

행렬대수 1 - 과제 - 2019년 6월 4일 공고

시립대학교 통계학과

2019년 6월 13일까지 제출

1. 다음은 단순회귀모형의 정규방정식이다.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

위의 방정식을 풀어서 구한 회귀계수의 추정치를 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 이라고 하면 다음과 같이 주어짐을 보이시오.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

2. 문제 [1]에서 회귀계수의 추정치를 유일하게 구할 수 없는 경우는 어떤 경우인가?
3. 다음은 중회귀분석에서 나오는 정규방정식이다. 행렬 $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$ 가 정칙행렬이라고 하자.

$$\mathbf{X}^t \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^t \mathbf{y} \quad (1)$$

위의 행렬식에서 각 벡터와 행렬의 차원은 다음과 같다.

- \mathbf{y} : $n \times 1$
- \mathbf{X} : $n \times (p+1)$
- $\boldsymbol{\beta}$: $(p+1) \times 1$
- \mathbf{e} : $n \times 1$

- (a) 최소제곱법에 의한 회귀계수 추정량 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 을 구하시오.

- (b) (a)에서 구한 회귀계수 추정량 $\hat{\beta}$ 을 이용하여 아래와 같이 예측값(prediction) 벡터 \hat{y} 를 정의하자. \hat{y} 을 행렬 X 와 y 로 나타내시오.

$$\hat{y} = \hat{E}(y|X) = X\hat{\beta}$$

- (c) 행렬 $P = X(X^tX)^{-1}X$ 가 멱등행렬임을 보이시오
 (d) 두 벡터 $y - X\hat{\beta}$ 와 \hat{y} 가 직교함을 보이시오.
 (e) 잔차제곱합 $S(\hat{\beta})$ 을 y 의 이차형식 y^tAy 형태로 나타낼 때 행렬 A 는 구하시오.

$$S(\hat{\beta}) = (y - X\hat{\beta})^t(y - X\hat{\beta}) = y^tAy$$

- (f) (e)에서 구한 행렬 A 의 계수는 얼마인가?

4. 다음에 주어진 4×3 행렬 A 의 QR 분해를 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 2차원 열벡터 $y = (y_1, y_2)^t$ 은 3차원 열벡터 $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ 의 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 \\ \log(x_1x_2) + \exp(-x_3) \end{bmatrix}$$

벡터 y 를 벡터 x 로 미분한 행렬 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 을 구하시오

6. 다음 행렬의 특이값 분해를 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

7. 교재연습 문제 9.2 (p197)