

# Analisi metodo iterativo Jacobi

In questa documentazione si mostreranno i casi di test relativi al metodo iterativo Jacobi.

## Test di Accuratezza

Il test di accuratezza determina quanto la soluzione del sistema lineare trovata con Jacobi si avvicina a quella reale. I test sono stati effettuati utilizzando matrici sparse di grandi dimensioni non singolari e ben condizionate. E' stata implementata la funzione *CalcoloAccuratezza()* che restituisce : un grafico rappresentante la sparsità della matrice, l'indice di condizionamento della matrice A, l'errore relativo, il residuo relativo e il numero di iterazioni impiegate per trovare la soluzione.

## Condizione Sufficiente di Convergenza $\rho(A) < 1$

Un metodo iterativo è convergente se il raggio spettrale della matrice di iterazione è minore di 1. Di seguito viene mostrato un esempio in Matlab che conferma la condizione.

```
A = spdiags(rand(100,1),0,100,100);  
x = ones(100,1);
```

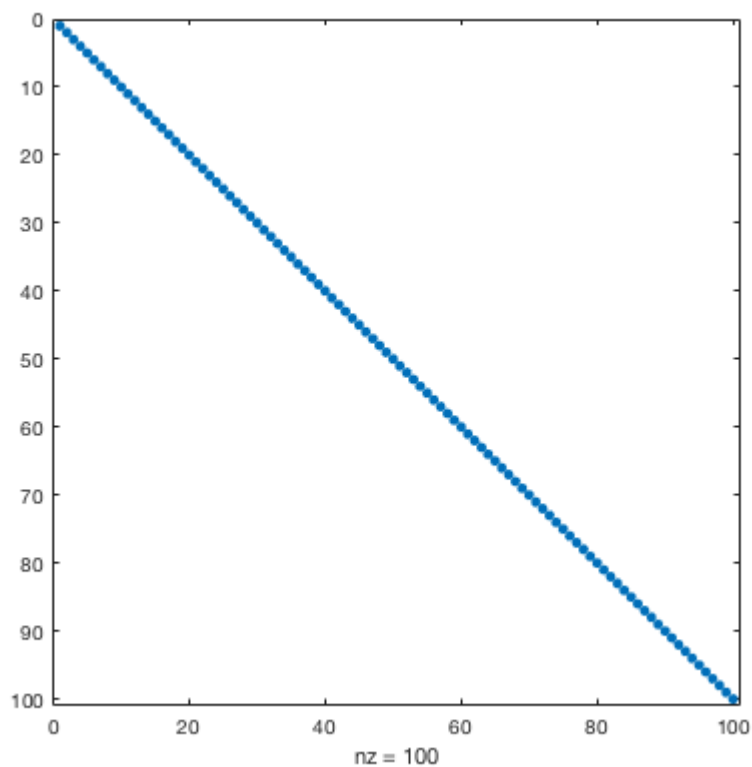
Il raggio spettrale è il massimo in modulo degli autovalori della matrice A.

```
rho = max(eig(A))
```

```
rho = 0.9984
```

Il raggio spettrale è minore di 1, soddisfa dunque l'ipotesi di convergenza. La funzione *CalcoloAccuratezza()* conferma che il metodo Jacobi è convergente per la matrice trattata ed in particolare il numero di iterazioni è 2.

```
[indice_cond,errore_rel,numiter,resid_rel] = CalcoloAccuratezza(A,x,eps,700)
```



```

indice_cond = 817.0686
errore_rel = 0
numiter = 2
resid_rel = 0

```

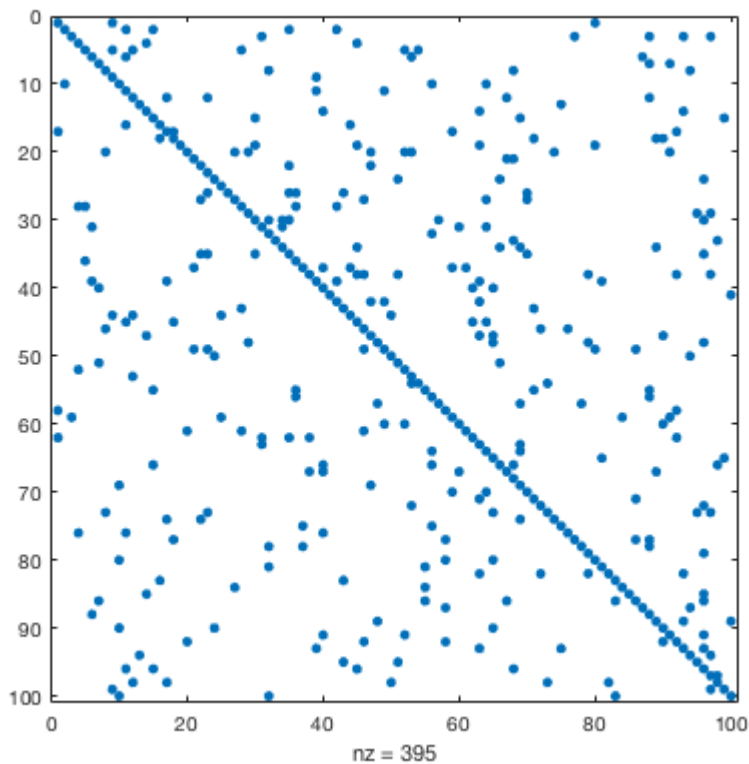
## Test con Matrice A con diagonale strettamente dominante $\rho(A) = \|A\|$ .

La matrice ha diagonale principale strettamente dominante. Questa è una condizione sufficiente per la convergenza dell'algoritmo. Si sono richieste almeno 13 cifre significative corrette e al massimo 900 iterazioni.

```

A = sprand(100,100,0.03)+spdiags(ones(100,1),0,100,100)*3;
x = ones(100,1);
[indice_cond,errore_rel,numiter,resid_rel] = CalcoloAccuratezza(A,x,10^-13,900)

```



```

indice_cond = 8.0945
errore_rel = 1.6431e-14
numiter = 41
resid_rel = 4.6660e-15

```

## Test con Matrice Malcondizionata e Sparsa '685\_bus'

Questa matrice è stata prelevata dal seguente indirizzo web:

[HB\\_685\\_bus](#)

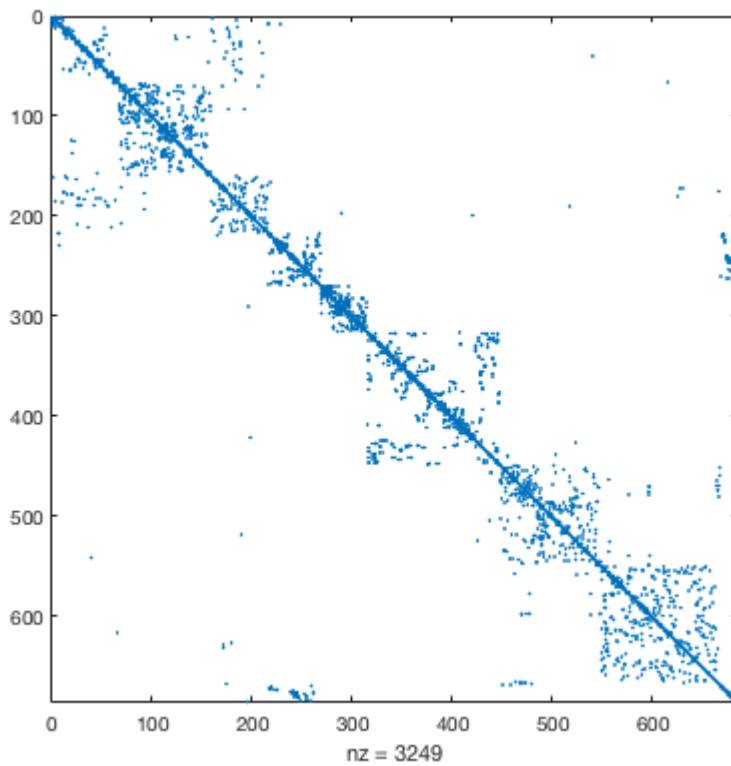
La matrice di input rappresenta un problema di rete elettrica avvenuto in Russia nel Luglio del 1985. Il numero degli zeri indica le interruzioni di corrente elettrica nei vari luoghi.

*N.B : Il parametro 'Problem' estrae una struttura dal file .mat caricato, per caricare la matrice A basta eseguire il comando `A = Problem.A`*

```

load('685_bus.mat','Problem');
A = Problem.A;
x = ones(length(A),1);
[indice_cond,errore_rel,numiter,resid_rel] = CalcoloAccuratezza(A,x,eps,800)

```



```

indice_cond = 5.3104e+05
errore_rel = 0.9200
numiter = 800
resid_rel = 1.5331e-04

```

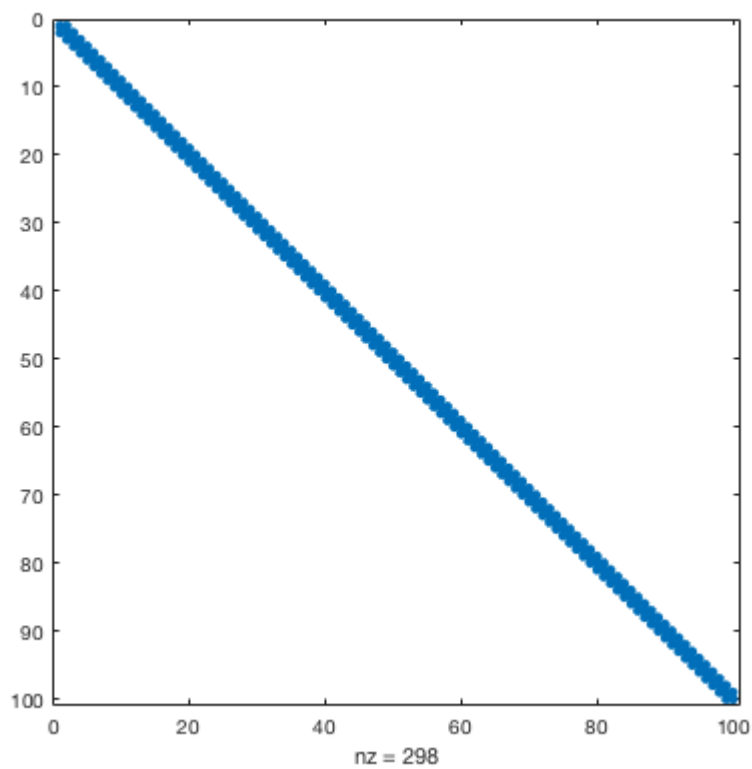
L'errore relativo è circa 1, dunque non c'è nessuna cifra significativa corretta anche se ne abbiamo richieste 15 settando  $TOL=eps$ . Questo fenomeno avviene a causa del valore di condizionamento della matrice utilizzata.

## Test con matrice A tridiagonale

```

A = gallery('tridiag',100,10,35,22);
x = ones(100,1);
[indice_cond,errore_rel,numiter,resid_rel] = CalcoloAccuratezza(A,x,10^-8,900)

```



```

indice_cond = 22.3333
errore_rel = 4.3670e-09
numiter = 213
resid_rel = 1.7269e-09

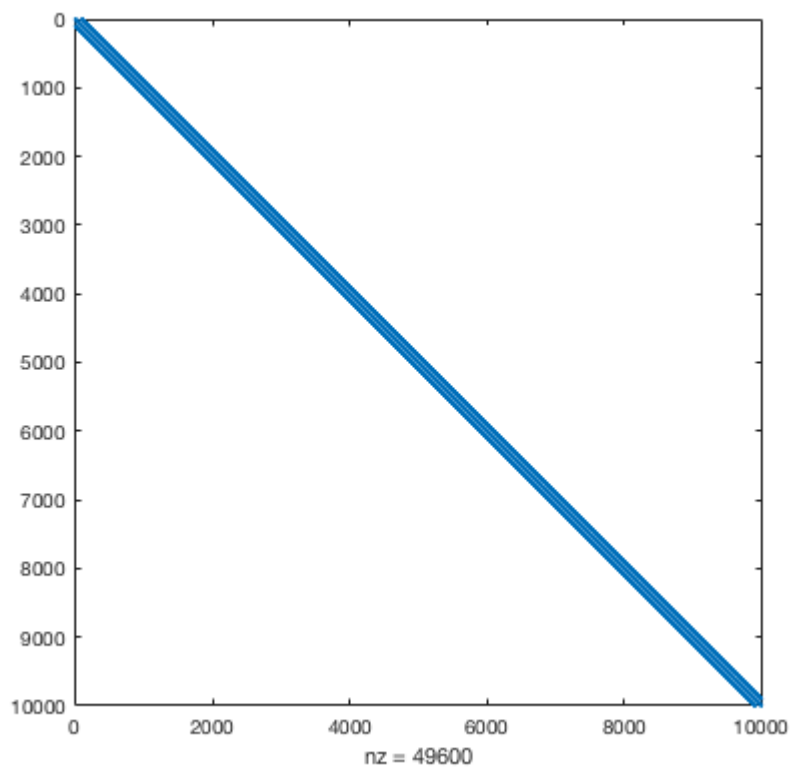
```

## Test con Matrice A di Poisson

```

A = gallery('poisson',100);
x = ones(10000,1);
[indice_cond,errore_rel,numiter,resid_rel] = CalcoloAccuratezza(A,x,10^-12,30000)

```



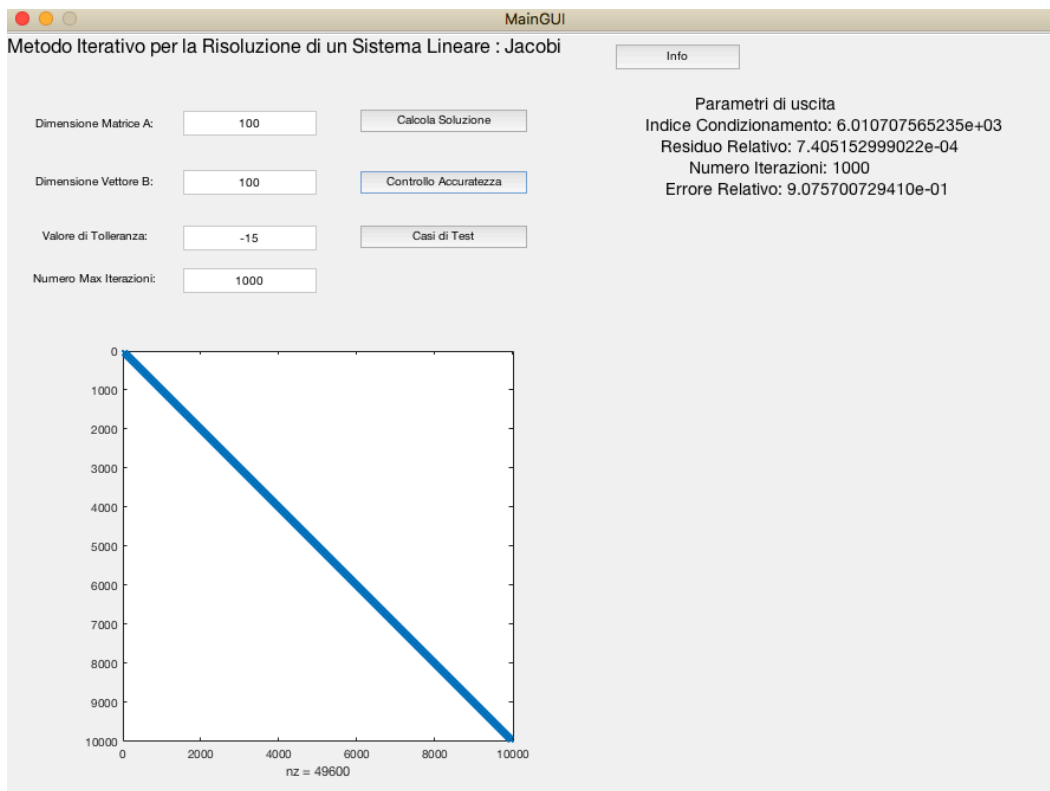
```

indice_cond = 6.0107e+03
errore_rel = 8.0509e-07
numiter = 30000
resid_rel = 3.8955e-09

```

Contrariamente al caso della matrice 685\_bus nella quale non vi era nessuna cifra significativa corretta nella soluzione, per la matrice di Poisson si nota che le cifre significative corrette restituite dalla soluzione sono 7 a fronte delle 12 che sono state richieste.

### Esecuzione da interfaccia grafica



## Valutazione delle Performance

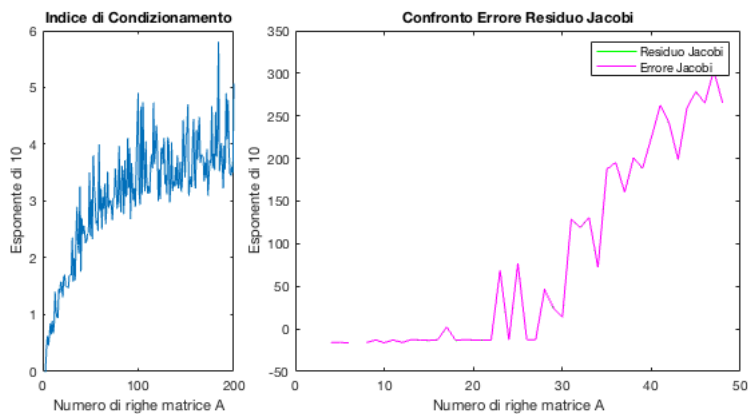
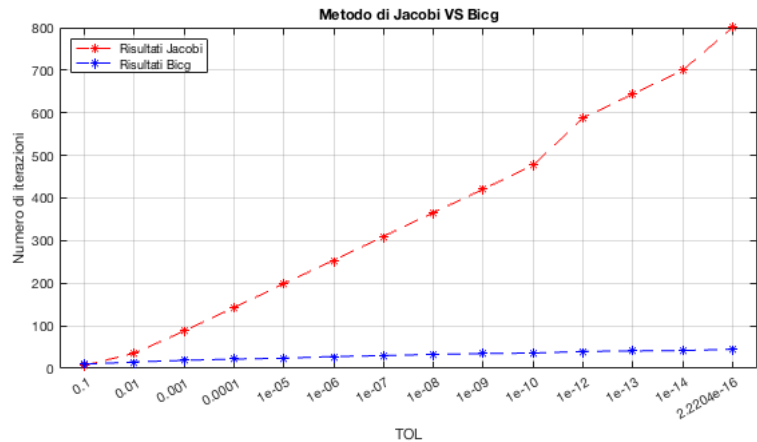
La valutazione delle performance dell'algoritmo mette alla luce le differenze del metodo di Jacobi implementato con la funzione del MATLAB "**bicg**". Entrambe richiedono gli stessi parametri di input (Matrice A, Vettore B , Tolleranza e Numero massimo di Iterazioni) e gli stessi parametri di Output (soluzione, numero iterazioni e residuo relativo). Le differenze tra i due metodi vengono mostrate su dei grafici che riportano il numero di iterazioni, l'indice di condizionamento della matrice in input ed errore e residuo relativo.

Sono stati scelti i seguenti parametri di input

- A : Matrice Sparsa di Poisson (presa dalla Gallery)
- b : Vettore casuale di elementi sparsi della stessa lunghezza di A
- TOL : Espresso come vettore di tolleranze da  $10^{-1}$  a  $\epsilon$
- MAXITER : Numero massimo di iterazioni posto di default a 900

```
A = gallery('poisson',10);
b = sprand(length(A),1,0.2);
TOL=[10^-1 10^-2 10^-3 10^-4 10^-5 10^-6 10^-7 10^-8 10^-9 10^-10 10^-12 10^-13 10^-14 eps];
MAXITER = 900;
Valuta_Performance(A,b,TOL,MAXITER)
```

Grafico degli indici di condizionamento, Errore, Residuo e Numero Iterazioni per Jacobi/Bicg



## Test di Robustezza

Per valutare la robustezza dell'algorithm è stata implementata una test suite. I casi di test sono stati scelti a partire dalle condizioni di errore o warning che possono avere luogo. Ogni caso di test lo descriveremo



brevemente a partire dai parametri di input e dalla funzionalità che viene testata. Il numero di casi di test è: 15, implementati in una classe definita dal matlab *matlab.unittest.TestCase*. In tal modo si è automatizzato il processo di esecuzione dei test. Le istruzioni per eseguire i test saranno mostrate successivamente.

Di seguito seguono i casi di test più rilevanti che sono stati effettuati.

## Test Case 1

Verifica se la matrice immessa non è sparsa

### Input

- $A = \text{rand}(10);$
- $b = A * \text{ones}(10,1);$
- $\text{TOL} = 10^{-8};$
- $\text{MAXITER} = 700;$

## Test Case 3

Verifica se la matrice presenta uno zero sulla diagonale principale

### Input

- $A = \text{sprand}(10,10,0.1) + \text{speye}(10,10);$
- $A(1,1) = 0;$
- $b = A * \text{ones}(10,1);$
- $\text{TOL} = 10^{-8};$
- $\text{MAXITER} = 700;$

## Test Case 5

Verifica se il valore di tolleranza è negativo

- $A = \text{sprand}(10,10,0.1) + \text{speye}(10,10);$
- $b = A * \text{ones}(10,1);$
- $\text{TOL} = -3;$
- $\text{MAXITER} = 10500;$

## Test Case 8

Verifica se il numero massimo di iterazioni è negativo

- $A = \text{sprand}(10,10,0.1) + \text{speye}(10,10);$
- $b = A * \text{ones}(10,1);$
- $\text{TOL} = 10^{-8};$
- $\text{MAXITER} = -1;$

## Test Case 9

Verifica se il vettore B non è un vettore

### Input

- `A = sprand(10,10,0.1) + speye(10,10);`
- `b = rand(10);`
- `TOL = 10^-8;`
- `MAXITER = 700;`

## Test Case 11

Verifica se il numero massimo di iterazioni è molto grande

- `A = sprand(10,10,0.1) + speye(10,10);`
- `b = A*ones(10,1);`
- `TOL = 10^-8;`
- `MAXITER = 10500;`

## Test Case 13

Verifica se la tolleranza e il numero massimo di iterazioni non sono specificati

### Input

- `A = sprand(10,10,0.1) + speye(10,10);`
- `b = A*ones(10,1);`
- `TOL = non specificato`
- `MAXITER = non specificato`

## Esecuzione Test suite

Vengono effettuati i test a partire dagli input definiti in precedenza.

```
result = runtests('CasiTest.m')
```

```
Running CasiTest
```

```
.....
```

```
Done CasiTest
```

```
result =
```

```
1x15 TestResult array with properties:
```

```
Name
```

```
Passed
```

```
Failed
```

```
Incomplete
```

```
Duration
```

```
Details
```

```
Totals:
```

```
15 Passed, 0 Failed, 0 Incomplete.
```

```
1.4593 seconds testing time.
```

```
table(result)
```

```
ans = 15x6 table
```

	Name	Passed	Failed	Incomplete	Duration	Details
1	'CasiTest...	1	0	0	0.5500	1×1 struct
2	'CasiTest...	1	0	0	0.0318	1×1 struct
3	'CasiTest...	1	0	0	0.0421	1×1 struct
4	'CasiTest...	1	0	0	0.0309	1×1 struct
5	'CasiTest...	1	0	0	0.0796	1×1 struct
6	'CasiTest...	1	0	0	0.4498	1×1 struct
7	'CasiTest...	1	0	0	0.0086	1×1 struct
8	'CasiTest...	1	0	0	0.0439	1×1 struct
9	'CasiTest...	1	0	0	0.0400	1×1 struct
10	'CasiTest...	1	0	0	0.0079	1×1 struct
11	'CasiTest...	1	0	0	0.0447	1×1 struct
12	'CasiTest...	1	0	0	0.0155	1×1 struct
13	'CasiTest...	1	0	0	0.0711	1×1 struct
14	'CasiTest...	1	0	0	0.0260	1×1 struct
15	'CasiTest...	1	0	0	0.0173	1×1 struct

## Riferimenti

- Testing in Matlab: <https://it.mathworks.com/help/matlab/matlab-unit-test-framework.html>
- [Docenti.unina.it D'alessio Alessandra](https://www.docenti.unina.it/D'alessio/Alessandra)
- [Wikipedia : Metodo di Jacobi](https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_method)

## Autori

**Giuseppe Napolano M63000856 Raffaele Formisano M63000912 Giuseppe Romito M63000936**