행렬대수 1 - 종합과제 - 답안

시립대학교 통계학과

2019년 4월 18일까지 제출

1. 다음과 같은 세 개의 3차원 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$가 있다.

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$$

(a) 세 개의 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$가 선형독립이 되기 위한 실수 k값들을 구하시오.

[해답]

세 개의 벡터들이 선형독립이려면 다음과 같이 세개의 백터로 구성된 행렬이 완전계수를 가져야 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$$

위의 행렬의 계수를 구하는 방법으로 행연산을 적용하여 대각행렬 아래를 모두 0으로 만들면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-8 \end{bmatrix}$$

위의 행렬이 완전계수가 되려면 k는 8이 되어서는 안된다. 따라서 $k = 8$ 을 제외한 모든 실수에 대하여 3개의 벡터는 선형독립이다.

(b) V 를 두 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$가 생성하는 모든 벡터들의 집합이라고 하자. 벡터 $\boldsymbol{u}_3$가 V에 속하는 모든 가능한 k의 값을 구하시오.

[해답]

위의 결과에 따라서 $k=8$ 이면 다음과 같은 결과를 얻으므로 벡터 $\boldsymbol{u}_3$ 가 나머지 두 벡터가 생성하는 공간에 속한다.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\8\end{bmatrix}=0$$

2. 다음에 주어진 R^3에서 R^3로 가는 변환 T을 고려하자.

$$T:(x_1,x_2,x_3)\to(x_1-x_2+5x_3,\ \ x_1+2x_2-4x_3,\ \ 2x_1+3x_2-5x_3)$$

(a) 변환 T가 선현변환임을 보이시오.

[해답]

다음과 같이 두 벡터를 고려하자.

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$$

임의의 두 실수 a,b에 대하여 다음이 성립하므로 변환 T는 선형이다.

$$\begin{aligned}T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=&[(ax_1+by_1)-(ax_2+by_2)+5(ax_3+by_3),\\&(ax_1+by_1)+2(ax_2+by_2)+4(ax_3+by_3),\\&2(ax_1+by_1)+3(ax_2+by_2)-5(ax_3+by_3)]\\=&a(x_1-x_2+5x_3,\ x_1+2x_2-4x_3,\ 2x_1+3x_2-5x_3)\\&+b(y_1-y_2+5y_3,\ y_1+2y_2-4y_3,\ 2y_1+3y_2-5y_3)\\=&aT(\boldsymbol{x})+bT(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

(b) 변환 T에 대한 행렬을 구하시오. 행렬식은 얼마인가?

[해답]

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&-1&5\\1&2&-4\\2&3&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

행렬 A의 행렬식를 구하는 방법으로 행연산을 적용하여 대각행렬 아래를 모두 0으로 만들면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서 A의 행렬식은 0이다.

(c) 변환 T에 대한 치역(range)의 차원은 얼마인가?

[해답] 위에서 행렬 A 의 계수가 2이므로 치역의 차원은 2차원이며 R^3 에서 원점을 지나는 평면이다.

3. 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[해답]

$$|A| = 1, \quad |B| = -12$$

4. 위의 문제 3 에서 행렬 B 에 대하여 다음의 행렬들의 행렬식을 구하시오

$$B^2, \quad 3B, \quad B^t$$

[해답]

$$|B^2| = |B|^2 = (-12)^2 = 144, \quad |3B| = (3)^4(-12), \quad |B^t| = |B| = -12$$

5. 행렬 A와 B는 정칙행렬이다. 다음과 같은 식이 성립할 때 행렬 A를 행렬 B와 C로 표시하시오.

$$A^2B + A = AC$$

[해답]

$$A = (C - I)B^{-1}$$

6. 다음 두 행렬의 역행렬을 구하시오.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[해답]

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. 다음에 주어진 행렬을 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KL}$의 형태로 최대계수인수분해 하시오. 필요하면 치환행렬을 이용하시오.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

[해답] 행과 열의 치환행렬을 앞뒤로 곱하면 다음과 같이 왼쪽 위의 3차원 부분행렬 $\boldsymbol{X}$ 가 정칙인 행렬을 얻는다.

$$\boldsymbol{E}_{35}\boldsymbol{E}_{24}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{14} = \boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

이제 행렬 $\boldsymbol{PAQ}$ 를 다음과 같이 분할하면

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}$$

다음과 같은 결과를 얻는다.

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{XH} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{FX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{FXH}
$$

최종적으로

$$
\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{FX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{XH} \end{bmatrix}
$$

8. 다음과 같은 행렬의 방정식을 고려하자.

$$
\boldsymbol{X}^2 - 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}
$$

위에서 $\boldsymbol{X}$는 2×2행렬, $\boldsymbol{I}$와 $\boldsymbol{0}$은 각각 2×2 항등행렬과 영행렬이다.

(a) 다음 행렬 $\boldsymbol{X}$가 위의 방정식을 만족하는 사실을 보이시오.

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}
$$

(b) 위의 방정식을 만족하는 다른 행렬 $\boldsymbol{X}$ 가 존재하는가?

[해답]

$$
0 = \boldsymbol{X}^2 - 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I})^2
$$

따라서 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ 도 위의 식을 만족한다. 또한 다음과 같은 $\boldsymbol{X}$ 도 식을 만족한다.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. 4절의 정리 4.2에서 $k \leq m$인 경우에 대하여 상세하게 증명하시오.

[해답]

행렬 $\boldsymbol{A}$ 에서 처음 m개의 열들이 선형독립이므로 다른 열들은 앞 부분의 m개의 열들의 선형결합이다. 즉 적당한 행렬 $\boldsymbol{H}$ 에 의하여

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Z} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}$$

따라서 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{XH}$ 이다.

이제 $\boldsymbol{X}$들의 행들을 종속이라고 가정하자. 즉 적당한 $\boldsymbol{b}$ 에 대하여

$$\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

위가 성립하면 $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{XH} = \boldsymbol{0}$이므로 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{b}^t \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

이는 처음 k의 행들이 종속임을 말해준다. 하지만 가정에 의하여 처음 k개의 행들은 선형독립이다. 따라서 위에서 가정한 $\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$가 거짓이며 $\boldsymbol{X}$의 k개 행들은 선형독립이다.

행렬 $\boldsymbol{X}$ 는 k 개의 m차원 행벡터로 이루어진 행렬이다.따라서 위의 결과와 정리 4.1로부터 $k \leq m$ 이다.