

행렬대수 1 - 중간고사 - 모든 풀이과정을 제시하시오.

2019년 4월 22일

1. 다음의 행렬에 대하여 역행렬이 존재하는지 판단하고 존재하면 역행렬을 구하시오.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. 다음과 같은 4개의 벡터 y, x_1, x_2, x_3 가 주어졌다.

$$y = \begin{bmatrix} k \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

- (a) 벡터 y 가 세 개의 벡터 x_1, x_2, x_3 의 선형조합으로 이루어질 수 있는 k 의 가능한 모든 값을 구하시오.
 (b) 4개의 벡터 y, x_1, x_2, x_3 가 선형독립이 되는 모든 k 값을 구하시오.

3. 다음과 같은 행렬의 방정식을 고려하자.

$$X^2 - 2X + I = 0$$

위에서 X 는 2×2 행렬, I 와 0 은 각각 2×2 항등행렬과 영행렬이다.

위의 방정식을 만족하는 행렬 X 가 존재하는가? 존재한다면 개수는 몇 개이며 어떤 형태를 가져야 하는가?

4. 행렬식을 전개하지 않고 다음 등식이 성립함을 보이시오 (x, y, z 는 임의의 실수)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$$

5. 다음에 주어진 행렬을 $A = KL$ 의 형태로 최대계수인수분해 하시오. 필요하면 치환행렬을 이용하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. (a) x 와 y 가 n -차원 열벡터이고 $y'x \neq 1$ 이면 다음을 증명하시오.

$$(I - xy')^{-1} = I - \frac{xy'}{y'x - 1}$$

- (b) 각각의 역행렬들이 존재한다고 가정하고 다음을 증명하시오.

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$$