Αποκεντρωμένος Υπολογισμός και Μοντελοποίηση

1ο σύνολο Θεωρητικών Ασκήσεων

Λουδάρος Ιωάννης (1067400)

Μπορείτε να δείτε την τελευταία έκδοση του Project εδώ ή σκανάροντας τον κωδικό QR που βρίσκεται στην επικεφαλίδα.

Περιγραφή Αναφοράς

Παρακάτω παραθέτω τις απαντήσεις μου στο "Πρώτο Σύνολο Θεωρητικών Ασκήσεων" του μαθήματος "Αποκεντρωμένος Υπολογισμός και Μοντελοποίηση" καθώς και σχόλια τα οποία προέκυψαν κατά την εκπόνηση του.

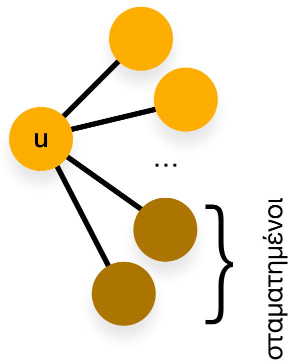
Περιεχόμενα

Απαντήσεις

1. Άσκηση 1

Πρώτο Ερώτημα

Ο αλγόριθμος μετασχηματίζεται σε:



1. Κάθε κόμβος είναι ενεργός με πιθανότητα p_a.
2. Κάθε ενεργός κόμβος προσπαθεί να επιλέξει ένα τυχαίο ελεύθερο χρώμα
3. Σταματάμε αν επιτύχουμε

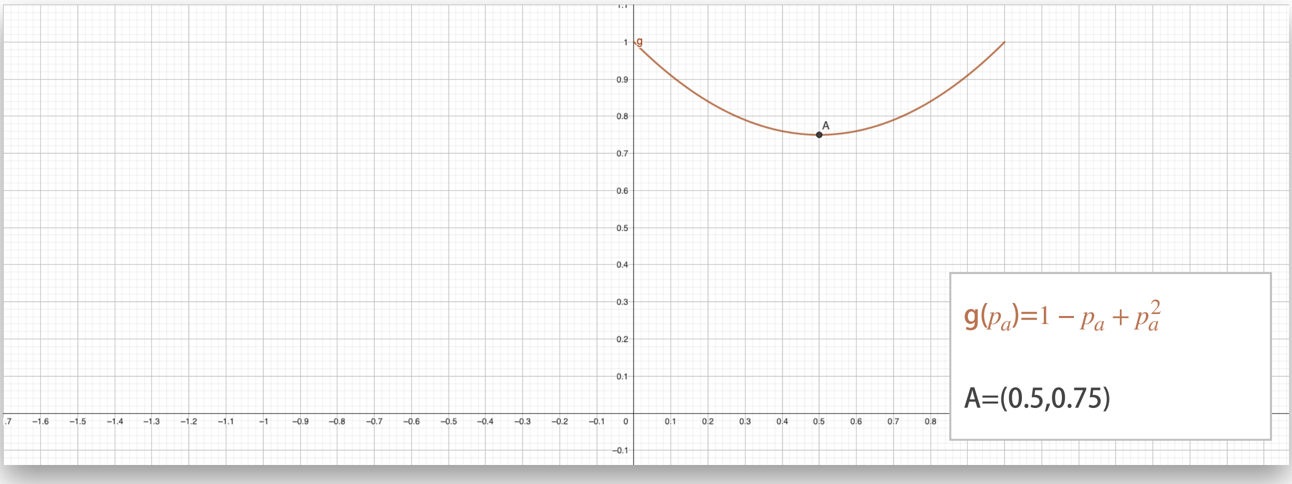
Ας αναλύσουμε…

- Ας κοιτάξουμε τον κόμβο u.
- Το u μπορεί να πάρει τουλάχιστον k+1 χρώματα (όπου κ η μεγαλύτερη τάξη).
- Έστω τώρα ένας κόμβος v, γείτονας του u, ο οποίος είναι εν λειτουργία.
- Η πιθανότητα να διαλέξουν το ίδιο χρώμα είναι $< (k+1) \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. (1)
- Η πιθανότητα ο v να είναι ενεργός είναι p_a.
- Άρα αν το u είναι ενεργό, υπάρχει πιθανότητα να διαλέξει το ίδιο χρώμα με έναν γενικό γειτονικό κόμβο v, είναι $< \frac{p_a}{k}$.
- Στην χειρότερη περίπτωση έχουμε k γείτονες και άρα η πιθανότητα το u να διαλέξει ίδιο χρώμα με κάποιον πηγαίνει στο $< p_a$.
- Άρα η πιθανότητα να ΜΗΝ συμβεί καμία σύγκρουση είναι $\geq 1 - p_a$.
- Αν τώρα λάβουμε υπόψιν μας και την πιθανότητα το u να είναι ενεργό (p_a). **Η πιθανότητα να σταματήσει ο κόμβος u σε έναν γύρο είναι** $\geq p_a - p_a^2$ **.**
- Αντίστοιχα, η πιθανότητα να μην σταματήσει $\leq 1 - p_a + p_a^2$.
  (Το οποίο είναι πολυώνυμο με ελάχιστο στο 1/2. Άρα για αυτό χρησιμοποιούμε $p_a = \frac{1}{2}$.)
- **Σε T γύρους λοιπόν, η πιθανότητα αποτυχίας πέφτει στο** $\leq (1 - p_a + p_a^2)^T$**.**
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι $T = c \log_{\frac{1}{(1-p_a+p_a^2)}} n$
- Τότε, η πιθανότητα να αποτύχει ένας κόμβος σε T γύρους είναι

$$\leq (1 - p_a + p_a^2)^{c \log_{\frac{1}{(1-p_a+p_a^2)}} n} = \left(\frac{1}{1 - p_a + p_a^2}\right)^{-c \log_{\frac{1}{(1-p_a+p_a^2)}} n} = \left(\frac{1}{1 - p_a + p_a^2}\right)^{c \log_{\frac{1}{(1-p_a+p_a^2)}} n^{-1}} = n^{-c} = \frac{1}{n^c}$$

- Για το πλήθος των κόμβων, η πιθανότητα διαμορφώνεται σε $\leq \frac{1}{n^{c-1}}$
- Καταλαβαίνουμε ότι αυτό, για κατάλληλα n,c τείνει στο 0.

- Που σημαίνει ότι με μεγάλη πιθανότητα, οι κόμβοι θα σταματήσουν να αποτυγχάνουν (άρα να επιτύχουν και να τερματίσουν) σε $T = c \log_{\frac{1}{(1-p_a+p_a^2)}} n$ γύρους.
- Πάλι έχουμε O(logn) γύρους. Αν θέλουμε όμως να είμαστε λεπτολόγοι, θα μας ενδιέφερε, ποια είναι η p_a για την οποία η βάση του λογαρίθμου μεγιστοποιείται, ώστε η αύξηση του n να μετριάζεται κατά το μέγιστο δυνατό. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε το ολικό ελάχιστο του πολυώνυμου για το διάστημα [0,1]. Αυτό εντοπίζεται στο 1/2, όπως αναφέραμε και νωρίτερα.



Δεύτερο Ερώτημα

Ας εξετάσουμε το $p_a = 1$

Η γραφική παράσταση από πάνω μας δίνει να καταλάβουμε ότι είμαστε στην χειρότερη κατάσταση που θα μπορούσαμε να βρισκόμαστε. Δεν καταφέρνουμε να μετριάσουμε την επιβάρυνση που επιφέρει η αύξηση του n. Έτσι οι γύροι T που θα χρειαστούμε, τελικά θα είναι ανάλογοι του πλήθους των κόμβων.

Τι γίνεται με το πλήθος των χρωμάτων;

Διαισθητικά μας είναι προφανές ότι, όσα περισσότερα είναι τα χρώματα, τόσο δυσκολότερο είναι για δύο κόμβους να διαλέξουν το ίδιο χρώμα. Αυτό άλλωστε φαίνεται στην σχέση (1), του προηγούμενου ερωτήματος. Αν αλλάξουμε λίγο την ανάλυση μας ώστε το πλήθος των χρωμάτων να είναι ένας ανεξάρτητος αριθμός, έστω n_c, τότε έχουμε:

…

- Η πιθανότητα να διαλέξουν το ίδιο χρώμα είναι $< (n_c) \cdot \frac{1}{n_c} \cdot \frac{1}{n_c} = \frac{1}{n_c}$. (1)
- Η πιθανότητα ο v να είναι ενεργός είναι p_a.
- Άρα αν το u είναι ενεργό, υπάρχει πιθανότητα να διαλέξει το ίδιο χρώμα με έναν γενικό γειτονικό κόμβο v, είναι $< \frac{p_a}{n_c}$.
- Στην χειρότερη περίπτωση έχουμε k γείτονες και άρα η πιθανότητα το u να διαλέξει ίδιο χρώμα με κάποιον πηγαίνει στο $< k\frac{p_a}{n_c}$.
- Άρα η πιθανότητα να ΜΗΝ συμβεί καμία σύγκρουση είναι $\geq 1 - k\frac{p_a}{n_c}$.

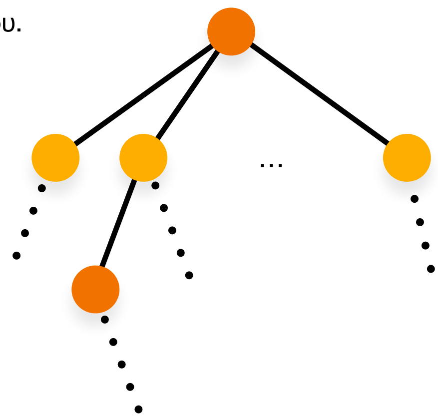
- Αν τώρα λάβουμε υπόψιν μας και την πιθανότητα το u να είναι ενεργό (p_a). **Η πιθανότητα να σταματήσει ο κόμβος u σε έναν γύρο είναι** $\geq p_a - k\frac{p_a^2}{n_c}$ **.**
- Αντίστοιχα, η πιθανότητα να μην σταματήσει $\leq 1 - p_a + k\frac{p_a^2}{n_c}$.
- **Σε T γύρους λοιπόν, η πιθανότητα αποτυχίας πέφτει στο** $\leq (1 - p_a + k\frac{p_a^2}{n_c})^T$**.**
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι $T = c \log_{\frac{1}{1 - p_a + k\frac{p_a^2}{n_c}}} n$

…

Σε αντιστοιχία με πριν θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο του παρονομαστή. Είναι ξεκάθαρο πως όσο μεγαλώνει το n_c, ο παρονομαστής μικραίνει.

2. Άσκηση 2

Ο αλγόριθμος που μας ζητείται είναι μια απλή επέκταση του Γρήγορου Αλγορίθμου.



1. Πάρε την δυαδική αναπαράσταση του χρώματος σου.
2. Σύγκρινε το χρώμα σου με αυτό του γονιού σου.
3. Βρες τον δείκτη του λιγότερο σημαντικού ψηφίου στο οποίο διαφέρετε.
4. Το νέο σου χρώμα θα είναι (δείκτης, τιμή), πάλι στο δυαδικό.