МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Кафедра МО ЭВМ

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3

по дисциплине

«Теория игр и исследование операций»

Вариант 2

Студентка гр. 6383 ____________________ Базаров И

Преподаватель ____________________ Шолохов А.В.

Санкт-Петербург

2019

Задание 1 (15 баллов).

Для заданных постоянных $\Phi \in R^{m \times n}$, $y \in R^m$ и вектора переменных$x \in R^n$ переформулировать следующую задачу оптимизации как задачу линейного программирования:

$$\min_x c^T x$$

$$s.t.\ \begin{matrix} Gx \le h \\ Ax = b \end{matrix}$$

Иными словами выразить c, G, h, A, b через Φ и y так, чтобы получилась задача оптимизации, эквивалентная следующей:

$$\min_x \|\Phi x - y\|_\infty$$

Решение

$$\min_x \|\Phi x - y\|_\infty = \text{min max } |\Phi x — y| = \text{min max } \begin{pmatrix} \Phi x - y \\ -\Phi x + y \end{pmatrix} = \text{min t}$$

$$s.t.\ \begin{matrix} \Phi x - y \le t \\ \Phi x - y \ge -t \end{matrix}$$

$$= \text{min t} \qquad = \text{min } c^T x$$

$$s.t.\ \begin{matrix} \Phi x - t \le y \\ -\Phi x - t \le -y \end{matrix} \qquad s.t.\ Gx \le h$$

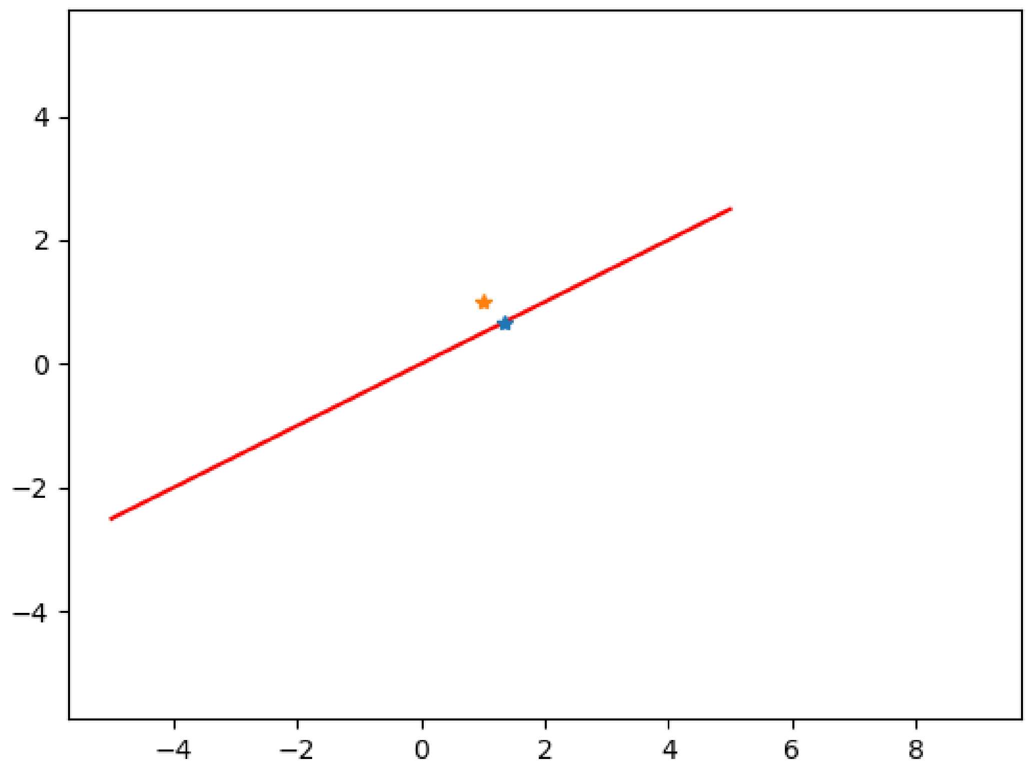
где $x^T = (t, x_1,\ldots, x_n)$, $c^T=(1, 0, \ldots ,0)^T$, G= $\begin{pmatrix} -1 & \Phi \\ -1 & -\Phi \end{pmatrix}$, $h^T=(y,-y)^T$

Подставим числовые значения $\Phi=(2, 1)^T$, $y^T=(1,1)^T$, $\epsilon = 1$:

$c^T=(1,0)^T$, G= $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, h = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Используя функцию cvxopt.solvers.lp найдем решене задачи и изобразим на плоскости точки y (оранжевого цвета) и $\Phi x¿$ (синего цвета) и прямую Φx.

Решение x=2/3;

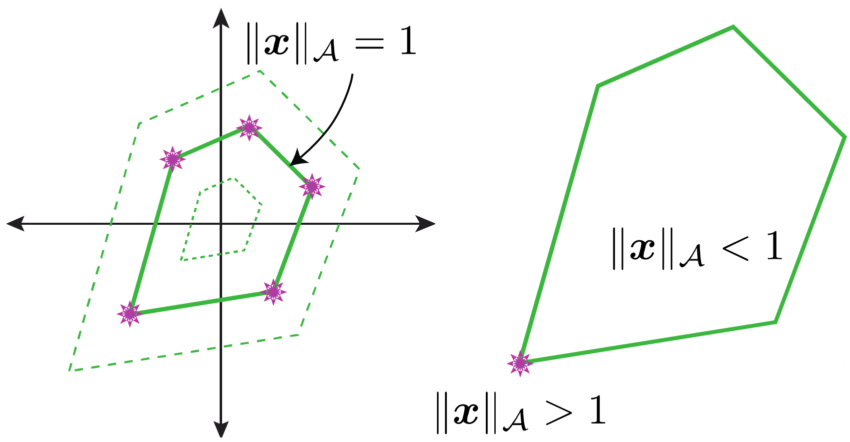


Код на python представлен в файле TASK_1.py

Задание 2 (15 баллов).

Пусть A – центрально-симметричный ($a \in A \Longleftrightarrow -a \in A$) набор векторов («атомов»), такой что элементы A есть крайние точки выпуклой оболочки A, обозначаемой $conv(A)$. Определим *атомарную норму* (atomic norm) для множества A следующим образом: $\|x\|_A = inf\{t>0 \vee x \in t\, conv(A)\}$

Шар атомарной нормы получается равномерным расширением или сжатием множества $conv(A)$. Вычисление $\|x\|_A$ сводится к поиску шара минимального «радиуса»t, который включает вектор x.



Рассмотрим задачу поиска решения недоопределенной СЛАУ с минимальной нормой: $\min_x \|x\|_A$

$$s.t.\ \Phi x = y$$

Обозначим элементы A через a_i. Тогда вектор $x \in t\, conv(A)$ можно представить как коническую комбинацию его элементов: $x = t\sum_i w_i a_i$, где $t \geq 0$, $1^T w = 1$, $1^T w = 1$, $w_i \geq 0$, а исходную задачу оптимизации можно преобразовать в эквивалентную линейную программу: $\min_{t,x,w} t$

$$s.t.\ \begin{array}{c} x = t\sum_i w_i a_i \\ t \geq 0 \\ 1^T w = 1, w_i \geq 0 \\ \Phi x = y \end{array}$$

Вводя новые переменные $u_i = t w_i$, перепишем эту задачу следующим образом: $\min_{t,u} t$

$s.t.\ \begin{array}{c} 1^T u = t, u \geq 0 \\ t \geq 0 \\ \Phi P u = y \end{array}$, где матрица P содержит вектора a_i в качестве столбцов.

Пусть $A = \{(1,0),(0,1),(-1,1),(-1,0),(0,-1),(1,-1)\}$, $\Phi = [1\,2]$ и $y = 10$. Найти решение задачи используя функцию cvxopt.solvers.lp. Визуализировать результат с помощью библиотеки matplotlib (изобразить решение $x_¿$, множество ограничений $\{x|\Phi x = y\}$ и множество $\{x|\|x\|_A \leq \|x_¿\|_A\}$).

Решение:

$x^T = (t, u_1, \dots, u_6)^T$; $c^T = (1,0,0,0,0,0,0)^T$; h = $(0,0,0,0,0,0,0,0,0,y,-y)^T$; G=

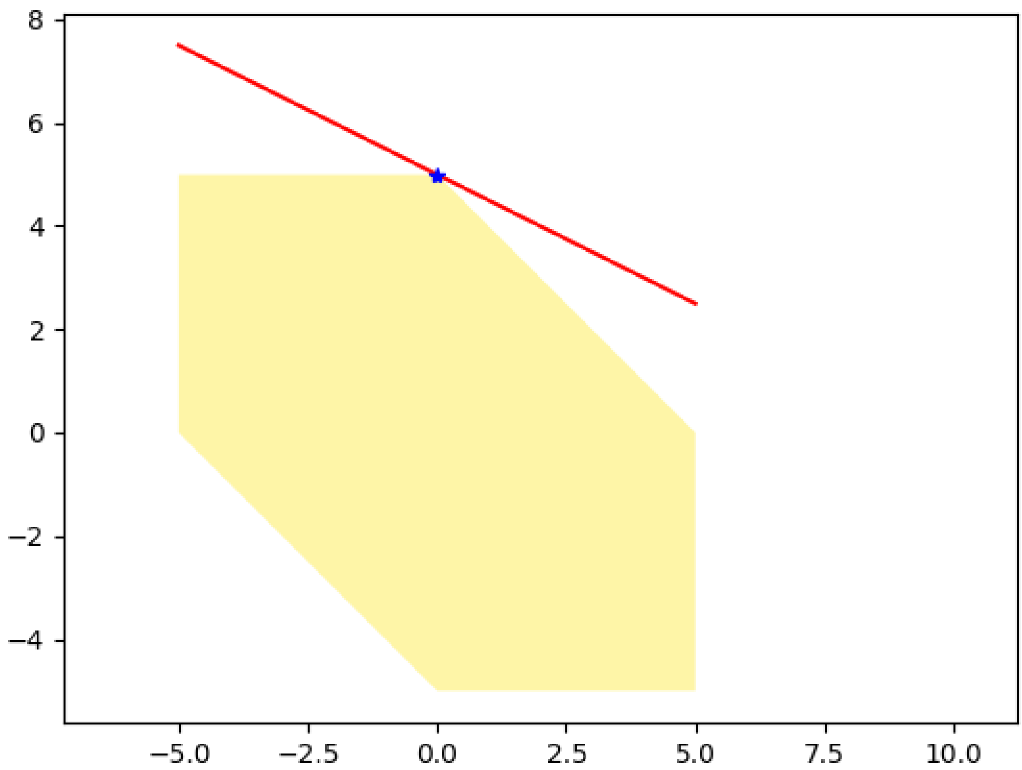
$$\begin{pmatrix} 1, -1, \dots, -1 \\ -1, 1, \dots, 1 \\ -E \\ 0, F * p \\ 0, -F * p \end{pmatrix}$$

, где 1,2 строки это условия что сумма u_i = t; далее единичная матрица накладывает ограничение что все компоненты x неотрицательны; а последние 2 строки задают ограничения $\{x|\Phi x = y\}$.

Найдем решение задачи используя функцию cvxopt.solvers.lp

$|x|_A$=5.

Визуализируем результат с помощью библиотеки matplotlib.



Код на python представлен в файле TASK_2.py

3. (10 баллов). *Переписать задачу в виде:*

$$\min_{x,z} f_1(x)+f_2(z)$$

$$s.t.\ \begin{matrix} Ax+Bz=c \\ x\in C_1, z\in C_2 \end{matrix}$$

Описать и реализовать alternating direction method of multipliers (ADMM) для решения этой задачи. *Примечание*: параметр ρ алгоритма ADMM должен быть больше единицы.

Решение:

$x^T = (t)^T$; $z^T = (u_1,\ldots,u_n)^T$; $f(x) = x$; $g(z)=0$. Тогда огданичения можно записать в виде: $Ax+Bz=c$, где $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1,\cdots,-1\\ \Phi p\end{pmatrix}$, $c^T=(0,y)^T$.

ADMM:

$L\rho(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T(Ax + Bz - c) + (\rho/2)\ \|Ax + Bz - c\|^2_2$

$x^{k+1}:=\mathrm{argmin}_x L\rho(x,z^k,y^k)$ // x - минимизация

z^{k+1}:=argmin$_z$Lρ(x^k,z,y^k) // z - минимизация

y^{k+1}:= y^k+ρ(Ax^{k+1}+Bz^{k+1}-c)

Найдем argmin$_x$Lρ(x,z^k,y^k):

Lρ(x,z^k,y^k)=x+y^T(Ax+Bz-c)+(ρ/2) $\|Ax + Bz - c\|_2^2$

Возьмем производную по x и приравняем к 0, получим:

$1 + y^T A + \rho\,(Ax+Bz)^T A = 0$, с учетом $A=(1,0)^T$, выражение примет вид:

$1+y^T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}x-1^T z-0\\ \Phi p-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0$, после преобразований получим

$1+y_1+\rho\left(x-1^T z\right)=0$, откуда $x=\frac{-1-y_1}{\rho}+\sum(z)$

Таким образом, x^{k+1}:=argmin$_x$Lρ(x,z^k,y^k) = $\frac{-1-y_1^k}{\rho}+\sum\left(z^k\right)$

Для нахождения argmin$_z$Lρ(x^k,z,y^k) воспользуемся функцией solvers.qp.

Для этого в формуле Lρ(x,z^k,y^k)=x+y^T(Ax+Bz-c)+(ρ/2) $\|Ax + Bz - c\|_2^2$ раскроем скобки и будем избавляться от слагаемых не зависящих от z:

$y^T Bz+(\rho/2)\,(Ax + Bz - c)^T(Ax + Bz - c) = y^T Bz + (\rho/2)(xA^T B- c^T Bz+z^T B^T Ax+z^T B^T z-z^T B^T c)= (y^T B + \rho x A^T B- \rho c^T B)z+ \rho/2(z^T B^T Bz)$

Таким образом матрица P для функции solvers.qp будет равна: $P=\rho B^T B$

А матрица $q = (y^T B+\rho x A^T B-\rho c^T B)^T$

Код на python представлен в файле TASK_3.py

Задание 5

Задание: Пусть графы А и В являются триангуляциями пары наборов точек на плоскости.

1) Найти решение задачи оптимизации (см. ниже). В качестве инициализации использовать тождественную перестановку или перестановку, найденная с помощью какого-либо жадного алгоритма.

2) Преобразовать решение задачи X в бинарную матрицу Z: Zij=II{Xij>0.5}. Полученная матрица Z не обязательно будет (и скорее всего не будет) являться матрицей перестановки. Визуализировать Z.

3) Найти разложение Биркгофа –фон Неймана матрицы решения X. Выбрать матрицу перестановки с максимальным коэффициентом. Выписать соответствующую перестановку. Визуализировать решение.

Вариант 2

Решить релаксированную задачу методом проекции градиента. Для вычисления проекции произвольной квадратной матрицы на множество 뀖, представить это

множество как пересечение D=D1∩D2, где D={X:X1=1,XT1=1} и D={X:Xij≥0,∀i,j} и использовать Dijkstra's projection algorithm task5.py

Графы создаются из trianglesи представляются в виде матрицы смежности

Алгоритм проекционный алгоритм Дейкстры для задачи оптимизации

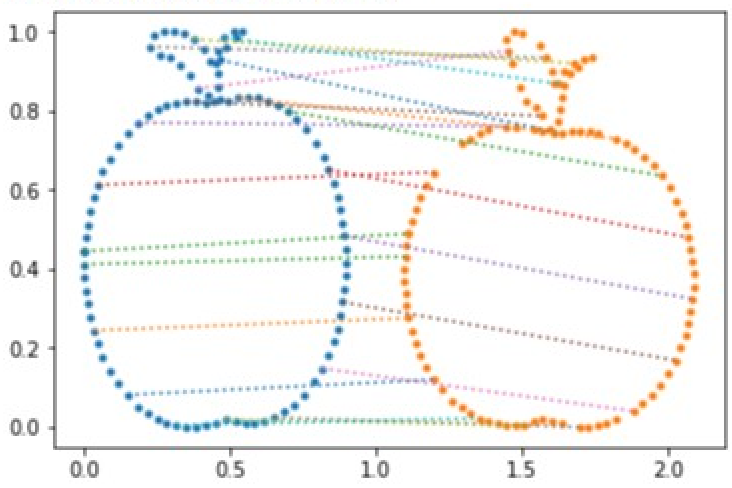
$$\min_X \|XA-BX\|_F^2$$
$$\text{s.t. } X\in\mathcal{P}$$

,следующий -

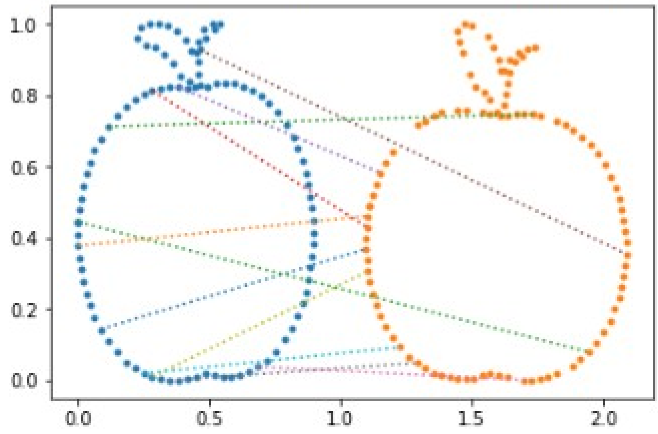
$$y_k = \mathcal{P}_D(x_k + p_k)$$
$$p_{k+1} = x_k + p_k - y_k$$
$$x_{k+1} = \mathcal{P}_C(y_k + q_k)$$
$$q_{k+1} = y_k + q_k - x_{k+1}.$$

где Pd – проекция на множество дважды стохастических матриц, Pc – проекция на матрицы с неотрицательными элементами.

Тождественная перестановка –



Полученная матрица перестановки на графах (для значений > 0.5)-



Разложение Биркгофа - фон Неймана матрицы решений дает следующую перестановку