

행렬대수 1 - 사영과 QR 분해

시립대학교 통계학과

2019년 6월 3일

1 두 벡터의 사영

선형독립인 두 벡터 \mathbf{a}_1 과 \mathbf{a}_2 가 있다고 하자. 벡터 \mathbf{a}_1 과 같은 방향을 가지면서 벡터 \mathbf{a}_2 에 가장 가까운 벡터를 $proj_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{a}_2)$ 라고 정의하고 이를 벡터 \mathbf{a}_1 방향으로 벡터 \mathbf{a}_2 의 사영(projection)이라고 부른다.

그러면 이러한 사영은 어떻게 구할 수 있나? 벡터 \mathbf{a}_2 의 사영은 벡터 \mathbf{a}_1 방향에 있으므로 어떤 실수 c 가 있어서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$proj_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{a}_2) = c\mathbf{a}_1$$

이제 사영 $c\mathbf{a}_1$ 과 벡터 \mathbf{a}_2 의 거리 $d(c)$ 를 생각하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d^2(c) &= \|\mathbf{a}_2 - c\mathbf{a}_1\|^2 \\ &= (\mathbf{a}_2 - c\mathbf{a}_1)^t(\mathbf{a}_2 - c\mathbf{a}_1) \\ &= \mathbf{a}_2^t\mathbf{a}_2 - 2c\mathbf{a}_2^t\mathbf{a}_1 + c^2\mathbf{a}_1^t\mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

위에서 $\|\mathbf{a}\|$ 는 벡터 \mathbf{a} 의 길이를 나타낸다.

$$d(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^t\mathbf{a}}$$

상수 c 는 거리 $d(c)$ 를 최소로 만드는 수이다. $d^2(c)$ 은 c 에 대하여 미분 가능한 2차 함수이며 아래로 볼록한 함수이므로 이를 미분하여 c 를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial d^2(c)}{\partial c} = -2\mathbf{a}_2^t\mathbf{a}_1 + 2c\mathbf{a}_1^t\mathbf{a}_1 = 0$$

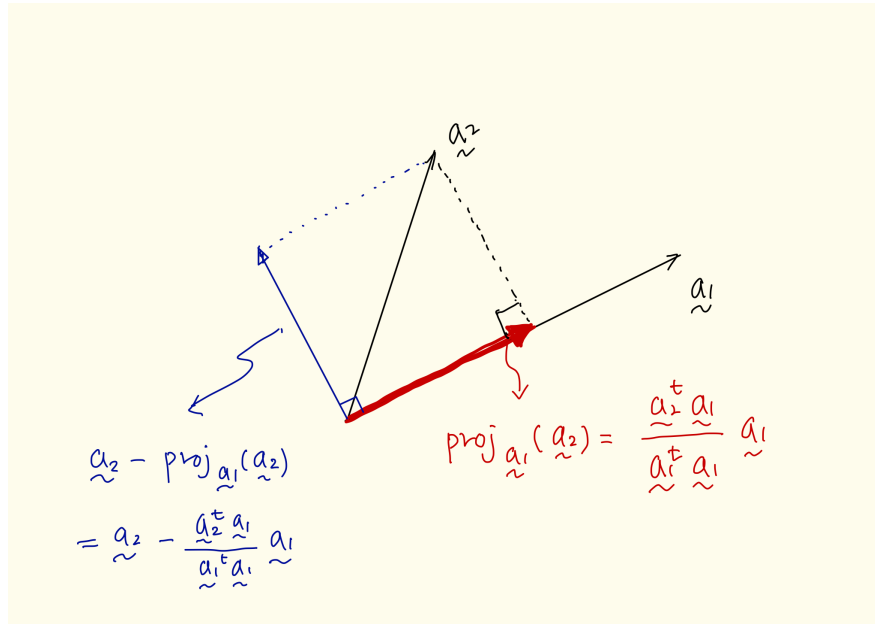


Figure 1: "벡터의 사영

위의 방정식으로 부터 c 를 얻고

$$c = \frac{a_2^t a_1}{a_1^t a_1}$$

다음과 같이 벡터 a_1 방향으로 벡터 a_2 의 사영을 나타낼 수 있다.

$$proj_{a_1}(a_2) = \frac{a_2^t a_1}{a_1^t a_1} a_1 \quad (1)$$

이제 위의 두 벡터의 사영을 이용하면 벡터 a_1 과 직교하는 벡터 \tilde{q}_2 를 다음과 같이 찾을 수 있다.

$$\tilde{q}_2 = a_2 - proj_{a_1}(a_2) = a_2 - \frac{a_2^t a_1}{a_1^t a_1} a_1$$

두 벡터 a_1 와 \tilde{q}_2 의 직교성은 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
a_1^t \tilde{q}_2 &= a_1^t \left(a_2 - \frac{a_2^t a_1}{a_1^t a_1} a_1 \right) \\
&= a_1^t a_2 - \frac{a_2^t a_1}{a_1^t a_1} a_1^t a_1 \\
&= a_1^t a_2 - a_2^t a_1 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

이제 두 벡터 q_1 과 q_2 를 다음과 같이 정규직교벡터로 만들 수 있다.

$$\begin{aligned}
q_1 &= a_1 / \|a_1\| \\
q_2 &= \tilde{q}_2 / \|\tilde{q}_2\|
\end{aligned}$$

1.1 Gram–Schmidt 방법

서로 독립인 n 차원의 벡터들이 p 개 있을때

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

이들이 만드는 열공간을 C 라고 하자.

$$\begin{aligned}
C &= \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_p\} \\
&= \{ c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_p a_p \mid \text{all possible real values of } c_1, c_2, \dots, c_p \}
\end{aligned} \tag{3}$$

이제 우리는 위와 동일한 열공간 C 만드는 정규직교 벡터들을 찾는 방법을 알아보려고 한다.

$$q_1, q_2, \dots, q_p \quad \text{where } q_i^t q_j = 0, \quad q_i^t q_i = 1$$

그리고

$$C = \text{span}\{q_1, q_2, \dots, q_p\} = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_p\} \tag{4}$$

이제 앞 절의 벡터의 사영에 대한 결과를 사용하여 다음과 같은 직교하는 p 개의 벡터들을 축차적으로 만들어 보자.

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= a_1 \\
\tilde{q}_2 &= a_2 - \text{proj}_{\tilde{q}_1}(a_2) \\
\tilde{q}_3 &= a_3 - \text{proj}_{\tilde{q}_1}(a_3) - \text{proj}_{\tilde{q}_2}(a_3) \\
\tilde{q}_4 &= a_4 - \text{proj}_{\tilde{q}_1}(a_4) - \text{proj}_{\tilde{q}_2}(a_4) - \text{proj}_{\tilde{q}_3}(a_4) \\
&\dots \\
\tilde{q}_p &= a_p - \sum_{k=1}^p \text{proj}_{\tilde{q}_k}(a_p)
\end{aligned} \tag{5}$$

축차적으로 만든 벡터들을 정규벡터로 만들면 원래의 벡터들 a_1, a_2, \dots, a_p 이 생성하는 동일한 열공간을 만드는 정규직교 벡터 q_1, q_2, \dots, q_p 를 만들 수 있다.

$$q_i = \tilde{q}_i / \|\tilde{q}_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, p \tag{6}$$

Gram-Schmidt 방법으로 만든 벡터들이 직교하는 것은 다음과 같이 증명할 수 있다. 먼저 식 (2) 에 의하여 \tilde{q}_1 과 \tilde{q}_2 는 직교한다. 이제 임의의 i 에 대하여 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{i-1}$ 벡터들이 직교한다고 가정하자. 모든 $1 \leq j \leq i-1$ 에 대하여

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_j^t \tilde{q}_i &= \tilde{q}_j^t \left[a_i - \sum_{k=1}^{i-1} \text{proj}_{\tilde{q}_k}(a_i) \right] \\
&= \tilde{q}_j^t \left[a_i - \text{proj}_{\tilde{q}_j}(a_i) \right] - \left[\sum_{\substack{1 \leq k \leq i-1 \\ k \neq j}} \tilde{q}_j^t \text{proj}_{\tilde{q}_k}(a_i) \right] \\
&= 0 + 0
\end{aligned}$$

위에서 마지막 단계의 직교성은 다음과 같은 사실로 부터 유도된다.

1. $a_i - \text{proj}_{\tilde{q}_j}(a_i)$ 는 \tilde{q}_j^t 와 직교한다.
2. 가정에 의하여 $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{i-1}$ 는 직교하고 $\text{proj}_{\tilde{q}_k}(a_i)$ 는 \tilde{q}_k 와 같은 방향을 가진다.

$$\tilde{q}_j^t \text{proj}_{\tilde{q}_k}(a_i) = 0 \quad \text{for } 1 \leq j, k \leq i-1, k \neq j$$

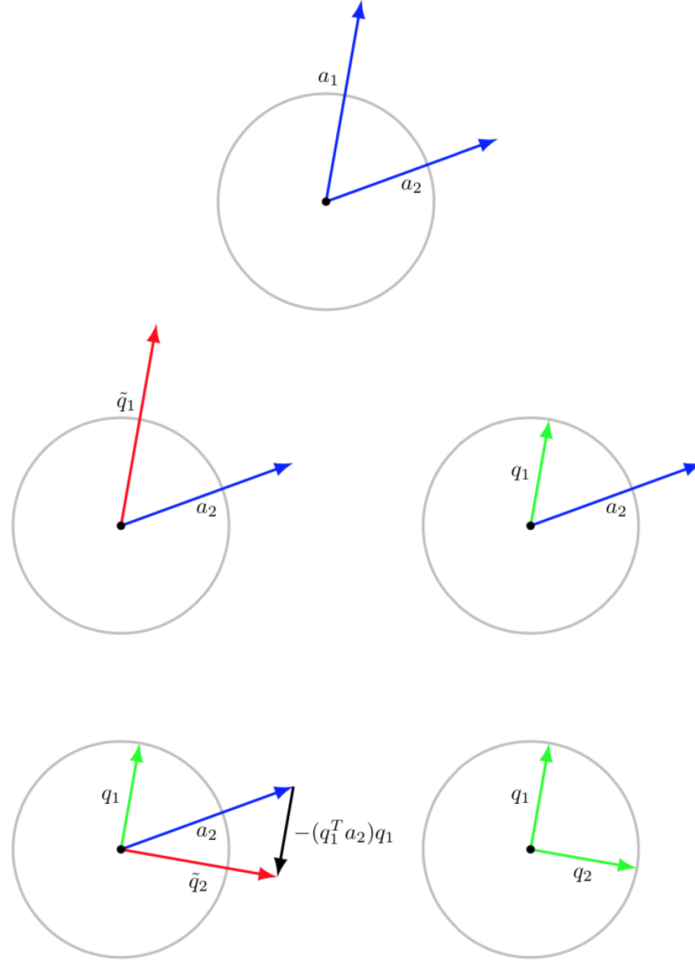


Figure 5.3 Gram-Schmidt algorithm applied to two 2-vectors a_1, a_2 . *Top.* The original vectors a_1 and a_2 . The gray circle shows the points with norm one. *Middle left.* The orthogonalization step in the first iteration yields $\tilde{q}_1 = a_1$. *Middle right.* The normalization step in the first iteration scales \tilde{q}_1 to have norm one, which yields q_1 . *Bottom left.* The orthogonalization step in the second iteration subtracts a multiple of q_1 to yield the vector \tilde{q}_2 , which is orthogonal to q_1 . *Bottom right.* The normalization step in the second iteration scales \tilde{q}_2 to have norm one, which yields q_2 .

Figure 2: Gram-Schmidt 방법을 설명한 그림(출처:Introduction to Applied Linear Algebra by Boyd and Vandenberghe, 2019)

식 (5)과 (6)의 알고리즘을 Gram-Schmidt 방법이라고 부른다. 위의 두 식에 의한 알고리즘을 다음과 같은 사실을 이용하면 좀 더 간단한 방법의 알고리즘이 나온다.

$$\text{proj}_{\tilde{q}_k}(a_l) = \frac{a_l^t \tilde{q}_k}{\tilde{q}_k^t \tilde{q}_k} \tilde{q}_k = \frac{a_l^t \tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|^2} \tilde{q}_k = (a_l^t q_k) q_k$$

- p 개의 벡터 a_1, a_2, \dots, a_p 에 대하여
- for $i = 1, 2, \dots, p$

1. $\tilde{q}_i = \mathbf{a}_i - (q_1^t \mathbf{a}_i) \mathbf{q}_1 - \cdots - (q_{i-1}^t \mathbf{a}_i) \mathbf{q}_{i-1}$ (직교화)
2. $\mathbf{q}_i = \tilde{q}_i / \|\mathbf{q}_i\|$ (정규화)

2 최소제곱법과 사영

회귀계수벡터의 값을 구하는 최소제곱법의 기준을 다시 살펴보자.

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i^t \boldsymbol{\beta})^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 \quad (7)$$

위에서 $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ 는 행렬 \mathbf{X} 의 열벡터 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ 로 이루어진 선형조합이다.

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{a}_0 \ \mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_p] \boldsymbol{\beta} = \beta_0 \mathbf{a}_0 + \beta_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_p \mathbf{a}_p$$

따라서 최소제곱법으로 구한 회귀계수 벡터 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 는 반응값 벡터 \mathbf{y} 와 $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ 의 거리가 최소가 되도록 만들어 준다.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{y}, \quad \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2$$

따라서 예측값 벡터 $\hat{\mathbf{y}}$ 는 행렬 \mathbf{X} 의 열벡터로 생성한 열공간 방향으로 반응값 벡터 \mathbf{y} 를 사영한 벡터이다.

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{y}$$

위에서 행렬 $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t$ 를 열공간 $C(\mathbf{X})$ 의 사영행렬(projection matrix)라고 부른다.

3 QR 분해

식 (5)과 (6)에 주어진 Gram-Schmidt 방법을 원래 벡터들 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ 에 대하여 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

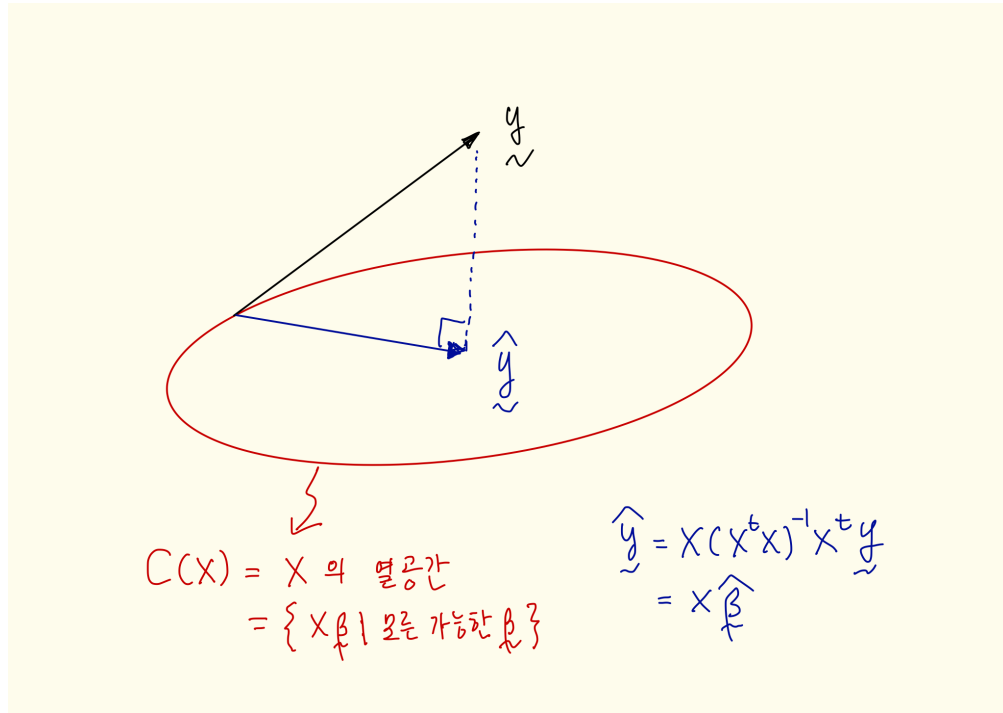


Figure 3: 최소제곱법을 설명한 그림

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \tilde{q}_1 \\
 &= \|\tilde{q}_1\| q_1 \\
 a_2 &= \tilde{q}_2 + \text{proj}_{\tilde{q}_1}(a_2) \\
 &= \tilde{q}_2 + \frac{a_2^t \tilde{q}_1}{\tilde{q}_1^t \tilde{q}_1} \tilde{q}_1 \\
 &= (a_2^t q_1) q_1 + \|\tilde{q}_2\| q_2 \\
 a_3 &= \tilde{q}_3 + \text{proj}_{\tilde{q}_1}(a_3) + \text{proj}_{\tilde{q}_2}(a_3) \\
 &= \tilde{q}_3 + \frac{a_3^t \tilde{q}_1}{\tilde{q}_1^t \tilde{q}_1} \tilde{q}_1 + \frac{a_3^t \tilde{q}_2}{\tilde{q}_2^t \tilde{q}_2} \tilde{q}_2 \\
 &= (a_3^t q_1) q_1 + (a_3^t q_2) q_2 + \|\tilde{q}_3\| q_3 \\
 &\dots \\
 a_p &= (a_p^t q_1) q_1 + (a_p^t q_2) q_2 + \dots + (a_p^t q_{p-1}) q_{p-1} + \|\tilde{q}_p\| q_p
 \end{aligned}$$

즉 위의 축차식을 보면 원래 벡터 \mathbf{a}_i 는 Gram-Schmidt 방법으로 구한 정규직교벡터 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p$ 의 선형 조합으로 나타낼 수 있다.

이제 Gram-Schmidt 방법으로 구한 정규직교벡터들 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p$ 을 모아놓은 행렬을 \mathbf{Q} 라고 하고 위에서 \mathbf{a}_i 들이 직교행렬의 선형조합으로 표시될때 계수들을 모아놓는 상삼각행렬을 \mathbf{R} 이라고 하자. 그러면 다음과 같은 QR 분해가 주어진다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (8)$$

여기서

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_p], \quad \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}_1\| & \mathbf{a}_2^t \mathbf{q}_1 & \mathbf{a}_3^t \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{a}_p^t \mathbf{q}_1 \\ 0 & \|\tilde{\mathbf{q}}_2\| & \mathbf{a}_3^t \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{a}_p^t \mathbf{q}_2 \\ 0 & 0 & \|\tilde{\mathbf{q}}_3\| & \dots & \mathbf{a}_p^t \mathbf{q}_3 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\tilde{\mathbf{q}}_p\| \end{bmatrix}$$

4 최소제곱법과 QR 분해

다시 식 (7)의 최소제곱법을 고려하자. 실제로 $\hat{\beta}$ 을 구하는 경우 많은 통계계산 프로그램에서 실제로 역행렬 $(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$ 을 계산하는 경우는 드물다. 실제 최소제곱법을 푸는 알고리즘으로 많은 경우 QR 분해법을 사용한다.

$n \times (p+1)$ 행렬 \mathbf{X} 의 QR 분해가 다음과 같이 주어졌다고 하자. 또한 $r(\mathbf{X}) = p+1 < n$ 이라고 가정하자.

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$$

그러면 행렬 \mathbf{X} 는 다음과 같은 확장된 분해를 가진다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

위에서 \mathbf{Q}_2 는 행렬 \mathbf{Q}_1 의 열들과 직교하는 $n - (p+1)$ 개의 추가 정규직교 벡터들로 이루어진 행렬이다. \mathbf{Q}_1 과 \mathbf{Q}_2 는 각각 $n \times (p+1)$, $n \times (n-p-1)$ 의 행렬이다. 따라서 행렬 $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2]$ 는 $n \times n$ 직교행렬이다 ($\mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^t = \mathbf{I}$). 여기서 \mathbf{R}_1 는 $(p+1) \times (p+1)$ 상삼각행렬(upper diagonal matrix)고 $\mathbf{0}$ 은 차원이 $(n-p-1) \times (p+1)$ 인 영행렬이다.

이제 $Q^t Q = I$ 를 이용하여 잔차제곱합 $\|y - X\beta\|^2$ 를 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\|y - X\beta\|^2 &= (y - X\beta)^t (y - X\beta) \\
&= (y - X\beta)^t Q Q^t (y - X\beta) \\
&= (Q^t y - Q^t X\beta)^t (Q^t y - Q^t X\beta) \\
&= (c - R\beta)^t (c - R\beta) \\
&= \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta \right)^t \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta \right) \\
&= (c_1 - R_1\beta)^t (c_1 - R_1\beta) + c_2^t c_2 \\
&= \|c_1 - R_1\beta\|^2 + \|c_2\|^2
\end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$c = Q^t y = \begin{bmatrix} Q_1^t \\ Q_2^t \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} Q_1^t y \\ Q_2^t y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

위의 식 (9)를 보면 벡터 $c_2 = Q_2^t y$ 는 β 와 관계가 없으므로 잔차제곱합 $\|y - X\beta\|^2$ 을 최소화하는 β 는 $\|c_1 - R_1\beta\|^2$ 을 0으로 만드는 것이다. 즉 $R_1\beta = c_1$ 를 만족하는 β 가 최소제곱 추정량이다.

$$\min_{\beta} \|y - X\beta\|^2 = \min_{\beta} \|c_1 - R_1\beta\|^2 + \|c_2\|^2$$

X 가 완전계수 행렬이므로 상삼각행렬인 R_1 도 완전계수이다. 따라서 방정식 $R_1\beta = c_1$ 는 유일한 해는 상삼각행렬의 성질을 이용하여 축차식으로 쉽게 구할 수 있다.

$$\hat{\beta} = R_1^{-1} c_1$$

위의 추정량은 실제 역행렬을 구하지 않고 QR 분해를 이용하여 회귀계수를 구하는 방법 중에 하나이다.

5 예제

5.1 Gram–Schmidt 방법

아래와 같이 4차원 벡터 3개가 있다.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (10)$$

위의 벡터 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 에 대하여 Gram–Schmidt 방법을 적용해보자.

- $i = 1$. 먼저 $\|\tilde{\mathbf{q}}_1\| = \|\mathbf{a}_1\| = 2$ 이므로 첫번째 벡터 \mathbf{q}_1 를 만든다.

$$\mathbf{q}_1 = \tilde{\mathbf{q}}_1 / \|\tilde{\mathbf{q}}_1\| = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- $i = 2$. 이제 두번째 직교벡터 \mathbf{q}_2 를 만들자. $\mathbf{q}_1^t \mathbf{a}_2 = 4$ 이므로

$$\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^t \mathbf{a}_2) \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

그리고 $\|\tilde{\mathbf{q}}_2\| = 2$ 이므로

$$\mathbf{q}_2 = \tilde{\mathbf{q}}_2 / \|\tilde{\mathbf{q}}_2\| = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- $i = 3$ 마지막으로 $\mathbf{q}_1^t \mathbf{a}_3 = 2$, $\mathbf{q}_2^t \mathbf{a}_3 = 8$ 이므로

$$\tilde{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^t \mathbf{a}_3) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^t \mathbf{a}_3) \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

또한 $\|\tilde{\mathbf{q}}_3\| = 4$ 이므로

$$\mathbf{q}_3 = \tilde{\mathbf{q}}_3 / \|\tilde{\mathbf{q}}_3\| = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

따라서 Gram-Schmidt 방법으로 만든 정규직교벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

6 QR 분해

식 (10) 에서 주어진 벡터들을 열로 가진 행렬 \mathbf{A} 의 QR분해를 구해보자.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

앞의 예제에서 구한 직교벡터를 그대로 이용하면 \mathbf{Q} 는 쉽게 구해진다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

또한 식 (8)에 주어진 공식을 이용하면 행렬 \mathbf{R} 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}_1\| & \mathbf{a}_2^t \mathbf{q}_1 & \mathbf{a}_3^t \mathbf{q}_1 \\ 0 & \|\tilde{\mathbf{q}}_2\| & \mathbf{a}_3^t \mathbf{q}_2 \\ 0 & 0 & \|\tilde{\mathbf{q}}_3\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$