname{giac}(\pi)$. Il piano è $\pi = A + \langle \overrightarrow{AB}, v \rangle$. Quindi

$$\operatorname{giac}(\pi) = \langle \overrightarrow{AB}, v \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \times v \rangle^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle^{\perp}.$$

Allora $\pi\colon\ x - 2z = d$, con (imponendo il passaggio per A) $d = 1 - 4 = -3$, e concludiamo $\pi\colon\ x - 2z = -3$.

(2) Determiniamo la distanza tra i piani paralleli $\pi\colon\ x + y - 2z = 3$ e $\pi'\colon\ x + y - 2z = -3$. Il punto $P = (3, 0, 0)$ appartiene a π, e la retta $r = P + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ è ortogonale ad entrambi. Calcoliamo $r \cap \pi'$. Abbiamo

$$r\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

E imponendo che un punto di r appartenga a π' otteniamo $3 + t + t + 4t = -3$, quindi $t = -1$. Dunque $r \cap \pi' = Q = (2, -1, 2)$, e la distanza tra P e Q è $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{6}$.

ESEMPIO. Identifichiamo la retta s ortogonale ed incidente ad entrambe le rette

$$r\colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, \quad r'\colon \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 2t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}.$$

La giacitura di s è

$$\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)^{\perp} \cap \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \wedge \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

Ricaviamo equazioni cartesiane per r ed r'. Per r, sostituiamo $t = y$ nella prima e terza equazione, per r' sostituiamo $t = 3 - x$ nella seconda e terza equazione, ottenendo

$$r\colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3y + z = 1 \end{cases}, \quad r'\colon \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + z = 5 \end{cases}.$$

Chiaramente s è contenuta nel piano contenente r e parallelo ad s. Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ il piano π di equazione

$$\lambda(x + 2y - 1) + \mu(-3y + z - 1) = \lambda x + (2\lambda - 3\mu)y + \mu z - \lambda - \mu = 0$$

appartiene al fascio dei piani contenenti r. Imponendo che π sia parallelo ad s, ovvero che il vettore $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ appartenga a $\operatorname{giac}(\pi)$, si ottiene l'equazione $5\lambda + (2\lambda - 3\mu) + 3\mu = 7\lambda = 0$, con soluzione $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Quindi $\pi\colon\ 3y - z + 1 = 0$. Analogamente, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ il piano π' di equazione

$$\lambda(2x + y - 7) + \mu(x + z - 5) = (2\lambda + \mu)x + \lambda y + \mu z - 7\lambda - 5\mu = 0$$

appartiene al fascio dei piani contenenti r'. Imponendo che π' sia parallelo ad s ottieniamo l'equazione $11\lambda + 8\mu = 0$, con soluzione $\lambda = 8$, $\mu = -11$. Quindi $\pi'\colon\ 5x + 8y - 11z = 1$ e

$$s\colon \begin{cases} 2x + 7y - z = 1 \\ 5x + 8y - 11z = 11 \end{cases}.$$

Osserviamo che, per costruzione, $\mathrm{giac}(s) = \mathrm{giac}(\pi) \cap \mathrm{giac}(\pi') = \langle \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Infine, la retta r non è parallela a π', dunque lo interseca in un punto, ed r' non è parallela a π, quindi lo interseca in un punto. Ne segue che s interseca r nel punto $\pi' \cap r$ ed r' nel punto $\pi \cap r'$.

ESEMPIO. Si considerino le rette affini r_1 ed r_2 in $\mathbb{R}^3$ date dalle equazioni:

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} , \qquad r_2 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} .$$

(a) Trovare equazioni parametriche per r_1;
(b) stabilire se r_1 ed r_2 sono incidenti, parallele o sghembe;
(c) trovare equazioni cartesiane di una retta affine r parallela al vettore $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ che intersechi sia r_1 che r_2.

(a) Risolvendo le equazioni di r_1 rispetto a z si ottiene $x = -3z - 1$ e $y = -z - 1$. Quindi equazioni parametriche di r_1 sono:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = -3\lambda - 1 \\ y = -\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Come si verifica anche dalle equazioni $(*)$, la direzione di r_1 è generata dal prodotto vettoriale tra $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, che è $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, mentre la direzione di r_2 è generata dal prodotto vettoriale tra $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, che è $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Poichè v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, r_1 ed r_2 non sono parallele. Per stabilire se sono incidenti possiamo ad esempio imporre che le coordinate di un punto di r_1 date da $(*)$ soddisfino le equazioni cartesiane di r_2. Il risultato è il sistema incompatibile

$$\begin{cases} -7\lambda = 2 \\ -4\lambda = 3 \end{cases} ,$$

quindi r_1 and r_2 sono sghembe. (c) Un punto di una retta r che passi per un punto di r_1 e sia parallela al vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sarà del tipo $\left(\begin{smallmatrix} -3\lambda-1+\mu \\ -\lambda-1 \\ \lambda+\mu \end{smallmatrix}\right)$ per qualche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Affinché tale punto appartenga ad r_2 le sue coordinate devono soddisfare le equazioni cartesiane di r_2. Questo si traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} \mu - 7\lambda = 2 \\ \mu - 4\lambda = 3 \end{cases} ,$$

che ammettono l'unica soluzione $(\mu, \lambda) = (13/3, 1/3)$. La retta risultante ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \mu - 2 \\ y = -4/3 \\ z = \mu + 1/3 \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Eliminando il parametro μ si trovano equazioni cartesiane di r:

$$\begin{cases} y = -4/3 \\ x - z = -7/3 \end{cases} .$$

Esercizi

Esercizio 1

Si considerino le rette affini r_1 ed r_2 in $\mathbb{R}^3$ date dalle equazioni:

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} , \qquad r_2 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} .$$

(a) Trovare equazioni parametriche per r_1;
(b) stabilire se r_1 ed r_2 sono incidenti, parallele o sghembe;
(c) trovare equazioni cartesiane di una retta affine r parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che interseca sia r_1 che r_2.

Esercizio 2

Siano r_1 ed r_2 le rette di $\mathbb{R}^3$ definite dalle equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 2z = 0 \end{cases} .$$

(a) Si verifichi che r_1 ed r_2 sono sghembe;
(b) si determini una retta r' parallela alla retta

$$r = \{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

che intersechi sia r_1 che r_2;
(c) Si determinino le intersezioni $r' \cap r_1$ e $r' \cap r_2$.

Esercizio 3

Si considerino le rette r_1 ed r_2 di $\mathbb{R}^3$ date dalle equazioni:

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} , \qquad r_2 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} .$$

(a) Trovare equazioni parametriche per r_1;
(b) stabilire se r_1 ed r_2 sono incidenti, parallele o sghembe;
(c) determinare una retta r parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che interseca sia r_1 che r_2;
(d) determinare $r \cap r_1$, $r \cap r_2$ ed equazioni cartesiane per r.

Esercizio 4

Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta affine di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2t - 1/2 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases}$.

(a) Determinare equazioni cartesiane di r;
(b) determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r ed il punto $P = (1, 1, -2)$;
(c) determinare equazioni cartesiane della retta affine r' passante per il punto $Q = (1, 1, 1)$, parallela al piano π e perpendicolare alla retta r;
(d) stabilire se la retta r e la retta r'' passante per P e Q sono incidenti, parallele o sghembe.

Esercizio 5
Si considerino in $\mathbb{R}^3$ il piano π di equazione $x - 2y + 3z = 0$ e le rette affini

$$r_1 : \begin{cases} x = -3 \\ z = 4 \end{cases} \qquad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \quad .$$

Sia $s \subset \mathbb{R}^3$ l'unica retta affine ortogonale a π che interseca sia r_1 che r_2.

(a) Determinare i punti d'intersezione della retta s con r_1 e con r_2;
(b) determinare un'equazione del piano π' contenente $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ed s;
(c) stabilire la posizione reciproca delle rette s ed $s' = \pi \cap \pi'$.

Esercizio 6
Sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano affine di equazione $x + 2y + 3z = 1$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r ortogonale a π e passante per il punto $P = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$;
(b) determinare l'equazione del piano $\pi' \subset \mathbb{R}^3$ parallelo a π passante per il punto $Q = (1, 1, 1)$ e l'intersezione S tra il piano π e la retta affine ortogonale a π' passante per Q;
(c) sia A il punto d'intersezione della retta u passante per P e Q con il piano π; stabilire se la retta t per A e $B = (16, 1, -14)$ è incidente, parallela o sghemba con r;

Esercizio 7
Sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano affine di equazione $2x - y + 5z = 2$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r ortogonale a π e passante per il punto $P = (1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$;
(b) determinare un'equazione del piano $\pi' \subset \mathbb{R}^3$ contenente la retta

$$s\colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5y + z = -2 \end{cases}$$

e passante per il punto $Q = (2, 1, -1)$;
(c) sia $u_t \subset \mathbb{R}^3$, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la retta

$$u_t = \begin{pmatrix} 3 - t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} t - 1 \\ -2 \\ t + 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Determinare l'insieme $A = \{t \in \mathbb{R} \mid s \cap u_t \neq \emptyset\}$, dove s è la retta del punto (b).

Esercizio 8
Siano $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \subset \mathbb{E}^3$ i piani affini di equazioni:

$$\pi_1 : x - 2y + z = 1, \quad \pi_2 : 3x + y + z = 2, \quad \pi_3 : x + y - z = 3.$$

(a) determinare la giacitura della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e le coordinate del punto $P = r \cap \pi_3$;
(b) determinare equazioni cartesiane del piano π ortogonale ad r e contenente il punto $Q = (1, -2, 0)$ e del piano π' contenente r e passante per Q;

(c) determinare la posizione reciproca delle rette r ed $r' = \pi \cap \pi_3$.

Esercizio 9
Sia $r \subset \mathbb{E}^3$ la retta affine di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-3z=2 \end{cases}$$

Determinare:

(a) un'equazione cartesiana del piano π_1 contenente r e passante per $P=(1,2,1)$;
(b) equazioni parametriche e cartesiane della retta s per P ortogonale al piano

$$\pi_2 : 3x - y + 5z = 1$$

(c) equazioni cartesiane della retta t parallela al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed incidente sia la retta r che la retta

$$r'\colon \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$$

Esercizio 10
Siano $r_1, r_2 \subset \mathbb{E}^3$ le rette affini definite dalle equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x-y+z=1 \\ x-2y=1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=0 \end{cases} .$$

(a) Si verifichi che r_1 ed r_2 sono sghembe;
(b) si determini una retta r' parallela alla retta

$$r = \{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

che intersechi sia r_1 che r_2;
(c) Si determinino le intersezioni $r' \cap r_1$ e $r' \cap r_2$.

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1
(a) Risolvendo le equazioni di r_1 rispetto a z si ottiene $x = -3z - 1$ e $y = -z - 1$. Quindi equazioni parametriche di r_1 sono:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = -3\lambda - 1 \\ y = -\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) La direzione di r_1 è data dal prodotto vettoriale tra $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che è $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la direzione di r_2 è data dal prodotto vettoriale tra $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Poichè v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, r_1 ed r_2 non sono parallele. Per stabilire se sono incidenti possiamo ad esempio imporre che le coordinate di un punto di r_1 date da $(*)$ soddisfino le equazioni cartesiane di r_2. Il risultato è il sistema incompatibile

$$\begin{cases} -7\lambda = 2 \\ -4\lambda = 3 \end{cases},$$

quindi r_1 and r_2 sono sghembe. (c) Un punto di una retta r che passi per un punto di r_1 e sia parallela al vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sarà del tipo $\left(\begin{smallmatrix} -3\lambda-1+\mu \\ -\lambda-1 \\ \lambda+\mu \end{smallmatrix}\right)$ per qualche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Affinché tale punto appartenga ad r_2 le sue coordinate devono soddisfare le equazioni cartesiane di r_2. Questo si traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} \mu - 7\lambda = 2 \\ \mu - 4\lambda = 3 \end{cases},$$

che ammettono l'unica soluzione $(\mu, \lambda) = (13/3, 1/3)$. La retta risultante ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \mu - 2 \\ y = -4/3 \\ z = \mu + 1/3 \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Eliminando il parametro μ si trovano equazioni cartesiane di r:

$$\begin{cases} y = -4/3 \\ x - z = -7/3 \end{cases}.$$

Esercizio 2

(a) Si verifica facilmente che il sistema 4×3 ottenuto come unione delle equazioni cartesiane di r_1 ed r_2 non ha soluzioni. Quindi $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. Dalle equazioni cartesiane di r_1 si vede che per ogni punto $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in r_1$ si ha $x = 2y + 1$ e $z = -y$, quindi $r_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 1+2s \\ s \\ -s \end{smallmatrix}\right) \mid s \in \mathbb{R}\}$ e la giacitura di r_1 risulta $\langle\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$. In maniera analoga si trova che la giacitura di r_2 è $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, quindi r_1 ed r_2 non sono parallele, dunque sono sghembe.
(b) L'unica retta $r'_s = P(s) + \langle\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ parallela ad r e passante per $P(s) = \left(\begin{smallmatrix} 1+2s \\ s \\ -s \end{smallmatrix}\right) \in r_1$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = s + 2t \\ z = -s + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora $s \in \mathbb{R}$ in modo che $r'_s \cap r_2 \neq \emptyset$. Imponendo che un punto di r'_s soddisfi le equazioni di r_2 otteniamo le equazioni $2s + 4t = 1$ e $-s + 4t = 0$, con soluzione unica $(s, t) = (1/3, 1/12)$. Dunque la retta cercata è $r' = r'_{1/3} = \left(\begin{smallmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.
(c) Poiché la giacitura di r' è diversa dalla giacitura di r_1, r' interseca r_1 solamente nel punto $\left(\begin{smallmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{smallmatrix}\right)$. Dal punto precedente si deduce che r' interseca r_2 nel punto $\left(\begin{smallmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{12}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7/4 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 3

(a) Il sistema di equazioni che dà la retta r_1 può essere risolto considerando la z come un parametro, ottenendo $x = -z/2$ e $y = z/2 - 1$. Quindi r_1 ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t - 1 \\ z = 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Dal punto (a) vediamo che il vettore dei parametri direttori di r_1 è $(-1, 1, 2)$. Invece dalle equazioni di r_2 si ricava che il vettore dei parametri direttori di r_2 è $(3, -1, -1)$. Poiché i due vettori non sono proporzionali le due rette non sono parallele. Inoltre, sostituendo le espressioni di x, y e z in funzione di t presi dalle equazioni parametriche di r_1 nelle equazioni di r_2 si ottengono le due equazioni $2t - 1 = 0$ e $3t - 2 = 0$ che non sono simultaneamente soddisfatte da alcun valore di t. Dunque r_1 ed r_2 sono sghembe. (c) Cerchiamo la retta r della forma $r(t) = p(t) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, dove $p(t) = (-t, t - 1, 2t)$ appartiene ad r_1. Un punto di $r(t)$ ha coordinate $(-t + s, t - 1, 2t + s)$ al variare di $s \in \mathbb{R}$. Imponendo l'appartenenza di un tale punto ad r_2 si ottengono le equazioni $t + s + 1 = 0$ e $3t + 2s - 3 = 0$, che ammettono l'unica soluzione comune $s = -6$, $t = 5$. Quindi la retta è $r(5)$. (d) Chiaramente $p(5) = \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$ è l'unico punto di intersezione tra $r(5)$ ed r_1, mentre l'unico punto di intersezione di r con r_2 è $p(5) - 6 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -11 \\ 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. Equazioni parametriche di $r(5)$ sono

$$\begin{cases} x = s - 5 \\ y = 4 \\ z = s + 10 \end{cases}$$

Eliminando il parametro s si ottengono le equazioni cartesiane $y = 4$ e $x - z = -15$.

Esercizio 4

(a) Ricavando ad esempio t dalla seconda equazione parametrica si ottiene $t = y - 2$, e sostituendo nelle altre due equazioni si ottengono le seguenti equazioni cartesiane per r: $2x - 4y + 9 = 0$ e $y + z - 3 = 0$.

(b) Cerchiamo π nel fascio di piani contenente r. L'equazione di un piano generico del fascio è $\lambda(2x - 4y + 9) + \mu(y + z - 3) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per P si ottiene la soluzione $(\lambda, \mu) = (4, 7)$ a meno di multipli, e quindi si ricava un'equazione di π: $8x - 9y + 7z + 15 = 0$.

(c) Un piano parallelo a π ha equazione $8x - 9y + 7z + d = 0$ per qualche $d \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per Q si ottiene $d = -6$. Invece un piano perpendicolare ad r ha equazione $2x + y - z + d' = 0$, e imponendo il passaggio per Q si ottiene $d' = -2$. La retta r' è l'intersezione dei due piani, quindi delle equazioni cartesiane di r' sono:

$$r' : \begin{cases} 8x - 9y + 7z = 6 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} .$$

Osserviamo che dalle equazioni si deduce facilmente che la giacitura di r' è $\langle \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \wedge \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 11 \\ 13 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

(d) Il vettore $\overrightarrow{PQ} = (0,0,3)$ non è parallelo ad r, che ha direzione $\langle(2,1,-1)\rangle$. Quindi la retta r'' per P e Q non è parallela ad r. Ogni punto di r'' è del tipo $P + t\overrightarrow{PQ} = (1,1,-2+3t)$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. È facile verificare che nessun punto di r'' appartiene ad r usando le equazioni cartesiane di r. Quindi $r'' \cap r = \emptyset$, e concludiamo che r ed r'' sono sghembe.

Esercizio 5

(a) La retta s deve essere della forma $s_t = P_t + \langle N\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, dove $P_t = \begin{pmatrix} -3 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} \in r_1$ ed $N = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è perpendicolare a π. Affinché un punto di s_t, che è del tipo $\begin{pmatrix} -3+u \\ t-2u \\ 4+3u \end{pmatrix}$ per qualche $u \in \mathbb{R}$, appartenga ad r_2 si deve avere $u = -2$ e $t = -3$. In particolare, l'unica retta che soddisfa tutte le richieste è $s_{-3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\rangle$. I punti di intersezione di s_{-3} con r_1 ed r_2 sono rispettivamente $P_{-3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $P_{-3} - 2N = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) La retta s contiene i punti $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'equazione del piano π' passante per questi due punti e per $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ risulta

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = -30y - 20z - 10 = 0.$$

Dividendo per -10 si ottiene l'equazione equivalente $3y + 2z + 1 = 0$.

(c) Sostituendo le equazioni parametriche di s nelle equazioni di $s' : \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 14u + 15 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

che ammette l'unica soluzione $u = -15/14$. Quindi s ed s' sono incidenti in un punto.

Soluzione alternativa: usando le equazioni di s' si calcola facilmente che la sua giacitura è generata dal vettore $\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, il quale non è proporzionale ad N, quindi s ed s' non sono parallele. Poiché s ed s' sono entrambe contenute nel piano π', devono incontrarsi in un punto.

Esercizio 6

(a) La retta r ha direzione $\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\rangle$. Poiché passa per $P = (3,2,1)$, $r = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\rangle$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Risolvendo la prima equazione rispetto a t e sostituendo nelle rimanenti si ottengono le equazioni cartesiane: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x - z = 8 \end{cases}$.

(b) Si scrive subito $\pi' : (x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$. La retta r' per $Q = (1,1,1)$ e ortogonale a π' ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sostituendo queste espressioni di x, y e z nell'equazione di π' e risolvendo rispetto a λ si ottiene $\lambda = -5/14$ e quindi $S = \begin{pmatrix} 9/14 \\ 2/7 \\ -1/14 \end{pmatrix}$.

(c) La retta $u = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Sostituendo x, y e z nell'equazione di π e risolvendo rispetto a μ si ottiene $\mu = -5/4$ e $A = (-3/2, -1/4, 1)$. La retta $t = B + \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 70 \\ 5 \\ -60 \end{pmatrix} \rangle$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 16 + 70\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \\ z = -14 - 60\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizzando queste equazioni e quelle cartesiane di r si trova che t ed r si intersecano nel punto $(2, 0, -2)$, dunque sono incidenti.

Esercizio 7

(a) La retta r ha direzione $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$. Poiché passa per $P = (1, 2, -3)$, $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Risolvendo la seconda equazione rispetto a t e sostituendo nelle rimanenti si ottengono le equazioni cartesiane: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 5y + z = 7 \end{cases}$.

(b) Il piano π' appartiene al fascio di piani contenenti s, quindi ha un'equazione della forma

$$\lambda(x + 2y - 1) + \nu(5y + z + 2) = 0$$

per qualche $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per Q otteniamo la relazione $\lambda + 2\nu = 0$, e scegliendo la soluzione $\lambda = 2$, $\nu = -1$ ricaviamo un'equazione di π':

$$2x - y - z = 4.$$

(c) Equazioni parametriche di u_t sono

$$\begin{cases} x = 3 - t + k(t - 1) \\ y = -1 - 2k \\ z = 3 + k(t + 5) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per determinare i $t \in \mathbb{R}$ per cui le rette u_t ed s sono incidenti, sostituiamo le coordinate di un punto di u_t nelle equazioni cartesiane di s, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} tk - t - 5k = 0 \\ tk - 5k = 0, \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $t = k = 0$. Questo mostra che s ed u_t sono incidenti (nel punto $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$) solo per $t = 0$, quindi $A = \{0\}$.

Esercizio 8

(a) La giacitura di r è generata dal prodotto vettoriale dei vettori ortogonali a π_1 e π_2 dati dai coefficienti delle rispettive equazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Quindi la giacitura di r è $\langle\left(\begin{smallmatrix}-3\\2\\7\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Per determinare P, dall'equazione di π_3 ricaviamo $z = x+y-3$, e sostituendo nelle equazioni di π_1 e π_2 otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x+2y=5 \end{cases}$$

con soluzione unica $(x,y) = (13/8, -3/4)$. Quindi $P = (13/8, -3/4, -17/8)$.
(b) Dalla giacitura di r ricaviamo che il piano π ha un'equazione del tipo $-3x+2y+7z = d$. Imponendo il passaggio per Q si ottiene $d = -3-4 = -7$, dunque $\pi : 3x-2y-7z = 7$. Cerchiamo l'equazione del piano π' come combinazione lineare delle equazioni di π_1 e π_2, contengono entrambi r:

$$\lambda(x-2y+z-1) + \mu(3x+y+z-2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per Q otteniamo $4\lambda - \mu = 0$, dunque possiamo scegliere $\lambda = 1$ e $\mu = 4$, ottenendo $\pi' : 13x+2y+5z = 9$.
(c) Osserviamo che $P = r \cap \pi_3 = (13/8, -3/4, -17/8)$ non appartiene a π, perché le sue coordinate non soddisfano l'equazione $3x-2y-7z = 7$. Quindi

$$r \cap r' = r \cap \pi_3 \cap \pi = \{P\} \cap \pi = \emptyset.$$

Inoltre, la giacitura di r' è generata dal prodotto vettoriale dei vettori ortogonali a π e π_3, dati dai coefficienti delle rispettive equazioni:

$$\begin{pmatrix} 3\\-2\\-7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\\1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\-4\\5 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che r ed r' sono disgiunte e non parallele, dunque sghembe.

Esercizio 9
(a) Determiniamo l'equazione di π_1 imponendo che una combinazione lineare

$$\lambda(x+y-z-1) + \mu(y-3z-2) = 0$$

delle equazioni di r sia soddisfatta dalle coordinate di P, ottenendo la relazione $\lambda = 3\mu$. Scegliendo $\lambda = 3$, $\mu = 1$ otteniamo $\pi_1\colon\ 3x+4y-6z = 5$.
(b) Abbiamo $s = P + \langle v\rangle$, dove v è un vettore ortogonale a π_2, ovvero parallelo a $\left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\5\end{smallmatrix}\right)$. Quindi s ha equazioni parametriche $s\colon \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -t+2 \\ z = 5t+1 \end{cases}$. Eliminando la t dalle equazioni otteniamo le seguenti equazioni cartesiane di s:

$$s\colon \begin{cases} x+3y = 7 \\ 5y+z = 11 \end{cases}$$

(c) Potremmo determinare t usando il fatto che passa per un punto $P_1 \in r$ e per un punto $P_2 \in r'$ tali che il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è parallelo a $w = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$. Determiniamo invece t come intersezione del piano affine π_3 contenente r e parallelo a w e del piano affine π_4 contenente r' e parallelo a w. Un piano generico contenente r avrà un'equazione del tipo

$$\lambda(x+y-z-1) + \mu(y-3z-2) = \lambda x + (\lambda+\mu)y + (-\lambda-3\mu)z - \lambda - 2\mu = 0$$

Un tale piano è parallelo a w se e solo il vettore $\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \lambda+\mu\\ -\lambda-3\mu\end{smallmatrix}\right)$ è ortogonale a w, ovvero se e solo se $\lambda = -6\mu$. Scegliendo ad esempio $(\lambda,\mu) = (6,-1)$ otteniamo $\pi_3\colon\ 6x+5y-3z=4$. Analogamente, un piano contenente r' avrà un'equazione del tipo

$$\lambda(x-2y+z-1)+\mu(2x-y+z-3) = (\lambda+2\mu)x+(-2\lambda-\mu)y+(\lambda+\mu)z-\lambda-3\mu = 0$$

Imponendo l'ortogonalità del vettore $\left(\begin{smallmatrix}\lambda+2\mu\\ -2\lambda-\mu\\ \lambda+\mu\end{smallmatrix}\right)$ con w si ottiene la condizione $3\lambda = -4\mu$ e scegliendo $(\lambda,\mu) = (-4,3)$ si trova $\pi_4\colon\ 2x+5y-z=5$. Dunque $t\colon\ \begin{cases}6x+5y-3z=4\\ 2x+5y-z=5\end{cases}$.

Esercizio 10

(a) Si verifica facilmente che il sistema 4×3 ottenuto come unione delle equazioni cartesiane di r_1 ed r_2 non ha soluzioni. Quindi $r_1\cap r_2=\emptyset$. Dalle equazioni cartesiane di r_1 si vede che per ogni punto $\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right)\in r_1$ si ha $x=2y+1$ e $z=-y$, quindi $r_1 = \{\left(\begin{smallmatrix}1+2s\\ s\\ -s\end{smallmatrix}\right) \mid s\in\mathbb{R}\}$ e la giacitura di r_1 risulta $\langle\left(\begin{smallmatrix}2\\ 1\\ -1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. In maniera analoga si trova che la giacitura di r_2 è $\left(\begin{smallmatrix}1\\ -2\\ 1\end{smallmatrix}\right)$, quindi r_1 ed r_2 non sono parallele, dunque sono sghembe.

(b) L'unica retta $r'_s = P(s)+\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ parallela ad r e passante per $P(s) = \left(\begin{smallmatrix}1+2s\\ s\\ -s\end{smallmatrix}\right)\in r_1$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases}x = 1+2s+t\\ y = s+2t\\ z=-s+t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora $s\in\mathbb{R}$ in modo che $r'_s\cap r_2\neq\emptyset$. Imponendo che un punto di r'_s soddisfi le equazioni di r_2 otteniamo le equazioni $2s+4t=1$ e $-s+4t=0$, con soluzione unica $(s,t) = (1/3, 1/12)$. Dunque la retta cercata è $r' = r'_{1/3} = \left(\begin{smallmatrix}5/3\\ 1/3\\ -1/3\end{smallmatrix}\right)+\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

(c) Poiché la giacitura di r' è diversa dalla giacitura di r_1, r' interseca r_1 solamente nel punto $\left(\begin{smallmatrix}5/3\\ 1/3\\ -1/3\end{smallmatrix}\right)$. Dal punto precedente si deduce che r' interseca r_2 nel punto $\left(\begin{smallmatrix}5/3\\ 1/3\\ -1/3\end{smallmatrix}\right)+\frac{1}{12}\left(\begin{smallmatrix}1\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}7/4\\ 1/2\\ -1/4\end{smallmatrix}\right)$.

CAPITOLO 13

Applicazioni bilineari simmetriche e teorema di Sylvester

1. Preliminari

DEFINIZIONE. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Un'applicazione $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è detta *bilineare simmetrica* se

- $g(v, w) = g(w, v)$ per ogni $v, w \in V$;
- $g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 g(v_1, w) + \alpha_2 g(v_2, w)$ per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, w \in V$.

ESEMPI.

(1) Sia $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, data da $g(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)) = x_1x_2 + y_1y_2$. Quest'applicazione non è altro che il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$.

(2) Sia $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, data da $g(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)) = x_1x_2 - y_1y_2$. La verifica che g è un'applicazione bilineare simmetrica è meccanica. Osserviamo che $g(v, v)$ non è sempre maggiore o uguale a zero. Infatti, $g(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = x^2 - y^2 \geq 0$ se e solo se $|x| \geq |y|$. Quindi g si annulla sull'unione delle due rette $y = \pm x$, è positiva su $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\}$ e negativa su $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\}$.

(3) Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice simmetrica $n \times n$. Consideriamo l'applicazione $g_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da

$$g_A(X, Y) = {}^tXAY, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Più esplicitamente, se $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$g_A(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

È facile verificare che l'applicazione g_A è bilineare e simmetrica e che, se $E_1, \ldots, E_n$ sono i vettori della base canonica, $g(E_i, E_j) = a_{ij}$. Quando $A = I$, l'applicazione g_A non è altro che il *prodotto scalare standard* su $\mathbb{R}^n$. Invece per $n = 4$ e $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, g_A è il cosiddetto *prodotto scalare di Minkowski*, usato nella teoria della relatività ristretta.

OSSERVAZIONE. Per ogni applicazione bilineare simmetrica $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha $g = g_A$ per qualche matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Infatti, se indichiamo con $E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{R}^n$ i vettori della base canonica e $X = \sum_i x_i E_i$, $Y = \sum_j y_j E_j$, abbiamo

$$g(X, Y) = g(\sum_i x_i E_i, \sum_j y_j E_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g(E_i, E_j),$$

dunque $g = g_A$, dove $A = (g(E_i, E_j))_{i,j}$.

2. Sottospazi ortogonali

Come nel caso dei prodotti scalari Euclidei, dato un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$, un'applicazione bilineare simmetrica $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ permette di definire il *sottospazio g-ortogonale*:

$$W^{\perp_g} = \{v \in V \mid g(v, w) = 0 \,\forall w \in W\} \subseteq V.$$

La verifica che $W^{\perp_g}$ è un sottospazio vettoriale di V si fa esattamente come nel caso dei prodotti scalari Euclidei. Inoltre, se $\{w_1, \dots, w_m\}$ è una base di W, il nucleo dell'applicazione lineare $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^m$ data da $\varphi(v) = (g(v, w_1), \dots, g(v, w_m))$ è esattamente $W^{\perp_g}$. Quindi

$$\dim V = \dim W^{\perp_g} + \dim \operatorname{Im}(\varphi) \leq \dim W^{\perp_g} + m,$$

ovvero

$$\boxed{\dim W^{\perp_g} \geq \dim V - \dim W}$$

OSSERVAZIONE. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $W \cap W^{\perp_g} = \{0\}$. Combinando la formula appena vista con la formula di Grassmann otteniamo

$$\dim(W + W^{\perp_g}) = \dim W + \dim W^{\perp_g} \geq \dim W + \dim V - \dim W = \dim V,$$

quindi

$$\boxed{W \cap W^{\perp_g} = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad V = W \oplus W^{\perp_g}}$$

I seguenti esempi mostrano che, contrariamente al caso dei prodotti scalari Euclidei, può succedere che $W \cap W^{\perp_g} \neq \{0\}$ e che $\dim W^{\perp_g} > \dim V - \dim W$.

ESEMPI.

(1) Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Allora

$$g_A(X, Y) = {}^tX \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) Y = 0 \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathbb{R}^2,$$

quindi $(\mathbb{R}^2)^{\perp_{g_A}} = \mathbb{R}^2$.

(2) Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Se $W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \subset \mathbb{R}^2$ allora, poiché

$$(x, y) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = x,$$

abbiamo $W^{\perp_{g_A}} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $\mathbb{R}^2 = W \oplus W^{\perp_{g_A}}$. Se $U = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ allora, poiché

$$(x, y) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

abbiamo $U^{\perp_{g_A}} = \mathbb{R}^2$ e $\dim U^{\perp_{g_A}} > \dim \mathbb{R}^2 - \dim U$.

(3) Consideriamo $g_A\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Sia $t \in \mathbb{R}$ e $W_t = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right) \rangle \subset \mathbb{R}^2$.

$$W_t^{\perp_{g_A}} = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right) = x - ty = 0\} = \{\left(\begin{smallmatrix} ty \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle \left(\begin{smallmatrix} t \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

I vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} t \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sono proporzionali se e solo se $\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 - t^2 = 0$, quindi

$$W_t \cap W_t^{\perp_{g_A}} = \begin{cases} \{0\} & \text{se } t \neq \pm 1, \\ W_t & \text{se } t = \pm 1. \end{cases}$$

3. Vettori isotropi e nucleo

Un'altra differenza importante tra le applicazioni bilineari simmetriche e i prodotti scalari Euclidei è il fatto che, data un'applicazione bilineare $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$, in generale possono esistere vettori non nulli g-ortogonali a sé stessi. Un vettore $v \in V$ si dice *isotropo* (o g-isotropo) se $v \neq 0$ e $g(v,v) = 0$; si dice *anisotropo* (o g-anisotropo) se $g(v,v) \neq 0$. Osserviamo che se $v \in V$ è un vettore anisotropo allora per definizione $\langle v \rangle \cap \langle v \rangle^{\perp_g} = \{0\}$, quindi per quanto visto nella sezione precedente abbiamo $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp_g}$. Riassumendo:

$$\boxed{v \text{ anisotropo} \quad \Longrightarrow \quad V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp_g}}$$

Chiaramente, ogni qualvolta esiste un sottospazio $W \subseteq V$ tale che $W \cap W^{\perp_g} \neq \{0\}$, allora esistono vettori isotropi in V.

ESEMPIO. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. I vettori della base canonica $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^2$ soddisfano

$$g_A(E_1, E_1) = g_A(E_2, E_2) = 0.$$

Essi sono quindi isotropi per g_A.

In generale, possono esistere vettori non nulli $v \in V$ che sono addirittura g-ortogonali a tutti i vettori di V: questo succede ad esempio nel caso limite di $g_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dove A è la matrice nulla. Osserviamo che, fissata $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrica, l'insieme dei vettori di V che sono g-ortogonali a tutti i vettori di V non è altro che il sottospazio $V^{\perp_g}$.

DEFINIZIONE. Un'applicazione bilineare simmetrica $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è *non degenere* se $V^{\perp_g} = \{0\}$, e *degenere* altrimenti. Il sottospazio vettoriale $V^{\perp_g} \subseteq V$ è detto *nucleo di* g. Lo denoteremo anche $\ker(g)$.

OSSERVAZIONE. Tutti i vettori non nulli del nucleo di un'applicazione bilineare simmetrica g sono (ovviamente) isotropi.

ESEMPIO. Il prodotto scalare standard $g_I\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dato da $g_I(X,Y) = {}^tXY$, è non degenere perché, essendo positivo, non ha vettori isotropi.

OSSERVAZIONE. Siano $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ una base e $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica. Dati due vettori $v = \sum_i x_i v_i$ e $w = \sum_j y_j v_j$, per bilinearità abbiamo

$$g(v,w) = g(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j v_j) = \sum_{i,j} x_i y_j g(v_i, v_j) = g_A(X,Y),$$

dove $A = (g(v_i, v_j)) \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $X = x_B(v)$, $Y = x_B(w)$ sono, rispettivamente, i vettori delle coordinate di v e w. Quindi un vettore $v \in \ker(g)$ se e solo se $x_B(v) \in \ker(g_A)$. In particolare,

$$\boxed{g \text{ è degenere se e solo se } g_A \text{ è degenere}}$$

Data un'applicazione bilineare simmetrica $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ e una base $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, la matrice $A = (g(v_i, v_j))$ è detta *matrice associata a g tramite la base B*.

PROPOSIZIONE 13.1. *Sia $g_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica associata alla matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Allora $\ker(g_A) = \ker(A) \subset \mathbb{R}^n$, dove A è vista come endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Quindi g_A è non degenere se e solo se A è non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. L'inclusione $\ker(A) \subset \ker(g_A)$ si verifica immediatamente. Viceversa, sia $X \in \ker(g_A)$. Allora

$$g_A(X,Y) = {}^tXAY = 0 \quad \forall\, Y \quad \Rightarrow \quad {}^tXA = 0$$

perché, come abbiamo visto nell'esempio precedente, il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ è non degenere. Trasponendo ambo i membri dell'ultima uguaglianza si ottiene $AX = 0$, ovvero $X \in \ker(A)$. $\square$

ESEMPIO. Applicando la proposizione 13.1 si vede immediatamente che l'applicazione bilineare $g_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)}$ e il prodotto scalare di Minkowski sono entrambi non degeneri.

4. Restrizioni

DEFINIZIONE. Data un'applicazione bilineare simmetrica $g\colon\ V \times V \to \mathbb{R}$, ogni sottospazio vettoriale $W \subset V$ è dotato di un'applicazione bilineare simmetrica indotta $g|_W\colon\ W \times W \to \mathbb{R}$ definita ponendo $g|_W(w_1, w_2) = g(w_1, w_2)$ per ogni $w_1, w_2 \in W$. L'applicazione $g|_W$ è detta *restrizione* di g a W.

ESEMPIO. Consideriamo $g_A\colon\ \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dove $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Se $W = \langle E_1, E_4\rangle$, la matrice associata alla restrizione di g_A a W tramite la base $\{E_1, E_4\}$ è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, che è non singolare. Quindi $W \cap W^{\perp_{g_A}} = \{0\}$ e $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp_{g_A}}$. Determiniamo il sottospazio

$$W^{\perp_{g_A}} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid g_A(X, Y) = {}^tXAY = 0 \text{ per ogni } Y \in W\}.$$

Osserviamo che la condizione ${}^tXAY = 0$ equivale a dire che il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ è ortogonale, rispetto a prodotto scalare standard, al vettore $AY \in \mathbb{R}^4$. Poiché un vettore $X \in \mathbb{R}^4$ è g_A-ortogonale a tutti i vettori di W se e solo se è g_A-ortogonale ai vettori $E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ed $E_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $W^{\perp_{g_A}}$ è l'insieme dei vettori ortogonali, rispetto al prodotto scalare standard, ai vettori

$$AE_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{e} \quad AE_4 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Quindi

$$W^{\perp_{g_A}} = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 3w = 3x + z = 0\} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\rangle.$$

5. Basi ortogonali

DEFINIZIONE. Data un'applicazione bilineare $g\colon\ V \times V \to \mathbb{R}$, una base $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ si dice *g–ortogonale* o *ortogonale rispetto a g* se $g(v_i, v_j) = 0$ per ogni $i \neq j$.

Ad esempio, la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare standard g_I, e la base canonica di $\mathbb{R}^4$ lo è rispetto al prodotto scalare di Minkowski.

Le basi ortogonali sono utili perché la scrittura di un'applicazione bilineare simmetrica in funzione delle coordinate rispetto a una base si semplifica molto quando si utilizzano basi ortogonali. Tra poco vedremo che per ogni applicazione bilineare su uno spazio vettoriale reale V esiste una base g-ortogonale.

OSSERVAZIONE. Se tutti i vettori di (V, g) fossero isotropi allora g sarebbe l'applicazione nulla. In realtà, è vero qualcosa di più forte. Data una base qualunque $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se sia i vettori di B che i vettori della forma $v_i + v_j$, per $i, j = 1, \ldots, n$, sono isotropi, allora $g = 0$. Infatti in tal caso abbiamo

$$0 = g(v_i + v_j, v_i + v_j) = g(v_i, v_i) + 2g(v_i, v_j) + g(v_j, v_j) = 2g(v_i, v_j).$$

Quindi la matrice associata $A = (g(v_i, v_j))$ è nulla e, per quanto visto, anche g.

PROPOSIZIONE 13.2. *Ogni applicazione bilineare simmetrica* $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ *ammette una base ortogonale.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $n = \dim V \geq 1$. Poiché per $n = 1$ non cè niente da dimostrare, supponiamo direttamente $n > 1$. Se $g = 0$ qualunque base di V è ortogonale e abbiamo finito. Se $g \neq 0$, per l'osservazione precedente esiste un vettore anisotropo $v \in V$ e sappiamo che

$$V = < v > \oplus < v >^{\perp_g} .$$

Per l'ipotesi induttiva applicata a $< v >^{\perp_g}$ (dotato della restrizione di g), il sottospazio $< v >^{\perp_g}$ ammette una base g-ortogonale, che insieme con v fornisce una base g-ortogonale di V. □

OSSERVAZIONE. L'insieme dei vettori isotropi di una base ortogonale di (V, g) è una base di $\ker(g)$. Infatti, sia $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortogonale e $u_{k+1}, \ldots, u_n$ i vettori isotropi che ne fanno parte. È immediato verificare che $u_{k+1}, \ldots, u_n \in \ker(g)$. Viceversa, se $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i \in \ker(g)$ allora $a_i g(u_i, u_i) = g(v, u_i) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, e dunque, poiché $g(u_i, u_i) \neq 0$ per $i = 1, \ldots, k$, $a_1 = \cdots = a_k = 0$, ovvero $v \in \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle$.

6. Segnatura

DEFINIZIONE. Sia (V, g) uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dotato di applicazione bilineare simmetrica. Un sottospazio vettoriale $W \subset V$ si dice *positivo* (rispettivamente *negativo*) se per ogni vettore non nullo $w \in W$ si ha $g(w, w) > 0$ (rispettivamente $g(w, w) < 0$).

TEOREMA 13.3 (di Sylvester). *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$, $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ *un'applicazione bilineare simmetrica e* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ *una base* g*-ortogonale. Supponiamo che, per qualche* $0 \leq r, s \leq n$*:*

- $g(v_i, v_i) > 0$ *per* $i = 1, \ldots, r$*;*
- $g(v_i, v_i) < 0$ *per* $i = r + 1, \ldots, r + s$*;*
- $g(v_i, v_i) = 0$ *per* $i = r + s + 1, \ldots, n$*.*

Allora $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ *è un sottospazio positivo,* $\langle v_{r+1}, \ldots, v_{r+s} \rangle$ *è un sottospazio negativo, ed* r, s *sono, rispettivamente, la dimensione massima di un sottospazio positivo e di un sottospazio negativo di* (V, g)*, mentre* $n - r - s = \dim \ker(g)$*. In particolare, la terna* $(r, s, n - r - s)$ *non dipende dalla scelta della base* g*-ortogonale ma soltanto da* g*.* □

DIMOSTRAZIONE. La matrice della restrizione di g a $W_+ = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ rispetto alla base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è diagonale, e sulla diagonale ha i numeri $g(v_i, v_i) > 0$, $i = 1, \ldots, r$. Se $w = \sum_{i=1}^r x_i v_i \in W_+$,

$$g(w, w) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 g(v_i, v_i) \geq 0,$$

e chiaramente $g(w, w) = 0$ se e solo se $w = 0$. Quindi W_+ è un sottospazio positivo. In modo analogo si verifica che $W_- = \langle v_{r+1}, \ldots, v_{r+s} \rangle$ è un sottospazio negativo. Osserviamo che ogni vettore $w_- + w_0 \in W_- + \ker(g) = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$ soddisfa $g(w_- + w_0, w_- + w_0) = g(w_-, w_-) \leq 0$. Se $U_+ \subset V$ è un sottospazio positivo allora U_+ non contiene vettori $u \neq 0$

tali che $g(u,u) \leq 0$, quindi $U_+ \cap (W_- + \ker(g)) = \{0\}$. Di conseguenza, dalla formula di Grassmann otteniamo

$$\dim U_+ = \dim(U_+ + W_- + \ker(g)) - \dim(W_- + \ker(g)) \leq n - (n-r) = r.$$

Analogamente, utilizzando il sottospazio $W_+ + \ker(g)$ si vede che ogni sottospazio negativo U_- soddisfa $\dim U_- \leq s$. Il fatto che $n - r - s = \dim \ker(g)$ è già stato osservato. □

DEFINIZIONE. Sia $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica. La terna di numeri $(r, s, n-r-s)$ associata a g in virtù del teorema di Sylvester è la *segnatura* di g. La denoteremo $\operatorname{segn}(g)$. La segnatura di una matrice simmetrica reale A è, per definizione, $\operatorname{segn}(g_A)$.

ESEMPI. (1) Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ ha segnatura $(n, 0, 0)$;
(2) il prodotto $g_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)}$ su $\mathbb{R}^2$ ha segnatura $(1,1,0)$;
(3) il prodotto di Minkowski su $\mathbb{R}^4$, associato alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, ha segnatura $(1,3,0)$.

ESEMPIO. Consideriamo $g_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Determiniamo i vettori g_A-isotropi, ovvero gli $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tali che $g_A(X,X) = 0$. Sia $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$g_A(X,X) = -x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

se e solo se $z^2 = x^2 + y^2$. Poiché $z = 0$ implica $X = 0$, l'intersezione del piano $z = 0$ con l'insieme dei vettori isotropi è $\{0\}$. Per quanto detto, se $X \neq 0$ è isotropo esiste un numero reale $\lambda \neq 0$ tale che λX è ancora isotropo e della forma $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Viceversa, qualunque vettore isotropo è un multiplo di un vettore isotropo della forma $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Inoltre, l'intersezione del piano $z = 1$ con l'insieme dei vettori isotropi è il cerchio $S = \{(x,y,1) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Dunque l'insieme dei vettori isotropi è il "cono" $C = \cup_{X \in S} \langle X \rangle \subset \mathbb{R}^3$. È facile verificare che un sottospazio di dimensione due che interseca il cono solo nell'origine è negativo, mentre se interseca il cono in due rette non è né positivo né negativo (Figura 1).

OSSERVAZIONE. È facile dimostrare che se (V,g) e (V',g') sono due spazi vettoriali dotati di applicazioni bilineari simmetriche e $\operatorname{segn}(g) = \operatorname{segn}(g')$, allora esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $f\colon V \to V'$ tale che, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$,

$$g(v,w) = g'(f(v), f(w)).$$

In altre parole, la segnatura determina univocamente la coppia (V,g) a meno di isomorfismo.

PROPOSIZIONE 13.4. *Sia $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $A = (g(v_i, v_j))$ la matrice associata a g. Allora*

$$\operatorname{segn}(g) = \operatorname{segn}(g_A) = (a_+, a_-, a_0),$$

dove a_+ è il numero di autovalori positivi di A, a_- il numero di autovalori negativi e a_0 il numero di autovalori nulli (contati con le loro molteplicità algebriche).

DIMOSTRAZIONE. Se $X = x_B(v)$ ed $Y = x_B(w)$ sono i vettori delle coordinate di $v, w \in V$ rispetto a B, abbiamo già osservato che

$$g(v,w) = {}^tXAY = g_A(X,Y) = g_A(x_B(v), x_B(w)).$$

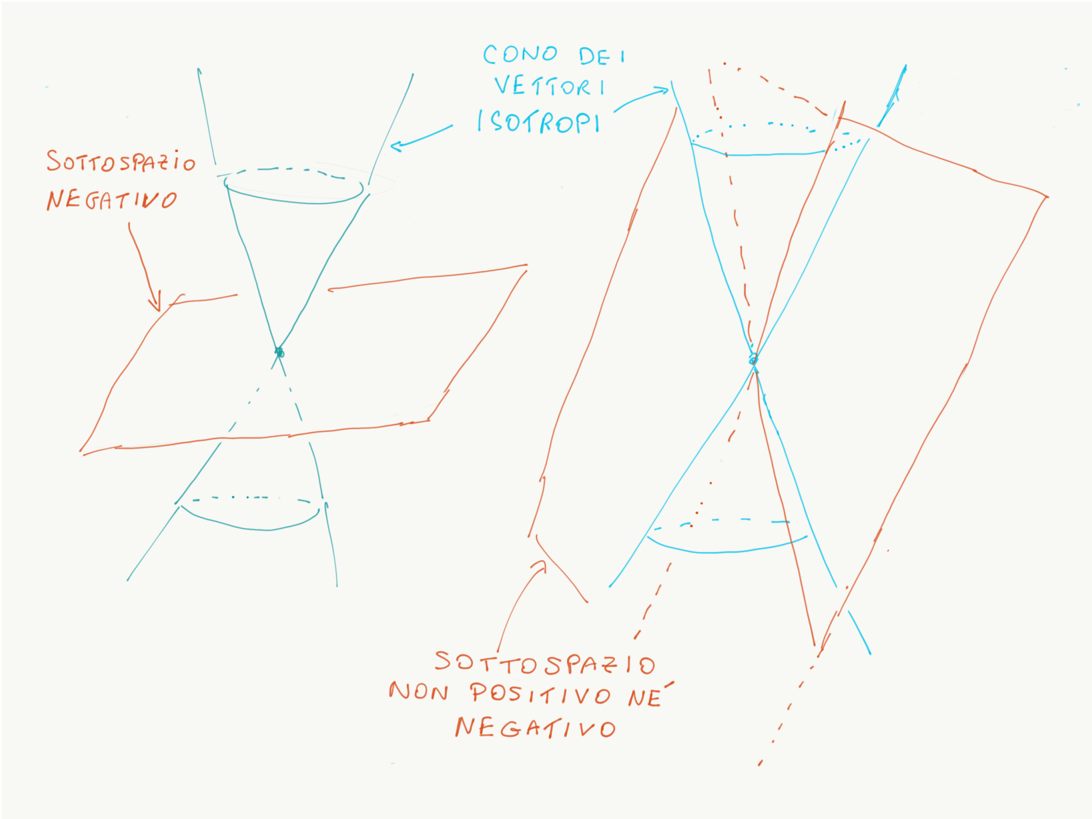


FIGURA 1

Da questa formula segue subito che se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è una base ortogonale per g allora

$$\{x_B(u_1), \dots, x_B(u_n)\}$$

è una base ortogonale per g_A e $\operatorname{segn}(g) = \operatorname{segn}(g_A)$. Per il teorema spettrale A ammette una base di autovettori $\{X_1, \dots, X_n\}$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. Supponiamo che $AX_i = \lambda_i X_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora, per ogni $i, j = 1, \dots, n$ abbiamo

$$g_A(X_i, X_j) = {}^tX_i A X_j = \lambda_j {}^tX_i X_j = \lambda_j \delta_{ij}.$$

Questo mostra che $\{X_i\}$ è una base g_A-ortogonale e che $\operatorname{segn}(g_A) = (a_+, a_-, a_0)$. □

Per calcolare la segnatura di g_A basta conoscere i segni delle radici del polinomio caratteristico $p_A(t)$. La molteplicità della radice 0 è semplicemente il massimo d tale che t^d divide $p_A(t)$, mentre il numero di radici positive (e quindi di quelle negative) si può stabilire usando il seguente risultato:

TEOREMA 13.5 (Criterio di Cartesio). *Se un polinomio*

$$q(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$$

ha tutte le radici reali, allora il numero di radici strettamente positive, contate con le loro molteplicità, è pari al numero delle variazioni di segno nella successione dei coefficienti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, *trascurando eventuali coefficienti nulli.* □

ESEMPIO. Applichiamo la proposizione 13.4 e il criterio di Cartesio per calcolare la segnatura dell'applicazione bilineare simmetrica $g_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A risulta $p_A(t) = -t^3 + 3t + 2$, quindi 0 non è autovalore di A, e la successione dei coefficienti di $p_A(t)$ ha una sola variazione di segno, quindi c'è un autovalore positivo e due negativi. Dunque la segnatura di g_A è $(1, 2, 0)$.

7. Algoritmo per la costruzione di basi ortogonali

L'algoritmo generalizza l'algoritmo di Gram-Schmidt al caso di uno spazio vettoriale reale V dotato di un'applicazione bilineare simmetrica g non necessariamente positiva.

Tramite questo algoritmo si può costruire una base ortogonale per (V, g) a partire da una qualunque base $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ procedendo nel modo seguente. Per $i = 1, \dots, n$:

- se v_i è anisotropo, si rimpiazza v_j con $v_j - \dfrac{g(v_j, v_i)}{g(v_i, v_i)} v_i$ per ogni $j > i$;
- se v_i è isotropo ma esiste un vettore anisotropo v_j con $j > i$, si scambiano v_i e v_j e si applica il punto precedente;
- se ogni v_j per $j \geq i$ è isotropo, si cerca un vettore anisotropo della forma $v_j + v_k$ con $j, k \geq i$. Se esiste si mette al posto di v_j e si applica uno dei due punti precedenti (a seconda che $j = i$ oppure $j > i$). Se non esiste, la base è ortogonale e l'algoritmo si interrompe.

ESEMPIO. Applichiamo l'algoritmo per determinare una base ortogonale e la segnatura dell'applicazione bilineare simmetrica $g = g_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dove $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{smallmatrix}\right)$. Partiamo dalla base canonica $\{E_1, E_2, E_3\}$. Dalla matrice si vede che $g_A(E_i, E_i) = A_{ii} = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Quindi E_i è isotropo per ogni $i = 1, 2, 3$. Cercando tra i vettori $E_j + E_k$ troviamo che $E_1 + E_2$ è anisotropo perché $g(E_1 + E_2, E_1 + E_2) = 2g(E_1, E_2) = 2$, quindi lo mettiamo al posto di E_1 e ripartiamo dalla base $\{E_1 + E_2, E_2, E_3\}$. Ora $E_1 + E_2$ è anisotropo, quindi possiamo rimpiazzare E_2 con

$$E_2 - \frac{g(E_1 + E_2, E_2)}{g(E_1 + E_2, E_1 + E_2)}(E_1 + E_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

ed E_3 con

$$E_3 - \frac{g(E_1 + E_2, E_3)}{g(E_1 + E_2, E_1 + E_2)}(E_1 + E_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Riscalando gli ultimi due vettori possiamo ripartire con la base

$$B = \{v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\},$$

in cui per costruzione $g(v_1, v_2) = g(v_1, v_3) = 0$. Poiché $g(v_2, v_2) = -2 \neq 0$, possiamo procedere rimpiazzando v_3 con

$$v_3 - \frac{g(v_3, v_2)}{g(v_2, v_2)} v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{0}{-2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

L'ultimo vettore non è cambiato perché era già ortogonale a v_2! Abbiamo quindi concluso che la base B è ortogonale per g_A. Poiché calcolando si trova $g(v_3, v_3) = -2$, vediamo che la segnatura di g_A è $(1, 2, 0)$, come già calcolato nell'esempio alla fine della sezione precedente.

Esercizi

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ determinata dalla matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se g è non degenere;

(b) determinare la segnatura della restrizione di g al sottospazio

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\};$$

(c) determinare la segnatura di g.

Esercizio 2

Sia $g\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)) = x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + 4x_3y_3.$$

Mostrare che g è un'applicazione bilineare simmetrica e verificare se è non degenere.

Esercizio 3

Sia $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica definita dalla matrice

$$G_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ una base g_λ-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ e la segnatura di g_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Sia $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica associata alla matrice

$$G_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} 3\lambda-3 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 9\lambda-6 \end{smallmatrix}\right).$$

Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ una base g_λ-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ e la segnatura di g_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5

Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice simmetrica A_λ data da

$$A_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda+2 \end{smallmatrix}\right).$$

Sia $g_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da A_λ. Determinare la segnatura di A_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6
Sia $g_A\colon\ \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 & -3 \\ -8 & -10 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Determinare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che
$W \subset W^{\perp_{g_A}}$.

Esercizio 7
Sia $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare data da

$$g_\lambda(X, Y) = {}^tXG_\lambda Y, \quad \text{dove} \quad G_\lambda = \begin{pmatrix} 3 & \lambda^2 & -1 \\ 4 & -3\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinare la segnatura di g_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che g_λ è simmetrica.

Esercizio 8
Considerare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita dalla la matrice

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda/4 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda/4 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(a) determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui g_λ è degenere;
(b) calcolare la segnatura di g_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
(c) calcolare la segnatura della restrizione di g_λ al sottospazio π di equazione $2x - y + 3z = 0$.

Esercizio 9
Sia $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare definita dalla matrice

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2\lambda + 2 & \lambda \\ -1 & \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base g_λ-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
(b) determinare la segnatura di g_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10
Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $g_\lambda\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica definita dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base g_λ-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare la segnatura di g_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
(c) calcolare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la segnatura della restrizione di g_λ al piano π di equazione $x - y = 0$.

Esercizio 11

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $g_a\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita dalla matrice $M_a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare una base g_a-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare la segnatura di g_a per ogni $a \in \mathbb{R}$;
(c) calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, la segnatura della restrizione di g_a al sottospazio π di equazione $z = 0$.

Esercizio 12

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $g_k\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica definita dalla matrice $M_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & k & 1 \\ k & 0 & k+1 \\ 1 & k+1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la segnatura della restrizione di g_k al sottospazio π di equazione $y = 0$;
(b) determinare l'insieme $N = \{k \in \mathbb{R} \mid g_k$ è non degenere$\}$;
(c) determinare una base g_k-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(d) calcolare la segnatura di g_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 13

Sia $g\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica definita dalla matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare una base g-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ e la segnatura di g;
(b) determinare i vettori isotropi contenuti nel piano di equazione $x + y = 0$;
(c) calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la segnatura della restrizione di g al piano di equazione $x + y + kz = 0$;

Esercizio 14

Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica $g_k\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita dalla matrice $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Determinare una base g_k-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare la segnatura di g_k per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(c) calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la segnatura della restrizione di g_k al sottospazio π di equazione $x - y + z = 0$.

Esercizio 15

Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice reale $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2k & k \\ 0 & k & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$:

(a) calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_k;
(b) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori per A_k;
(c) calcolare la segnatura dell'applicazione bilineare g_{A_k} definita da A_k;
(d) determinare l'insieme dei vettori g_{A_k}–isotropi contenuti nel piano π di equazione $x + ky = 0$.

Esercizio 16

Sia $b_k\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ k-1 & k+1 & 3k-2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che b_k è non degenere;

(b) determinare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base b_k-ortogonale di $\mathbb{R}^3$;

(c) calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la segnatura di b_k;

(d) calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la segnatura di b_k ristretta al sottospazio di equazione $x = 0$.

Esercizio 17

Sia $b_k\colon\ \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione bilineare simmetrica data da $b_k(X, Y) = {}^tXB_kY$, dove

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i $k \in \mathbb{R}$ tali che b_k è degenere;

(b) calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la segnatura della restrizione di b_k al sottospazio

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle;$$

(c) calcolare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la segnatura di b_k;

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1

(a) Si ha $\det(G) = -4 \neq 0$, quindi g è non degenere. (b) U ha base $\{u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$, e calcolando si trova che la corrispondente matrice $(g(u_i, u_j))$ della restrizione di g ad U è uguale a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi la restrizione $g|_U$ è degenere, e il vettore $u_1 - u_2 \in U$, avendo coordinate $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$, appartiene al nucleo di $g|_U$. Osserviamo che $g(u_1, u_1) = 1$ e che $\{u_1, u_1 - u_2\}$ è una base g-ortogonale di U. Quindi la segnatura di $g|_U$ è $(1, 0, 1)$. (c) Per calcolare la segnatura di g vogliamo completare il vettore anisotropo u_1 ad una base g–ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Cerchiamo un vettore che, insieme a u_1, generi un sottospazio bidimensionale W tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp_g}$, per poi completare i due vettori trovati con un generatore di $W^{\perp}$. Un vettore generico $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è g–ortogonale ad u_1 se e solo se

$$(x, y, z)G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x + 2y + z = 0.$$

Ad esempio, il vettore $u_1 - u_2 \in u_1^{\perp_g}$, ma il sottospazio $U = \langle u_1, u_1 - u_2 \rangle$ non va bene perché abbiamo visto che $u_1 - u_2$ appartiene al nucleo di $g|_U$ e quindi $U \cap U^{\perp_g} \neq \{0\}$. Proviamo con il vettore $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è g-ortogonale ad u_1 e soddisfa $g(u_3, u_3) = -3$. Poiché la matrice della restrizione di g a $\langle u_1, u_3 \rangle$ rispetto alla base $\{u_1, u_3\}$ è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, che è non singolare, abbiamo $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp_g}$, quindi per completare i vettori u_1, u_3 ad una base g-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ basterà aggiungere un vettore g-ortgonale ad entrambi. La g–ortogonalità ad u_3 è la condizione

$$(x, y, z)G \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3y + z = 0,$$

quindi $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ è g–ortogonale sia ad u_1 che a u_3, e $g(u_4, u_4) = 12$, dunque la segnatura di g è $(2, 1, 0)$.

Esercizio 2
Si vede facilmente che $g = g_A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Poiché A è simmetrica, segue subito che g è bilineare e simmetrica. Inoltre, $\det(A) = -13 \neq 0$, quindi g è non degenere.

Esercizio 3
Il vettore $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa $g_\lambda(e_1, e_1) = 1$, quindi è anisotropo e

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^{\perp_{g_\lambda}}.$$

Calcolando si trova che il sottospazio ortogonale a $v_1 := e_1$ è l'insieme dei vettori $xe_1 + ye_2 + ze_3$ tali che $x = -2y - \lambda z$. Quindi $\langle v_1 \rangle^{\perp_{g_\lambda}}$ è generato da $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 := \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Inoltre $g_\lambda(v_2, v_2) = -4$. Imponendo l'ortogonalità a v_2 si ottiene la relazione $y = -\frac{2\lambda+1}{4} z$, che ci permette di selezionare all'interno di $\langle v_1 \rangle^\perp$ il vettore $v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2\lambda-1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcolando si ottiene $g_\lambda(v_4, v_4) = 4(4\lambda + 5)$. Da questo possiamo concludere che la segnatura di g_λ è $(2, 1, 0)$ per $\lambda > -5/4$, $(1, 2, 0)$ per $\lambda < -5/4$ e $(1, 1, 1)$ per $\lambda = -5/4$.

Esercizio 4
Il vettore $v_1 = e_2$ è anisotropo e si vede subito che $\langle v_1 \rangle^{\perp_g} = \langle e_1, e_3 \rangle$. Poniamo $v_2 = e_1$. Calcolando si trova che un vettore generico (x, y, z) è g_λ-ortogonale a v_1 se e solo se $y = 0$, ed è g_λ-ortogonale a v_2 se $3x + z = 0$ (se $\lambda = 1$ in realtà v_2 è nel nucleo di g_λ, ma possiamo ignorare questo fatto). Ponendo $v_3 = (1, 0, -3)$, abbiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base g_λ-ortogonale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, $g_\lambda(v_1, v_1) = -1$, $g_\lambda(v_2, v_2) = 3(\lambda - 1)$ e $g_\lambda(v_3, v_3) = 78\lambda - 51$. Quindi la segnatura di g_λ è $(0, 3, 0)$ se $\lambda < 17/26$, $(0, 2, 1)$ se $\lambda = 17/26$, $(1, 2, 0)$ se $17/26 < \lambda < 1$, $(1, 1, 1)$ se $\lambda = 1$ e $(2, 1, 0)$ se $\lambda > 1$.

Esercizio 5
Sia (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica e $W \subset \mathbb{R}^4$ il piano generato da e_2, e_3. Si vede subito osservando A_λ che la restrizione del prodotto scalare a W è di segnatura $(1, 1, 0)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcolando si trova che $W^\perp$ è generato da $v_1 = e_1 - e_2 - e_4$ e $v_2 = e_3 - e_4$, e che la matrice associata alla restrizione di $g_\lambda|_{W^\perp}$ tramite la base (v_1, v_2) è data da $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right)$. Il vettore

$(\lambda-1)v_1+v_2$ è ortogonale a v_1 ed ha prodotto scalare con sé stesso $\lambda(-\lambda+1)$. Da questo segue immediatamente che la segnatura di A_λ è data da $(2,2,0)$ per $\lambda<0$ e $\lambda>1$, $(2,1,1)$ per $\lambda=0$ e $\lambda=1$, e $(3,1,0)$ per $0<\lambda<1$.

Esercizio 6

Stiamo cercando un sottospazio $W\subset\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $g_A|_W\equiv 0$. In particolare, W deve essere generato da due vettori isotropi linearmente indipendenti. Viceversa, è chiaro che due vettori isotropi linearmente indipendenti generano un sottospazio di dimensione 2 tale che $g_A|_W\equiv 0$. Cerchiamo quindi prima un vettore isotropo, e poi un altro vettore isotropo ortogonale e non proporzionale al primo. La restrizione di g_A al sottospazio $\langle E_1,E_3\rangle$ ha matrice, nella base $\{E_1,E_3\}$, data da $\left(\begin{smallmatrix}-2&2\\2&-2\end{smallmatrix}\right)$, dunque è degenere e contiene vettori isotropi nel proprio nucleo. Infatti, vettore $v_1=E_1+E_3\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ è isotropo. La condizione che un vettore generico $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\\w\end{smallmatrix}\right)$ sia ortogonale a v_1 è $-8y-2w=0$, perciò i vettori della forma $u=\left(\begin{smallmatrix}a\\3\\b\\-8\end{smallmatrix}\right)$ sono tutti ortogonali a v_1 per ogni $a,b\in\mathbb{R}$. Calcolando risulta $g_A(u,u)=-2(a-b)^2+6$, e possiamo definire $v_2=\left(\begin{smallmatrix}\sqrt{3}\\3\\0\\-8\end{smallmatrix}\right)$ e $W=\langle v_1,v_2\rangle$.

Esercizio 7

Chiaramente G_λ è simmetrica se e solo se $\lambda^2=4$, ovvero $\lambda=\pm 2$. In questo caso $G_\lambda=\left(\begin{smallmatrix}3&4&-1\\4&-3\lambda&0\\-1&0&5\end{smallmatrix}\right)$. Posto $v_1=e_2$ e $v_2=e_3$, abbiamo $g_\lambda(v_1,v_2)=0$, e la restrizione di g_λ a $\langle v_1,v_2\rangle$ è non degenere perché rispetto alla base $\{v_1,v_2\}$ ha matrice $\left(\begin{smallmatrix}-3\lambda&0\\0&5\end{smallmatrix}\right)$. Calcolando si trova che $\langle v_1,v_2\rangle^\perp$ è generato da $v_3=\left(\begin{smallmatrix}5\\20/3k\\1\end{smallmatrix}\right)$. Inoltre, $g_\lambda(v_3,v_3)=70+400k/3$. Si conclude $\operatorname{segn}(g_2)=(2,1,0)$ e $\operatorname{segn}(g_{-2})=(3,0,0)$.

Esercizio 8

(a) $\det(G_\lambda)=\frac{15}{16}\lambda^3$, quindi g_λ è degenere se e solo se $\lambda=0$. (b) Osserviamo che G_0 è la matrice nulla, quindi g_0 ha segnatura $(0,0,3)$ e da adesso in poi possiamo supporre $\lambda\neq 0$. Il primo vettore della base canonica e_1 soddisfa $g_\lambda(e_1,e_1)=\lambda\neq 0$. Un vettore $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^3$ è g_λ–ortogonale ad e_1 se e solo se

$$g_\lambda(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right),e_1)=(x,y,z)G_\lambda e_1=\lambda(x+z/4)=0,$$

quindi $\langle e_1\rangle^{\perp_{g_\lambda}}=\langle e_2=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right),u:=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-4\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Poiché $g_\lambda(e_2,u)=0$, $g_\lambda(e_2,e_2)=\lambda$ e $g_\lambda(u,u)=q_\lambda(u)=15\lambda$, la terna (e_1,e_2,u) è una base g_λ–ortogonale di $\mathbb{R}^3$ e la matrice di g_λ rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&15\lambda\end{pmatrix},$$

quindi la segnatura di g_λ è $(3,0,0)$ se $\lambda>0$ e $(0,3,0)$ se $\lambda<0$. (c) L'applicazione g_0 è nulla, e quindi anche la sua restrizione a π. Dunque quando $\lambda=0$ la segnatura cercata è $(0,0,2)$, e da adesso in poi possiamo supporre $\lambda\neq 0$. Il vettore $v_1:=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$ appartiene al piano π, e

$g_\lambda(v_1, v_1) = 5\lambda$. Inoltre, un vettore generico $v := \left(\begin{smallmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \pi$ è g_λ–ortogonale a v_1 se e solo se

$$g_\lambda(v, v_1) = (x, 2x+3z, z)G_\lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \frac{5}{4}\lambda(4x+5z) = 0.$$

Posto $v_2 := \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \in \pi$, la coppia (v_1, v_2) è una base g_λ–ortogonale di π e

$$g_\lambda(v_2, v_2) = q_\lambda(v_2) = 35\lambda.$$

Concludiamo che quando $\lambda \neq 0$ la segnatura di g_λ ristretta a π è $(2, 0, 0)$ se $\lambda > 0$ e $(0, 2, 0)$ se $\lambda < 0$.

Esercizio 9

(a) I vettori e_1, e_2 della base canonica sono già ortogonali tra loro. Inoltre, se $\lambda \neq -1$ la restrizione di g_λ a $\langle e_1, e_2\rangle$ è non degenere. Quindi quando $\lambda \neq -1$, per trovare una base g_λ–ortogonale è sufficiente determinare un generatore della retta g_λ–ortogonale a $\langle e_1, e_2\rangle$. Procedendo in questo modo, per $\lambda \neq -1$ si trova la base g_λ–ortogonale $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2\lambda+2 \\ \lambda \\ -2\lambda-2 \end{smallmatrix}\right)\}$ e per $\lambda = -1$ la base g_{-1}–ortogonale $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), -e_1 + e_3, u := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Alternativamente, poiché un vettore generico $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ è ortogonale ad e_1 se e solo se

$$(x, y, z)G_\lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -x - z = 0,$$

come secondo vettore si può scegliere $e_1 - e_3$, e la condizione di ortogonalità a quest'ultimo è

$$(x, y, z)G_\lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = y + z = 0.$$

Quindi come base g_λ–ortogonale di $\mathbb{R}^3$ possiamo scegliere $B := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$, che ha il vantaggio di non dipendere da λ.

(b) I quadrati $g_\lambda(v, v)$ dei vettori $v \in B$ sono, rispettivamente -1, λ e $\lambda + 2$. Da questo si deduce facilmente che la segnatura di g_λ è $(0, 3, 0)$ per $\lambda < -2$, $(0, 2, 1)$ per $\lambda = -2$, $(1, 2, 0)$ per $-2 < \lambda < 0$, $(1, 1, 1)$ per $\lambda = 0$ e $(2, 1, 0)$ per $\lambda > 0$.

Esercizio 10

(a) La restrizione di g_λ a $W = \langle E_1, E_2\rangle$ ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ rispetto alla base $\{E_1, E_2\}$. Inoltre, $v_1 = E_1 + E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ è isotropo perché $g_\lambda(v_1, v_1) = 2 \neq 0$. Quindi

$$W = \langle E_1 + E_2\rangle \oplus \langle E_1 + E_2\rangle^{\perp_{g_\lambda|W}}.$$

Un vettore $v_2 = xE_1 + yE_2 \in W$ è g_λ-ortogonale a v_1 se e solo se

$$g_\lambda(xE_1 + yE_2, E_1 + E_2) = x + y = 0,$$

quindi $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in W$ è g_λ-ortogonale a v_1 e $\{v_1, v_2\}$ è una base g_λ–ortogonale di W. La restrizione $g_\lambda|_W$ è non degenere perché la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ è non singolare, quindi otterremo una base g_λ-ortogonale di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo a $\{v_1, v_2\}$ un generatore di $W^{\perp_{g_\lambda}}$. Un vettore generico $w = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ soddisfa le equazioni $g_\lambda(w, v_1) = 0$ e $g_\lambda(w, v_2) = 0$ se e solo se le sue coordinate soddisfano il sistema omogeneo,

$$\begin{cases} x+y+(1+\lambda)z=0 \\ -x+y+(\lambda-1)z=0 \end{cases},$$

soddisfatto ad esempio da $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base g_λ-ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
(b) Calcolando si trova $g_\lambda(v_1, v_1) = 2$, $g_\lambda(v_2, v_2) = -2$ e $g_\lambda(v_3, v_3) = -2\lambda$. Quindi la segnatura di g_λ è $(2,1,0)$ per $\lambda < 0$, $(1,1,1)$ per $\lambda = 0$ e $(1,2,0)$ per $\lambda > 0$.
(c) Il vettore $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene al piano π, e un vettore generico di π è della forma $w = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}$. Imponendo $g_\lambda(w, u_1) = 0$ si trova l'equazione $2x + (\lambda+1)z = 0$, soddisfatta da $u_2 = \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ \lambda+1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dunque $\{u_1, u_2\}$ è una base g_λ-ortogonale di π, e calcolando si trova

$$g_\lambda(u_1, u_1) = 2, \qquad g_\lambda(u_2, u_2) = -2(\lambda+1)^2.$$

Quindi la restrizione di g_λ a π ha segnatura $(1,1,0)$ per $\lambda \neq -1$, e $(1,0,1)$ per $\lambda = -1$.

Possiamo rispondere al punto (c) anche nel modo seguente. Abbiamo $\pi = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 \rangle$, e la matrice della restrizione di g_λ a π rispetto a $\{u_1, E_3\}$ è $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché

$$p_A(t) = t^2 - 2t - (\lambda+1)^2,$$

se $\lambda \neq -1$ il polinomio non ha 0 come radice, e c'è una variazione di segno nei suoi coefficienti, quindi in questi casi $\operatorname{segn}(g_\lambda|_\pi) = (1,1,0)$. Invece se $\lambda = -1$ allora 0 è un autovalore di A e c'è una variazione di segno nei coefficienti di $\frac{p_A(t)}{t} = t - 2$, quind $\operatorname{segn}(g_{-1}|_\pi) = (1,0,1)$.

Esercizio 11
(a) I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono g_a–ortogonali tra loro. Per trovare una base ortogonale imponiamo che un vettore generico $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soddisfi le equazioni $g_a(v, v_1) = 0$ e $g_a(v, v_2) = 0$, ottenendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ ay - 3z = 0 \end{cases},$$

con soluzione $v_3 = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ a/3 \end{pmatrix}$. Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, è la base g_a-ortogonale cercata.
(b) Chiaramente $g_a(v_1, v_1) = 1$ e $g_a(v_2, v_2) = -3$, mentre calcolando si trova $g_a(v_3, v_3) = 2 - \frac{2}{3}a^2$. Se ne deduce che la segnatura di g_a è $(2,1,0)$ per $|a| < \sqrt{3}$, $(1,1,1)$ per $a = \pm\sqrt{3}$ e $(1,2,0)$ per $|a| > \sqrt{3}$.
(c) Il piano π è un sottospazio con base $B = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Nella base B la restrizione di g_a ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$. Calcolando si trova che il sottospazio di π g_a–ortogonale ad e_1 è generato dal vettore $u = ae_1 - e_2$. Dunque $\{e_1, u\}$ è una base g_a ortogonale di π, e $g_a(e_1, e_1) = 1$, $g_a(u, u) = 2 - a^2$. Quindi la segnatura della restrizione di g_a a π è uguale a $(2,0,0)$ se $|a| < \sqrt{2}$, $(1,0,1)$ se $a = \pm\sqrt{2}$ e $(1,1,0)$ se $|a| > \sqrt{2}$.

Esercizio 12
(a) Il sottospazio π è generato dai vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, che sono anche g_k–ortogonali per ogni $k \in \mathbb{R}$. Inoltre, $g_k(u_1, u_1) = 2$ e $g_k(u_2, u_2) = -2$. Quindi la segnatura della restrizione di g_k a π è uguale a $(1,1,0)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. (b) Il determinante di M_k è $2k(k+1)$, che

è uguale a zero se e solo se $k \in \{-1, 0\}$. Quindi $N = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (c) Imponendo che un vettore $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ sia g_k–ortogonale sia ad u_1 che ad u_2 si ottengono le equazioni $x + (2k+1)y + z = 0$ e $x + y - z = 0$, dalle quali si deduce facilmente che il vettore $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} k+1 \\ -1 \\ k \end{smallmatrix}\right)$ completa u_1 e u_2 ad una base g_k–ortogonale di $\mathbb{R}^3$. (d) Calcolando si trova $g_k(u_3, u_3) = -2k(k+1)$. Studiando i segni di $g_k(u_i, u_i)$ per $i = 1, \ldots, 3$ si ricava che la segnatura di g_k è $(1, 2, 0)$ per $k < -1$ e $k > 0$, $(1, 1, 1)$ per $k \in \{-1, 0\}$ e $(2, 1, 0)$ per $-1 < k < 0$.

Esercizio 13

(a) Partendo dal vettore non isotropo $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, si trova subito il vettore a lui g-ortogonale $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Imponendo la g-ortogonalità a u_1 e u_2 si trovano le equazioni $x + y + 5z = 0$ e $x - y + z = 0$, che ammettono la soluzione $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi $\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base g-ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Calcolando si ottiene inoltre $g(u_1, u_1) = 2$, $g(u_2, u_2) = -2$ e $g(u_3, u_3) = -12$, quindi la segnatura di g è $(1, 2, 0)$.
(b) un vettore del piano di equazione $x + y = 0$ è del tipo $\left(\begin{smallmatrix} x \\ -x \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Imponendo che sia g-isotropo si ricava l'equazione $-2x(x + z) = 0$. Quindi i vettori isotropi cercati sono del tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} x \\ -x \\ -x \end{smallmatrix}\right)$.
(c) Il vettore $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ appartiene al piano. Un vettore generico $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ appartiene al piano ed è g-ortogonale ad u_2 se e solo se valgono le equazioni $x + y + kz = 0$ e $x - y + z = 0$, soddisfatte dal vettore $v = \left(\begin{smallmatrix} k+1 \\ k-1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $g(u_2, u_2) = -2$, e calcolando si trova $g(v, v) = 2(k^2 - 10k + 1)$. Poiché $g(v, v) > 0$ se e solo se $k < 5 - 2\sqrt{6}$ e $k > 5 + 2\sqrt{6}$, e $g(v, v) = 0$ se e solo se $k = 5 \pm 2\sqrt{6}$, otteniamo che la segnatura della restrizione di g al piano di equazione $x + y + kz = 0$ è (i) $(1, 1, 0)$ se $k < 5 - 2\sqrt{6}$ o $k > 5 + 2\sqrt{6}$, (ii) $(0, 1, 1)$ se $k = 5 \pm 2\sqrt{6}$ e (iii) $(0, 2, 0)$ se $5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$.

Esercizio 14

(a) Posto $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, un vettore generico $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ è g_k-ortogonale a v_1 se e solo se $x + y + z = 0$, ovvero se è del tipo $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{smallmatrix}\right)$. Quindi il vettore $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ è g_k-ortogonale a v_1, e un vettore del tipo $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{smallmatrix}\right)$ è g_k-ortogonale a v_2 se e solo se $kx + (k-1)y = 0$. Quindi posto $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} k-1 \\ -k \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, la base cercata è $\{v_1, v_2, v_3\}$. (b) Calcolando si trova $g_k(v_1, v_1) = 1$, $g_k(v_2, v_2) = -1$ e $g_k(v_3, v_3) = k(k-2)$. Studiando i segni di $g_k(v_3, v_3)$ si trova che la segnatura di g_k è $(2, 1, 0)$ per $k < 0$ e $k > 2$, $(1, 2, 0)$ per $0 < k < 2$ e $(1, 1, 1)$ per $k \in \{0, 2\}$. (c) Una base del piano π è data da $\left\{u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. La matrice M, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$, della restrizione di g_k al piano è $\left(\begin{smallmatrix} 3 & k+3 \\ k+3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, che ha traccia 6 e determinante $-k(k+6)$. Poiché la traccia è la somma degli autovalori di M e il determinante ne è il prodotto, troviamo che la segnatura della restrizione di g_k al piano π è $(1, 1, 0)$ per $k < -6$ e $k > 0$, $(2, 0, 0)$ per $-6 < k < 0$ e $(1, 0, 1)$ per $k \in \{-6, 0\}$.

Esercizio 15

(a) Calcolando si trova che il polinomio caratteristico di A_k è $p(x) = -x(x^2 - 2kx - (k^2 + 1))$, da cui si ricava che gli autovalori di A_k sono $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = k + \sqrt{2k^2+1}$ e $\lambda_2 = k - \sqrt{2k^2+1}$. (b) Si vede subito che gli autovalori sono sempre a due a due distinti, quindi per trovare la base cercata basta determinare dei corrispondenti autovettori. Risolvendo i sistemi lineari $A - \lambda_i I = 0$ si trovano gli autovettori $v_0 = \left(\begin{smallmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ k \end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ k \end{smallmatrix}\right)$. Dunque la base cercata è $\{v_0, v_1, v_2\}$. (c) Il fatto che v_0, v_1 e v_2 sono autovettori per A_k implica che sono anche una base ortogonale per l'applicazione bilineare associata g_{A_k}. Inoltre, $g_{A_k}(v_0, v_0) = 0$ e $g_{A_k}(v_i, v_i) = \lambda_i \|v_i\|^2$ per $i = 1, 2$. Poiché $|k| < \sqrt{2k^2+1}$ per ogni k, abbiamo sempre $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Quindi la segnatura di g_{A_k} è costantemente uguale a $(1, 1, 1)$. (d) Una base di π è data dai vettori $w_1 = \left(\begin{smallmatrix} k \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $w_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. La matrice della restrizione di g_{A_k} a π nella base $\{w_1, w_2\}$ è $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi, se $w = a_1 w_1 + a_2 w_2 \in \pi$ allora $g_{A_k}(w, w) = -2k a_1 a_2$. Questo mostra che se $k = 0$ ogni vettore di π è isotropo, mentre se $k \neq 0$ l'insieme dei vettori isotropi contenuti in π è l'unione delle rette $\langle w_1 \rangle$ e $\langle w_2 \rangle$.

Esercizio 16

(a) La matrice $\left(\begin{smallmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ k-1 & k+1 & 3k-2 \end{smallmatrix}\right)$ ha determinante $(k-1)(k+1)(k-2)$. Quindi b_k è non degenere se e solo se $k \notin \{-1, 1, 2\}$.

(b) Siano e_1 ed e_2 i primi due vettori della base canonica. La matrice della restrizione di b_k al sottospazio $\langle e_1, e_2 \rangle$ rispetto alla base $\{e_1, e_2\}$ è $\left(\begin{smallmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{smallmatrix}\right)$. Questo sottospazio è non degenere per $k \neq \pm 1$, e le condizioni affinché un vettore generico sia b_k–ortogonale ad e_1 ed e_2 sono

$$b_k(e_1, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = (k-1)(x+z) = 0, \quad b_k(e_2, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = (k+1)(y+z) = 0.$$

Per $k \neq \pm 1$ il sottospazio b_k–ortogonale di $\langle e_1, e_2 \rangle$ è $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, quindi una base b_k–ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per questi valori di k è data da $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$. Ma per $k = \pm 1$ la stessa base è ancora b_k-ortogonale.

(c) per calcolare la segnatura di b_k basta calcolare i prodotti con sé stessi dei vettori della base ortogonale calcolata al punto (b). Abbiamo:

$$b_k(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = k-1, \quad b_k(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = k+1,$$

$$b_k(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)) = k-2.$$

Studiando i segni al variare di $k \in \mathbb{R}$ possiamo concludere che la segnatura di b_k è $(0, 3, 0)$ per $k < -1$, $(0, 2, 1)$ per $k = -1$, $(1, 2, 0)$ per $-1 < k < 1$, $(1, 1, 1)$ per $k = 1$, $(2, 1, 0)$ per $1 < k < 2$, $(2, 0, 1)$ per $k = 2$ e $(3, 0, 0)$ per $k > 2$.

(d) Il vettore $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ appartiene al piano $x = 0$, ed un vettore generico $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ dello stesso piano è ortogonale a $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ se e solo se

$$b_k(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = (k+1)(y+z) = 0.$$

Dunque $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ è una base b_k-ortogonale del piano $x = 0$. Sappiamo già che

$$b_k(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = k+1,$$

mentre $b_k(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)) = 2k-3$. Se ne deduce che la segnatura di b_k ristretta al piano $x=0$ è $(0,2,0)$ per $k<-1$, $(0,1,1)$ per $k=-1$, $(1,1,0)$ per $-1<k<3/2$, $(1,0,1)$ per $k=3/2$ e $(2,0,0)$ per $k>3/2$.

Esercizio 17
(a) La matrice B_k ha determinante k^2, quindi b_k è degenere se e solo se $k=0$.
(b) Siano $e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ed $e_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ il secondo e il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Osserviamo che la restrizione di b_k al sottospazio $S = \langle e_2, e_3\rangle$ è non degenere perché la matrice $(b_k(e_i,e_j))$ è non singolare, e che $\{e_2+e_3, e_2-e_3\}$ è una base b_k-ortogonale di S. Inoltre, un vettore $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\\w\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4$ è b_k-ortogonale sia a e_2 che a e_3 se e solo se $kx+2z = w+2y = 0$. Quindi

$$\{v_1 = e_2+e_3, v_2 = e_2-e_3, w = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\-k\\0\end{smallmatrix}\right)\}$$

è una base ortogonale del sottospazio $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Poiché $b_k(v_1,v_1) = 4$, $b_k(v_2,v_2) = -4$ e $b_k(w,w) = 0$, la segnatura della restrizione di b_k a questo sottospazio è $(1,1,1)$ per ogni $k\in\mathbb{R}$. Alternativamente, la matrice della restrizione di b_k rispetto alla base $\{e_1,e_2,e_3\}$ è $\left(\begin{smallmatrix}0&k&0\\k&0&2\\0&2&0\end{smallmatrix}\right)$, ed ha autovettori 0 e $\pm\sqrt{4+k^2}$. Ne segue che la segnatura della restrizione di b_k è $(1,1,1)$ per ogni k.
(c) Dal punto (b) sappiamo che la restrizione di b_k al sottospazio generato da e_2, e_3 e w è non degenere per ogni $k\in\mathbb{R}$. Quindi invece di w proviamo ad utilizzare il vettore $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\-k\\-2\end{smallmatrix}\right)$, che è ancora b_k-ortogonale ad e_2 ed e_3 ma soddisfa $b_k(v_3,v_3) = 4k$. Un vettore generico $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\\w\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^4$ è b_k-ortogonale a v_3 se e solo se $k(x-w) = 0$. Allora, posto $v_4 = \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\k\\-2\end{smallmatrix}\right)$, si verifica facilmente che $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ è una base b_k-ortogonale di $\mathbb{R}^4$ per ogni $k\in\mathbb{R}$. Sappiamo già che $b_k(v_1,v_1) = 4$ e $b_k(v_2,v_2) = -4$. Calcolando si ottiene inoltre $b_k(v_3,v_3) = 4k$ e $b_k(v_4,v_4) = -4k$. Quindi la segnatura di b_k è $(2,2,0)$ per $k\neq 0$ e $(1,1,2)$ se $k=0$. Alternativamente: poiché $\det(B_k) = k^2$ e $\mathrm{tr}(B_k) = 0$, se $k\neq 0$ non ci sono autovalori nulli, quindi gli autovalori sono due positivi e due negativi. Ne segue che la segnatura è $(2,2,0)$ per $k\neq 0$. Inoltre, si verifica facilmente che due autovalori di B_0 sono nulli, e poiché $\det(B_0) = \mathrm{tr}(B_0) = 0$ mentre $B_0\neq 0$, ne segue che i rimanenti autovalori sono uno positivo e l'altro negativo. Dunque la segnatura di B_0 è $(1,1,2)$.

CAPITOLO 14

Coniche e quadriche

1. Coniche

Consideriamo una matrice simmetrica reale di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Possiamo associare ad A il seguente polinomio reale in x, y di grado 2:

$$f_A(x,y) := (x,y,1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

Il sottoinsieme

$$\mathcal{C}_A = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid f_A(x,y) = 0\} \subset \mathbb{E}^2$$

si dice *conica* [1].

DEFINIZIONE. Siano A e $\mathcal{C}_A$ come sopra, e sia $A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. La conica $\mathcal{C}_A$ è detta:

- *ellisse* se $\det A_0 > 0$, *iperbole* se $\det A_0 < 0$ e *parabola* se $\det A_0 = 0$;
- *non degenere* se $\operatorname{rg} A = 3$, *semplicemente degenere* se $\operatorname{rg} A = 2$ e *doppiamente degenere* se $\operatorname{rg} A = 1$.

Il *tipo* di $\mathcal{C}_A$ è dato dalla coppia (P_1, P_2) che si applica a $\mathcal{C}_A$, dove

$$P_1 \in \{\textit{ellisse}, \textit{iperbole}, \textit{parabola}\},$$

$$P_2 \in \{\textit{non degenere}, \textit{semplicemente degenere}, \textit{doppiamente degenere}\}.$$

ESEMPIO. Stabiliamo il tipo della conica di equazione

$$x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0.$$

Dai coefficienti si ricava che la conica è $\mathcal{C}_A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = -36 \neq 0$ e $\det A_0 = -11 < 0$, si tratta di un'iperbole non degenere.

Vogliamo cambiare il sistema di coordinate in modo da semplificare l'equazione che definisce la conica e capirne "la forma". Applicheremo delle trasformazioni ortogonali del piano composte

[1] La conica $\mathcal{C}_A$ non è altro che la proiezione ortogonale sul piano xy dell'intersezione del piano affine $z = 1$ con l'unione delle rette isotrope non contenute nel piano xy dell'applicazione bilineare simmetrica g_A.

con delle traslazioni, in modo da non "distorcere" la conica. I corrispondenti cambiamenti di coordinate sono della forma

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + T,$$

dove

$$T := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad M_0 := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in O(2).$$

Con un calcolo diretto si verifica che $(*)$ equivale a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_0 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Poiché $(x, y, 1) = {}^t\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (X, Y, 1)^t M$, abbiamo

$$f_A(x, y) = (X, Y, 1)^t MAM \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = f_{^tMAM}(X, Y).$$

Quindi posto $\left(\begin{smallmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{smallmatrix}\right) := {}^tMAM$, nelle nuove coordinate la conica è definita dall'equazione

$$f_{^tMAM}(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0.$$

Vediamo più in dettaglio la forma di ${}^tMAM$. Calcolando si trova:

$${}^tMAM = \left(\begin{smallmatrix} {}^tM_0 & 0 \\ {}^tT & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} A_0 & \left(\begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}\right) \\ (d,e) & f \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} M_0 & T \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} {}^tM_0A_0M_0 & {}^tM_0(A_0T + \left(\begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}\right)) \\ ({}^tTA_0 + (d,e))M_0 & {}^tT(A_0T + \left(\begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}\right)) + f \end{smallmatrix}\right).$$

In particolare, abbiamo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = {}^tM_0A_0M_0.$$

OSSERVAZIONE. Valgono i seguenti fatti:

- $\det M = \det \left(\begin{smallmatrix} M_0 & T \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \det M_0 = \pm 1$, quindi $\det({}^tMAM) = \det(A)$;
- M invertibile implica $\mathrm{rg}({}^tMAM) = \mathrm{rg}(A)$;
- $M_0 \in O(2)$ implica $\det({}^tM_0A_0M_0) = \det(A_0)$ e $\mathrm{tr}({}^tM_0A_0M_0) = \mathrm{tr}(A_0)$.

La precedente osservazione implica che il tipo di $\mathcal{C}_{^tMAM}$ è uguale a quello di $\mathcal{C}_A$. Ora vogliamo scegliere la matrice M in modo opportuno. Poiché A_0 è simmetrica, per il teorema spettrale esiste $M_0 \in O(2)$ tale che ${}^tM_0A_0M_0 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A_0.

<u>ELLISSE O IPERBOLE</u> $(\det A_0 \neq 0)$

Posto $T := -A_0^{-1}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, abbiamo

$$
{}^tMAM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}
$$

e l'equazione diventa

$$
\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + f' = 0,
$$

dove le costanti λ_1, λ_2, f' sono determinate dalle relazioni $\det(A_0) = \lambda_1\lambda_2$, $\mathrm{tr}(A_0) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 f'$.

Caso non degenere ($\mathrm{rg}(A) = 3$): $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 f' \neq 0$. Dividendo per f' l'equazione diventa

$$
\frac{\lambda_1}{f'}X^2 + \frac{\lambda_2}{f'}Y^2 = -1,
$$

e ci sono due sottocasi:

- λ_1/f' e λ_2/f' hanno lo stesso segno, ovvero $\det(A_0) = \lambda_1\lambda_2 > 0$: se λ_1/f' e λ_2/f' sono entrambi negativi, moltiplicando per -1 l'equazione si può riscrivere:

  $$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,\ a, b \neq 0} \quad \text{(ellisse a punti reali)}$$

  Se invece λ_1/f' e λ_2/f' sono entrambi positivi l'equazione si può riscrivere:

  $$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1,\ a, b \neq 0} \quad \text{(ellisse a punti non reali} = \emptyset\text{)}$$

  Osserviamo che l'ellisse è a punti reali quando $\mathrm{tr}(A_0)\det(A) = (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2 f' < 0$, e a punti non reali quando $\mathrm{tr}(A_0)\det(A) = (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2 f' > 0$.
- λ_1/f' e λ_2/f' hanno segni opposti, ovvero $\det A_0 = \lambda_1\lambda_2 < 0$: moltiplicando per -1 ed eventualmente scambiando X ed Y l'equazione diventa, per qualche $a, b \neq 0$,

  $$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,\ a, b \neq 0} \quad \text{(iperbole non degenere)}$$

Caso degenere ($\det A = 0$): $\det A = \det({}^tMAM) = \lambda_1\lambda_2 f' = 0$, quindi $f' = 0$ e ci sono due sottocasi:

- $\det A_0 = \lambda_1\lambda_2 > 0$: a meno di cambiare segno si ottiene, per qualche $a, b \neq 0$,

  $$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0,\ a, b \neq 0} \quad \text{(ellisse degenere} = \{(0,0)\}\text{)}$$

- $\det A_0 = \lambda_1\lambda_2 < 0$: a meno di cambiare segno si ottiene, per qualche $a, b \neq 0$,

  $$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0,\ a, b \neq 0} \quad \text{(iperbole degenere)}$$

Poiché $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = (\frac{X}{a} + \frac{Y}{b})(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b})$, la conica è unione delle due rette di equazioni $Y = \pm\frac{b}{a}X$.

ESEMPI. (1) Stabiliamo il tipo e l'equazione canonica della conica di equazione

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 = 10.$$

La conica è $\mathcal{C}_A$ con $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -10 \end{smallmatrix}\right)$. Abbiamo $\det A_0 = 14 > 0$ e $\det(A) = -140 \neq 0$, quindi si tratta di un'ellisse non degenere, quindi con un'equazione del tipo

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + f' = 0,$$

dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A_0 e $f' = \det(A)/\det(A_0) = -10$. Poiché $\lambda_1\lambda_2 = \det A_0 = 14$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A_0 = 9$, abbiamo (a meno di scambiare X ed Y) $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$. Dunque l'equazione canonica è $\frac{7}{10}X^2 + \frac{1}{5}Y^2 = 1$.

(2) Stabiliamo il tipo e l'equazione canonica della conica di equazione

$$x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + 1/2 = 0.$$

La matrice della conica è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi $\det A_0 = -8 < 0$ e $\det A = -9/4 \neq 0$, quindi si tratta di un'iperbole non degenere di equazione

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + f' = 0,$$

con $f' = \det(A)/\det(A_0) = 9/32$, $\lambda_1\lambda_2 = \det A_0 = -8$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A_0 = 2$. Dunque possiamo scegliere $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, e dividendo per $-f'$ otteniamo l'equazione canonica

$$\frac{64}{9}X^2 - \frac{128}{9}Y^2 = 1.$$

<u>PARABOLA</u> ($\det A_0 = 0$)

Supponiamo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$ (perché $A_0 \neq 0$ essendo $\deg f_A = 2$). Allora

$$^tMAM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda & e' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}.$$

L'equazione diventa

$$\lambda Y^2 + 2d'X + 2e'Y + f' = 0.$$

La traslazione

$$\begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto Y - e'/\lambda \end{cases}$$

viene realizzata dalla matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e'/\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Applicandola si cancella il termine $2e'Y$ e l'equazione diventa:

$$\lambda Y^2 + 2d'X + f'' = 0.$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda & 0 \\ d' & 0 & f'' \end{pmatrix}.$$

<u>Caso non degenere</u> ($\det A = -\lambda(d')^2 \neq 0$): abbiamo $d' \neq 0$, e con la traslazione

$$\begin{cases} X \mapsto X - f''/2d' \\ Y \mapsto Y \end{cases}$$

l'equazione diventa

$$\lambda Y^2 + 2d''X = 0.$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d'' \\ 0 & \lambda & 0 \\ d'' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e le costanti λ e d'' sono determinate dalle relazioni $\det A = -\lambda(d'')^2$ e $\operatorname{tr} A_0 = \lambda$. A meno della sostituzione $X \mapsto -X$, dividendo per λ otteniamo:

$$\boxed{Y^2 - 2pX = 0,\ p > 0} \quad \text{(parabola non degenere)}$$

ESEMPIO. Stabiliamo il tipo e l'equazione canonica della conica di equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0.$$

La matrice è $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\det A_0 = 0$ e $\det A = -36$, quindi si tratta di una parabola non degenere, con equazione del tipo

$$\lambda Y^2 + 2d''X = 0,$$

e $\lambda = \operatorname{tr} A_0 = 5$, $(d'')^2 = -\det(A)/5 = 36/5$. Dunque l'equazione canonica (sostituendo X con $-X$) è

$$Y^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}X = 0.$$

<u>Caso degenere</u> ($\det A = -\lambda(d')^2 = 0$) allora $d' = 0$ e l'equazione è

$$\lambda Y^2 + f'' = 0.$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{pmatrix},$$

Notiamo che λ è determinato da $\operatorname{tr} A_0 = \lambda$, ma non possiamo utilizzare gli altri invarianti $\det A$ e $\det A_0$ per determinare il valore di f''. Abbiamo tre sottocasi:

- se $f'' \neq 0$ (cioè $\operatorname{rg} A = 2$) e λ, f'' sono concordi, dividendo per λ otteniamo
$$\boxed{Y^2 + a^2 = 0,\ a \neq 0} \quad \text{(parabola degenere a punti non reali} = \emptyset)$$
- se $f'' \neq 0$ (cioè $\operatorname{rg} A = 2$) e λ, f'' sono discordi, dividendo per λ otteniamo
$$\boxed{Y^2 - a^2 = 0,\ a \neq 0} \quad \text{(parabola degenere a punti reali)}$$
Poiché $Y^2 - a^2 = (Y - a)(Y + a)$, la conica è unione delle rette $Y = a$ e $Y = -a$.
- se $f'' = 0$ (cioè $\operatorname{rg} A = 1$) allora l'equazione diventa
$$\boxed{Y^2 = 0} \quad \text{(conica doppiamente degenere)}$$
possiamo pensare $\mathcal{C}$ come la 'retta doppia' $Y = 0$.

ESEMPIO. Stabiliamo il tipo della conica di equazione
$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0.$$
La matrice è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A_0 = 0$ e $\det A = 0$, quindi si tratta di una parabola degenere, con equazione del tipo
$$\lambda Y^2 + f'' = 0,$$
e $\lambda = \operatorname{tr} A_0 = 2$. Non possiamo determinare f'' tramite gli invarianti, ma possiamo cercare di capire se la conica è unione o meno di due rette (possibilmente coincidenti). Cerchiamo costanti a, b, c, a', b', c' tali che:
$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = (ax + by + c)(a'x + b'y + c').$$
Si ottiene il sistema
$$\begin{cases} aa' = 1 \\ ab' + ba' = 2 \\ ac' + ca' = 3 \\ bc' + cb' = 3 \\ cc' = 0 \end{cases},$$
con soluzione $a = b = a' = b' = 1$, $c = 3$, $c' = 0$. Infatti
$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = (x + y + 3)(x + y),$$
quindi la conica è una parabola degenere a punti reali, unione di delle due rette parallele di equazioni $x + y + 3 = 0$ e $x + y = 0$.

Le equazioni inscatolate viste sopra prendono il nome di *equazioni canoniche*. Eccone la tabella riassuntiva:

	non deg. ($\operatorname{rg} A = 3$)	semp. deg. ($\operatorname{rg} A = 2$)	dopp. deg. ($\operatorname{rg} A = 1$)
ellisse ($\det A_0 > 0$)	$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = \pm 1$	$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 0$	
iperbole ($\det A_0 < 0$)	$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$	$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 0$	
parabola ($\det A_0 = 0$)	$Y^2 - 2pX = 0$	$Y^2 \pm a^2 = 0$	$Y^2 = 0$

Osserviamo che, tranne nel caso della parabola degenere, è possibile determinare le equazioni canoniche utilizzando gli invarianti $\det A$, $\det A_0$ e $\operatorname{tr} A_0$. Invece nel caso di una parabola degenere allora la conica è l'insieme vuoto oppure unione di due rette, possibilmente coincidenti.

2. Quadriche (cenni)

Data una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{4,4}$, possiamo associare ad A il polinomio

$$p_A(x,y,z) = (x,y,z,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x,y,z],$$

che è un polinomio reale in x, y, z di grado 2. Il sottoinsieme

$$Q_A = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \mid p_A(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{E}^3$$

si dice *quadrica*. Possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & h \\ {}^t h & l \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}.$$

Come nel caso delle coniche, con un cambiamento di variabili della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_0 \in O(3)$$

seguito da opportune normalizzazioni, si arriva alla seguente lista di casi:

$\underline{\operatorname{rg} A = 4,\ \det A_0 \neq 0}$

Ellissoide a punti reali: $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1,\ a,b,c \neq 0}$

Ellissoide a punti non reali: $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1,\ a,b,c \neq 0}$

Iperboloide iperbolico ("ad una falda"): $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1,\ a,b,c \neq 0}$

Iperboloide ellittico ("a due falde"): $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1,\ a,b,c \neq 0}$

$\underline{\operatorname{rg} A = 4,\ \det A_0 = 0}$

Paraboloide ellittico: $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = Z,\ a,b \neq 0}$

Paraboloide iperbolico (“a sella”): $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = Z,\ a, b \neq 0}$

Quando $\operatorname{rg} A = 3$ si ottiene un tipo di quadrica detto “cono”, quando $\operatorname{rg} A = 2$ due piani distinti (reali o meno) e quando $\operatorname{rg} A = 1$ un piano doppio.

Esercizi

Esercizio 1
Stabilire il tipo delle coniche aventi le seguenti equazioni:

(a) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$;
(b) $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$;
(c) $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$;
(d) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$.

Esercizio 2
Stabilire il tipo e l'equazione canonica delle coniche aventi le seguenti equazioni:

(a) $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$;
(b) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + 1/2 = 0$;
(c) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$;
(d) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$;
(e) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$;
(f) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$;
(g) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

Esercizio 3
Determinare determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$2xy - x - 3y = k$$

è degenere. Determinare inoltre il tipo della conica per $k = 0$.

Esercizio 4
Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il tipo della conica di equazione:

$$2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

Esercizio 5
Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il tipo della conica di equazione:

$$x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0.$$

Esercizio 6
Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il tipo della conica di equazione:

$$(2k-1)x^2 + 6kxy + ky^2 + 2x = 0.$$

Determinare inoltre l'equazione canonica per $k = 1/3$.

Esercizio 7
Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il tipo della conica di equazione:

$$kx^2 + 2xy + (k+2)y^2 - 2y = 0.$$

Determinare inoltre l'equazione canonica per $k = -1$.

Esercizio 8
Sia, per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $C_t \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione:

$$t(x^2 + y^2) + 6xy + 2x + y = 0.$$

(a) Determinare l'unico $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che C_{t_0} è degenere, e stabilire se C_{t_0} è semplicemente o doppiamente degenere;
(b) determinare il tipo di C_t per ogni $t \in \mathbb{R}$;
(c) determinare le eventuali rette di cui la conica C_{t_0} è unione.

Esercizio 9
Sia, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $C_t \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione:

$$x^2 + 2txy + x + 4y - 2 = 0.$$

(a) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che C_t è degenere, e stabilire per ognuno di essi se C_t è semplicemente o doppiamente degenere;
(b) determinare il tipo di C_t per ogni $t \in \mathbb{R}$;
(c) quando C_t è degenere determinare le eventuali rette di cui è unione.

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1
(a) Iperbole non degenere; (b) ellisse non degenere; (c) iperbole non degenere; (d) iperbole degenere.

Esercizio 2
(a) Ellisse reale, $\frac{7}{10}X^2 + \frac{1}{5}Y^2 = 1$; (b) iperbole non degenere, $\frac{64}{9}X^2 - \frac{128}{9}Y^2 = 1$; (c) retta doppia, $Y^2 = 0$; (d) parabola non degenere, $Y^2 = \frac{12}{5\sqrt{5}}X$; (e) ellisse reale, $4X^2 + Y^2 = 1$; (f) iperbole, $\frac{49}{625}X^2 - \frac{7}{25}Y^2 = 1$; (g) ellisse reale, $\frac{6}{5}X^2 + \frac{36}{5}Y^2 = 1$.

Esercizio 3
Degenere se e solo se $k = -3/2$; per $k = 0$ è un iperbole non degenere.

Esercizio 4
Iperbole non degenere per $k \neq -2$, parabola non degenere per $k = -2$.

Esercizio 5
Iperbole non degenere per $k < 0$ e $k > 4$, ellisse reale per $0 < k < 4$, iperbole non degenere per $k = 0, 4$.

Esercizio 6

Iperbole non degenere per $k < -1/7$ e $k > 0$, ellisse non a punti reali per $-1/7 < k < 0$, parabola non degenere per $k = -1/7$ e iperbole degenere per $k = 0$. L'equazione canonica per $k = 1/3$ è $\frac{10\sqrt{10}}{9}X^2 - \frac{10\sqrt{10}}{9}Y^2 = 1$.

Esercizio 7

Ellisse a punti reali per $k < -1-\sqrt{2}$, ellisse non a punti reali per $k > -1+\sqrt{2}$, iperbole non degenere per $-1-\sqrt{2} < k < 0$ e $0 < k < -1+\sqrt{2}$, parabola non degenere per $k = -1 \pm \sqrt{2}$, iperbole degenere per $k = 0$. L'equazione canonica per $k = -1$ è $2\sqrt{2}X^2 - 2\sqrt{2}Y^2 = 1$.

Esercizio 8

(a) La matrice associata a C_t è $A_t = \begin{pmatrix} t & 3 & 1 \\ 3 & t & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\det(A_t) = 3 - 5t/4$, abbiamo $t_0 = 12/5$. Inoltre, $A_{12/5}$ ha rango due, quindi C_{t_0} è semplicemente degenere. (b) La sottomatrice di A_t formata dalle prime due righe e colonne è $B_t = \left(\begin{smallmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{smallmatrix}\right)$, con $\det(B_t) = t^2 - 9$ e $\operatorname{tr}(B_t) = 2t$. Analizzando i segni di $\det(A_t)$, $\det(B_t)$ e $\operatorname{tr}(B_t)$ concludiamo che C_t è (i) un'ellisse non degenere a punti reali se $|t| > 3$, (ii) una parabola non degenere se $|t| = 3$, (iii) un'iperbole degenere se $t = 12/5$ e (iv) un'iperbole non degenere se $|t| < 3$, $t \neq 12/5$. (c) la conica $C_{12/5}$ ha equazione $\frac{12}{5}x^2 + 6xy + \frac{12}{5}y^2 + 2x + y = 0$. Poiché $C_{12/5}$ è semplicemente degenere, il membro di sinistra deve decomporsi come il prodotto di due fattori lineari distinti. Supponendolo della forma $(ax + by + c)(a'x + b'y + c')$, svolgendo il prodotto e cercando opportuni valori di a, b, c, a', b', c' si trova $\frac{12}{5}x^2 + 6xy + \frac{12}{5}y^2 + 2x + y = (\frac{6}{5}x + \frac{12}{5}y + 1)(2x + y)$. Quindi $C_{12/5}$ è l'unione delle due rette di equazioni $6x + 12y + 5 = 0$ e $2x + y = 0$.

Esercizio 9

(a) La matrice associata a C_t è $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1/2 \\ t & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Poiché $\det(A_t) = 2(t+2)(t-1)$, C_t è degenere se e solo se $t = -2$ o $t = 1$. Inoltre, $\operatorname{rg}(A_{-2}) = \operatorname{rg}(A_1) = 2$, quindi C_{-2} e C_1 sono semplicemente degeneri. (b) La sottomatrice di A_t formata dalle prime due righe e colonne è $B_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ t & 0 \end{smallmatrix}\right)$, con $\det(B_t) = -t^2$ e $\operatorname{tr}(B_t) = 1$. Dai segni di $\det(A_t)$, $\det(B_t)$ e $\operatorname{tr}(B_t)$ deduciamo che se $t \notin \{-2, 0, 1\}$ la conica C_t è un'iperbole reale non degenere, C_{-2} e C_1 sono iperboli semplicemente degeneri e C_0 è una parabola non degenere. (d) la conica C_{-2} ha equazione $x^2 - 4xy + x + 4y - 2 = 0$. Poiché C_{-2} è semplicemente degenere, il membro di sinistra deve decomporsi come il prodotto di due fattori lineari distinti. Supponendolo della forma $(ax + by + c)(a'x + b'y + c')$, svolgendo il prodotto e cercando opportuni valori di a, b, c, a', b', c' si trova $x^2 - 4xy + x + 4y - 2 = (x - 4y + 2)(x - 1)$. Quindi C_{-2} è l'unione delle due rette di equazioni $x - 4y + 2 = 0$ e $x = 1$. Invece C_1 ha equazione $x^2 + 2xy + x + 4y - 2 = 0$. Come prima, C_1 è semplicemente degenere e $x^2 + 2xy + x + 4y - 2 = (x + 2y - 1)(x + 2)$, quindi C_1 è unione delle rette di equazioni $x + 2y - 1 = 0$ e $x = -2$.