다변량통계학-2025년 2학기

서울시립대학교 통계학과 이용희

2025-09-07

Table of contents

List of Figures

List of Tables

Preface

이 책은 2025년 다변량통계학에 대한 온라인 교재입니다.

> **표기법**
>
> 이 책에서 사용된 기호, 표기법, 프로그램의 규칙과 쓰임은 다음과 같습니다.
>
> - 스칼라(scalar)와 일변량 확률변수는 일반적으로 보통 글씨체의 소문자로 표기한다. 특별한 이유가 있는 경우 대문자로 표시할 것이다.
> - 벡터, 행렬, 다변량 확률벡터는 **굵은 글씨체**로 표기한다.
> - 통계 프로그램은 `R`을 이용하였다. 각 예제에 사용된 `R` 프로그램은 코드 상자를 열면 나타난다.

1 확률벡터와 다변량 정규분포

```
library(tidyverse)
library(here)
library(knitr)
library(rmarkdown)
library(kableExtra)
library(flextable)
```

다변량 자료(multivariate data)는 두 개 이상의 변수를 측정한 자료를 말합니다. 예를 들어, 학생들의 키와 몸무게, 시험 점수와 공부 시간, 나이와 소득 등이 다변량 자료에 해당합니다. 다변량 자료는 변수들 간의 관계를 분석하고 이해하는 데 중요한 역할을 합니다. 다변량 자료를 효과적으로 표현하고 분석하기 위해 다양한 그래프와 통계 기법이 사용됩니다. 이 장에서는 다변량 자료의 표현 방법과 분포를 이해하는 데 필요한 기본 개념과 도구들을 소개합니다.

1.1 예제- 국민체력100

국민체력100은 국민의 체력증진과 건강증진을 위해 개발된 종합적인 체력측정 프로그램이다. 이 프로그램은 다양한 연령대와 성별에 맞춘 체력측정 항목을 포함하고 있으며, 이를 통해 개인의 체력 상태를 평가하고 개선할 수 있는 기회를 제공한다.

이번 장에서는 청소년(13-18세) 남여 3000명에 대하여 2024년에 국민체력100 사업에서 측정한 자료를 예제로 사용하여 다변량 자료를 표현하는 방법들과 분포를 배울것이다.

먼저 측정항목에 대한 설명에 대한 자료를 보자.

```
load(here("data", "physical100.RData"))
ls()
```

```
[1] "physical100_df"      "physical100_df_info"
```

먼저 데이터프레임 `selected_var_df` 에는 측정한 항목의 영문 변수이름(`varname_eng`), 종목의 설명(`varname_kor`), 측정분야(`category_kor`) 그리고 측정단위(`unit`) 가 다음과 같이 저장되어 있다.

varname_eng	varname_kor	category_kor	unit
height	신장	신체구성	cm
weight	체중	신체구성	kg
body_fat_pct	체지방율	신체구성	
grip_left	악력_좌	근력	kg
grip_right	악력_우	근력	kg
sit_forward	앉아윗몸앞으로굽히기	유연성	cm
illinois	일리노이	민첩성	초
hang_time	청소년체공시간	순발력	초
twall_time	TWALL_시간	협응력	초
twall_errors	TWALL_실수	협응력	회
twall_score	TWALL_결과값	협응력	초
bmi	BMI	신체구성	
rel_grip	상대악력	근력	%
abs_grip	절대악력	근력	kg

다음으로 청소년 3000명의 측정 자료의 일부는 다음과 같다.

sex	age	height	weight	body_fat_pct	grip_left	sit_forward
남성	15	166.5	68.0	26.3	31.9	22.1
여성	13	166.4	45.5	22.0	20.0	10.2
남성	13	163.2	44.7	11.7	22.0	-2.0
여성	14	156.9	44.7	26.9	17.3	-5.0
남성	17	175.7	78.1	16.7	52.2	18.5
여성	16	167.2	74.5	37.1	25.9	12.0
여성	16	162.0	57.3	37.1	21.6	-4.5
여성	17	169.1	75.0	39.8	21.6	0.1
여성	15	160.9	56.8	33.1	25.1	-8.0

sex	age	height	weight	body_fat_pct	grip_left	sit_forward
남성	13	162.8	57.6	18.0	39.6	28.0

1.2 확률벡터와 기본 성질

1.2.1 일변량 확률변수

일변량 확률변수(random variable) X가 확률밀도함수 $f(x)$를 가지는 분포를 따를때 기대값과 분산은 다음과 같이 정의된다.

$$E(X) = \int x f(x) dx = \mu$$
$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = \int (x-\mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$$

새로운 확률변수 Y가 확률변수 X의 다음과 같은 선형변환으로 표시된다면 (a와 b는 실수)

$$Y = aX + b$$

일변량 확률변수 X의 기대값(평균)과 분산은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(aX+b) \\ &= \int (ax+b) f(x) dx \\ &= a \int x f(x) dx + b \\ &= aE(X) + b \\ &= a\mu + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= Var(aX+b) \\ &= E[aX + b - E(aX+b)]^2 \\ &= E[a(X-\mu)]^2 \\ &= a^2 E(X-\mu)^2 \\ &= a^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

1.2.2 다변량 확률벡터

이제 하나의 학률변수가 아는 2개 이상의 확률변수들을 모아놓은 확률벡터(random vector)를 생각해 보자. 다음과 같이 벡터로 표현된 확률벡터 $\boldsymbol{X}$가 p 차원의 다변량 분포(multivariate distribution)를 따른다고 하고 결합확률밀도함수 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$를 를 가진다고 하자.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ .. \\ X_p \end{bmatrix}$$

다변량 확률벡터의 평균 벡터(mean vector)는 다음과 같이 주어진다. 확률벡터의 평균 벡터는 구성하는 각 확률변수의 평균으로 주어진다.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ E(X_3) \\ .. \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ .. \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

다음으로 공분산(covariance)과 상관계수(correlation coefficient)에 대해서 알아보자. 우리는 여러 개의 확률변수의 관계를 분석하는 분석을 하려고 하는데, 이 경우 가장 많이 사용되는 통계량이 두 개의 변수들의 선형적 관계를 나타내는 상관계수이다. 두 확률변수 X_k 와 X_l 의 상관계수 ρ_{jk} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_{jk} = \frac{Cov(X_j, X_k)}{\sqrt{V(X_j)V(X_k)}} = \frac{\sigma_{jk}}{\sqrt{\sigma_{jj}\sigma_{kk}}}, \quad j, k = 1, 2, \dots, p$$

위의 상관계수의 공식에서 $\sigma_{jj} \equiv \sigma_j^2$ 와 $\sigma_{kk} = \sigma_k^2$ 는 각각 확률변수 X_i 와 X_j 의 분산이며, 공분산은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} Cov(X_j, X_k) &= E[(X_j - E(X_j))(X_k - E(X_k))] \\ &= E(X_j X_k) - E(X_j)E(X_k) \end{aligned}$$

위의 식을 보면 각각의 확률 변수가 평균에서 차이가 나는 두 개의 편차, 즉 $X_j - E(X_j)$, $X_k - E(X_k)$ 의 곱에 대한 기대값으로 두 확률 변수가 평균에서 얼마나 같은 방향 또는 반대 방향으로 함께 움직이는 경향이 있는지 그 정도를 수치화한 값이다. 두 확률변수의 공분산의 값이 양의 값으로 커지면 두 확률 변수의 변화가 같은 방향으로 나타난다는 의미이며, 반대로 음의 값으로 커지면 두 확률 변수의 변화가 반대 방향으로 나타난다는 의미이다.

참고로 공분산은 단위가 확률 변수의 단위에 영향을 받기 때문에 크기 자체만으로 비교가 직관적이지 않다는 단점이 있다. 반면에 상관 계수는 공분산을 각 확률 변수의 표분편차로 나누어 얻은 값이므로 단위에 영향을 받지 않아서 상대적인 비교가 가능하다.

상관계수는 -1 과 1 사이의 값을 가지며 1에 가까울수록 두 개의 변수가 같은 방향으로 움직이는 확률적 경향이 강해지며 반대로 -1 에 가까워질수록 반대의 방향을 움직이는 경향이 강해진다.

여기서 중요한 점은 상관계수(또는 공분산)은 두 확률 변수의 선형적 관계(linear relationship)을 나타내는 통계량으로 비선형적 관계를 파악하는데는 한계가 있을 수 있다.

이제 확률 벡터의 모든 변수에 대한 분산과 공분산을 다음과 같은 공분산 행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{X}) = Cov(\boldsymbol{X}) &= E(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^t \\ &= E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^t) - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^t \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

여기서 $\sigma_{jj} = V(X_j)$, $\sigma_{jk} = Cov(X_j, X_k) = Cov(X_k, X_j)$ 이다. 따라서 공분산 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$는 대칭행렬(symmetric matrix)이다.

더 나아가 확률 벡터의 모든 변수에 대한 상관계수을 다음과 같은 상관계수 행렬(correlation matrix) $\boldsymbol{R}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} cor(\boldsymbol{X}) &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{R} \end{aligned}$$

위의 상관계수 행렬에서 대각원소는 모두 1 임이 유의하자.

새로운 확률벡터 $\boldsymbol{Y}$가 확률벡터 $\boldsymbol{X}$ 의 선형변환라고 하자.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$$

단 여기서 $\boldsymbol{A}$ 는 $p \times p$ 실수 행렬이고 $\boldsymbol{b}$ 는 $p \times 1$ 실수 벡터이다.

확률벡터 $\boldsymbol{Y}$ 의 기대값(평균벡터)과 공분산은 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{Y}) &= E(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}) \\
&= \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{A\mu}+\boldsymbol{b} \\
V(\boldsymbol{Y}) &= Var(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}) \\
&= E[\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}-E(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b})][\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}-E(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b})]^t \\
&= E[\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A\mu}][\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A\mu}]^t \\
&= E[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})][\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})]^t \\
&= E[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{A}^t] \\
&= \boldsymbol{A}E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^t]\boldsymbol{A}^t \\
&= \boldsymbol{A\Sigma A}^t
\end{aligned}
$$

1.2.3 표본 통계량

이제 확률 표본(sample)을 이용하여 평균벡터, 공분산, 상관계수를 추정하는 간단한 방법에 대해서 알아보자.

확률 벡터 $\boldsymbol{X}$ 가 평균이 $\boldsymbol{\mu}$ 이고 공분산이 $\boldsymbol{\Sigma}$ 인 다변량 분포 F 를 따른다고 가정하자. 만약 확률 표본 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n$ 이 독립적으로 다변량 분포 F 에서 임의로 추출되었다면

$$
\boldsymbol{X}_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \\ .. \\ X_{ip} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n
$$

다음과 같이 표본 통계량을 이용하여 평균벡터, 공분산, 상관계수를 추정할 수 있다.

먼저 다음과 같은 표본평균 벡터 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 는 평균벡터 $\boldsymbol{\mu}$ 의 불편추정량(unbiased estimator)이다.

$$
\bar{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ .. \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_{i1}/n \\ \sum_{i=1}^n X_{i2}/n \\ \sum_{i=1}^n X_{i3}/n \\ .. \\ \sum_{i=1}^n X_{ip}/n \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\mu}}
$$

여기서 X_{ij} 는 i 번째 표본벡터 $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1} X_{i2} \dots X_{ip})^t$ 의 j 번째 확률변수이다.

또한 아래에 주어진 표본 공분산 행렬 $\boldsymbol{S}$ 은 공분산 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$ 의 추정량이다.

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$$

위에서 $s_{jj} \equiv s_j^2$ 는 확률변수 X_j 의 표본 분산이며 s_{jk} 는 X_j 와 X_k 의 표본 공분산이며 다음과 같이 계산된다.

$$s_{jj} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_j)^2, \quad s_{jk} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k), \quad j,k = 1,2,\ldots,p$$

마지막으로 아래에 주어진 표본 상관계수 행렬 $\boldsymbol{R}$ 은 상관계수 행렬 $\boldsymbol{R}$ 의 추정량이다.

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{12} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \\ r_{1p} & r_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 r_{jk} 는 확률변수 X_j 와 X_k 의 표본 상관계수이며 다음과 같이 계산된다.

$$r_{jk} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj}s_{kk}}}, \quad j,k = 1,2,\ldots,p$$

1.2.4 예제-국민체력100

이제 위에서 살펴본 국민체력100 자료에서 청소년 남자 자료를 이용하여 평균벡터, 공분산 행렬, 상관계수 행렬의 표본 통계량을 계산해 보자.

먼저 표본 평균 벡터를 계산해 보자. 주어진 변수가 많으니 키(`height`), 몸무게(`weight`), 체지방률(`body_fat_pct`), 악력(`grip_left`), 앉아윗몸앞으로굽히기(`sit_forward`), 청소년체공시간(`hang_time`) 6개 변수만 선택하여 계산해 보자.

```
# 국민체력100 자료에서 남자만 선택하여 데이터프레임 df 생성
df <- physical100_df %>%
  filter(sex == "남성") %>%
  select(height, weight, body_fat_pct, grip_left, sit_forward,hang_time)

#  패키지 dplyr의 summarise()와 across() 함수를 사용하여 각 열의 평균 계산
sample_mean_vector <- df %>%
  summarise(across(everything(), \(x) mean(x, na.rm = TRUE))) %>%
  unlist()

sample_mean_vector
```

```
     height       weight body_fat_pct    grip_left  sit_forward    hang_time
172.0451492   69.7115470   20.9993923   36.0728729    7.8976630    0.5593964
```

다음으로 표본 공분산 행렬을 계산해 보자.

```
cor(df)
```

```
                height      weight body_fat_pct   grip_left   sit_forward
height        1.0000000000  0.50994161  -0.03019400  0.45225668  0.0008938941
weight        0.5099416134  1.00000000   0.69156075  0.46152254  0.0111910927
body_fat_pct -0.0301940037  0.69156075   1.00000000 -0.01208826 -0.1434596849
grip_left     0.4522566754  0.46152254  -0.01208826  1.00000000  0.2605654264
sit_forward   0.0008938941  0.01119109  -0.14345968  0.26056543  1.0000000000
hang_time     0.1884978140 -0.14265212  -0.48446817  0.34559521  0.2889235491
              hang_time
height        0.1884978
weight       -0.1426521
body_fat_pct -0.4844682
grip_left     0.3455952
sit_forward   0.2889235
hang_time     1.0000000
```

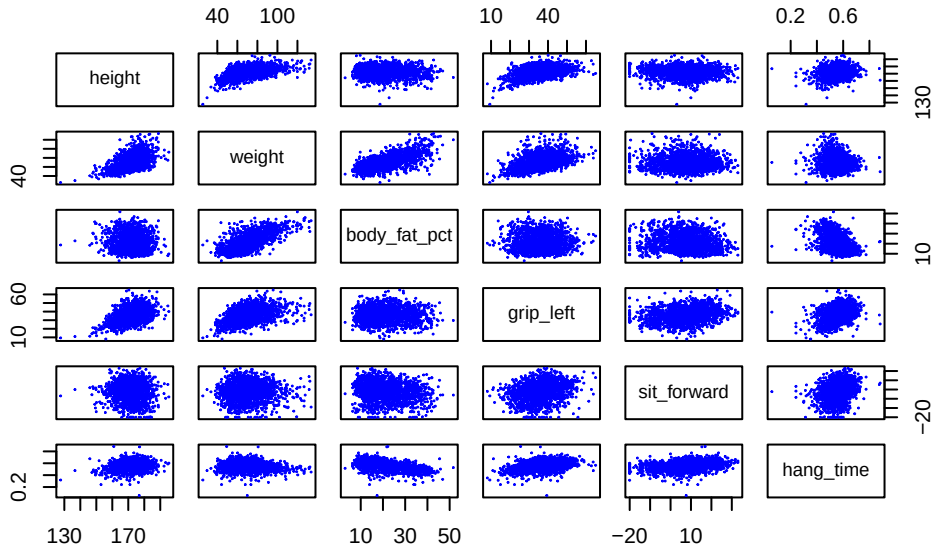
마지막으로 표본 상관계수 행렬을 계산해 보자.

```
cor(df)
```

```
                height      weight body_fat_pct   grip_left   sit_forward
height        1.0000000000  0.50994161  -0.03019400  0.45225668  0.0008938941
weight        0.5099416134  1.00000000   0.69156075  0.46152254  0.0111910927
body_fat_pct -0.0301940037  0.69156075   1.00000000 -0.01208826 -0.1434596849
grip_left     0.4522566754  0.46152254  -0.01208826  1.00000000  0.2605654264
sit_forward   0.0008938941  0.01119109  -0.14345968  0.26056543  1.0000000000
hang_time     0.1884978140 -0.14265212  -0.48446817  0.34559521  0.2889235491
              hang_time
height        0.1884978
weight       -0.1426521
body_fat_pct -0.4844682
grip_left     0.3455952
sit_forward   0.2889235
hang_time     1.0000000
```

표본 상관계수 행렬을 보면 다양한 상관관계가 나타나는데 이러한 관계를 더 자세하게 보기위하여 산점도 행렬(scatterplot matrix)로 시각화 하면 더 유용한 정보를 얻을 수 있다.

```
pairs(df, pch=19, col='blue', cex=0.1)
```



1.3 다변량 정규분포

일변량 확률변수 X가 평균이 μ 이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따른다면 다음과 같이 나타내고

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right)$$

1.3.1 확률 밀도 함수

p-차원 확률벡터 $\boldsymbol{X}$가 평균이 $\boldsymbol{\mu}$ 이고 공분산이 $\boldsymbol{\Sigma}$인 다변량 정규분포를 따른다면 다음과 같이 나타내고

$$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

확률밀도함수 $f(\boldsymbol{x})$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t}{2}\right)$$

예를 들어 2-차원 확률벡터 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^t$가 평균이 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^t$ 이고 공분산 $\boldsymbol{\Sigma}$가 다음과 같이 주어진

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

이변량 정규분포를 따른다면 확률밀도함수 $f(\boldsymbol{x})$에서 exp함수의 인자는 다음과 같이 주어진다.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t = \\ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}\right) + \left(\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right) - 2\rho\left(\frac{(x_1-\mu_1)}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{(x_2-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]$$

그리고 $p = 2$ 인 경우 확률밀도함수의 상수부분은 다음과 같이 주어진다.

$$(2\pi)^{-p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)}}$$

여기서 $\rho = \sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$

> **다변량 정규분포에서 독립과 공분산**
>
> 다변량 정규분포에서 공분산이 0인 두 확률 변수는 독립이다.
>
> $$\sigma_{ij} = 0 \leftrightarrow X_i \text{ and } X_j \text{ are independent}$$
>
> 참고로 정규분포가 아닌 다른 분포의 경우 공분산이 0인 두 확률 변수는 독립이 아닐 수 있다.

1.3.2 예제-국민체력100

이제 위에서 살펴본 국민체력100 자료에서 청소년 남자의 키(height)와 몸무게(weight) 가 이변량 정규분포를 따른다고 가정하고 확률밀도 함수를 그려보자.

```
# 필요한 패키지 로드
library(mvtnorm)
library(plotly)

# 국민체력100 자료에서 남자만 선택하여 데이터프레임 df 생성, 키와 몸무게 변수만 선택와
df <- physical100_df %>%
  filter(sex == "남성") %>%
  select(height, weight)

#  패키지 dplyr의 summarise()와 across() 함수를 사용하여 각 열의 평균 계산
sample_mean_vector <- df %>%
  summarise(across(everything(), \(x) mean(x, na.rm = TRUE))) %>%
```

```
  unlist()
sample_mean_vector
```

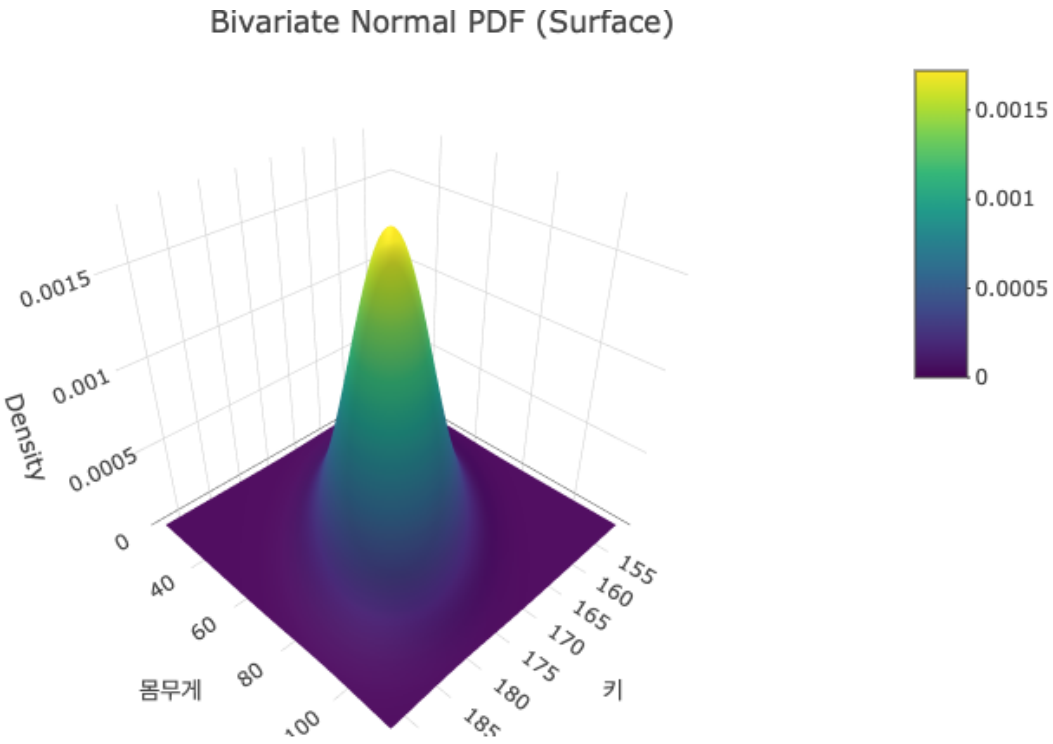
```
   height    weight
172.04515  69.71155
```

```
# 표본 공분산 행렬 계산
sample_cov_matrix <- cov(df, use = "complete.obs")
sample_cov_matrix
```

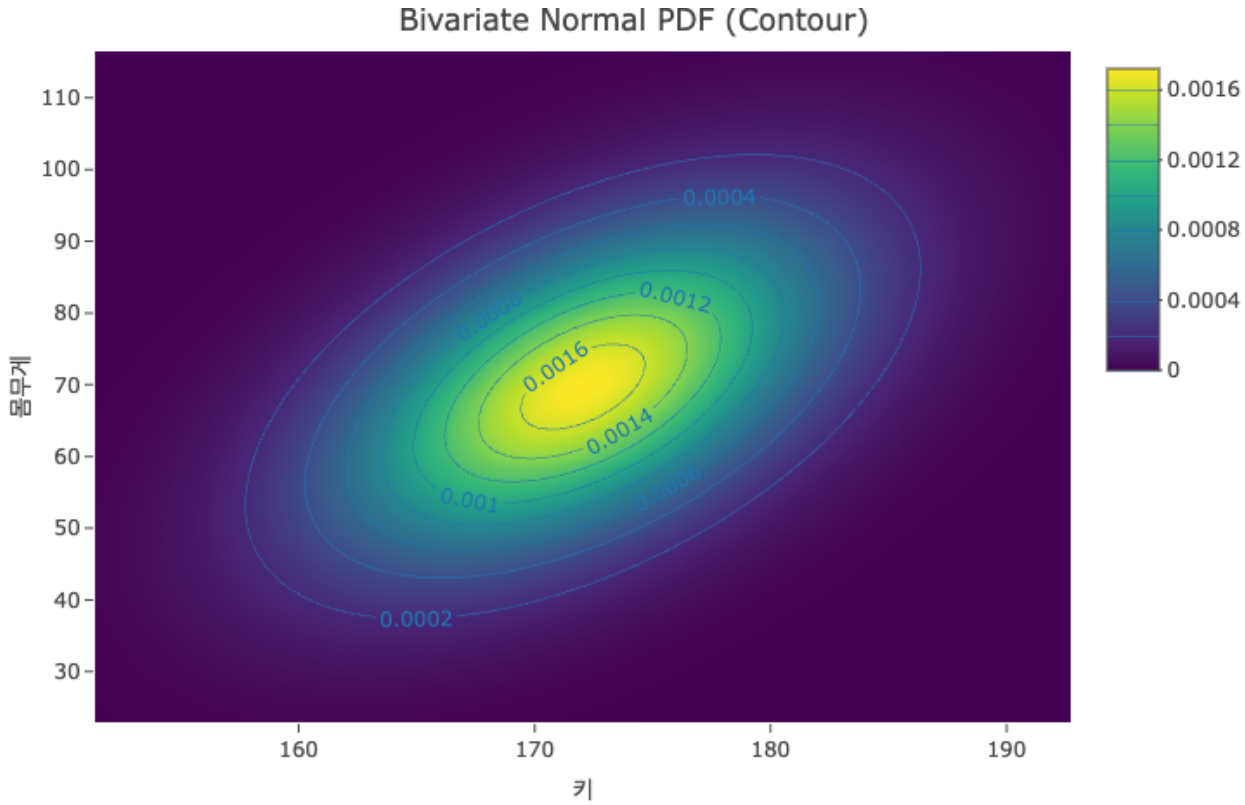
```
         height    weight
height 47.51166  54.80339
weight 54.80339 243.09372
```

```
# 이변량 정규분포의 확률밀도함수 계산
# 키와 몸무게의 평균에서 표분편차 3배의 범위의 값을 100개로 나누어 x,y 축 생성
x1_seq <- seq(sample_mean_vector[1]-3* sqrt(sample_cov_matrix[1,1]), sample_mean_vector[1]+3*
x2_seq <- seq(sample_mean_vector[2]-3* sqrt(sample_cov_matrix[2,2]), sample_mean_vector[2]+3*
grid <- expand.grid(height = x1_seq, weight = x2_seq)

# 확률밀도함수 계산 (z축의 값)
grid$z <- dmvnorm(grid, mean = sample_mean_vector, sigma = sample_cov_matrix)

# z를 행렬로 변환 (surface plot용)
z_matrix <- matrix(grid$z, nrow = length(x1_seq), ncol = length(x2_seq))
```

다음은 위에서 얻어진 확률밀도 함수를 3차원 surface plot으로 나타낸 것이다.



아래 그림은 표본으로 부터 얻어진 확률밀도 함수를 2차원 등고선(contour)으로 나타낸 그림이다.



1.3.3 조건부 분포

다변량 정규분포 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$를 따르는 확률벡터 $\boldsymbol{X}$를 다음과 같이 두 부분으로 나누면

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{11} \\ \boldsymbol{X}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_{1p} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{21} \\ \boldsymbol{X}_{22} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_{2q} \end{bmatrix}$$

각각 다변량 정규분포를 따르고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} E(\boldsymbol{X}_1) \\ E(\boldsymbol{X}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V(\boldsymbol{X}_1) & Cov(\boldsymbol{X}_1, X_2) \\ Cov(\boldsymbol{X}_2 X_1) & V(\boldsymbol{X}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^t & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_{p+q} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \Sigma_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^t & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

확률벡터 $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$가 주어진 경우 $\boldsymbol{X}_1$의 조건부 분포는 p-차원 다변량 정규분포를 따르고 평균과 공분산은 다음과 같다.

$$E(\boldsymbol{X}_1 | \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{x}_2), \quad V(\boldsymbol{X}_1 | \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^t$$

만약 $X_2 = x_2$가 주어졌을 때 X_1의 조건부 분포는 정규분포이고 평균과 분산은 다음과 같이 주어진다.

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(\mu_2 - x_2) = \mu_1 + \rho\frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}(\mu_2 - x_2)$$

$$V(X_1 | X_2 = x_2) = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}} = \sigma_{11}(1 - \rho^2)$$

References