독립이 아닌 자료-임의효과 모형

서울시립대 통계학과 이용희

FALL 2019 학부

1 독립표본과 대응표본

서로 다른 두 처리의 효과(treatment effect)를 비교하기 위하여 주로 사용되는 방법은 두 개의 독립표본(independent sample)을 비교하는 t-검정법이다. 서로 독립인 두개의 집단(구성원이 겹치지 않는 집단)에 서로 다른 처리를 적용한 뒤에 관측된 자료의 표본 평균을 비교하여 두 개의 처리 효과의 차이를 통계적으로 검정하는 방법이다. t-검정을 위한 분포 가정은 다음과 같다.

$$x_1, x_2, \dots x_n \sim_{iid} N(\mu_1, \sigma^2) \quad y_1, y_2, \dots y_n \sim_{iid} N(\mu_2, \sigma^2)$$

위의 가정을 다음과 같은 평균모형(mean model)로 표현할 수 있다.

$$x_i = \mu_1 + e_{i1}, \quad y_i = \mu_2 + e_{i2} \tag{1}$$

여기서 e_{i1}와 e_{i2}들은 모두 독립이며 $N(0, \sigma^2)$을 따르는 오차들이다.

여기서 확률변수 x와 y는 서로 독립이고 각 관측값 $x_1, x_2, \dots x_{n_1}$과 $y_1, y_2, \dots y_{n_2}$들도 각각 모두 독립이다. 분포가정에서 다른 것은 확률변수 x와 y의 평균이 다르다.

이러한 가정하에서 다음의 두개의 가설검정을 할 수 있는 방법이 t-검정법이며

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vesus} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \tag{2}$$

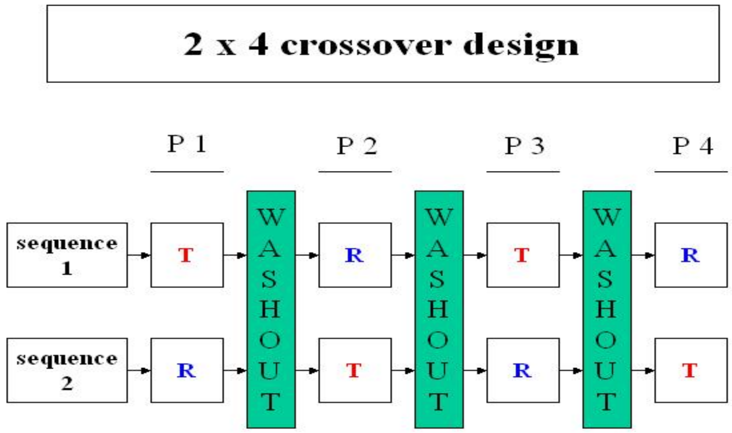
검정통계량은 다음과 같이 주어진다.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}} \tag{3}$$

여기서 $\bar{x}$와 $\bar{y}$는 각 집단의 표본 평균이고 s_p^2은 합동분산추정량(pooled variance estimator)이다.

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{2n - 2}$$

Figure 1: 생물학적동등성 실험에서 사용되는 교차실험(crossover design)
개체 당 4개의 관측치 (각 처리에 대하여 두 개의 관측값)



이제 두 개의 처리를 비교하는 방법이 독립 표본이 아닌 경우를 고려해 보자. 독립 표본이 아닌 대표적인 실험이 대응표본(또는 쌍표본) t-검정이다(paired t-test). 대응표본 검정에서는 하나의 개체에 두 개의 처리를 모두 적용하여 각 처리에 대한 반응값을 쌍 (x_i, y_i)으로 얻는다. 예를 들어 최초로 허가 받은 약품과 복제약의 생물학적동등성(bioequivalence)을 입증하는 실험에서는 한사람에게 최초 허가약을 투여하여 약의 효과를 보고 일정 시간이 지난뒤 복제약을 같은 사람에게 투여하여 그 효과를 측정한다. 다른 예로서 두 개의 눈병 치료제를 각각 누에 투여하여 효과를 비교하는 경우도 이러한 대응 표본에 속한다. 넓은 의미에서 일란성 쌍둥이에게 각각 다른 처리를 하여 비교하는 것도 대응비교라고 할 수 있다.

가장 단순한 대응비교로서 각 개체애 대하여 두 개의 처리에 대한 대응표본 (x_i, y_i)를 관측한다고 가정하자. 이에 대한 분포 모형은 다음과 같다.

$$d_i = x_i - y_i \sim_{iid} N(\delta, \sigma^2) \text{ where } \delta = \mu_1 - \mu_2 = E(x) - E(y)$$

대응비교에서 사용되는 t-통계량은 다음과 같다.

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_d/\sqrt{n}} \tag{4}$$

여기서 s_d^2는 $d_1, d_2, \ldots, d_n$의 표본분산이다.

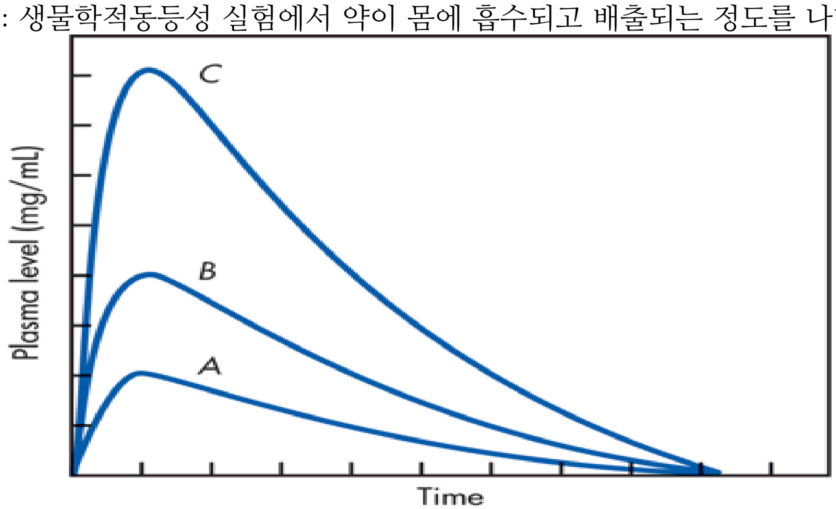
$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}$$

위에서 알아본 독립표본에 의한 비교와 대응표본에 의한 비교가 다른 점은 무었일까 생각해 보자. 표본의 비교가 다른 개체에서 추출된 독립인 관측치를 이용하는지 또는 같은 개체에서 추출된 대응하는(독립이 아닌) 관측치를 이용하는지에 따라서 서로 다른 t-통계량을 사용한다. 식 (3)과 식 (4)에 나타난 t-통계량을 비교하면 분자에 나타난 통계량은 효과의 차이를 나타내는 두 개의 평균의 차이로서 기본적으로 동일하다($\bar{d} = \bar{x} - \bar{y}$). 하지만 분모에서는 분자에 나타난 통계량의 표본오차(standard error)를 나타내는 양으로서 서로 다르다. 독립표본에서는 표본의 평균이 서로 독립이므로 다음과 같이 평균의 차이에 대한 분산이 각각의 분산의 합과 같으므로 이에 대한 추정량으로서 합동분산추정량을 이용하였다.

$$Var(\bar{x} - \bar{y}) = Var(\bar{x}) + Var(\bar{y}) \tag{5}$$

대응표본에서는 위의 식 (5)을 적용할 수 없다. 왜냐하면 두개의 표본 평균이 서로 독립이 아닐 가능성이 매우 높기 때문이다. 같은 개체에서 나온 관측치는 어떠한 형태로든 서로 관계가 있을 가능성이 높기 때문에 독립을 함부로 가정할 수 없다. 예를 들어 생물학적동등성 실험에서는 약 효과의 차이보다 약이 몸에 흡수되는 개인적인 체질이 관측값에 더 큰 영향을 줄 수 있다.

Figure 2: 생물학적동등성 실험에서 약이 몸에 흡수되고 배출되는 정도를 나타낸 개인별 그래프



Source: Shargel L, Wu-Pong S, Yu ABC: *Applied Biopharmaceutics & Pharmacokinetics, 6th Edition*: www.accesspharmacy.com

확률변수 x와 y가 독립이 아닌 경우 두 모형균의 차이를 비교하기 위하여 비교에 사용된 통계양은 두 확률변수의 차이다.

$$d_i = x_i - y_i$$

여기서 두 개의 확률변수의 차이를 이용할 때 암시적인 가정은 두 개의 확률변수의 차이를 내면 두

변수에 공통적으로 포함된 개인의 특성이 서로 상쇄되어 처리의 차이만이 확률변수 d_i에 존재한다는 것이다. 지금 설명한 대응비교 모형의 합리적인 가정을 요약하면 다음과 같다.

1. 개인의 특성을 반영하는 공통 요인이 두 변수에 모두 영향을 미친다.

2. 따라서 두 관측값 (x_i, y_i)가 독립이 아니다

3. 두 관측값의 차이를 내면 공통요인이 서로 상쇄되어 처리효과만 남는다.

$$E(d_i) = \mu_1 - \mu_2$$

위의 가정을 구현할 수 있는 대응비교 모형을 다음과 같은 가법모형(additive models)로 표현할 수 있다.

$$x_i = \mu_1 + A_i + e_{i1}, \quad y_i = \mu_2 + A_i + e_{i2} \tag{6}$$

여기서 A_i는 두 확률변수 (x_i, y_i)에 공통으로 포함된 개인적인 특성을 나타내는 요인이며 위의 식 (6)는 식 (1) 에서 공통요인인 A_i가 각 변수에 포함된 형태이다.

두 확률변수 (x_i, y_i)가 종속이기 위해서는 다음과 같은 가정을 이용할 수 있다.

$$A_i \sim N(0, \sigma_a^2), \quad e_{i1} \sim_{iid} N(0, \sigma_e^2) \quad e_{i2} \sim_{iid} N(0, \sigma_e^2)$$

여기서 A_i가 평균이 0이고 분산이 σ_a^2 인 확률변수이다. 이러한 요인을 임의효과(random effect)라고 하며 모수(parameter)인 평균 μ_i은 고정효과(fixed effect)라고 부른다. e_{i1}와 e_{i2}들은 모두 독립이며 평균이 0 이고 분산이 σ_e^2인 정규분포를 따르는 오차들이다. 또한 A_i와 $(e_{i1}$,$e_{i2})$도 독립이다.

위와 같은 가정에서 두 변수의 차이를 내면 공통요인인 A_i가 제거되어 두 처리의 차이만이 남게되며 x_i와 y_i는 분포의 가정상 독립이 아니다.

$$\begin{aligned}
d_i &= x_i - y_i \\
&= \mu_1 + A_i + e_{i1} - (\mu_2 + A_i + e_{i2}) \\
&= \mu_1 - \mu_2 + (e_{i1} - e_{i2}) \\
&= \mu_1 - \mu_2 + e_i^* \\
Cov(x_i, y_i) &= Cov(\mu_1 + A_i + e_{i1}, \mu_2 + A_i + e_{i2}) \\
&= Cov(A_i, A_i) \\
&= Var(A_i) \\
&= \sigma_a^2
\end{aligned}$$

다음 절에서는 여기서 논의한 독립표본과 대응표본의 개념 및 추정법을 일반적인 선형모형으로 확장하여 체계적인 비교를 해볼것이다.

2 고정효과 모형(Fixed Effects Model)

먼저 일원배치 요인계획(one-way factor design)이용한 실험을 생각해 보자. 고려하는 요인의 수준의 개수를 I라고 하면 I개의 수준 중에 하나를 임의로 선택하여 실험대상에 적용하는 임의화 방법으로 각 수준마다 J의 관측값을 얻어다고 하자. 다음과 같은 ANOVA모형을 고려하여 분석을 할 수 있다.

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, I \text{ and } j = 1, 2, \ldots, J \tag{7}$$

여기서 e_{ij}는 서로 독립이며 $N(0, \sigma_e^2)$를 따르는 오차항이다.

ANOVA 모형 (7)에서 μ와 α_i는 고정효과(fixed effect)라고 부르며 추정해야 할 모수(parameter)이다. 세심하게 설계된 실험에서는 수준에 대한 효과 α_i의 값이 변하지 않게 통제할 수 있는 실험 환경이 가능하다고 생각할 수 있으므로 α_i의 값을 변하지 않는 고정효과로 보는 것이 합리적이다.

일원배치 요인계획을 이용한 실험에서는 주요 관심사가 수준간의 차이가 있는지에 대한 것이며 이는 제곱합을 이용한 ANOVA table에서 F-test를 이용하여 검정할 수 있다.

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I$$

Table 1: 일원배치 ANOVA 테이블

Source	Sum of Square	DF	Mean Square	F
Treatment	$SSA = \sum_{i=1}^{I} J(\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$I-1$	$MSA = SSreg/(I-1)$	$F = MSA/MSE$
Error	$SSE = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$I(J-1)$	$MSE = SSE/(I(J-1))$	
total	$SST = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (y_{ij} - \bar{y})^2$	$IJ-1$		

3 임의효과 (Random Effects)

이제 다음과 같은 자료의 추출을 생각해 보자. 서울시 A구에 초등학교가 20개있다고 하자. 20개의 학교중 6개의 학교를을 임의로 추출하고 추출된 학교에 속한 모든 6학년 학생들에게 과학시험을 보게하여 점수를 얻었다. 이러한 자료에서 학생들의 성적은 모두 같지 않을 것이 당연하며 가장 점수가

낮은 학생부터 높은 학생까지 점수의 변동(variation)이 존재한다. 변동의 요인은 무었일까? 학생의 개인의 차이(예:학생의 지능, 노력 정도, 학습 환경)도 변동의 요인이지만 또한 학교의 차이도 변동의 요인이 될 수 있다. 여기서 학교에 대한 요인은 앞 절에서 본 실험 자료에서 나타나는 고정 효과에 의한 요인과는 성격이 틀리다. 20개의 학교라는 모집단에서 6개의 학교가 추출되었으며 이 때 학교의 차이는 설계된 실험에서는 수준에 대한 효과와는 다르게 표본 추출때문에 생기는 변동이라고 할 수 있다. 또한 같은 학교에 다니는 학생들은 같은 지역과 교사 등 공통적인 요인에 의하여 영향을 받는다고 가정할 수 있다. 따라서 같은 학교에 다는 학생들의 성적이 독립이 아닐 수도 있다.

이러한 효과를 임의효과(random effect)라고 부르며 학생들의 과학점수에 대한 모형을 다음과 같은 혼합효과모형(mixed effects model)으로 설명할 수 있다.

$$y_{ij} = \mu + A_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, I \text{ and } j = 1, 2, \ldots, J \tag{8}$$

여기서 A_i는 학교의 효과를 나타내는 임의효과이며 서로 독립이고 $N(0, \sigma_a^2)$를 따른다. 또한 개인에 대한 효과 또는 오차항 e_{ij}는 서로 독립이며 $N(0, \sigma_e^2)$를 따른다. 임의효과 A_i와 오차항 e_{ij}는 서로 독립이다. 고정효과 μ는 전체 평균을 나타내는 모수이다. 학교를 추출할 때 그 효과를 분산이 σ_a^2를 가지는 정규모집단에서 추출한다고 가정하는 것이다. 학교를 하나의 군집(cluster)로 생각하고 학교의 효과를 군집효과로 보고 총변동을 설명하고 나머지 변동은 오차의 변동으로 개인의 효과 등으로 설명한다.

$$Var(y_{ij}) = Var(\mu + A_i + e_{ij}) = Var(A_i) + Var(e_{ij}) = \sigma_a^2 + \sigma_e^2$$

식 (8)로 표현된 임의효과를 포함한 혼합모형(일원배치 임의효과 모형; one-way random effect models)의 가장 큰 특징 중에 하나는 같은 군집에 속하는 관측치들은 서로 독립이 아니며 양의 상관관계가 있다. 위의 예제에서 두 학생 j와 k가 같은 학교 i에 속한다면

$$Cov(y_{ij}, y_{ik}) = Cov(\mu + A_i + e_{ij}, \mu + A_i + e_{ik}) = Cov(A_i, A_i) = \sigma_a^2$$

따라서

$$corr(y_{ij}, y_{ik}) = \frac{Cov(y_{ij}, y_{ik})}{\sqrt{Var(y_{ij})Var(y_{ik})}} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}$$

위의 상관계수를 보면 학교간의 변동의 크기를 나타내는 σ_a^2각 개인간의 변동을 나타내는 σ_e^2보다 상대적으로 클수록 상관계수가 1에 가까와진다. 보통 σ_a^2을 집단간 변동(between-group variance)라 하고 σ_e^2를 집단내 변동(within-group variance)라고 한다. 따라서 σ_a^2와 σ_e^2의 상대적인 크기의 차이에 따라 군집내 관측값의 상관관계가 달라진다.

일원 배치 임의효과 모형도 고정효과 모형처럼 ANOVA table의 정보를 이용하여 σ_a^2와 σ_e^2에 대한 정보를 얻을 수 있다. 첫째로 ANOVA table에서 SSE의 기대값을 구해보자. 먼저

$$\begin{aligned} y_{ij} - \bar{y}_i &= (\mu + A_i + e_{ij}) - (\mu + A_i + \bar{e}_i) \\ &= e_{ij} - \bar{e}_i \end{aligned}$$

이므로 오차제곱합 SSE의 기대값은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(e_{ij} - \bar{e}_i))^2\right] \\ &= (J-1)\sum_{i=1}^{I} E\left[\frac{\sum_{j=1}^{J}(e_{ij} - \bar{e}_i))^2}{J-1}\right] \\ &= (J-1)\sum_{i=1}^{I}\sigma_e^2 \\ &= I(J-1)\sigma_e^2 \end{aligned}$$

또한 SSA의 기대값을 구하기 위하여

$$\begin{aligned} \bar{y}_i - \bar{y} &= (\mu + A_i + \bar{e}_i) - (\mu + \bar{A} + \bar{e}) \\ &= (A_i - \bar{A}) + (\bar{e}_i - \bar{e}) \end{aligned}$$

이므로 SSA의 기대값은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_i - \bar{y})^2\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\{(A_i - \bar{A}) + (\bar{e}_i - \bar{e})\}^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} E[(A_i - \bar{A})^2] + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} E[(\bar{e}_i - \bar{e})^2] \\ &= J(I-1)E\left[\frac{\sum_{i=1}^{I}(A_i - \bar{A})^2}{I-1}\right] + J(I-1)E\left[\frac{\sum_{i=1}^{I}(\bar{e}_i - \bar{e})^2}{I-1}\right] \\ &= J(I-1)\sigma_a^2 + J(I-1)\frac{\sigma_e^2}{J} \\ &= (I-1)(J\sigma_a^2 + \sigma_e^2) \end{aligned}$$

위의 계산에서 이용한 사실은 A_i는 서로 독립으로 $N(0, \sigma_a^2)$를 따르고 $\bar{e}_i$또한 서로 독립으로 $N(0, \sigma_e^2/J)$ 따른다는 것이다.

위의 제곱합의 기대값을 정리해보면

$$E(SSA) = (I-1)(J\sigma_a^2 + \sigma_e^2), \quad E(SSE) = I(J-1)\sigma_e^2$$

이므로 적률추정법(methods of moment)을 적용하면 σ_a^2와 σ_e^2의 추정량을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & SSA = (I-1)(J\sigma_a^2 + \sigma_e^2), \quad SSE = I(J-1)\sigma_e^2 \\ \Rightarrow \quad & \hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{I(J-1)}, \quad \hat{\sigma}_a^2 = \frac{SSA/(I-1) - \hat{\sigma}_e^2}{J} \end{aligned} \tag{9}$$

위의 추정식에서 유의할 사항은 σ_a^2추정량이 0보다 작은 값이 나올 수 있다는 점이다.

임의효과 모형에서의 모수에 대한 추정은 위와 같이 적률추정법을 쓰는 경우도 있지만 보통의 경우 최대우도추정법(ML: maximum likelihood estimation) 또는 제한최대우도추정법 (REML: restricted maximum likelihood estimation)을 사용한다.

식 (8)의 임의효과 모형은 임의효과가 2개 이상인 모형으로 학장될 수 있다. 예제에서 학교를 추출하고 학교내에서 학급을 추출하여 추출된 학급내의 학생들이 시험을 보면 다음과 같은 모형을 적용할 수 있다.

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_{ij} + e_{ijk}$$

위의 모형에서 A_i는 $N(0, \sigma_a^2)$를 따르는 학교에 대한 임의효과, B_{ij}는 $N(0, \sigma_b^2)$를 따르는 학급에 대한 임의효과, e_{ijk}는 $N(0, \sigma_e^2)$를 따르는 학생에 대한 임의효과 또는 오차항으로 생각할 수 있다.

임의효과 모형에 고정효과가 같이 포함되어 있는 모형을 혼합모형(mixed model)이라고 부르며 반응변수의 변동에 영향을 미치는 요인들 또는 예측변수 중에서 임의효과와 고정효과를 구별하여 정하고 동시에 모형에 포함시킬수 있다. 예를 들어서 학교를 선택하여 과학시험을 볼 경우에 학기가 시작할 때 과학교수법 두가지 중 하나를 임의화해서 각 학교에 배정하여 배정된 교수법으로 학생을 가르친 후에 시험을 보았다면 교수법에 대한 효과는 고정효과로 볼 수 있다. 따라서 다음과 같은 모형을 고려할 수 있다.

$$y_{ij} = \mu + \tau_{k(i)} + A_i + e_{ij} \tag{10}$$

여기서 $\tau_{k(i)}$는 i번째 학교의 교수법에 대한 고정효과이다(교수법이 배정된 결과에 의하여 $k(i) = 1$ 또는 $k(i) = 2$이 된다). 이 교수법에 대한 고정효과에 대해서는 두 교수법이 차이가 있는 지에 대한 검정이 주요한 관심사일 것이다 ($H_0 : \tau_1 = \tau_2$)

4 예제: 모의실험

위에서 언급한 모형 (10)을 기반한 예제와 모의실험을 통하여 혼합모형의 자료 형태와 추정법을 알아보자.

서울시 A구에 초등학교가 20개 있다고 하자. 각 학교에 대하여 과학 교육에 대한 두 가지 교수법중 하나를 임의로 선택하여 할당하였다. 10개의 학교는 A교수법이, 다른 10개의 학교에는 B 교수법이 적용되었다.

20개의 학교중 6개의 학교를 임의로 추출하고 (각각 A 교수법 적용 학교 3개, B 교수법 적용 학교 3개 추출) 추출된 학교에 속한 모든 6학년 학생중 임의로 추출된 20명에게 과학시험을 보게하여 점수를 얻었다.

다음과 같은 가정으로 모형을 가정하자.

- $\mu = 70$
- $\tau_1 = 5$, $\tau_1 = 0$
- $\sigma_a = 3$
- $\sigma_e = 3$

위의 모수를 이용하여 6개의 학교에서 20명의 성적을 임의로 추출하여 자료를 마드는 프로그램은 아래와 같다. 혼합모형을 추정하는 패키지는 `lme4`이다.

```
library(lme4)

## Loading required package: Matrix

set.seed(31313111)
#parameter
tau <- 5
mu <- 70
I <- 6
J <- 20
siga <- 3
sige <- 3
```

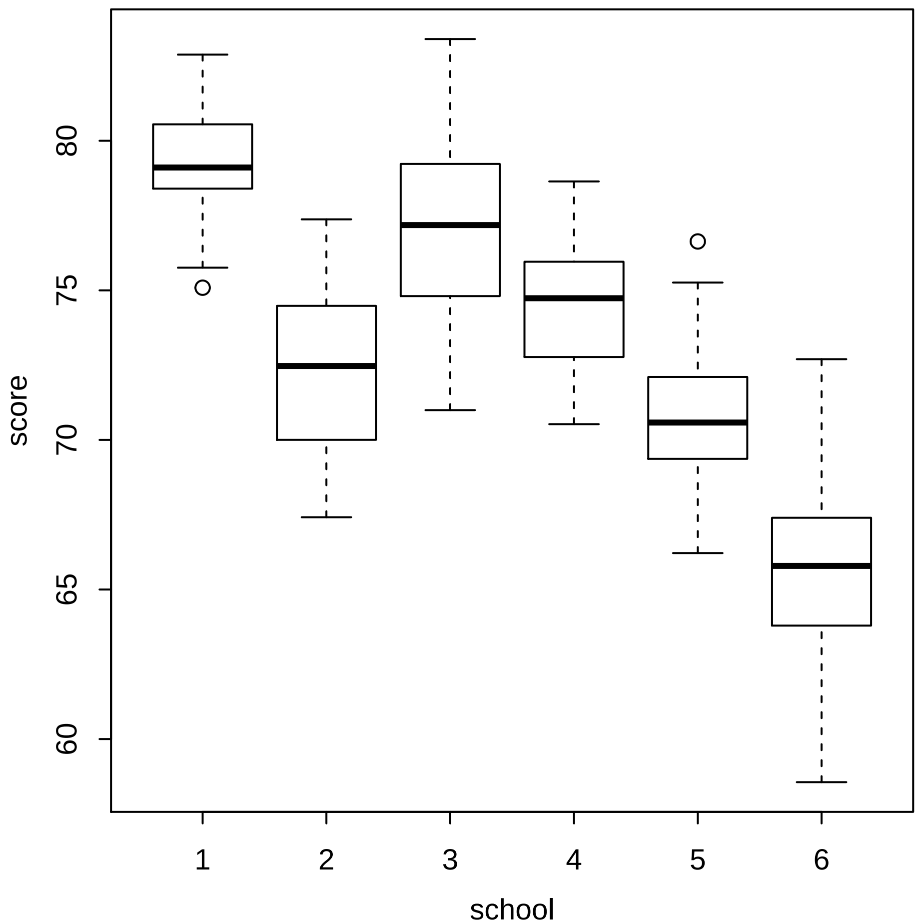
```r
#generationg effect and make response variable
AA <- rnorm(I,0,siga)
AA <- rep(AA,each=J)
ee <- rnorm(I*J,0,sige)
tt<- c(rep(tau,J*I/2),rep(0,J*I/2))
score <- mu+tt+AA+ee
school <- factor(rep(1:6,each=J))
teach <- factor(c(rep("A",J*I/2),rep("B",J*I/2)))
#making data
data1 <- data.frame(score, school,teach)
head(data1)
```

```
##   score school teach
## 1 80.83      1     A
## 2 79.53      1     A
## 3 75.09      1     A
## 4 79.01      1     A
## 5 80.27      1     A
## 6 79.18      1     A
```

```r
tail(data1)
```

```
##     score school teach
## 115 65.84      6     B
## 116 63.83      6     B
## 117 70.81      6     B
## 118 67.65      6     B
## 119 63.75      6     B
## 120 66.56      6     B
```

```r
boxplot(score~school,data=data1,xlab="school",ylab="score")
```



일단 혼합모형 (10)에서 생성된 자료를 혼합모형이 아닌 고정효과모형으로 적합시켜서 효과를 비교해보자.

$$y_{ij} = \mu + \tau_{k(i)} + \alpha_i + e_{ij} \tag{11}$$

```
model1 <- lm(score~school+teach, data=data1)
summary(model1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = score ~ school + teach, data = data1)
##
## Residuals:
```

```
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -7.205 -1.995 -0.017  1.630  6.935
##
## Coefficients: (1 not defined because of singularities)
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   79.200      0.603  131.30  < 2e-16 ***
## school2       -6.765      0.853   -7.93  1.6e-12 ***
## school3       -1.863      0.853   -2.18    0.031 *
## school4       -4.765      0.853   -5.59  1.6e-07 ***
## school5       -8.284      0.853   -9.71  < 2e-16 ***
## school6      -13.435      0.853  -15.75  < 2e-16 ***
## teachB            NA         NA      NA       NA
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.7 on 114 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.736,Adjusted R-squared:  0.724
## F-statistic: 63.5 on 5 and 114 DF,  p-value: <2e-16
```

위의 결과에서 보면 교수법의 차이에 대한 추정과 검정이 불가능하다. 이러한 이유는 교수법의 차이가 학교 1,2,3 과 학교 4,5,6의 차이와 동일한 차이로 나타나기 때문에 추정이 불가능하다. 오차항의 표준편차에 대한 추정량은 2.6975 이다.

학교의 차이를 무시하고 교수법의 차이만 모형에 넣어서 검정해보자.

$$y_{ij} = \mu + \tau_{k(i)} + e_{ij} \tag{12}$$

```
model2 <- lm(score~teach, data=data1)
summary(model2)
```

```
##
## Call:
```

```
## lm(formula = score ~ teach, data = data1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -11.812  -2.863   0.278   2.975   8.269
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   76.323      0.542  140.86  < 2e-16 ***
## teachB        -5.952      0.766   -7.77  3.2e-12 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.2 on 118 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.338,Adjusted R-squared:  0.333
## F-statistic: 60.3 on 1 and 118 DF,  p-value: 3.25e-12
```

교수법의 차이는 유의하고(p-value=3.2497×10^{-12}) 오차항의 표준편차에 대한 추정량은 4.197 이다.

이제 혼합모형 (10)을 적합시켜보자. 혼합모형은 R 패키지 `lme4`의 함수 `lmer()`을 사용하며 임의 효과는 `(1|school)`로 지정한다.

```
# mixed effect model
model3 <- lmer(score~teach+(1|school), data=data1)
summary(model3)
```

```
## Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
## Formula: score ~ teach + (1 | school)
##    Data: data1
##
## REML criterion at convergence: 592.3
##
```

```
## Scaled residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -2.711 -0.716 -0.006  0.631  2.531
##
## Random effects:
##  Groups   Name        Variance Std.Dev.
##  school   (Intercept) 15.25    3.9
##  Residual              7.28    2.7
## Number of obs: 120, groups:  school, 6
##
## Fixed effects:
##             Estimate Std. Error t value
## (Intercept)    76.32       2.28   33.46
## teachB         -5.95       3.23   -1.84
##
## Correlation of Fixed Effects:
##        (Intr)
## teachB -0.707
```

σ_a의 추정값은 3.9049 이고 σ_e의 추정값은 2.6975 이다. 교수법의 차이에 대한 검정에 대해서는 p-value가 주어지지 않았지만 t-검정통계량 값은 -1.8449이다.