과제 2번 해답

Yonghee Lee

2021년 3월 16일 출제

1 교과서 문제

1.1 2.6

회귀계수의 분산을 작게 할 수록 더 정확한 추정이 가능하므로 설명 변수의 변동 $\sum(x_i - \bar{x})^2$ 을 크게 하는 것이 좋다. 즉, 설명변수들이 평균으로 부터 많이 퍼져있게 배치하는 것이 좋다.

1.2 2.13 (1) 이차원 조건부 정규 분포와 회귀계수간의 관계는 다음과 같다.

$$\beta_1 = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \beta_0 = \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x$$

(2) 이차원 조건부 정규 분포의 모수에 표본 추정량을 대입해보자.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x} &= \frac{\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2 \sum(x_i - \bar{x})^2}} \frac{\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2/(n-1)}}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2/(n-1)}} \\
&= \frac{\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \\
&= \hat{\beta}_1 \\
\hat{\mu}_y - \hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x}\hat{\mu}_x &= \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \\
&= \hat{\beta}_0
\end{aligned}$$

1.3 3.3

$$(X^tX)^{-1} = \frac{1}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}\begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{pmatrix} = \frac{1}{n(\sum(X_i - \bar{X})^2)}\begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{pmatrix}$$

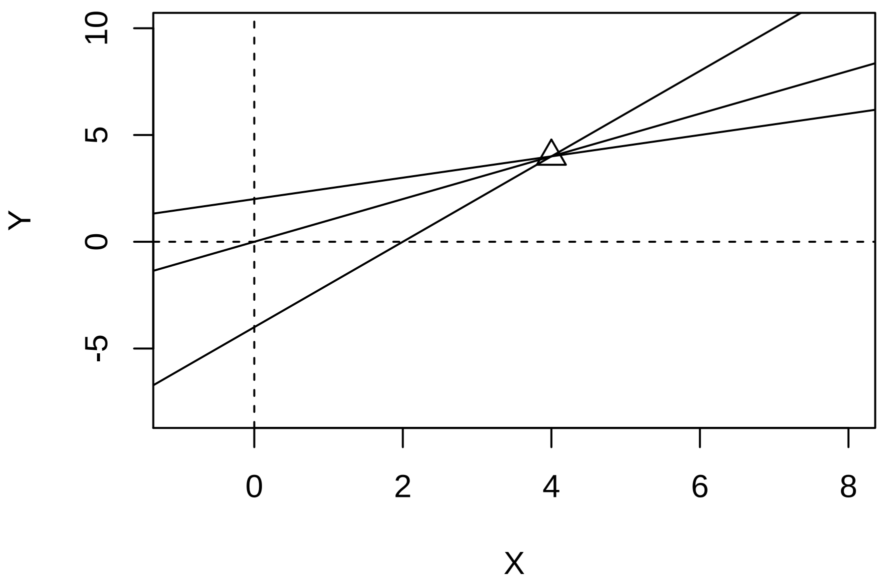
$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X^tX)^{-1}$이므로 절편과 기울기의 추정량의 공분산은 다음과 같이 주어진다.

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\sigma^2\frac{\sum X_i}{n(\sum(X_i - \bar{X})^2)} = -\sigma^2\frac{\bar{X}}{SS_{XX}}$$

단순 회귀직선은 언제나 $(\bar{X}, \bar{Y})$ 점을 지나는 직선이다. 따라서 $\bar{X}$가 양수인 경우에 기울기가 증가(감소)하면 절편이 감소(증가)한다.

아래의 그림은 $(\bar{X}, \bar{Y}) = (4, 4)$을 지나는 여러 가지 회귀직선을 그린 그림으로서 절편과 기울기의 추정량에 대한 공분산이 음수인 것을 직관적으로 설명한다.

```r
plot(c(-1, 8), c(-8, 10), type = "n", xlab = "X", ylab = "Y")
points(4, 4, cex = 1.5, pch = 2)
abline(h = 0, lty = 2)
abline(v = 0, lty = 2)
abline(b = 1, a = 0)
abline(b = 2, a = -4)
abline(b = 0.5, a = 2)
```



1.4 3.7

1.4.1 (1)

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$X^t X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

1.4.2 (2)

$$(X^t X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \qquad X^t y = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

따라서

$$\hat{\beta} = (X^tX)^{-1}X^ty = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1 \\ -0.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

1.4.3 (3)

만약 X_1과 X_2만 사용하는 회귀 모형의 계수 추정결과는 다음과 같다. X_3를 모형에 포함할 때와 아닐 경우 모두 다른 독립변수에 대한 계수의 추정치는 같다.

$$(X^tX)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \quad X^ty = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = (X^tX)^{-1}X^ty = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

1.4.4 (4)

이렇게 X_3를 모형에 포함할 때와 아닐 경우 모두 다른 독립변수에 대한 계수의 추정치가 같은 이유는 X^tX 행렬이 대각행렬이기 때문이며 이는 각 독립변수(절편포함)의 열벡터들이 서로 직교하기 때문이다. 두 열벡터가 직교하는 것은 내적이 0이 된다는 것이다.

위의 계산결과들은 아래와 같이 R 프로그램을 이용하여 얻을 수 있다.

```r
x1 <- c(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)
x2 <- c(-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)
x3 <- c(-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)
y <- c(2, 3, 1, 3, 4, 6, 3, 6)
dat1 <- data.frame(y = y, x1 = x1, x2 = x2, x3 = x3)
lm3 <- lm(y ~ x1 + x2 + x3, data = dat1)
summary(lm3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x1 + x2 + x3, data = dat1)
##
## Residuals:
##          1          2          3          4          5          6          7          8
##  5.000e-01 -5.000e-01  2.776e-17  8.049e-16  6.384e-16 -5.551e-17 -5.000e-01  5.000e-01
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   3.5000     0.1768  19.799 3.84e-05 ***
## x1            1.0000     0.1768   5.657  0.00481 **
## x2           -0.2500     0.1768  -1.414  0.23020
## x3            1.2500     0.1768   7.071  0.00211 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5 on 4 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9545, Adjusted R-squared:  0.9205
## F-statistic:    28 on 3 and 4 DF,  p-value: 0.003815
```

```r
X <- model.matrix(lm3)
t(X) %*% X
```

```
##             (Intercept) x1 x2 x3
## (Intercept)           8  0  0  0
## x1                    0  8  0  0
## x2                    0  0  8  0
## x3                    0  0  0  8
```

```r
solve(t(X) %*% X)
```

```
##             (Intercept)    x1    x2    x3
## (Intercept)       0.125 0.000 0.000 0.000
## x1                0.000 0.125 0.000 0.000
## x2                0.000 0.000 0.125 0.000
## x3                0.000 0.000 0.000 0.125
```

```r
solve(t(X) %*% X) %*% t(X) %*% y
```

```
##              [,1]
## (Intercept)  3.50
## x1           1.00
## x2          -0.25
## x3           1.25
```

```r
lm4 <- lm(y ~ x1 + x2, data = dat1)
summary(lm4)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x1 + x2, data = dat1)
##
## Residuals:
##     1     2     3     4     5     6     7     8
## -0.75 -1.75 -1.25 -1.25  1.25  1.25  0.75  1.75
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   3.5000     0.5809   6.025  0.00181 **
## x1            1.0000     0.5809   1.721  0.14581
## x2           -0.2500     0.5809  -0.430  0.68487
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.643 on 5 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3864, Adjusted R-squared:  0.1409
## F-statistic: 1.574 on 2 and 5 DF,  p-value: 0.295
```

2 추가 문제

2.1 추가 문제 1

중회귀 모형 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta$ 에서 회귀제곱합 SSR의 기대값을 구하시오.

$$
\begin{aligned}
E(SSR) &= E[\boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{H} - \mathbf{1}\mathbf{1}^t/n)\boldsymbol{y}] \\
&= (\boldsymbol{X\beta})^t(\boldsymbol{H} - \mathbf{1}\mathbf{1}^t/n)(\boldsymbol{X\beta}) + tr[(\boldsymbol{H} - \mathbf{1}\mathbf{1}^t/n)(\sigma^2\boldsymbol{I})] \\
&= \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{H} - \mathbf{1}\mathbf{1}^t/n)\boldsymbol{X\beta} + \sigma^2 tr(\boldsymbol{H} - \mathbf{1}\mathbf{1}^t/n) \\
&= \boldsymbol{\beta}^t(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{HX} - \boldsymbol{X}^t\mathbf{1}\mathbf{1}^t\boldsymbol{X}/n)\boldsymbol{\beta} + \sigma^2[tr(\boldsymbol{H}) - tr(\mathbf{1}\mathbf{1}^t)/n] \\
&= \boldsymbol{\beta}^t(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^t\mathbf{1}\mathbf{1}^t\boldsymbol{X}/n)\boldsymbol{\beta} + \sigma^2(p-1) \\
&= \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^t/n)\boldsymbol{X\beta} + \sigma^2(p-1)
\end{aligned}
$$

2.2 추가 문제 2

최소제곱 추정량 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$와 잔차 벡터 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$의 공분산 행렬이 $\mathbf{0}$임을 보이시오.

다음은 반응변수 벡터에 대한 두 개의 선형변환 $\boldsymbol{Ay}$ 과 $\boldsymbol{By}$의 공분산을 구하는 공식이다.

$$
\begin{aligned}
Cov(\boldsymbol{Ay}, \boldsymbol{By}) &= E[(\boldsymbol{Ay} - E(\boldsymbol{Ay}))(\boldsymbol{By} - E(\boldsymbol{By})^t)] \\
&= \boldsymbol{A}E[(\boldsymbol{y} - E(\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{y} - E(\boldsymbol{y}))^t]\boldsymbol{B}^t \\
&= \boldsymbol{A}(\sigma^2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}^t \\
&= \sigma^2\boldsymbol{AB}^t
\end{aligned}
$$

위의 문제에서

$$
\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\boldsymbol{y}
$$

이므로 다음과 같은 결과를 얻는다. 따라서 최소제곱 추정량 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$와 잔차 벡터 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$의 공분산 행렬이 $\mathbf{0}$이다.

$$
(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}) = \mathbf{0}
$$

2.3 추가 문제 3

n개의 확률변수 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 이 독립적으로 $N(\mu, \sigma^2)$에서 추출되었다.

- 다음의 방정식이 성립함을 보이시오.

$$
\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^*)^2 + \frac{n-1}{n}(y_1 - \bar{y}^*)^2
$$

여기서 $\bar{y}^* = \sum_{i=2}^{n} y_i/(n-1)$

- 다음 주어진 통계량 Q 의 분포를 구하시오.

$$
Q = \frac{n-1}{n}\frac{(y_1 - \bar{y}^*)^2}{\sigma^2}
$$

먼저 몇 개의 필요한 공식을 유도해보자.

$$
\begin{aligned}
y_1 - \bar{y} &= \frac{n-1}{n}(y_1 - \bar{y}^*) \\
\bar{y}^* - \bar{y} &= \frac{1}{n}(\bar{y}^* - y_1)
\end{aligned}
$$

이제 $\sum_{i=1}^{y}(y_i - \bar{y})^2$을 분해해 보자

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{y}(y_i - \bar{y})^2 = (y_1 - \bar{y})^2 + \sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^* + \bar{y}^* - \bar{y})^2 \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2}(y_1 - \bar{y}^*)^2 + \sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^*)^2 + \sum i = 2^n(\bar{y}^* - \bar{y})^2 + 2\sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^*)(\bar{y}^* - \bar{y}) \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2}(y_1 - \bar{y}^*)^2 + \sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^*)^2 + \frac{n-1}{n^2}(\bar{y}^* - y_1)^2 + 0 \\
&= \sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^*)^2 + \frac{n-1}{n}(\bar{y}^* - y_1)^2
\end{aligned}
$$

이제 다음과 같이 두 개의 통계량이 카이 제곱 분포를 따르므로

$$
\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1), \quad \sum_{i=2}^{n}(y_i - \bar{y}^*)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)
$$

다음 통계량 Q 는 $\chi^2(1)$ 을 따른다 (교수 강의모트 Theorem C.3) .

$$
Q = \frac{n-1}{n}\frac{(y_1 - \bar{y}^*)^2}{\sigma^2}
$$