행렬대수 1 - 종합과제

시립대학교 통계학과

2019년 4월 18일까지 제출

1. 다음과 같은 세 개의 3차원 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$가 있다.

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}$$

   (a) 세 개의 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$가 선형독립이 되기 위한 실수 k값들을 구하시오.

   (b) V 를 두 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$가 생성하는 모든 벡터들의 집합이라고 하자. 벡터 $\boldsymbol{u}_3$가 V에 속하는 모든 가능한 k의 값을 구하시오.

2. 다음에 주어진 R^3에서 R^3로 가는 변환 T을 고려하자.

$$T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 - x_2 + 5x_3, \;\; x_1 + 2x_2 - 4x_3, \;\; 2x_1 + 3x_2 - 5x_3)$$

   (a) 변환 T가 선현변환임을 보이시오.

   (b) 변환 T에 대한 행렬을 구하시오. 행렬식은 얼마인가?

   (c) 변환 T에 대한 치역(range)의 차원은 얼마인가?

3. 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. 위의 문제 3 에서 행렬 $\boldsymbol{B}$ 에 대하여 다음의 행렬들의 행렬식을 구하시오

$$\boldsymbol{B}^2, \quad 3\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B}^t$$

5. 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$는 정칙행렬이다. 다음과 같은 식이 성립할 때 행렬 $\boldsymbol{A}$를 행렬 $\boldsymbol{B}$와 $\boldsymbol{C}$로 표시하시오.

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

6. 다음 두 행렬의 역행렬을 구하시오.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. 다음에 주어진 행렬을 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{L}$의 형태로 최대계수인수분해 하시오. 필요하면 치환행렬을 이용하시오.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

8. 다음과 같은 행렬의 방정식을 고려하자.

$$\boldsymbol{X}^2 - 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

위에서 $\boldsymbol{X}$는 2×2행렬, $\boldsymbol{I}$와 $\boldsymbol{0}$은 각각 2×2 항등행렬과 영행렬이다.

(a) 다음 행렬 $\boldsymbol{X}$가 위의 방정식을 만족하는 사실을 보이시오.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) 위의 방정식을 만족하는 다른 행렬 $\boldsymbol{X}$ 가 존재하는가?

9. 4절의 정리 4.2에서 $k \le m$인 경우에 대하여 상세하게 증명하시오.