행렬대수 1 - 역행렬, 선형방정식, LU 분해, 계수

시립대학교 통계학과

2019년 4월 15일

1 확장행렬을 이용한 역행렬의 계산

정방행렬의 역행렬은 다음과 같이 행렬식과 여인자 행렬을 이용하여 구한다. 예를 들어 다음과 같은 2×2 행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬은

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1. 먼저 행렬식 $\det(\boldsymbol{A})$를 구한 후

$$det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = (1)(4) - (2)(3) = -2$$

2. 여인자로 구성된 행렬 $\boldsymbol{C}$를 구한후

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 역행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$를 구한다.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{C}^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

역행렬을 구하는 다른 방법은 확장행렬(augmented matrix)을 고려하고 행연산으로 구할 수 있다. 정방행렬 $\boldsymbol{A}$와 차수가 같은 항등행렬을 붙여서 만든 분할행렬을 확장행렬이라고 한다.

예를 들어 위에서 사용한 2×2 행렬 $\boldsymbol{A}$과 이차원 항등행렬을 붙여서 만든 확장행렬은 다음과 같다.

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

이제 위의 확장행렬에서 행연산을 이용하여 행렬 $\boldsymbol{A}$부분을 항등행렬로 만들어 보자.

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
(-3)(\text{1st row}) + (\text{2nd row}) \rightarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
(1)(\text{2nd row}) + (\text{1st row}) \rightarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
(-1/2)(\text{2nd row}) \rightarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

이렇게 확장행렬의 행렬 $\boldsymbol{A}$ 부분을 행연산을 이용하여 항등행렬로 만들어 주면 오른쪽의 항등행렬이 $\boldsymbol{A}^{-1}$로 나타난다.

위에서 본 행연산은 확장행렬에 다음과 같이 행연산 행렬들을 차례로 곱해주는 절차와 동일하다.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]
$$

2 선형방정식의 풀이

다음과 같은 선형방정식을 푸는 방법에도 확장행렬과 행연산을 이용할 수 있다.

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
$$

예를 들어 다음과 같은 2차 방정식을 고려해 보자

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

위의 방정식의 근은 역행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

이제 행렬 $\boldsymbol{A}$와 벡터 $\boldsymbol{b}$로 이루어진 확장행렬을 고려하여 방정식의 근을 구해보자.

$$[\boldsymbol{A} \quad | \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

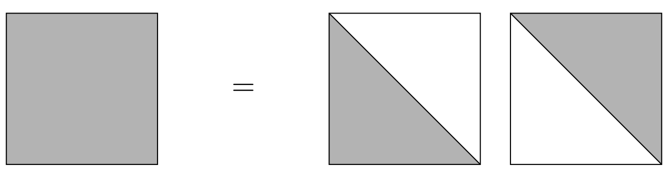
역행렬을 구할 때와 같이 확장행렬의 행렬 $\boldsymbol{A}$ 부분을 행연산을 통하여 항등행렬로 만들면 벡터 $\boldsymbol{b}$ 부분이 방정식의 근으로 나타난다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ (-3)(\text{1st row}) + (\text{2nd row}) \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\ (1)(\text{2nd row}) + (\text{1st row}) \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\ (-1/2)(\text{2nd row}) \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3 LU 분해

정방행렬 $\boldsymbol{A}$를 다음과 같이 하삼각행렬 $\boldsymbol{L}$과 상삼각행렬 $\boldsymbol{U}$의 곱으로 나타내는 것을 LU 분해라고 한다.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$



이러한 LU 분해는 행렬 $\boldsymbol{A}$에 행연산을 적용하여 쉽게 구할 수 있다. 예를 들어 위에서 고려한 2×2 행렬에 행연산을 적용하여 대각원소 아래를 0으로 만들면 LU 분해를 쉽게 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

따라서

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

4 행렬의 계수

행렬의 계수도 행연산을 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어 $p \times q$ 행렬 $\boldsymbol{A}$ 에서 $p < q$ 이면 $r(A) \leq min(p,q) = p$이다. 이 경우 행렬 $\boldsymbol{A}$에 행연산을 적용하면 행렬의 계수를 구할 수 있다.

예를 들어 다음과 같은 3×4 행렬에 행연산을 적용하여 대각원소 아래에 있는 원소들을 차례로 0으로 만들어 보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix}$$

$$(-2)(\text{1st row}) + (\text{2nd row}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix}$$

$$(-4)(\text{1st row}) + (\text{3rd row}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(-1)(\text{2nd row}) + (\text{3rd row}) \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위의 결과에서 3개의 대각 원소 중에서 0이 아닌 대각원소가 2개가 나타나며 나머지 행은 모두 0으로 나타난다. 이러한 결과를 행렬의 계수가 2인 것을 의미하며($r(\boldsymbol{A}) = 2$) 계수의 정의에 의하여 선형독립인 행의 갯수가 2이다. 따라서 마지막 행은 다른 2개의 행들의 선형조합이고 행연산의 결과로 모든 원소가 0이 되는 것을 알 수 있다.

이제 교과서 87페이지에 나타난 행렬의 계수를 구해보자.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 12 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

행렬의 계수는 전치 행렬의 계수와 같으므로 ($r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^t)$) 전치행렬을 고려해도 무방하다.

$$\boldsymbol{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

행(열)의 교환은 기본치환행렬을 행렬의 앞(뒤)에 곱하는 것과 같다. 정칙행렬을 앞 또는 뒤에 곱해도 행렬의 계수가 변하지 않으므로 행렬의 두 행(또는 열)을 교환하여도 행렬의 계수는 변하지 않는다

이제 $\boldsymbol{A}^t$의 2행과 3행을 바꾸고 다시 2열과 4열을 바꾸어 보자.

$$\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{E}_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

위의 행렬에 대각원소 아래를 0으로 바꾸는 행연산을 적용해 보자.

$$\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{E}_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-3)(\text{1st row}) + (\text{2nd row}) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-1)(\text{1st row}) + (\text{3rd row}) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위의 결과에서 3개의 대각 원소 중에서 0이 아닌 대각원소가 2개가 나타나며 나머지 행은 모두 0으로 나타난다. 이러한 결과를 행렬의 계수가 2인 것을 의미한다.