

행렬과 대수 I - 기말고사(총 6 문제)- 6월 16일(10:00-11:20)
모든 풀이과정을 자세히 기술하시오.

1. [20점] 다음에 행렬의 rank를 구하시오

$$(1) J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) I_4 - \frac{1}{4}J_4, \text{ 여기서 } I_4 \text{는 4차 항등행렬} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & -4 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

2. [15점] 행렬 A 가 다음과 같이 주어졌다.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

행렬 A 의 rank를 구하고 치환행렬(permutation matrix)를 이용하여 최대계수인자분해(full rank factorization)을 하시오.

3. [20점]

- (1) 다음 대칭행렬 A 의 대각형(diagonal form)과 합동 표준형(congruent canonical form)을 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 4 & 20 & 18 \\ 10 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

- (2) (1)에서 구한 결과를 이용하여 차수가 3인 열벡터 $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ 에 대한 이차형식 $x^t A x$ 를 x_1, x_2, x_3 의 선형결합의 제곱들의 합으로 표시하시오.

4. [20점]

- (1) 다음 행렬 A 의 고유치를 구하고 서로 직교하며 길이가 1인 고유벡터를 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) (1)에서 구한 결과를 이용하여 행렬 A 의 스펙트럴 분해(spectral decomposition)을 구하시오.

5. [15점] 두 행렬의 곱 AB 의 rank가 행렬 A 와 B 의 각 rank보다 작거나 같음을 증명하시오.

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

6. [10점] 다음의 문장이 맞으면 O, 틀리면 X로 표시하시오.

- (1) 임의의 영행렬이 아닌 두 행렬 A, B 에 대하여 $r(AB) = r(BA)$.
- (2) 행렬에서 LIN 열들의 수와 LIN 행들의 수는 다를 수 있다.
- (3) 두 벡터가 직교하면 두 벡터는 LIN이다.
- (4) 주어진 행렬에 정칙행렬을 곱하면 계수는 변하지 않는다.
- (5) 대칭행렬의 고유치는 모두 실수이다.