Επιστημονικός Υπολογισμός
Εργαστηριακή Άσκηση 2022

Ημερομηνία κατάθεσης γιά πλήρη βαθμό ως τις 23:59 στις 22/1/2023.

- Η εργασία είναι προαιρετική, διατηρείται ως την εξετασική Σεπτεμβρίου και λαμβάνεται υπόψη μόνον αν λάβετε προβιβάσιμο βαθμό στην τελική εξέταση. Για το 2022, αν δεν παραδοθεί εργασία, ο τελικός βαθμός θα είναι ο βαθμός της γραπτής εξέτασης, χωρίς πολλαπλασιασμό με το συντελεστή 0.7. Αν παραδοθεί εργασία και ο βαθμός της γραπτής εξέτασης είναι προβιβάσιμος, ο τελικός βαθμός θα υπολογιστεί βάσει του τύπου

$$\max\{(\text{βαθμός εξέτασης}) + 0.3 \times (\text{βαθμός άσκησης}), 10\}$$

- Σε όλες τις ερωτήσεις που ζητάται η συγγραφή συνάρτησης MATLAB, το όνομα έχει τη μορφή ****_id όπου στη θέση του id εσείς θα γράψετε το AM σας. Στη συγγραφή της αναφοράς, παρακαλείστε να θυμηθείτε τις ”καλές πρακτικές” που έχετε μάθει στο ”Συγγραφή και Παρουσίαση Τεχνικών Κειμένων”. Εννοείται ότι θα είναι πολύ καλύτερα αν γράψετε την αναφορά σε LaTeX.

1 Στοιχεία υπολογιστικού συστήματος (on/off)

Να περιγράψετε τα παρακάτω:

1. Την ημερομηνία που ξεκινήσατε να ασχολείστε με την άσκηση και την ημερομηνία που την ολοκληρώσατε.
2. Τα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού συστήματος το οποίο χρησιμοποιήσατε για την υλοποίηση της παρούσας εργαστηριακής άσκησης (π.χ. Υ/Κ, λαπτοπ, PC στο σπίτι).
   (i) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία για το σύστημα στο οποίο θα τρέξετε τα πειράματά σας όπως αναφέρονται στον Πίνακα 1. Παρακαλείστε να αναφέρετε Είναι απαραίτητο για τα στοιχεία που θα δώσετε, να αναφέρετε που ή πως τα βρήκατε. Για χρήστες Windows μπορείτε να κατεβάσετε ειδικά προγράμματα όπως το cpuz από τη διεύθυνση http://www.cpuid.com/ το οποίο θα σας δώσει τις πληροφορίες που είναι ζητούμενες. Για χρήστες Linux μπορείτε να βρείτε τις ζητούμενες πληροφορίες μέσω τον εντολών `cat /proc/meminfo` και `cat /proc/cpuinfo` .
   (ii) Έκδοση MATLAB που χρησιμοποιήσατε καθώς και πληροφορίες για τις σχετικές βιβλιοθήκες.
   (iii) Τον πίνακα που προκύπτει όταν εκτελείτε την εντολή bench. Για παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 1 στο Παράρτημα.

[2] https://ark.intel.com/content/www/us/en/ark/products/192987/intel-core-i9-9880h-processor-16m-cache-up-to-4-80-ghz.html
[3] https://en.wikichip.org/wiki/intel/core_i9/i9-9880h
[4] https://gadgetversus.com/processor/intel-core-i9-9880h-vs-intel-core-i7-9750h/
[5] Εντολή version στη MATLAB.

Πίνακας 1: Στοιχεία για τα πειράματα

Χαρακτηριστικό	ενδεικτική απάντηση
Έναρξη/λήξη εργασίας	15/11/21 - 15/12/21
model	προσωπικό λαπτοπ MacBook Pro[1]
O/S	macOS Catalina 10.15.1
processor name	8-Core Intel Core i9 (i9-9880H) [2]
processor speed	2.3 GHz (base)
number of processors	1
total # cores	8
total # theads	16
FMA instruction	yes
L1 cache	256KB Instruction, 256 KB Data write-back[3]
L2 cache	(per core) 256KB, write-back
L3 cache	(shared) 16MB, write-back
Gflops/s	423.2[4]
Memory	16GB
Memory Bandwidth	41.8 GB/s
MATLAB Version	9.6.0.1174912 (R2019a) Update 5[5]
BLAS	Intel(R) Math Kernel Library Version 2018.0.3 for Intel(R) 64 architecture applications, CNR branch AVX2
LAPACK	Intel(R) Math Kernel Library Version 2018.0.3 for Intel(R) 64 architecture applications, CNR branch AVX2 Linear Algebra PACKage Version 3.7.0

2 Πράξεις με μητρώα ζώνης και λίγη θεωρία (2β)

Έστω τα μητρώα ζώνης $A(p|q)$ και $B(s|t)$.

1. Να κατασκευάσετε δομή (δισδιάστατο array) για την αποθήκευσή τους σύμφωνα με το αντίστοιχο πρότυπο της LAPACK, δηλ. χωρίς να αποθηκεύονται οι μηδενικές υπερ- και υπο-διαγώνιοι.

2. Να γράψετε αλγόριθμο MATLAB που θα ονομάσετε my_gbmm_id (A,B) για τον πολλαπλασιασμό τους που αξιοποιεί τη δομή ζώνης των μητρώων εισόδου. Ο αλγόριθμος θα ανακαλύπτει τη δομή ζώνης των δύο μητρώων (δηλ. τις τιμές p,q,r,s) και θα υλοποιεί τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιώντας την παραπάνω δομή και στο μέγιστο δυνατό βαθμό διανυσματικές εντολές, αποφεύγοντας στο βαθμό του δυνατού τη χρήση βρόχων.

3. Πειραματιστείτε με τα παραπάνω χρησιμοποιώντας τα μητρώα που θα αναρτηθούν στο eclass και σχολιάστε τα αποτελέσματα .

4. Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ένα ερώτημα είναι κάτω από ποιές συνθήκες το αντίστροφο ενός μητρώου θα είναι πλήρες (dense). Να δείξετε ότι ισχύει το εξής: Αν ένα μητρώο είναι μη αναγωγήσιμο και οι θέσεις που βρίσκονται οι μη μηδενικές του τιμές είναι συμμετρικές, τότε το αντίστροφό του θα είναι πλήρες.

3 Τανυστές[6] [2β]

Για δοθέν μη κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές και d ακμές, όπου $d = O(n)$, και χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μητρώο γειτνίασης A να κατασκευάσετε συνάρτηση MATLAB ~~[B,D]=mypaths_id(G)~~ [B,D]=mypaths_id(G,k) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το B είναι τανυστης $n \times n \times k$ σε αραιή αναπαράσταση, για τον οποίον ισχύει ότι στη θέση (i, j, s) περιέχεται το πλήθος των δυνατών διακριτών διαδρομών μεταξύ των κόμβων i και j τ.ώ. κάθε διαδρομή να περιέχει ακριβώς $s - 1$ κορυφές εκτός από την αρχική i και την τελική j.

[6]Για το μέρος αυτό, πρέπει να κατεβάσετε το Tensor Toolbox που αναφέραμε στην αντίστοιχη διάλεξη.

2. Το D είναι μητρώο που στη θέση (i, j) περιέχει το πλήθος των διαδρομών μεταξύ των κόμβων i και j τ.ώ. κάθε διαδρομή να περιέχει το πολύ $k-1$ κορυφές εκτός από την αρχική i και την τελική j.

3. Να υπολογίσετε το μητρώο Q των ιδιοδιανυσμάτων του $n \times n$ μητρώου που βρίσκεται στις θέσεις B(:,:,1) του B. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρειαστεί να μετατρέψετε το B(:,:,1) σε double (dense). Χρησιμοποιώντας μόνον τα B, D, Q και το μικρότερο δυνατό αριθμό εντολών ttm, να δείξετε τις εντολές για να κατασκευάσετε τανυστή C του οποίου οι k $n \times n$ φέτες C(:,:, j) είναι διαγώνιες και περιέχουν τις ιδιοτιμές του κάθε A^j.

Παραδοτέο

Σύντομη περιγραφή της συνάρτησης mypaths_id.m και παράδειγμα χρήσης με επαλήθευση των τιμών στα γραφήματα που θα αναρτηθούν στο eclass.

4 Αναγωγή γενικών μητρώων σε τριδιαγώνια μορφή (10β)

Να σχεδιάσετε και να υλοποιήσετε σε συνάρτηση MATLAB έναν αλγόριθμο (μερικής και πλήρους) τριδιαγωνιοποίησης γενικών (μη συμμετρικών) μητρώων με μετασχηματισμούς ομοιότητας, δηλ. $A \to T = X^{-1}AX$, όπου το A είναι τριδιαγώνιο. Η συνάρτηση θα έχει τη μορφή ~~[T,X,flag] = mytrid_id(A,m,type)~~ [T,X,flag] = mytrid_id(A,m) όπου m, X είναι optional. Το flag επιστρέφει 0 αν ο αλγόριθμος τερματίσει χωρίς προβλήματα, διαφορετικά επιστρέφει 1. Στον αλγόριθμο πρέπει να χρησιμοποιήσετε δύο φάσεις: 1) Στην πρώτη, εφαρμόζετε ορθογώνιους μετασχηματισμούς ομοιότητας βάσει ανακλαστών Householder H_j για την αναγωγή του μητρώου σε μορφή άνω Hessenberg: $A \Rightarrow \hat{A} = H_k \cdots H_1 A H_1 \cdots H_k$ για κατάλληλο $k < n$. 2) Στη δεύτερη φάση, χρησιμοποιείτε μετασχηματισμούς L_i τέτοιους ώστε για δοθέν $m < n$, το μητρώο $T_m = L_m \cdots L_1 \hat{A} L_1^{-1} \cdots L_m^{-1}$ να είναι τριδιαγώνιο στις πρώτες $m+1$ γραμμές και στήλες και να είναι Hessenberg στις γραμμές και στήλες $m+2:n$. Αν δεν προσδιοριστεί τιμή για το m, χρησιμοποιείται η μέγιστη δυνατή τιμή του ώστε το το μητρώο T_m να είναι τριδιαγώνιο.

Παραδοτέο

i) Σύντομη περιγραφή του mytrid_id καθώς και πειράματα επαλήθευσης για α) τυχαίο μητρώο randn(n) με n=10, 20, 40 και με το μητρώο gallery('frank',20)

5 Υπολογισμοί με πολυώνυμα μητρώου

Στη συνέχεια θα διερευνήσετε τρόπους διαχείρισης πολυωνύμων μητρώου και ειδικότερα τον αποτελεσματικό υπολογισμό του $y = p(A)b$ για δοθέν y η του x που επιλύει το $p(A)x = b$ για δοθέν b. Το p είναι πολυώνυμο, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ είναι γνωστά. Το πολυώνυμο δίνεται σε δυναμομορφή, αλλά στο ερώτημα αυτό, είναι αρκετό ο αλγόριθμος να λειτουργεί μόνον για πολυώνυμα με πραγματικές ρίζες. Επομένως, αρχικά γίνεται ένας έλεγχος και αν διαπιστωθεί ότι υπάρχουν μιγαδικές ρίζες επιστρέφεται μήνυμα ότι το πρόγραμμα δεν είναι σχεδιασμένο γι' αυτήν την περίπτωση και τερματίζει.

5.1 Ανάπτυξη πολυωνύμου (20β)

Να υλοποιήσετε συνάρτηση [y] = my_polymv_id(p,A,b) για τον υπολογισμό του $y = p(A)b$ όπου το όρισμα p είναι το διάνυσμα των συντελεστών της δυναμομορφής του p (με τον μεγιστοβάθμιο όρο στην πρώτη θέση, δείτε π.χ. τις συναφείς συναρτήσεις polyval και polyvalm). Προσοχή: Το κυρίαρχο αριθμητικό κόστος Ω της συνάρτησης πρέπει να είναι $\Omega = \mathcal{O}(dN^2)$ αν το A είναι πυκνό και κόστους $\Omega = \mathcal{O}(d\,\mathrm{nnz}(A))$ αν το μητρώο έχει δοθεί σε αραιή μορφή.

Παραδοτέο

1) Συνάρτηση my_polymv_id(p,A,b) που δοθέντος τετραγωνικού μητρώου A, διανύσματος b και των συντελεστών της δυναμομορφής, θα επιστρέφει το $p(A)b$. 2) Επαρκής εξήγηση (χωρίς χρονομετρήσεις) σχετικά με το αριθμητικό κόστος, Ω, του υπολογισμού για μητρώα και πολυώνυμα που θα αναρτηθούν στο eclass. 3) Χρονομετρήσεις συγκριτικά με τη χρήση της polyvalm για τα δεδομένα που έχουν δοθεί στο eclass.

5.2 Διαδικασίες επίλυσης (30β)

Για διευκόλυνση, μπορείτε να αναπτύξετε τους κώδικές σας λαμβάνοντας ως βασικό επιλυτή τη συνάρτηση GMRES από το Templates for the Solution of Linear Systems: Building , Blocks for Iterative Methods. Πρέπει να σχεδιάσετε και να υλοποιήσετε συναρτήσεις για την επίλυση του συστήματος $p(A)x = b$. Η βασική συνάρτηση θα καλείται ως εξής:

[x,error] = my_polyslv_gmres_id(A,p,b,mth,restrt,max_it,tol)

Οι παράμετροι A, p, b περιέχουν το μητρώο, το πολυώνυμο (συντελεστές της δυναμομορφής) και το δεξιό μέλος. Οι x, error, restrt, max_it, tol περιγράφονται εδώ.

Ο επιλυτής εκτελεί τα εξής βήματα:

1. Υπολογισμός των ριζών ζ_j και των συντελεστών γ_j, $j = 1, ..., d$ των μερικών κλασμάτων έτσι ώστε
$$x = p(z)^{-1}b = \gamma_1(z - \zeta_1)^{-1} + \cdots + \gamma_d(z - \zeta_d)^{-1}$$
2. Επίλυση των επιμέρους συστημάτων $(A - \zeta_j I)x_j = b$ με μία από δύο εναλλακτικές μεθόδους βασισμένους στην restarted gmres σύμφωνα με την παράμετρο mth.
3. Συνδυασμός των παραπάνω και προσέγγιση της λύσης: αξιοποιώντας τη διάσπαση του $1/p(z)$ σε μερικά κλάσματα, δηλ.
$$x = \gamma_1(A - \zeta_1 I)^{-1}b + \cdots + \gamma_d(A - \zeta_d I)^{-1}b$$

Για το βήμα (2), θα χρησιμοποιηθούν δύο εναλλακτικοι τρόποι. Αν η παράμετρος mth είναι 0, τότε η επίλυση κάθε υποσυστήματος υπολογίζεται με τον αλγόριθμο gmres, όπως θα τον βρείτε στο στη βιβλιοθήκη των Templates. Αν η παράμετρος έχει άλλη τιμή, τότε αξιοποιείται η ιδιότητα του shift invariance των υπόχωρων Krylov, δηλ. ότι $K_m(A; r) = K_m(A - \omega I; r)$.

Ειδικότερα για το δεύτερο βήμα[7], θα πρέπει να κατασκευάσετε μια νέα συνάρτηση my_gmres_shifted_id που θα είναι τροποποίηση της gmres των Templates έτσι ώστε η επίλυση των d επιμέρους συστημάτων $(A - \zeta_j I)^{-1}x^{(j)} = b$ να γίνεται με μία μόνο εφαρμογή της Arnoldi για κάθε επανεκκίνηση (δηλ. με χρήση μιας μόνο βάσης) και κάποια επιπλέον βήματα.

Σύντομη περιγραφή: Ονομάστε τη συνάρτηση my_gmres_shifted_id. Για διευκόλυνση, θα υποθέσουμε ότι επιλύεται επίσης και το απλό σύστημα $Ax^{(0)} = b$ (δηλ. σαν να υπάρχει μία επιπλέον μηδενική ρίζα, $\zeta_0 = 0$). Κατ'αρχάς, θα πρέπει να αρχικοποιήσετε τα $x^{(j)}$ με το μηδενικό διάνυσμα, δηλ.

$$r_0^{(j)} = b - (A + \zeta_j I)x_0^{(j)} = b, j = 0, 1, ..., d$$

Στη συνέχεια, τα διανύσματα προσέγγισης των λύσων και τα αντίστοιχα υπόλοιπα θα συμβολίζονται ως $x_s^{(j)}), r_s^{(j)})$, όπου ο υπερδείκτης δεικτοδοτεί το σύστημα, π.χ. $(A - \zeta_j I)x^{(j)} = b$ και ο υποδείκτης τη διάσταση του υπόχωρου Krylov απ' όπου επιχειρείται η προσέγγιση. Επίσης, αρχικοποιούμε $1 = \beta_0^{(1)} = \cdots = \beta_0^{(d)}$. Για διευκόλυνση, δεν χρησιμοποιούμε υπερδείκτες για το "σύστημα 0", δηλ. αντί

[7] Ο αλγόριθμος οφείλεται κατ'αρχάς στους A. Frommer and U. Glässner, "Restarted GMRES for shifted linear systems," SIAM J. Sci. Comput., vol. 19, Art. no. 1, Jan. 1998.

για $r_0^{(0)}$ γράφουμε r_0. Έστω ότι $\beta = \|r_0\|$. Μετά από m βήματα Arnoldi επί των A, r_0, επιστρέφονται το $(m+1)\times m$ μητρώο Hessenberg $\bar{H}$, το μητρώο των ΟΚ διανυσμάτων βάσης V_m του $K_m(A, r_0)$ και τα διανύσματα $y_m = \arg\min_{y\in\mathbb{R}^m} \|\beta e_1 - \bar{H}y\|_2$, $x_m = x_0 + V_m y_m$ και $z_{m+1} = \beta e_1 - \bar{H} y_m$. Στη συνέχεια, θέτοντας για $j = 1, ..., d$: $\bar{H}^{(j)} = \bar{H} - \zeta_j \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{1\times m}\end{pmatrix}$ λύνονται, για κάθε j, τα συστήματα

$$\left[\bar{H}^{(j)}, z_{m+1}\right]\begin{pmatrix}\hat{y}_m^{(j)} \\ \beta_m^{(j)}\end{pmatrix} = \beta_0^{(j)}\beta e_1$$

και θέτουμε $x_m^{(j)} = x_0^{(j)} + V_m \hat{y}_m^{(j)}$. Με τις παραπάνω επιλογές, αποδεικνύεται ότι

$$r_m^{(j)} \quad = \quad \beta_m^{(j)} r_m, j = 1, ..., d$$

Καθώς όλα τα διανύσματα των υπολοίπων θα είναι συγγραμμικά, δηλ. $r_m^{(j)} \in \text{span}\{r_m\}$, αρχικοποιούμε $r_0^{(j)} \leftarrow r_m^{(j)}$. και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Σε περίπτωση που ένα ή περισσότερα από τα σχετικά υπόλοιπα $\frac{\|r_m^{(j)}\|}{\|r_0^{(j)}\|}$ παραμένουν μεγαλύτερα από το δοθέν κατώφλι σφάλματος, η διαδικασία επανεκκινείται για τα εναπομείναντα συστήματα.

Επιγραμματικά: Μετά τον υπολογισμό των ριζών, αν mth==0 καλείται η gmres, διαφορετικά, καλείται η my_gmres_shifted_id που επιστρέφει τις προσεγγίσεις στις λύσεις των d επιμέρους συστημάτων $(A - \zeta_j I)x_j = b$. Τέλος, οι επιμέρους προσεγγίσεις συνδυάζονται με τους συντελεστές των μερικών κλασμάτων και παράγεται η τελική προσέγγιση καθώς και η τιμή του σχετικού υπολοίπου.

Παραδοτέο

1) Συνάρτηση my_polyslv_gmres_id όπως περιγράφτηκε παραπάνω. 2) Διερεύνηση της επίδοσης των μεθόδων ως προς την σύγκλιση και το πλήθος των πολλαπλασιασμών MatVec για μητρώα, πολυώνυμα και δεξιά μέλη που θα αναρτηθούν στο eclass καθώς και σύγκριση με την απλή επίλυση του $p(A)x = b$.

6 Οδηγίες

Όπως αναφέρεται και στις εκφωνήσεις, ορισμένα από τα datasets (μητρώα, κ.λπ.) που θα χρησιμοποιήσετε για τους ελέγχους θα αναρτηθούν στο eclass.

Παρουσίαση γραφικών παραστάσεων: Αν χρειαστεί να αναρτήσετε σχήματα επιδόσεων για επιλυτές, αυτά θα πρέπει να είναι color-blind, δηλ. η διαφορά τους να φαίνεται με τις επιλογές στίγματος και είδους γραμμής και όχι μόνον με το χρώμα. Επιπλέον θα πρέπει να δώσετε τίτλο στη γραφική παράσταση, στους άξονες καθώς και σε κάθε καμπύλη που παρουσιάζεται, όπως στο Σχήμα 2 του Παραρτήματος.

Αξιολόγηση Τα παραδοτέο σας θα κριθούν βάσει των εξής στοιχείων:

1. Της ορθότητας των αποτελεσμάτων (προφανώς οι κώδικες πρέπει να παράγουν τα αναμενόμενα αποτελεσματα).
2. Της αποδοτικότητας των αλγορίθμων σας. Θα πρέπει να αποφεύγονται περιττές πράξεις και να γίνεται αξιοποίηση της δομής (structure) μητρώων και διανυσμάτων στο έπακρο. Η βαθμολόγηση του μέρους αυτού της άσκησης εξαρτάται καίρια από τις επιλογές σας που να δείχνουν την κατανόηση του προβλήματος!
3. Της ποιότητας της αναφοράς (συνοπτική παρουσίαση και ευπαρουσίαστα αποτελέσματα).

Το πιο σημαντικό και απαραίτητο είναι η προσπάθεια να έχει γίνει από εσάς (δεν πειράζει να συζητήσετε και να συνεργαστείτε με συναδέλφους σας, όμως αυτό δεν πρέπει να είναι αντιληπτό αν πχ. σας ρωτήσουμε σε προφορική εξέταση σχετικά με τις απαντήσεις σας και την άσκησης.

Προσοχή:

- Σημασία έχει η ατομική σας προσπάθεια στην επίλυση για την επιτυχημένη ολοκλήρωση του μαθήματος. Θεωρούμε ότι οι ασκήσεις που παραδίδονται είναι αποτέλεσμα προσωπικής προσπάθειας όποιου/ας την υπογράφει, που θα φέρει και την ευθύνη να απαντήσει αν της/του ζητηθεί να αιτιολόγησει και να υποστήριξει όσα γράφονται. Ένα επιπλέον κέρδος είναι ότι η επίδοσή σας στη τελική εξέταση εξαρτάται από τις γνώσεις που αποκτήσατε στην προετοιμασία της εργασίας.
- Σε περίπτωση που διαπιστωθεί ότι η εργασία εκπονήθηκε από άλλον/ους, η ποινή που μπορεί να επιβληθεί είναι αντίστοιχη με τις ποινές για αντιγραφή με ηλεκτρονικά μέσα κατά τις εξετάσεις. Σημειώνεται επίσης ότι οι απαντήσεις στα ερωτήματα μπορούν να δοθούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και είναι αρκετά απίθανο δύο διαφορετικές εργασίες να μοιάζουν πολύ! Γενικά, είναι πολύ προτιμότερο να παραδώσετε μία εργασία που είναι το αποτέλεσμα δικής σας προσωπικής προσπάθειας έστω και αν είναι ελλιπές.

Σχετικά με τα παραδοτέα

Είναι απαραίτητο να ακολουθήσετε όσα αναφέρονται, ειδάλλως δεν θα βαθμολογηθείτε.

Θα τα αναρτήσετε στο e-Class σε ζιπαρισμένο αρχείο (zip) με όνομα

`ΕΕΙΣΓ_ΑΜ_ΕΠΙΘΕΤΟ.zip`

δηλ. έτος εισαγωγής, τα τελευταία 4 ψηφία του AM σας και το επίθετό σας με λατινικούς χαρακτήρες πρώτο γράμμα κεφαλαίο και τα υπόλοιπα πεζά. Για παράδειγμα αν υπήρχε (μάλλον αιώνιος) φοιτητής "Γαλλόπουλος" με AM που τελειώνει σε AM 8696 και έτος εισαγωγής 1996, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει `1996_8696_Gallopoulos.pdf`.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οποιαδήποτε άλλη ονοματοδοσία θα είναι αιτία μηδενισμού της άσκησης.

Αναφορά Η αναφορά σας πρέπει να είναι σε μορφή pdf με σύνθετο όνομα όπως και του zip αρχείου, μόνον με το σωστό επίθεμα, `ΕΕΙΣΓ_ΑΜ_ΕΠΙΘΕΤΟ.pdf`. Να είστε ιδιαίτερα προσεκτικοί ώστε η αναφορά να είναι αναγνώσιμη χωρίς πρόβλημα συμβατότητας γραμματοσειρών κ.λπ. Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στον τρόπο και στην οργάνωση της παρουσίασης.

- Μέγεθος γραμματοσειράς 10pt. Σας συνιστούμε να χρησιμοποιήσετε το report style του LaTeX (π.χ. μέσω Overleaf.)
- Η πρώτη σελίδα πρέπει να περιέχει τα στοιχεία σας καθώς και πίνακα περιεχομένων.
- Οι σελίδες πρέπει να είναι αριθμημένες.
- Κάθε σελίδα της αναφοράς πρέπει να περιέχει το όνομα και το AM σας σε ευδιάκριτο σημείο (π.χ. όπως δεξιά και αριστερά στην άνω μέρος του παρόντος για ένα υποθετικό AM).

Κώδικες: Όλες τις συναρτήσεις, scripts και εντολές που χρησιμοποιήσατε από την εργασία σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για βαθμολόγηση, η 2η γραμμή κάθε συνάρτησης πρέπει να είναι σχόλιο με το ονοματεπώνυμό σας, ΑΜ και ημερομηνία συγγραφής, π.χ.

```
function [T]=b2t(A);
% Author: Ε. ΓΑΛΛΟΠΟΥΛΟΣ, AM 76848696, Date: 20/12/2019
```

Οι συναρτήσεις πρέπει να είναι εκτελέσιμες άμεσα στο φάκελλο που θα γίνει το unzip από τους βαθμολογητές, αν δοθούν ορθά στοιχεία εισόδου. Αν αυτό δεν συμβαίνει, π.χ. επειδή υπάρχουν εξαρτήσεις από αλλού, δεν θα βαθμολογηθείτε.

Αναφορές

Α΄ Παράρτημα

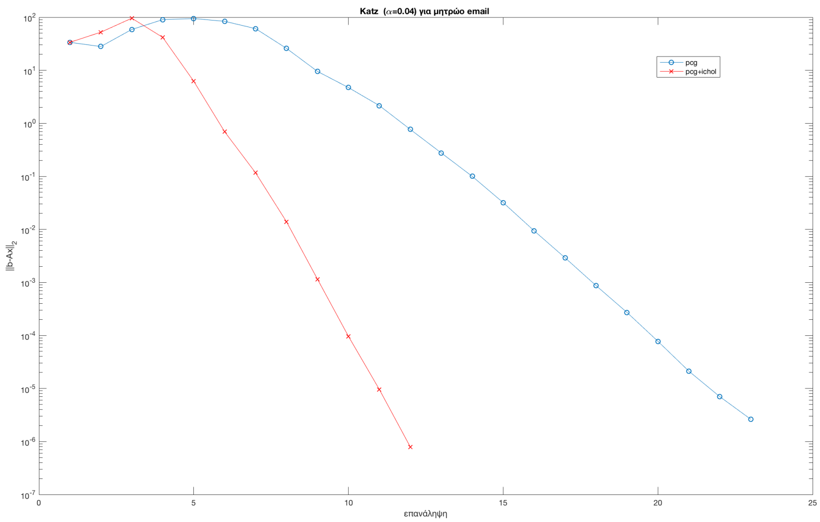
Computer Type	LU	FFT	ODE	Sparse	2-D	3-D
This machine	0.0693	0.0472	0.0695	0.0841	0.2684	0.5397
Macintosh (64-bit) 3.5 GHz Intel Core i7	0.0909	0.0593	0.0734	0.0889	0.3833	0.6312
Linux (64-bit) 2.66 GHz Intel Xeon	0.1295	0.0654	0.1933	0.1295	0.5581	0.5806
Windows 7 Enterprise (64-bit) 2.66 GHz Intel Xeon	0.1357	0.0705	0.1678	0.1535	0.4210	0.9613
Windows 7 Professional (64-bit) 3.07 GHz Intel Xeon W3550	0.2462	0.0844	0.1382	0.1476	0.3723	0.8357
Windows 7 Enterprise (64-bit) 2.7 GHz Intel Core i7	0.2926	0.0820	0.1075	0.1311	0.5387	1.0212
Macintosh (64-bit) 2.6 GHz Intel Core i7	0.1880	0.0904	0.0884	0.1297	0.9780	1.0788
Windows 8.1 (64-bit) 2.67 GHz Intel Xeon X5650	0.3146	0.0713	0.2053	0.2084	0.5210	0.8763
Windows XP (32-bit) 2.4 GHz Intel Core 2 Quad	0.6330	0.2110	0.1671	0.2818	0.5823	1.3302

Σχήμα 1: Αποτελέσματα της bench σε Pentium i9.

Α΄.1 Σχετικά με το Ερώτημα 2

Τα μητρώα και οι πράξεις δίνονται παρακάτω.

```
rng('default'); n=10;
A=randi(10,n,n);A=(A.*(abs([1:n]'-[1:n])<=2)).*(([1:n]'-[1:n])<=1);
T=A.*(abs([1:n]'-[1:n])<2); D = diag(diag(T));
AL=-tril(T,-1);AU=-triu(T,1);C = A'; B = A+C;
% Ypologiste ta parakatw
 B2 = B*B;
 C2 = A*C;
S=(D+AL+AU)*inv(D)*T
```



Σχήμα 2: Τρόπος παρουσίασης γραφικών παραστάσεων

Α΄.2 Σχετικά με το Ερώτημα 3

Τα γραφήματα που θα πρέπει να δοκιμάσετε είναι από τη συλλογή SuiteSparse και είναι τα υπ' αριθμ. 1465, 1529 και 2888. Για όλα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε το αντίστοιχο μητρώο γειτνίασης αποκλειστικά με τιμές $\{0, 1\}$ και όχι με τις τιμές που περιέχονται στο μητρώο από το SuiteSparse. Ειδικότερα θα πρέπει να θέσετε An=ssget(mx_id) όπου mx_id είναι ο αριθμός του μητρώου και στη συνέχεια An=(An>0); G=graph(An). Θα είναι βοηθητικό να περιγράψετε και να οπτικοποιήσετε τα γραφήματα που χρησιμοποιήσετε και τα μητρώα που προέκυψαν. Αν θέλετε, μπορείτε να αναδιατάξετε τα μητρώα χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση amd ή τη συνάρτηση symrcm. Ως τιμή k να χρησιμοποιήσετε το k=4. Μπορείτε να το θέσετε ως global ή να το περάσετε ως παράμετρο αλλάζοντας την κλήση της συνάρτησης σε An=ssget(mx_id,k).

Α΄.3 Σχετικά με το Ερώτημα 5

Και στα δύο υποερωτήματα θα χρησιμοποιήσετε το μητρώο harvard500[8] που συμβολίζουμε με A. Στη συνέχεια, I είναι το ταυτοτικό μητρώο ίδιας διάστασης με το A.

Στο υποερώτημα 5.1 θα υπολογίσετε το $b = q(A)e$ όπου

$$q(z) = -21\, z^3 + 1318\, z^2 - 27468\, z + 190080$$

και e είναι το διάνυσμα που υπολογίζεται με τη συνάρτηση ones.

1. $b = q(A)e$ όπου το A είναι το δοθέν αλλά σε πυκνή μορφή, δηλ. μετά την μετατροπή A=double(A).

2. $b = q(A)e$ όπου το A είναι το δοθέν, δηλ. σε αραιή μορφή.

Στο υποερώτημα 5.2 ενδιαφέρει ο υπολογισμός του

$$\frac{1}{4}[(I - \frac{1}{18}A)^{-1} + (I - \frac{1}{20}A)^{-1} + (I - \frac{1}{22}A)^{-1} + (I - \frac{1}{24}A)^{-1}]e$$

[8]Διαθέσιμο από το SuiteSparse με id=1172.

που μπορεί να προκύψει σε μελέτες για την συμπεριφορά της βαθμολόγησης ιστοσελίδων.

Ο παραπάνω υπολογισμός είναι μαθηματικά ισοδύναμος με την επίλυση του συστήματος $p(A)x = b$, όπου $p(z) = \frac{1}{4}(z^4 - 84z^3 + 2636z^2 - 36624z + 190080)$ και το b είναι όπως στο προηγούμενο υποερώτημα, δηλ. $b = (-21\,A^3 + 1318\,A^2 - 27468\,A + 190080I)e$. Να επιλύσετε το σύστημα όπως περιγράφεται στην εκφώνηση και χρησιμοποιώντας την αραιή δομή του μητρώου. Προσοχή: οι παράγοντες $A - \gamma I$ για $\gamma \in \{18, 20, 22, 24\}$ είναι αντιστρέψιμοι, όχι όμως το συγκεκριμένο μητρώο A. Όσον αφορά τη gmres, σε όλες τις περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσετε ως μέγιστη διάσταση των υπόχωρων την τιμή restart=10 και ως μέγιστο σχετικό υπόλοιπο για οποιαδήποτε κλήση της gmres την τιμή tol=1e-9. Επίσης δεν θα χρησιμοποιήσετε προρρυθμιστή και το πλήθος των επαναλήψεων (max_it) θα τεθεί ίσο με το μέγιστο δυνατό για να υπάρξει σύγκλιση αλλά χωρίς να υπερβεί το 200.