Task 1:
Для каждой из следующих функций $f(x)$ выписать первый дифференциал. Для скалярных функций векторного аргумента найти вектор-градиент $\nabla f(x)$. Для скалярных функций матричного аргумента найти матрицу-градиент $\nabla f(X)$.

2. $f(x)=\exp(A\exp(B\exp(Cx)))$, где $\exp(y)=[\exp(y_1),\dots,\exp(y_n)]^T$, $x\in\mathbb{R}^n$
8. $f(X)=\det(X^TAX)$, $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$

Solution:
$f(x)=\exp(A\exp(B\exp(Cx)))$, где $\exp(y)=[\exp(y_1),\dots,\exp(y_n)]^T$, $x\in\mathbb{R}^n$
$df(x;dx)=d(\exp(A\exp(B\exp(Cx))))=\{d(\exp(x))=dx\exp(x)\}=\exp(A\exp(B\exp(Cx)))$ $d(A\exp(B\exp(Cx)))=\exp(A\exp(B\exp(Cx)))$ $A\exp(B\exp(Cx))$ $d(B\exp(Cx))=\exp(A\exp(B\exp(Cx)))$ $A\exp(B\exp(Cx))$ $B\exp(Cx)$ $d(Cx)$ $=ABC\exp(A\exp(B\exp(Cx)))$ $\exp(B\exp(Cx))$ $\exp(Cx)$ dx .

$\nabla f(x)=(ABC\exp(A\exp(B\exp(Cx)))\ \exp(B\exp(Cx))\ \exp(Cx))^T$.

8. $f(X)=\det(X^TAX)$, $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$
First Derivative:
$d(det(X))=det(X)\langle X^{-T},dX\rangle$ – из таблицы стандартных производных
$d(\det(X^TAX))=\det(X^TAX)\langle(X^TAX)^{-T},d(X^TAX)\rangle=\det(X^TAX)\langle X^{-1}A^{-T}X^{-T},d(X^T)AX+X^TAdX\rangle$
Чтобы найти градиент, приведем $df(X)$ к канонической форме $df(X)=\langle\nabla f(X),dX\rangle$ $df(X)=$ $\det(X^TAX)(\langle X^{-1}A^{-T}X^{-T},d(X^T)AX\rangle+\langle X^{-1}A^{-T}X^{-T},X^TAdX\rangle)=$
$\det(X^TAX)(\langle X^{-1}A^{-T}X^{-T}X^TA^T,d(X^T)\rangle+\langle A^TXX^{-1}A^{-T}X^{-T},dX\rangle)=\det(X^TAX)(\langle X^{-1},d(X^T)\rangle+$ $\langle X^{-T},dX\rangle)=\det(X^TAX)(\langle X^{-T},dX\rangle+\langle X^{-T},dX\rangle)=\det(X^TAX)\langle X^{-T}+X^{-T},dX\rangle=\langle\det(X^TAX)(2X^{-T}),dX\rangle$

$\nabla f(X)=\det(X^TAX)(2X^{-T})$

Task 4:
1. $\max_{x\in\mathbb{R}^n_+,1^Tx=1}a^Tx$, где $a\in\mathbb{R}^n_+$
$\max a^Tx\le\max(a^T)\max(x)$ $\max a^Tx=\max(a^T)$

2. $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\mathrm{vec}(xa^T)^T\mathrm{vec}(xb^T)-c^Tx$, где $a,b\in\mathbb{R}^n_+$ и vec(·) обозначает векторизацию.
$\mathrm{vec}(xa^T)^T\mathrm{vec}(xb^T)-c^Tx=tr((xa^T)^T(xb^T))-c^Tx=tr(ax^Txb^T)-c^Tx$ $d(tr(ax^Txb^T)-c^Tx)=$ $d(tr(ax^Txb^T))-d(c^Tx)=tr(d(ax^Txb^T))-c^Tdx=tr(d(ax^T)xb^T+ax^Td(xb^T))-c^Tdx=tr(d(ax^T)xb^T)+tr($ $ax^Td(xb^T))-c^Tdx=tr(bx^Tdxa^T)+tr(ax^Tdxb^T)-c^Tdx=tr(a^Tbx^Tdx)+tr(b^Tax^Tdx)-c^Tdx$ $\nabla f(x)=$ $a^Tbx^T+b^Tax^T-c^T$
$\nabla f(x)=0$ $a^Tbx^T+b^Tax^T-c^T=0$ $(a^Tb+b^Ta)x^T=c^T$ $x^T=(a^Tb+b^Ta)^{-1}c^T$ $x=(a^Tb+b^Ta)^{-T}c$
$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\mathrm{vec}(xa^T)^T\mathrm{vec}(xb^T)-c^Tx=tr(a(a^Tb+b^Ta)^{-1}c^T((a^Tb+b^Ta)^{-T}c)b^T)-c^T((a^Tb+b^Ta)^{-T}c)$

3. $\min_{X\in\mathbb{R}^{n\times n}}\mathrm{vec}(X)^T\mathrm{vec}(AXB)+\mathrm{tr}(A^TX)$, где $A,B\succ0$ (имеют положительные собственные числа).

$\mathrm{vec}(X)T\mathrm{vec}(AXB)+\mathrm{tr}(ATX)=tr((X)T(AXB))+\mathrm{tr}(ATX)=tr(BXTAX)+\mathrm{tr}(ATX)$
$d(tr(BXTAX)+\mathrm{tr}(ATX))=d(tr(BXTAX))+d(\mathrm{tr}(ATX))=tr(d(BXTAX))+tr(\mathrm{d}(ATX))=tr(Bd(XT)AX+BXTAd(X))+tr(AT\mathrm{d}(X))=tr(XTATd(X)BT)+tr(BXTAd(X))+tr(AT\mathrm{d}(X))=$
$tr(BTXTATd(X))+tr(BXTAd(X))+tr(AT\mathrm{d}(X))=tr((BTXTAT+BXTA+AT)\mathrm{d}(X))$ $\nabla f(X)=AXB+ATXTBT+A$
$\nabla f(X)=0$ $AXB+ATXTBT+A=0$
т.к $A,B>0$, то решений нет