

# Chapter 1

## 2006 年国际大学生数学竞赛

## Odessa, Ukraine

### 1.1 第一天

1. 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个实值函数. 证明或否定下列论断:

- (a) 如果  $f$  是连续的且  $\text{range}(f) = \mathbb{R}$ , 则  $f$  是单调的;
- (b) 如果  $f$  是单调的且  $\text{range}(f) = \mathbb{R}$ , 则  $f$  是连续的;
- (c) 如果  $f$  是单调的且  $f$  是连续的, 则  $\text{range}(f) = \mathbb{R}$ .

解

- (a) 错误. 取反例  $f(x) = x^3 - x$  即可.
- (b) 正确. 如果假定  $f$  是非递减的, 对任意实数  $a$ , 极限  $f(a-)$  与  $f(a+)$  都存在, 且  $f(a-) \leq f(a+)$ . 如果这两个极限相等, 则  $f$  在  $a$  处连续. 否则, 如果  $f(a-) = b < f(a+) = c$ , 则当  $x < a$  时有  $f(x) \leq b$ , 当  $x > a$  时,  $f(x) \geq c$ , 则  $\text{range}(f) \subset (-\infty, b) \cup (c, +\infty) \cup \{f(a)\}$  不可能是整个实数集.
- (c) 错误, 取反例  $f(x) = \arctan x$  即可.

□

2. 求出所有满足以下两个条件的正整数  $x$  的个数:

- $x < 10^{2006}$ ;
- $x^2 - x$  被  $10^{2006}$  整除.

解 方法一 记  $S_k = \{0 < x < 10^k \mid x^2 - x \text{ 被 } 10 \text{ 整除}\}$ ,  $s(k) = |S_k|$ ,  $k \geq 1$ . 设  $\overline{x} = \overline{a_{k+1}a_k \cdots a_1}$  表示整数  $x \in S_{k+1}$ ,  $k \geq 1$  的十进制写法, 则显然  $y = \overline{a_k \cdots a_1} \in S_k$ . 现在取定  $y = \overline{a_k \cdots a_1} \in S_k$ , 把  $a_{k+1}$  看成变化的数字, 我们有  $x^2 - x = (a_{k+1}10^k + y)^2 - (a_{k+1}10^k + y) = (y^2 - y) + a_{k+1}10^k(2y - 1) + a_{k+1}^2 10^{2k}$ . 由于  $y^2 - y = 10^k z$  对某个整数  $z$  成立, 于是  $x^2 - x$  被  $10^{k+1}$  整除当且仅当  $z + a_{k+1}(2y - 1) \equiv 0 \pmod{10}$ .

由于  $y \equiv 3 \pmod{10}$  是显然不可能的, 因此不定方程只有一个解. 于是对每个  $k \geq 1$ , 我们得到了一个集合  $S_{k+1}$  与  $S_k$  之间的一一对应. 所以  $s(2006) = s(1) = 3$ , 因为  $S_1 = \{1, 5, 6\}$ .

方法二 由于  $x^2 - x = x(x-1)$ ,  $x$  与  $x-1$  互素, 因此其中必然有一个被  $2^{2006}$  整除, 一个 (可能是同一个) 要被  $5^{2006}$  整除. 因此  $x$  一定满足以下两个条件:

- $x \equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod{2^{2006}}$ ;
- $x \equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod{5^{2006}}$ .

总共有四种情形. 由中国剩余定理, 每种情形在数  $0, 1, \dots, 10^{2006} - 1$  中都有唯一解. 这四种情形的解都是不同的, 因为任意两个解模  $2^{2006}$  或  $5^{2006}$  的余数都不同. 而且, 0 是不满足的, 因此存在 3 个解.

□

3. 设  $A$  是一个  $n \times n$  整数矩阵, 整数  $b_1, \dots, b_k$  满足  $\det(A) = b_1 \cdots b_k$ . 证明: 存在  $n \times n$  整数矩阵  $B_1, \dots, B_k$  使得  $A = B_1 \cdots B_k$ , 且对所有的  $i = 1, \dots, k$  有  $\det(B_i) = b_i$ .

**证明** 由归纳法, 只需要考虑  $m = 2$  的情形即可. 进一步, 我们可以对  $A$  左乘或右乘行列式为 1 的整数矩阵, 也不改变问题. 因此我们可以假定  $A$  是上三角矩阵.

**引理 1.1.** 设  $A$  是一个上三角整数矩阵,  $b, c$  是整数满足  $A = bc$ , 则存在上三角整数矩阵  $B, C$  使得  $\det B = b, \det C = c, A = BC$ .

**引理 13.1 的证明** 我们对  $n$  归纳.  $n = 1$  是显然的, 假定结论对  $n - 1$  的情形成立. 定义  $B_{nn}$  是  $b$  和  $A_{nn}$  的最大公因数, 记  $\frac{A_{nn}}{B_{nn}}$ . 由于  $A_{nn}$  整除  $bc$ ,  $C_{nn}$  整除  $\frac{b}{B_{nn}}c$ , 进一步  $C_{nn}$  整除  $c$ . 因此,  $b' = \frac{b}{B_{nn}}$  和  $c' = \frac{c}{C_{nn}}$  都是整数. 设  $A'$  表示  $A$  的左上方  $(n-1) \times (n-1)$  子矩阵, 则  $\det A' = b'c'$ . 由归纳法, 对  $A'$  我们可以找到矩阵  $B', C'$  使得  $A' = B'C'$  且  $\det B' = b', \det C' = c'$ . 只需要定义  $B_{in}, C_{in}$  使得  $A = BC$  对所有的  $(i, n)$  元 ( $i < n$ ) 都成立.

首先我们验证对所有  $i < n$ ,  $B_{ii}$  和  $C_{nn}$  是互素的. 由于  $B_{ii}$  整除  $b'$ , 只需要证明  $b'$  和  $C_{nn}$  是互素的, 即

$$\gcd\left(\frac{b}{\gcd(b, A_{nn})}, \frac{A_{nn}}{\gcd(b, A_{nn})}\right) = 1,$$

而这是显然的.

现在我们递归定义  $B_{jn}$  和  $C_{jn}$ : 假定我们已经定义了  $B_{in}, C_{in}$  对所有的  $i = j + 1, j + 2, \dots, n - 1$  成立, 则  $B_{jn}, C_{jn}$  必须满足

$$A_{jn} = B_{jj}C_{jn} + B_{j,j+1}C_{j+1,n} + \cdots + B_{jn}C_{nn}.$$

由于  $B_{jj}$  和  $C_{nn}$  互素, 我们可以取整数  $C_{jn}, B_{jn}$  使得上述方程成立. 对  $j = n - 1, n - 2, \dots, 1$ , 我们最后得到  $B, C$  使得  $A = BC$ . □

4. 设  $f$  是一个有理函数 (即两个实多项式的商), 且对无穷多个整数  $n$ ,  $f(n)$  都是整数, 证明:  $f$  是一个多项式.

**证明** 设  $S$  是一个有无穷个整数的集合, 且对任意  $x \in S$ , 有理函数  $f(x)$  都是整数.

假定  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , 其中  $p, q$  分别是次数为  $k, n$  的多项式. 则  $p, q$  是齐次方程组  $p(x) = q(x)f(x), \forall x \in S, q(x) \neq 0$ . 这是齐次线性方程组, 系数函数  $p, q$  都是有理系数. 由于它们有一个解, 它们一定有一个有理解.

因此存在有理系数多项式  $p', q'$  使得  $p'(x) = q'(x)f(x), \forall x \in S, q(x) \neq 0$ . 如果  $x$  不是  $p$  或  $q$  的根, 则  $f(x) \neq 0$ , 因此  $p'(x)q(x) = p(x)q'(x)$  对  $S$  中有限个  $p, q$  的零点之外的点都成立. 因此  $p'q$  和  $pq'$  在无穷多个点都相等, 意味着  $p'(x)q(x) \equiv p(x)q'(x)$ . 两边除以  $q(x)q'(x)$ , 我们可得  $\frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x)$ . 因此  $f(x)$  可以表示成两个有理系数多项式的商. 乘以某个整数后, 它就可以表示成两个整系数多项式的商.

假定  $f(x) = \frac{p''(x)}{q''(x)}$ , 其中  $p'', q''$  都是整系数的. 存在多项式  $s, r$ , 都是有理系数, 使得  $p''(x) = q''(x)s(x) + r(x)$ , 且  $r$  的次数小于  $q''$  的次数. 两边除以  $q''(x)$ , 我们得到  $f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q''(x)}$ . 存在整数  $N$ , 使得  $Ns(x)$  是整系数, 则对任意  $x \in S$ ,  $Nf(x) - Ns(x)$  都是整数. 但是他等于有理函数  $\frac{Nr}{q''}$ , 其分母比分子的次数更高, 因此当  $x \rightarrow \infty$  时, 此式趋于 0. 也就是说对所有充分大的  $x \in S, Nf(x) - Ns(x) = 0$ , 因此  $r(x) = 0$ . 所有  $r(x)$  有无穷个零点, 也就是它恒为零. 所有  $f(x) = s(x)$ ,  $f$  是一个多项式.  $\square$

5. 设实数  $a, b, c, d, e > 0$  使得  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$  且  $a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4$ . 比较  $a^3 + b^3 + c^3$  和  $d^3 + e^3$ .

**证明** 不妨假设  $x \geq b \geq c, d \geq e$ . 设  $c^2 = e^2 + \Delta, \Delta \in \mathbb{R}$ . 则  $d^2 = a^2 + b^2 + \Delta$ , 且第二个方程意味着

$$a^4 + b^4 + (e^2 + \Delta)^2 = (a^2 + b^2 + \Delta)^2 + e^4, \quad \Delta = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - e^2}.$$

由于  $d^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - e^2} < a^2$  且  $a > d \geq e > b \geq c$ .

考虑函数  $f(x) = a^x + b^x + c^x - d^x - e^x, x \in \mathbb{R}$ . 我们将证明  $f(x)$  只有两个零点  $x = 2$  和  $x = 4$ , 且在每个零点处都改变符号. 假定此断言不成立, 则 Rolle 定理意味着  $f'(x)$  至少有两个不同的零点. 不失一般性, 设  $a = 1$ . 则  $f'(x) = b^x \log b + c^x \log c - d^x \log d - e^x \log e, x \in \mathbb{R}$ . 如果  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0, x_1 < x_2$ , 则

$$b^{x_i} \log b + c^{x_i} \log c = d^{x_i} \log d + e^{x_i} \log e, \quad i = 1, 2.$$

但是由于  $1 > d \geq e > b \geq c$ , 我们有

$$\frac{(-\log b)b^{x_2} + (-\log c)c^{x_2}}{(-\log b)b^{x_1} + (-\log c)c^{x_1}} \leq b^{x_2-x_1} < e^{x_2-x_1} \leq \frac{(-\log d)d^{x_2} + (-\log e)e^{x_2}}{(-\log d)d^{x_1} + (-\log e)e^{x_1}}$$

矛盾. 因此  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 2), (2, 4), (4, +\infty)$  上符号不变. 由于  $f(0) = 1$ , 则

$$\begin{cases} f(x) > 0, & x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \\ f(x) < 0, & x \in (2, 4) \end{cases}.$$

特别地,  $f(3) = a^3 + b^3 + c^3 - d^3 - e^3 < 0$ .  $\square$

6. 求出所有实数序列  $a_0, a_1, \dots, a_n, n \geq 1, a_n \neq 0$ , 使得下面论述成立:

如果  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个  $n$  阶可微函数, 实数  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  满足  $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$ , 则存在  $h \in (x_0, x_n)$  使得

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \dots + a_n f^{(n)}(h) = 0.$$

**解** 设  $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ . 我们将证明  $a_0, \dots, a_n$  要满足论述中的等式, 充要条件就是多项式  $A(x)$  的根都是实的.

(a) 假定  $A(x)$  的根都是实的. 我们用  $I$  表示恒等算子,  $D$  表示微分算子. 对任意多项式  $P(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n$ ,  $P(D) = p_0 I + p_1 D + p_2 D^2 + \dots + p_n D^n$ . 则论述中的等式等价于  $(A(D)f)(\xi) = 0$ .

首先对  $n = 1$  证明. 考虑函数  $g(x) = e^{\frac{a_0}{a_1}x} f(x)$ , 由于  $g(x_0) = g(x_1) = 0$ , 根据 Rolle 定理可知存在  $\xi \in (x_0, x_1)$  使得

$$g'(\xi) = \frac{a_0}{a_1} e^{\frac{a_0}{a_1}\xi} f(\xi) + e^{\frac{a_0}{a_1}\xi} f'(\xi) = e^{\frac{a_0}{a_1}\xi} (a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi)) = 0.$$

现在假定  $n > 1$ , 结论对  $n-1$  已经成立. 令  $A(x) = (x-c)B(x)$ , 其中  $c$  是多项式  $A$  的一个实根. 根据  $n = 1$  的情形, 存在  $y_0 \in (x_0, x_1), y_1 \in (x_1, x_2), \dots, y_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$  使得  $f'(y_j) - cf(y_j) = 0$  对所有  $j = 0, 1, \dots, n-1$  都成立. 对多项式  $B(x)$ , 函数  $g = f' - cf$  和点  $y_0, \dots, y_{n-1}$  应用归纳假设, 存在  $\xi \in (y_0, y_{n-1}) \subset (x_0, x_n)$  使得

$$(B(D)g)(\xi) = (B(D))(D - cI)f(\xi) = (A(D)f)(\xi) = 0.$$

(b) 假定  $u + vi$  是多项式  $A(x)$  的一个复根,  $v \neq 0$ . 考虑线性微分方程  $a_n g^{(n)} + \dots + a_1 g' + g = 0$ , 此方程的一个解是  $g_1(x) = e^{ux} \sin vx$ , 它由无穷个零点.

设  $k$  是使得  $a_k \neq 0$  的最小指标, 取  $\varepsilon > 0$ , 令  $f(x) = g_1(x) + \varepsilon x^k$ . 如果  $\varepsilon$  足够小, 则  $f$  有所要求的根数目, 但是  $a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)} = a_k \varepsilon \neq 0$  处处成立.

□

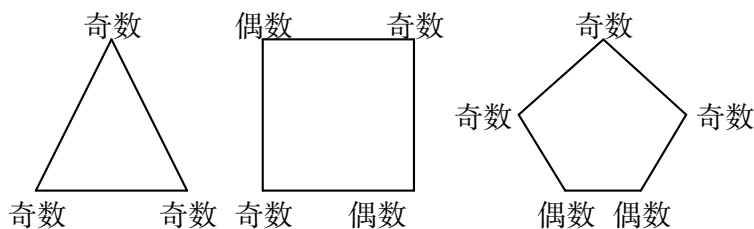
## 1.2 第二天

1. 设  $V$  是一个凸  $n$  边形.

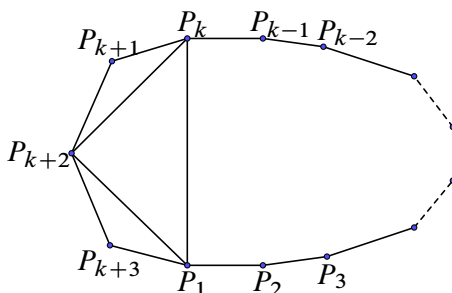
(a) 证明: 如果  $n$  被 3 整除, 则  $V$  可以被剖分成三角形, 使得  $V$  的每个顶点都恰好属于奇数个三角形.

(b) 证明: 如果  $n$  不被 3 整除, 则可以被剖分成三角形, 使得恰好有两个顶点属于偶数个三角形.

**证明** 对  $n$  用归纳法,  $n = 3, 4, 5$  的情形如下:



现在假定上述论断对  $n = k$  成立, 我们考虑  $n = k + 3$  的情形. 设  $V$  的顶点分别为  $P_1, \dots, P_{k+3}$ .



对多边形  $P_1 P_2 \dots P_k$  应用归纳假设, 如果  $n$  不被 3 整除, 它的三角剖分中除去两个顶点外其它顶点恰好属于奇数个三角形. 现在再加上  $\triangle P_1 P_k P_{k+2}$ ,  $\triangle P_k P_{k+1} P_{k+2}$  和  $\triangle P_1 P_{k+2} P_{k+3}$ . 用这样的方式, 我们在点  $P_1$  和  $P_k$  处增加了两个三角形, 因此奇偶性不变. 这就完成了证明.  $\square$

2. 求出所有的函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得对任意实数  $a < b$ , 像  $f([a, b])$  都是一个长度为  $b - a$  的闭区间.

**解** 对任意常数  $c$ , 函数  $f(x) = x + c$ ,  $f(x) = -x + c$  显然满足条件, 我们下面证明只有这两组解.

设  $f$  是一个这样的函数. 则  $f$  显然满足对任意  $x, y$  有  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ , 因此  $f$  是连续的. 给定  $x < y$ , 设  $a, b \in [x, y]$  使得  $f(a), f(b)$  分别是  $f$  在  $[x, y]$  上的最大和最小值. 则  $f([x, y]) = [f(b), f(a)]$ , 于是

$$y - x = f(a) - f(b) \leq |a - b| \leq y - x.$$

这意味着  $\{a, b\} = \{x, y\}$ , 因此  $f$  是单调函数. 假定  $f$  是单调递增的, 则  $f(x) - f(y) = x - y$  意味着  $f(x) - x = f(y) - y$ , 因此  $f(x) = x + c$ ,  $c$  是某个常数. 类似的, 当  $f$  递减时,  $f(x) = -x + c$ .  $\square$

3. 对任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 比较  $\tan(\sin x)$  与  $\sin(\tan x)$  的大小.

**解** 令  $f(x) = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$ , 则

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - \frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - \cos(\tan x) \cdot \cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cdot \cos^2(\tan x)}.$$

设  $0 < x < \arctan \frac{\pi}{2}$ , 余弦函数在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上是凹的, 因此

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x) \cos^2(\sin x)} < \frac{1}{3} (\cos(\tan x) + 2 \cos(\sin x)) \leq \cos\left(\frac{\tan x + 2 \sin x}{3}\right) < \cos x,$$

其中最后一步是因为

$$\left(\frac{\tan x + 2 \sin x}{3} - x\right)' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cos x\right) - 1 \geq 0.$$

这说明  $\cos^3 x - \cos(\tan x) \cdot \cos^2(\sin x) > 0$ , 所以  $f'(x) > 0$ ,  $f$  在区间  $(0, \arctan \frac{\pi}{2}]$  单调增. 注意到  $4 + \pi^2 < 16$ , 于是

$$\tan\left(\sin\left(\arctan \frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan \frac{\pi/2}{\sqrt{1 + \pi^2/4}} > \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

这就意味着当  $x \in [\arctan \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  时,  $\tan(\sin x) > 1$ , 于是  $f(x) > 0$  对  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  都成立.  $\square$

4. 设  $v_0$  是  $\mathbb{R}^n$  中的零向量,  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$  使得对任意  $0 \leq i, j \leq n+1$ , Euclid 范数  $|v_i - v_j|$  都是有理数. 证明:  $v_1, \dots, v_{n+1}$  在有理数域上是线性相关的.

**证明** 我们可以假定  $v_1, \dots, v_n$  在实数域上线性无关, 于是存在  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  满足

$$v_{n+1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j.$$

我来证明所有的  $\lambda_j$  都是有理数. 由

$$-2\langle v_i, v_j \rangle = |v_i - v_j|^2 - |v_i|^2 - |v_j|^2$$

可知对任意  $i, j$ ,  $\langle v_i, v_j \rangle$  都是有理数. 定义矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ . 设  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Q}^n$ , 其中  $w_i = \langle v_i, v_{n+1} \rangle$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . 则

$$\langle v_i, v_{n+1} \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle.$$

说明  $A\lambda = w$ . 由于  $v_1, \dots, v_n$  是线性无关的,  $A$  是可逆的,  $A^{-1}$  中的所有项都是有理数, 因此  $\lambda = A^{-1}w \in \mathbb{Q}^n$ , 得证.  $\square$

5. 证明: 存在无穷对互素的正整数对  $(m, n)$  使得方程

$$(x+m)^3 = nx$$

有三个不同的正数根.

**证明** 令  $y = x + m$ , 方程变为

$$y^3 - ny + mn = 0.$$

设上述方程的两个根是  $u, w$ , 则第三个根为  $w = -(u + v)$ . 这些根满足

$$uv + uw + vw = -(u^2 + uv + v^2) = -n, \quad \text{即 } u^2 + uv + v^2 = n,$$

且  $uvw = -uv(u+v) = mn$ . 因此我们需要找到整数对  $(u, v)$  使得  $uv(u+v)$  被  $u^2 + uv + v^2$  整除. 注意到如果令  $u = kp, v = kq$ , 则

$$u^2 + uv + v^2 = k^2(p^2 + pq + q^2)$$

且

$$uv(u+v) = k^3 pq(p+q).$$

取  $p, q$  互素, 令  $k = p^2 + pq + q^2$ , 则  $\frac{uv(u+v)}{u^2+uv+v^2} = p^2 + pq + q^2$ .

代回最原始的等式, 我们得到

$$n = (p^2 + pq + q^2)^3, \quad m = p^2q + pq^2,$$

以及三个根为  $x_1 = p^3, x_2 = q^3, x_3 = -(p+q)^3$ . □

6. 设  $A_i, B_i, S_i (i = 1, 2, 3)$  都是可逆的  $2 \times 2$  实矩阵满足

(i) 不是所有的  $A_i$  都有公共实特征向量;

(ii)  $A_i = S_i^{-1} B_i S_i, \forall i = 1, 2, 3$ ;

(iii)  $A_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

证明: 存在一个可逆  $2 \times 2$  实矩阵  $S$  使得  $A_i = S^{-1} B_i S, \forall i = 1, 2, 3$ .

**证明** 注意到如果有某个  $A_j = \lambda I$ , 则结论是平凡的, 所以假定这种情形不存在. 首先考虑某个  $A_j$  有两个不同的特征值, 不妨设为  $A_3$ . 通过相似变换, 我们可以进一步假定  $A_3 = B_3 = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$ . 设  $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , 则

$$a + d = \text{tr} A_2 = \text{tr} B_2 = a' + d'$$

$$a\lambda + d\mu = \text{tr}(A_2 A_3) = \text{tr} A_1^{-1} = \text{tr} B_1^{-1} = \text{tr}(B_2 B_3) = a'\lambda + d'\mu.$$

因此  $a = a', d = d'$ , 还有  $bc = b'c'$ . 现在我们不能有  $c = 0$  或  $b = 0$ , 因为此时  $(1, 0)^T$  或者  $(0, 1)^T$  将会是所以  $A_j$  的公共特征向量. 矩阵  $\begin{pmatrix} c' & \\ & c \end{pmatrix}$  满足  $A_2 = S^{-1} B_2 S$ , 且  $S$  与  $A_3 = B_3$  可交换, 于是  $A_j = S^{-1} B_j S, \forall j$ .

如果  $A_3 = B_3$  的不同特征值不是实数, 那么由上可知,  $A_j = S^{-1} B_j S$  对某个  $S \in \text{GL}_2 \mathbb{C}$ , 除非所有的  $A_j$  在  $\mathbb{C}$  上有公共特征向量. 在这种情形下, 设  $A_j v = \lambda_j v$ , 那么所以的  $A_j$  可以同时对角化. 如果  $A_2 = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , 那么同样有  $a = a'd = d', b'c' = 0$ . 现在  $B_2, B_3$  在  $\mathbb{C}$  上有公共特征向量, 因此  $B_1$  也一样, 它们可以同时对角化. 那么不论在何种情形下, 均有  $SA_j = B_j S$  对某个  $S \in \text{GL}_2 \mathbb{C}$  成立. 设  $S_0 = \text{Re} S, S_1 = \text{Im} S$ . 将实部与虚部分开, 如果  $S_0$  或者  $S_1$  可逆, 结论已经成立. 否则,  $S_0$  可以相似于某个  $T^{-1} S_0 T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ , 且  $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ , 且所有的  $A_j$  有公共特征向量  $T(0, 1)^T$ , 矛盾.

剩下的情形就是所有的  $A_j$  都没有相异特征值, 那么这些特征值自然是实的. 借助相似变换, 我们不妨假设  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b \neq 0$ . 通过上三角矩阵的进一步相似, 我们可以假定  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & v \end{pmatrix}$ , 这里  $v^2 = (\operatorname{tr} A_2)^2 = 4 \det A_2 = -4u$ . 现在  $A_1 = A_3^{-1} A_2^{-1} \begin{pmatrix} -(b+v)/u & 1 \\ & 1/u \end{pmatrix}$ , 因此  $\frac{(b+v)^2}{u^2} = (\operatorname{tr} A_1)^2 = 4 \det A_1 = -\frac{4}{u}$ , 比较可知  $b = -2v$ . 我们已经把所有的矩阵  $A_j$  都约化到所有元素只依赖于  $u, v$  的矩阵, 但是  $\det A_2$  和  $(\operatorname{tr} A_2)^2$  本身都具有相似不变性, 所以  $B_j$  也可以同时约化到同样的矩阵.  $\square$