



ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Báo cáo Đồ án 1
Thuật toán tìm kiếm bầy đàn

Sinh viên thực hiện

Lê Hải Đăng (23122006)
Nguyễn Nhật Minh (23122010)
Nguyễn Văn Khoa (23122016)
Bùi Anh Quân (23122017)

Giáo viên hướng dẫn

Thầy Lê Hoài Bắc
Thầy Lê Nhựt Nam

Ngày 14 tháng 11 năm 2025

Mục lục

1 Giới thiệu	4
2 Ant Colony Optimization	4
2.1 Giới thiệu thuật toán	4
2.1.1 Ý tưởng thuật toán	4
2.1.2 Lịch sử thuật toán	4
2.1.3 Những ứng dụng	5
2.2 Cơ sở toán học	5
2.2.1 Quy tắc Lựa chọn Đường đi (Xây dựng Giải pháp)	5
2.2.2 Quy tắc Cập nhật Pheromone (Học tập)	6
2.3 Triển khai thuật toán	6
2.3.1 Cách hoạt động của thuật toán	6
2.3.2 Triển khai kỹ thuật	7
3 Particle swarm optimization	7
3.1 Giới thiệu thuật toán	7
3.1.1 Ý tưởng thuật toán	7
3.1.2 Lịch sử thuật toán	8
3.1.3 Những ứng dụng	8
3.2 Cơ sở toán học của thuật toán	8
3.2.1 Phương trình Cập nhật Vận tốc (Velocity Update)	8
3.2.2 Phương trình Cập nhật Vị trí (Position Update)	9
3.3 Triển khai thuật toán	9
3.3.1 Cách hoạt động của thuật toán	9
3.3.2 Triển khai kỹ thuật	10
4 Artificial Bee Colony	10
4.1 Giới thiệu thuật toán	10
4.2 Ý tưởng thuật toán và nguyên lý hoạt động	11
4.3 Giải thích cơ chế hoạt động bằng công cụ toán học	11
4.3.1 Ký hiệu và các tham số chính	11
4.3.2 Nguyên lý	11
4.3.3 Mã giả (Pseudo-code) thuật toán ABC	12
5 Firefly Algorithm	13
5.1 Giới thiệu	13
5.1.1 Ý tưởng cốt lõi [Yan10]	13
5.1.2 Lịch sử ngắn gọn	13
5.1.3 Ứng dụng tiêu biểu	13
5.2 Cơ sở toán học của thuật toán	14
5.2.1 Mô hình gốc [TN19]	14
5.2.2 Mô hình rời rạc cho Knapsack 0/1 [TN17]	14
5.3 Chi tiết triển khai thuật toán (Mã giả)	15
6 Cuckoo Search	16
6.1 Giới thiệu thuật toán	16
6.2 Ý tưởng thuật toán	16
6.3 Cơ sở toán học của thuật toán	17
6.4 Triển khai thuật toán	17

6.4.1	Cách hoạt động của thuật toán	17
6.4.2	Mã giả	18
7	Các thuật toán truyền thống để so sánh	18
7.1	Genetic Algorithm	18
7.1.1	Giới thiệu chung	18
7.1.2	Cơ sở toán học	18
7.1.3	Cách hoạt động của thuật toán	20
7.2	Hill Climbing (Steepest Ascent)	20
7.2.1	Giới thiệu chung	20
7.2.2	Cơ sở toán học	21
7.2.3	Cách hoạt động của thuật toán	21
7.3	Simulated Annealing	22
7.3.1	Giới thiệu chung	22
7.3.2	Cơ sở toán học	22
7.3.3	Cách hoạt động của thuật toán	23
7.4	Breadth-First Search (BFS)	23
7.4.1	Giới thiệu chung	23
7.4.2	Cơ sở toán học	23
7.4.3	Cách hoạt động của thuật toán	24
7.5	Depth-First Search (DFS)	24
7.5.1	Giới thiệu chung	24
7.5.2	Cơ sở toán học	24
7.5.3	Cách hoạt động của thuật toán	25
7.6	A* Search	25
7.6.1	Giới thiệu chung	25
7.6.2	Cơ sở toán học	25
7.6.3	Cách hoạt động của thuật toán	26
8	Các bài toán sử dụng để đánh giá	26
8.1	Các bài toán rời rạc	26
8.1.1	The travelling salesman problem	26
8.1.2	Knapsack Problem (KP)	28
8.1.3	Graph Coloring (GC)	28
8.2	Các bài toán liên tục	29
8.2.1	Sphere function	29
8.2.2	Rosenbrock function	29
8.2.3	Rastrigin function [Ras74]	29
8.2.4	Ackley function	30
9	Thiết lập và phân tích kết quả các bài toán đánh giá	30
9.1	ACO và PSO	30
9.1.1	Phân tích Bản đồ "Tiny"(10 đỉnh)	31
9.1.2	Phân tích Bản đồ "Small"(30 đỉnh)	33
9.1.3	Phân tích Bản đồ "Medium"(50 đỉnh)	35
9.1.4	Thảo luận	36
9.2	ABC	37
9.3	Firefly Algorithm	38
9.3.1	Thuật toán dùng để so sánh	38
9.3.2	Bài toán đánh giá	40
9.3.3	Chỉ số đánh giá	41
9.3.4	Rastrigin: mức độ tiệm cận nghiệm tối ưu và đặc trưng hội tụ	42

9.3.5	Rastrigin: đa dạng quần thể và hiện tượng dừng sớm (stagnation)	49
9.3.6	Knapsack: hiệu năng fixed-budget (gap tối nghiệm tối ưu)	53
9.3.7	Knapsack: performance/data profiles và so sánh thống kê	55
9.3.8	Thảo luận	61
9.4	Cuckoo Search	63
10	Kết luận chung	65
	Phân công công việc	65
	Phụ lục	65

1 Giới thiệu

Swarm intelligence là một nhánh của trí tuệ nhân tạo nghiên cứu hành vi tập thể của các hệ phân tán, tự tổ chức, được lấy cảm hứng từ những hiện tượng tự nhiên như đàn kiến, đàn ong hay bầy chim. Các thuật toán bầy đàn điển hình như Ant Colony Optimization, Particle Swarm Optimization, Artificial Bee Colony, Firefly Algorithm và Cuckoo Search đã được chứng minh là hiệu quả trên nhiều bài toán tối ưu hoá liên tục và rời rạc khó, nơi các phương pháp tìm kiếm truyền thống dễ bị kẹt tại nghiệm cục bộ và khó mở rộng khi kích thước bài toán tăng lên.

Trong khuôn khổ đồ án nhóm số 1 - “Thuật toán tìm kiếm” của học phần *Cơ sở trí tuệ nhân tạo*, nhóm xây dựng và hiện thực một khung đánh giá thống nhất cho các thuật toán bầy đàn nêu trên, tuân thủ yêu cầu chỉ sử dụng NumPy, đồng thời so sánh chúng với ít nhất ba thuật toán tìm kiếm cổ điển. Báo cáo tập trung phân tích hiệu năng trên cả bài toán tối ưu hoá liên tục và rời rạc (chẳng hạn hàm Rastrigin và bài toán Knapsack 0/1), dựa trên các tiêu chí tốc độ hội tụ, độ phức tạp tính toán, độ vững qua nhiều lần chạy và khả năng mở rộng, kèm theo các hình ảnh minh họa quá trình hội tụ và cảnh quan hàm mục tiêu theo yêu cầu đồ án.

2 Ant Colony Optimization

2.1 Giới thiệu thuật toán

[DMC96, DBS06] Ant colony optimization (tối ưu hóa đàn kiến) là một thuật toán heuristic dựa trên ý tưởng về cách kiếm ăn của loài kiến, một loài sinh vật có ý thức bầy đàn rất cao và có khả năng phối hợp theo bầy rất hiệu quả cho các công việc như kiếm ăn, xây tổ,...

2.1.1 Ý tưởng thuật toán

Các nhà sinh vật học đã chỉ ra rằng một số loài kiến có khả năng tìm ra đường đi ngắn nhất giữa tổ và nguồn thức ăn.[DG89] Chúng làm điều này dựa trên một cơ chế là stigmergy (liên lạc qua môi trường):

- **Pheromone:** một tín hiệu hóa học do con đi trước thải ra, giúp con đi sau chọn đường có nồng độ cao hơn (con đường tốt hơn).
- Những con đi trên đường càng ngắn thì quay về tổ nhanh hơn. Con nào hoàn thành con đường nhanh hơn thì pheromone lưu lại càng nhiều trên con đường đó.
- **Autocatalytic (tự xúc tác):** nồng độ pheromone càng cao thì càng thu hút nhiều con kiến di chuyển trên đường đó, làm con đường càng tích lũy nhiều pheromone. Tới một lúc nào đó, toàn bộ đàn kiến sẽ hội tụ vào con đường ngắn nhất.

2.1.2 Lịch sử thuật toán

Nguồn gốc của ACO bắt nguồn từ các nghiên cứu về hành vi của côn trùng xã hội, đặc biệt là công trình của các nhà sinh vật học như Jean-Louis Deneubourg, người đã cung cấp cảm hứng cho công việc này.[DG89]

- **Những năm 1990:** Những nỗ lực đầu tiên nhằm chuyển hóa hành vi của kiến thành thuật toán máy tính xuất hiện vào đầu những năm 1990, khởi đầu trong luận án tiến sĩ của Marco Dorigo về tối ưu hóa và học dựa trên đàn kiến.[Dor92]
- **Ant System (AS):** Thuật toán ACO đầu tiên có tên là Ant System (AS). Nó được định nghĩa bởi Marco Dorigo trong luận án tiến sĩ của ông tại Politecnico di Milano (Ý), với sự hợp tác của Alberto Colomi và Vittorio Maniezzo.[DMC96]

- **1991-1996:** Bài báo chuyên san đầu tiên về Ant System được nộp vào năm 1991, nhưng phải đến năm 1996 mới được xuất bản. Nghiên cứu về ACO bắt đầu phổ biến và thu hút sự quan tâm nhanh chóng sau khi bài báo này ra đời.[DMC96]
- **Phát triển các biến thể:** Sau AS, một số biến thể thuật toán đã được phát triển để cải thiện hiệu suất, chẳng hạn như Ant-Q, Ant Colony System (ACS) và MAX-MIN AS.[DG97]
- **Hình thành “Siêu heuristic ACO”:** Thuật ngữ “ACO metaheuristic” (siêu heuristic ACO) đã được đề xuất (bởi Dorigo và Di Caro vào năm 1999) như một khung sườn chung (common framework) để bao quát các thuật toán và ứng dụng dựa trên cùng ý tưởng này.[DDC99, DS04]

2.1.3 Những ứng dụng

Thuật toán ACO là một thuật toán phổ biến và được ứng dụng rộng rãi nhờ tính linh hoạt và khả năng hội tụ tốt. Nó được ứng dụng nhiều trong các bài toán NP-hard (không thể tìm được đáp án chính xác trong thời gian đa thức):

- Bài toán định tuyến: người giao hàng (TSP), sắp xếp thứ tự có ưu tiên (SOP),...
- Bài toán gán/ phân công: tô màu bản đồ (GCP), lập thời khóa biểu (UCTP),...
- Bài toán lập lịch
- Bài toán tập con: định tuyến mạng (thuật toán AntNet), bao phủ tập hợp (SCP),...

2.2 Cơ sở toán học

Cơ sở toán học của bài toán này có nhiều biến thể trên nhiều bài toán tối ưu hóa khác nhau, tuy nhiên chúng có điểm chung là cần được chuyển thành bài toán tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số. Cấu trúc chuẩn của ACO cho các bài toán tổ hợp như TSP đã được hệ thống hóa trong các công trình tổng quan và sách chuyên khảo.[DS04, DBS06]

Cơ sở toán học của thuật toán Tối ưu hóa Dàn kiến (ACO) chủ yếu xoay quanh hai cơ chế: (1) quy tắc xác suất để kiến nhân tạo "xây dựng" giải pháp và (2) quy tắc cập nhật pheromone để "học hỏi" từ kinh nghiệm.[DMC96]

2.2.1 Quy tắc Lựa chọn Đường đi (Xây dựng Giải pháp)

Đây là công thức cốt lõi quyết định cách một con kiến nhân tạo k chọn đỉnh tiếp theo khi nó đang ở đỉnh i . Xác suất p_{ij}^k để kiến k di chuyển từ đỉnh i đến đỉnh j là:

$$p_{ij}^k = \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in \mathcal{N}_i^k} [\tau_{il}]^\alpha [\eta_{il}]^\beta} \quad \text{nếu } j \in \mathcal{N}_i^k$$

Trong đó:

- τ_{ij} (**Pheromone**): Lượng pheromone nhân tạo trên cạnh nối (i, j) . Đây là thông tin "được" (bộ nhớ dài hạn) về mức độ mong muốn của cạnh này.
- η_{ij} (**Thông tin Heuristic**): Thông tin heuristic có sẵn (a priori) về cạnh (i, j) . Trong các bài toán tối ưu hóa, nó thường được định nghĩa là $1/c_{ij}$ (nghịch đảo của chi phí), nghĩa là cạnh có chi phí thấp sẽ hấp dẫn hơn.
- α và β (**Tham số**): Hai tham số này kiểm soát tầm quan trọng tương đối của pheromone (kinh nghiệm đã học) so với thông tin heuristic (kiến thức có sẵn).

- \mathcal{N}_i^k (**Tập lân cận khả thi**): Tập hợp các đỉnh mà kiến k chưa đi qua (để đảm bảo tính hợp lệ của đường đi).

2.2.2 Quy tắc Cập nhật Pheromone (Học tập)

Sau khi tất cả m con kiến đã hoàn thành việc xây dựng các đường đi, hệ thống sẽ cập nhật lượng pheromone. Quá trình này có hai phần: bay hơi và lắng đọng.[DMC96]

Bay hơi Pheromone (Evaporation)

Đầu tiên, một phần pheromone trên *tất cả* các cạnh sẽ "bay hơi" theo công thức:

$$\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij}$$

- ρ (**Hệ số bay hơi**): Một tham số $0 < \rho \leq 1$.
- **Mục đích:** Cơ chế này giúp thuật toán "quên đi" các lựa chọn cũ, không tốt và tránh việc bị "kẹt" (stagnation) vô thời hạn tại một giải pháp dưới tối ưu.

Lắng đọng Pheromone (Deposit)

Tiếp theo, mỗi con kiến sẽ "lắng đọng" pheromone trên những cạnh mà nó đã đi qua, dựa trên chất lượng giải pháp (đường đi) mà nó tìm được.

Tổng lượng pheromone được thêm vào là:

$$\tau_{ij} \leftarrow \tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k$$

Trong đó, $\Delta\tau_{ij}^k$ là lượng pheromone mà kiến k lắng đọng lên cạnh (i, j) , được định nghĩa là:

$$\Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} 1/C^k & \text{nếu cạnh } (i, j) \text{ thuộc đường đi } T^k \text{ của kiến } k \\ 0 & \text{nếu không} \end{cases}$$

- C^k (**Chất lượng giải pháp**): Là tổng chi phí của đường đi T^k mà kiến k đã thực hiện.
- **Ý nghĩa:** Một đường đi càng tốt (chi phí C^k càng nhỏ) thì lượng pheromone $1/C^k$ lắng đọng trên các cạnh của nó càng lớn. Điều này làm tăng xác suất để các con kiến trong tương lai chọn lại những cạnh này.[DMC96, DS04]

2.3 Triển khai thuật toán

2.3.1 Cách hoạt động của thuật toán

Algorithm 1 Mã giả Siêu heuristic ACO

```

1: while chưa đạt điều kiện dừng do
2:   for số_kiến do
3:     tạo_giải_pháp()
4:   end for
5:   so_sánh_giải_pháp()
6:   cập_nhật_hệ_số_pheromone()
7: end while
8: return giải pháp tốt nhất

```

Chi tiết quá trình:[DDC99]

1. Ở bước đầu tiên, mỗi "con kiến" sẽ chọn đường đi cho mình sao cho thỏa mãn đề bài. Để chọn được cạnh để đi trong mỗi bước, con kiến đó sẽ dựa vào mức độ pheromone của mỗi cạnh mà nó có thể đi và chọn ngẫu nhiên có trọng số trong các cạnh khả dĩ đó (theo công thức trong 2.1).
2. Ở bước thứ 2, các giải pháp sẽ được so sánh với nhau, và giải pháp tốt nhất (tất nhiên so với cả các giải pháp ở vòng lặp trước) sẽ được chọn. Nếu đó là vòng lặp cuối cùng, giải pháp đó sẽ là kết quả của thuật toán.
3. Ở bước tiếp theo, hệ số pheromone sẽ được cập nhật trên từng cạnh của đường đi (theo công thức trong 2.2). Hệ quả là, con đường nào càng ngắn thì các cạnh trên con đường đó sẽ lưu lại càng nhiều pheromone, dẫn đến xác suất chọn cạnh đó trong những lần sau sẽ cao hơn.

Quá trình trên được lặp lại với số vòng lặp nhất định (từ 200-500 tùy vào số cạnh của đồ thị), hoặc cho tới khi hội tụ.

Một cách trực quan, quá trình này hội tụ về các chu trình ngắn bởi vì mỗi con kiến để lại càng nhiều pheromone trên các cạnh thuộc chu trình của nó nếu chu trình đó càng ngắn. Và, khi pheromone cũ mờ dần theo thời gian, đồng thời các con kiến mới ưu tiên những cạnh có nhiều pheromone hơn, thì các chu trình mới sẽ có xu hướng ngày càng ngắn hơn.

Điều quan trọng là, vì mỗi con kiến chọn bước đi tiếp theo một cách ngẫu nhiên, nên mặc dù chúng sẽ luôn có xu hướng chọn các ứng cử viên có nhiều pheromone nhất, chúng cũng sẽ có một xác suất đáng kể (không thể bỏ qua) để chọn một cạnh khác và đi khám phá. Nếu việc khám phá đó dẫn đến một chu trình tổng thể tốt hơn, con kiến đó sẽ "báo" cho các con kiến tương lai về chu trình này bằng cách để lại nhiều pheromone hơn nữa.[DS04]

2.3.2 Triển khai kỹ thuật

- Ngôn ngữ: Python
- Các thư viện sử dụng: numpy, random, matplotlib
- Các class:
 - Class ACO_Solver: chứa các hàm chính để giải bài toán và kiểm thử trên tập dữ liệu cho trước.
 - Class Graph: cấu trúc đồ thị dưới dạng ma trận khoảng cách.
 - Chi tiết triển khai ở [github repository](#) (nằm trong phần phụ lục).

3 Particle swarm optimization

3.1 Giới thiệu thuật toán

Particle swarm optimization (tối ưu hóa bầy đàn) là một thuật toán heuristic mạnh mẽ được lấy cảm hứng bởi hành vi bầy đàn được quan sát trong tự nhiên như đàn cá và chim.[KE95, PKB07] PSO là một mô phỏng của một hệ thống xã hội được đơn giản hóa.

3.1.1 Ý tưởng thuật toán

Ý đồ của thuật toán PSO là mô phỏng lại cách di chuyển phức tạp của đàn chim. Trong tự nhiên, tầm nhìn của một con chim đơn lẻ là bị giới hạn. Tuy nhiên, có nhiều hơn một con chim cho phép đàn chim ý thức được vị trí của chúng trên một không gian rộng lớn hơn.

Không gian tìm kiếm thức ăn lúc này là toàn bộ không gian ba chiều. Tại thời điểm bắt đầu tìm kiếm cả đàn bay theo một hướng thường là ngẫu nhiên. Tuy nhiên sau một thời gian tìm kiếm một số cá thể trong đàn bắt đầu tìm ra được nơi có chứa thức ăn.

Tùy theo số lượng thức ăn vừa tìm kiếm, mà cá thể gửi tín hiệu đến các cá thể khác đang tìm kiếm ở vùng lân cận. Tín hiệu này lan truyền trên toàn quần thể.

Dựa vào thông tin nhận được mỗi cá thể sẽ điều chỉnh hướng bay và vận tốc theo hướng về nơi có nhiều thức ăn nhất.

Cơ chế truyền tin như vậy thường được xem như là một kiểu hình của trí tuệ bầy đàn. Cơ chế này giúp cả đàn chim tìm ra nơi có nhiều thức ăn nhất trên không gian tìm kiếm vô cùng rộng lớn.

3.1.2 Lịch sử thuật toán

Nghiên cứu sớm về ứng dụng tập tính bầy đàn trong thuật toán là mô hình “Boids” của Craig Reynolds.[Rey87] Reynolds đã chỉ ra rằng hành vi bầy đàn phức tạp có thể được mô phỏng chỉ bằng ba quy tắc đơn giản mà mỗi cá thể tuân theo (tách biệt, thẳng hàng, và gắn kết).

Thuật toán PSO được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1995 bởi James Kennedy và Russell Eberhart, dựa trên công trình của Reynolds về bầy đàn nhân tạo.[KE95] PSO nhanh chóng trở nên phổ biến vì nó đơn giản hơn đáng kể so với các thuật toán tiến hóa khác như Giải thuật Di truyền (Genetic Algorithms - GA), và sau đó được hệ thống hóa trong nhiều bài tổng quan.[PKB07, WTL18]

3.1.3 Những ứng dụng

Thuật toán PSO được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực nhờ độ hiệu quả, tính đơn giản và linh hoạt của nó. Nó được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau:

- Chăm sóc sức khỏe: Chẩn đoán thông minh, Phát hiện và phân loại bệnh, Phân đoạn hình ảnh y tế,...
- Môi trường: Giám sát chất lượng nước, giám sát lũ lụt,...
- Công nghiệp: Điều phối sản lượng điện (economic dispatch), Lập lịch tải điện, Tối ưu hóa Lưới điện thông minh,...
- Thương mại: Dự đoán chi phí và giá cả, đánh giá rủi ro,...

Các khảo sát gần đây cho thấy PSO đã được mở rộng với rất nhiều biến thể và ứng dụng thực tế ở quy mô lớn.[PKB07, WTL18]

3.2 Cơ sở toán học của thuật toán

Cơ sở toán học của thuật toán PSO được thể hiện qua hai phương trình cốt lõi: Cập nhật Vận tốc và Cập nhật Vị trí. Cơ sở toán học này mô tả cách mỗi “hạt” (tương ứng với mỗi cá thể chim trong đàn) trong bầy đàn điều chỉnh chuyển động của nó qua không gian tìm kiếm.

3.2.1 Phương trình Cập nhật Vận tốc (Velocity Update)

Phương trình này tính toán vận tốc mới (véc-tơ di chuyển) cho một hạt ở vòng lặp (thế hệ) tiếp theo. Vận tốc mới được quyết định bởi ba thành phần:

- **Quán tính (Inertia):** Vận tốc hiện tại của hạt, giữ cho nó di chuyển theo hướng cũ.
- **Thành phần Nhận thức (Cognitive Component):** Hướng di chuyển về phía vị trí tốt nhất cá nhân (pbest) mà hạt đó đã từng đạt được.

- **Thành phần Xã hội (Social Component):** Hướng di chuyển về phía vị trí tốt nhất toàn bầy (gbest) mà bất kỳ hạt nào trong bầy đã từng đạt được.

Công thức toán học như sau:[KE95, PKB07]

$$\mathbf{v}_i(t+1) = w \cdot \mathbf{v}_i(t) + c_1 \cdot r_1 \cdot (\mathbf{pbest}_i - \mathbf{x}_i(t)) + c_2 \cdot r_2 \cdot (\mathbf{gbest} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1)$$

Trong đó:

- $\mathbf{v}_i(t+1)$: Là vận tốc mới (dự kiến) của hạt i tại vòng lặp $t+1$.
- w : **Trọng số quán tính (Inertia weight)**.
- $\mathbf{v}_i(t)$: Vận tốc hiện tại của hạt i tại vòng lặp t .
- c_1, c_2 : **Hệ số học tập (Learning coefficients)** (hàng số gia tốc).
- r_1, r_2 : Là hai số ngẫu nhiên được tạo ra trong khoảng $[0, 1]$.
- \mathbf{pbest}_i : Vị trí tốt nhất mà cá nhân hạt i đã tìm thấy.
- \mathbf{gbest} : Vị trí tốt nhất mà cả bầy đàn đã tìm thấy.
- $\mathbf{x}_i(t)$: Vị trí hiện tại của hạt i tại vòng lặp t .

3.2.2 Phương trình Cập nhật Vị trí (Position Update)

Sau khi tính toán vận tốc mới, hạt sẽ sử dụng vận tốc đó để di chuyển đến một vị trí mới trong không gian tìm kiếm.

Công thức toán học như sau:[PKB07, WTL18]

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1) \quad (2)$$

Trong đó:

- $\mathbf{x}_i(t+1)$: Là vị trí mới của hạt i tại vòng lặp $t+1$.
- $\mathbf{x}_i(t)$: Vị trí hiện tại của hạt i tại vòng lặp t .
- $\mathbf{v}_i(t+1)$: Vận tốc mới vừa được tính toán từ phương trình (1).

Các phương trình (1)–(2) là dạng PSO chuẩn được giới thiệu trong công trình gốc và được tổng hợp, phân tích chi tiết trong các bài tổng quan hiện đại.[KE95, PKB07, WTL18]

3.3 Triển khai thuật toán

3.3.1 Cách hoạt động của thuật toán

Thuật toán PSO mô phỏng một bầy đàn “bay” qua không gian tìm kiếm để tìm giải pháp tối ưu.

Algorithm 2 Thuật toán Tối ưu hóa Bầy đàn Hạt (PSO)

- 1: **[PHẦN 1: KHỞI TẠO]**
- 2: Khởi tạo một bầy đàn (population) gồm N hạt.
- 3: **for** mỗi hạt i (từ 1 đến N) **do**
- 4: Khởi tạo vị trí ban đầu \mathbf{x}_i (ngẫu nhiên).
- 5: Khởi tạo vận tốc ban đầu \mathbf{v}_i (bằng 0).
- 6: Tính giá trị thích nghi (fitness) $f(\mathbf{x}_i)$.
- 7: $\mathbf{pbest}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$
- 8: **end for**
- 9: $\mathbf{gbest} \leftarrow$ hạt có giá trị thích nghi tốt nhất trong bầy.
- 10: **[PHẦN 2: VÒNG LẶP CHÍNH]**
- 11: **while** chưa đạt điều kiện dừng (ví dụ: $t < T_{\max}$) **do**
- 12: **for** mỗi hạt i (từ 1 đến N) **do**
- 13: Cập nhật Vận tốc theo phương trình (1)
- 14: $\mathbf{v}_i(t+1)$
- 15: Cập nhật Vị trí theo phương trình (2)
- 16: $\mathbf{x}_i(t+1) \leftarrow \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1)$
- 17: Dánh giá vị trí mới
- 18: Tính $f(\mathbf{x}_i(t+1))$
- 19: Cập nhật pbest (bộ nhớ cá nhân)
- 20: **if** $f(\mathbf{x}_i(t+1))$ tốt hơn $f(\mathbf{pbest}_i)$ **then**
- 21: $\mathbf{pbest}_i \leftarrow \mathbf{x}_i(t+1)$
- 22: **end if**
- 23: Cập nhật gbest (bộ nhớ bầy đàn)
- 24: **if** $f(\mathbf{x}_i(t+1))$ tốt hơn $f(\mathbf{gbest})$ **then**
- 25: $\mathbf{gbest} \leftarrow \mathbf{x}_i(t+1)$
- 26: **end if**
- 27: **end for**
- 28: **end while**
- 29: **TRẢ VỀ:** \mathbf{gbest} (Vị trí của giải pháp tốt nhất)

3.3.2 Triển khai kỹ thuật

- **Ngôn ngữ:** Python
- **Các thư viện sử dụng:** numpy, random, matplotlib
- **Các class:**
 - Class **PSO_Solver**: chứa các hàm chính để giải bài toán và kiểm thử trên tập dữ liệu cho trước.
 - Class **Agent**: triển khai một giải pháp tiềm năng cho bài toán.
- Chi tiết triển khai ở github repository (nằm trong phần phụ lục).

4 Artificial Bee Colony

4.1 Giới thiệu thuật toán

Thuật toán đòn ong nhân tạo (Artificial Bee Colony - ABC) được đề xuất bởi Derviş Karaboga (2005), mô phỏng hành vi tìm kiếm và chia sẻ thông tin về nguồn mật hoa của đàn ong mật

trong tự nhiên.[Kar05] Các nghiên cứu tiếp theo đã phân tích và so sánh hiệu năng của ABC với nhiều thuật toán quần thể khác trên các bộ bài toán chuẩn, cho thấy ABC có hiệu quả cạnh tranh với số tham số điều khiển tương đối ít.[KA09] Mục tiêu của ABC là tìm lời giải tốt nhất cho bài toán tối ưu hóa bằng cách mô phỏng quá trình ong tìm mật. Trong đồ án này, bài toán được sử dụng là tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số 2 biến.

4.2 Ý tưởng thuật toán và nguyên lý hoạt động

Trong tự nhiên, ong mật chia thành 3 nhóm: ong thợ, ong quan sát và ong trinh sát. Nhiệm vụ của mỗi nhóm như sau:

- Ong thợ tìm kiếm thức ăn xung quanh nguồn mật bằng trí nhớ, đồng thời chia sẻ thông tin về những nguồn mật này cho ong quan sát.
- Ong quan sát có xu hướng chọn nguồn mật tốt từ những nguồn mà ong thợ tìm thấy. Nguồn mật có chất lượng cao hơn (độ thích nghi cao) sẽ có nhiều khả năng được ong quan sát lựa chọn hơn.
- Khi nguồn mật đã cạn, ong do thám sẽ bỏ nguồn mật hiện tại và tìm kiếm nguồn mới ngẫu nhiên.

Ong thợ và ong quan sát tìm kiếm các nguồn mật xung quanh tổ. Những con ong thợ lưu trữ thông tin về nguồn mật và chia sẻ thông tin với những con ong quan sát. Số lượng nguồn mật bằng với số lượng ong thợ. Một con ong thợ sau khi khai thác một nguồn mật số lần nhất định mà chất lượng nguồn mật của chúng không thể cải thiện, nó sẽ trở thành ong trinh sát và bỏ nguồn mật cũ đi. Tương tự trong bài toán tối ưu hóa, số lượng nguồn mật trong thuật toán ABC đại diện cho số lượng chất lượng nguồn mật trong quần thể (càng nhiều mật thì chất lượng mật càng tốt và ngược lại). Nói cách khác, nếu các con ong tìm được một nguồn mật tốt, đây có khả năng sẽ là điểm tối ưu và sẽ có xu hướng thu hút các con ong khác tới khai thác.

4.3 Giải thích cơ chế hoạt động bằng công cụ toán học

4.3.1 Ký hiệu và các tham số chính

- $f(x)$: Hàm mục tiêu cần tối ưu hóa
- SN : Số lượng ong thợ (cũng bằng số nguồn mật)
- **limit**: Giới hạn số lần không cải thiện trước khi ong thợ trở thành ong do thám (để đi tìm nguồn mật tốt hơn), tránh trường hợp các con ong "quanh quẩn" ở điểm tối ưu cục bộ, nơi có nguồn mật tốt hơn so với các nguồn xung quanh nhưng không phải nguồn mật tốt nhất có thể khai thác.
- **maxCycle**: Số vòng lặp tối đa, nếu sau maxCycle lần khai thác và tìm kiếm, các con ong vẫn tập trung tại một nguồn mật nào đó, điểm này sẽ được xác định là điểm tối ưu, dừng thuật toán.

4.3.2 Nguyên lý

Thuật toán ABC gồm 4 giai đoạn chính như sau:[VK13]

1. Khởi tạo quần thể

Ban đầu tất cả SN ong trong quần thể sẽ là ong do thám, khi đó tương ứng SN nguồn mật sẽ được sinh ra ngẫu nhiên trong không gian tìm kiếm điểm tối ưu. Mỗi nguồn mật

(ký hiệu bởi x_m) là một vector có D chiều, là số chiều của không gian tìm kiếm, được sinh bởi công thức:

$$x_m = l_i + \text{rand}(0, 1) \times (u_i - l_i)$$

với u_i và l_i lần lượt là cận trên và cận dưới của không gian tìm kiếm, $\text{rand}(0, 1)$ là một số ngẫu nhiên thuộc đoạn $[0, 1]$

2. Pha ong thợ

Từ nguồn mật hiện tại x_i , ong thợ bay đến một nguồn mật v_i khác trong khu vực lân cận. So sánh giá trị của $f(x_i)$ và $f(v_i)$, nếu nguồn mật chất lượng hơn (giá trị hàm đạt được tại v_i tốt hơn) sẽ thay thế cho nguồn cũ. Giá trị của mỗi chiều của v_i được sinh bởi công thức:

$$v_{ij} = x_{ij} + \phi_m (x_{ij} - x_{kj})$$

Trong đó $j = \overline{1..D}$, ϕ_m là một số ngẫu nhiên thuộc đoạn $[-1, 1]$

3. Pha ong quan sát

Mỗi ong quan sát chọn nguồn mật dựa trên xác suất được tính bởi phương trình:

$$p_i = \frac{\text{fit}_i}{\sum_{j=1}^{SN} \text{fit}_j}$$

Với fit_i là độ phù hợp của từng nguồn mật, được tính theo công thức:

$$\text{fit}_i = \begin{cases} \frac{1}{1+f(x_i)}, & f(x_i) \geq 0 \\ 1 + |f(x_i)|, & f(x_i) < 0 \end{cases}$$

Sau khi chọn, ong quan sát cũng tạo nguồn mật mới theo công thức tương tự như ở pha ong thợ. Nếu tốt hơn, cập nhật nguồn mật tương ứng.

4. Pha ong do thám

Nếu một nguồn mật không được cải thiện sau $limit$ lần, ong thợ sẽ bỏ nguồn mật này đi và trở thành ong do thám. Sau đó, chúng sẽ tạo nguồn mật mới ngẫu nhiên bằng công thức như ở pha khởi tạo quần thể.

5. Lặp lại

Lặp lại các pha 2 đến 4 cho đến khi đạt số vòng lặp $maxCycle$ hoặc đạt tiêu chí hội tụ (không còn cải thiện).

4.3.3 Mã giả (Pseudo-code) thuật toán ABC

Mã giả dưới đây tóm tắt một phiên bản ABC chuẩn hoá, tham khảo từ các survey gần đây về ABC.[IEH⁺25]

```

1: Khởi tạo quần thể gồm  $SN$  nguồn thức ăn  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, SN$ )
2: Dánh giá độ thích nghi (fitness) của từng nguồn thức ăn
3: repeat
4:   for mỗi ong thợ do
5:     Sinh ra ứng viên mới  $v_i$  lân cận  $x_i$ 
6:     Dánh giá độ thích nghi của  $v_i$ 
7:     Lựa chọn giữa  $x_i$  và  $v_i$ 
8:   end for
9:   for mỗi ong quan sát do
10:    Chọn nguồn thức ăn  $x_i$  với xác suất tỉ lệ thuận với độ thích nghi của nó
11:    Sinh ra ứng viên mới  $v_i$ 
12:    Lựa chọn giữa  $x_i$  và  $v_i$ 
13:  end for
14:  Nếu một nguồn thức ăn không được cải thiện sau một số vòng lặp giới hạn, thay thế bằng
      một nguồn ngẫu nhiên mới (giai đoạn ong do thám)
15:  Ghi nhớ nghiệm tốt nhất hiện tại
16: until thoả mãn điều kiện dừng

```

5 Firefly Algorithm

5.1 Giới thiệu

5.1.1 Ý tưởng cốt lõi [Yan10]

Thuật toán Đom Đóm (Firefly Algorithm, FA) là một metaheuristic lấy cảm hứng từ hành vi phát quang và bị hút lẫn nhau của đom đóm trong tự nhiên. Trong FA, mỗi nghiệm ứng viên là một “đom đóm” với *độ sáng* (brightness) tỉ lệ với *độ phù hợp* (fitness). Một đom đóm kém sáng sẽ di chuyển về phía đom đóm sáng hơn; cường độ *hấp dẫn* suy giảm theo khoảng cách. Thành phần *nhiều* (randomization) được thêm vào để tăng khả năng thoát bẫy cục bộ và thăm dò không gian nghiệm rộng hơn. Cơ chế này tạo nên sự cân bằng *thăm dò* (exploration) và *khai thác* (exploitation), phù hợp với các bài toán đa cực trị (multimodal) (Yang, 2009; Yang & He, 2013).

5.1.2 Lịch sử ngắn gọn

FA được đề xuất bởi Xin-She Yang vào giai đoạn 2008–2009 và nhanh chóng trở thành một trong các thuật toán tối ưu lấy cảm hứng tự nhiên tiêu biểu bên cạnh PSO, BA, Cuckoo Search, v.v. (Yang, 2009; Yang, 2010). Hướng phát triển gồm: FA tự điều chỉnh tham số, FA lai (hybrid) với tìm kiếm cục bộ, FA song song/đám mây, và các biến thể *rời rạc hoá* cho bài toán tổ hợp (Yang & He, 2013; Baykasoglu et al., 2014).

5.1.3 Ứng dụng tiêu biểu

FA được áp dụng rộng rãi trong: tối ưu hàm chuẩn (Rastrigin, Ackley, Rosenbrock), điều chỉnh siêu tham số mô hình học máy, chọn đặc trưng, định tuyến-lập lịch, và các bài toán tổ hợp như Knapsack/Flow-Shop sau khi rời rạc hoá (*binarization* hoặc *discretization*) (Yang, 2010; Yang & He, 2013). Điểm mạnh chính: (i) công thức cập nhật đơn giản; (ii) ít siêu tham số; (iii) linh hoạt để thích nghi với cả không gian liên tục và nhị phân.

5.2 Cơ sở toán học của thuật toán

5.2.1 Mô hình gốc [TN19]

Xét bài toán cực tiểu hoá không ràng buộc

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x).$$

Tại vòng lặp t , cá thể i có vị trí $\mathbf{x}_i^{(t)} \in \mathbb{R}^d$. Gọi $r_{ij}^{(t)} = \|\mathbf{x}_i^{(t)} - \mathbf{x}_j^{(t)}\|_2$ là khoảng cách giữa i và j .

Độ sáng (Brightness). Độ sáng của mỗi đom đóm được tính từ fitness:

$$I_i = -f(\mathbf{x}_i) \quad (\text{bài toán cực tiểu})$$

Đom đóm có fitness tốt hơn (giá trị f nhỏ hơn) sẽ sáng hơn.

Hấp dẫn suy giảm theo khoảng cách. Hàm hấp dẫn chuẩn trong FA:

$$\beta(r_{ij}^{(t)}) = \beta_0 \exp(-\gamma(r_{ij}^{(t)})^2),$$

trong đó $\beta_0 > 0$ là hấp dẫn tại $r = 0$, còn $\gamma > 0$ điều khiển mức suy giảm theo khoảng cách (Yang, 2009).

Quy tắc cập nhật (không gian liên tục). Đối với mỗi đom đóm i , chỉ di chuyển về phía các đom đóm sáng hơn:

$$\mathbf{x}_i^{(t+1)} = \mathbf{x}_i^{(t)} + \beta(r_{ij}^{(t)}) (\mathbf{x}_j^{(t)} - \mathbf{x}_i^{(t)}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(t)}.$$

khi $I_j > I_i$. Ở đây $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(t)}$ là nhiễu (thường lấy từ $\mathcal{U}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$), và α là hệ số randomization. Nếu không có cá thể sáng hơn, nghiệm chủ yếu chịu nhiều thăm dò.

Xử lý biên. Sau cập nhật, sử dụng **chiếu (clipping)** về miền hợp lệ [lower_bound, upper_bound] cho từng chiều.

5.2.2 Mô hình rời rạc cho Knapsack 0/1 [TN17]

Biểu diễn nghiệm bằng $\mathbf{b}_i^{(t)} \in \{0, 1\}^n$. Các quy tắc di chuyển như sau.

(a) Di chuyển có hướng (Directed movement)

Với mỗi đom đóm j sáng hơn i :

1. Xác định tập vị trí khác biệt:

$$D = \{k \mid b_{i,k} \neq b_{j,k}\}.$$

2. Chọn ngẫu nhiên *tối đa* m_{\max} vị trí từ D .

3. Lật bit tại các vị trí được chọn sao cho:

$$b_{i,k} \leftarrow b_{j,k}.$$

(b) Nhiều ngẫu nhiên (Random noise)

Với xác suất α_{flip} , chọn ngẫu nhiên một vị trí và lật bit:

$$b_{i,k} \leftarrow 1 - b_{i,k}.$$

(c) Sửa nghiệm vi phạm (Repair vs Penalty)

Benchmark hỗ trợ hai chiến lược xử lý ràng buộc:

- **Repair strategy:** Sau khi di chuyển, nếu nghiệm vi phạm ràng buộc sút chúa, loại dần các vật phẩm có tỷ số v_k/w_k thấp nhất (greedy removal) cho đến khi khả thi.
- **Penalty strategy:** Nghiệm vi phạm nhận penalty lớn trong fitness, cho phép exploration trong không gian infeasible.

Gợi ý lựa chọn tham số. β_0 lớn \Rightarrow khai thác cục bộ mạnh; γ nhỏ \Rightarrow hút tầm xa tăng thăm dò; α nên trong khoảng $[0.1, 0.5]$ để cân bằng exploration/exploitation. Kích thước quần thể N đủ để bao phủ không gian ban đầu, thường $N \in [20, 100]$ tùy độ khó/hàm mục tiêu (Yang, 2009; Yang, 2010).

5.3 Chi tiết triển khai thuật toán (Mã giả)

Algorithm 3 Thuật toán Dom Dom cho tối ưu liên tục

```

1: Input: Hàm  $f$ , miền  $[\text{lb}, \text{ub}]^d$ ,  $n$  đom đóm,  $T$  vòng lặp,  $\alpha, \beta_0, \gamma$ .
2: Khởi tạo ngẫu nhiên  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$  trong miền hợp lệ.
3: Tính fitness  $f(\mathbf{x}_i)$  và độ sáng  $I_i = -f(\mathbf{x}_i)$ .
4: for  $t = 1$  to  $T$  do
5:   Tính ma trận khoảng cách  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$ .
6:   for  $i = 1$  to  $n$  do
7:     for  $j = 1$  to  $n$  do
8:       if  $I_j > I_i$  then
9:          $\beta := \beta_0 \exp(-\gamma r_{ij}^2)$ 
10:         $\mathbf{x}_i := \mathbf{x}_i + \beta(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \alpha\epsilon$ 
11:       end if
12:     end for
13:     Chiếu  $\mathbf{x}_i$  về  $[\text{lb}, \text{ub}]^d$ , cập nhật  $f(\mathbf{x}_i)$  và  $I_i$ .
14:   end for
15:   Ghi nhận nghiệm tốt nhất  $\mathbf{x}^*$ ,  $f^*$ .
16: end for
17: Output:  $\mathbf{x}^*$ ,  $f^*$ .

```

Algorithm 4 Thuật toán Dom Dóm cho Knapsack 0/1

```
1: Input:  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, C, n$  đom đóm,  $T$  vòng lặp,  $\alpha_{\text{flip}}$ ,  $m_{\max}$ , strategy  $\in \{\text{repair}, \text{penalty}\}$ .
2: Khởi tạo  $n$  nghiệm nhị phân  $\mathbf{b}_i \in \{0, 1\}^m$ .
3: Tính fitness  $f(\mathbf{b}_i)$  và độ sáng  $I_i$ .
4: for  $t = 1$  to  $T$  do
5:   for  $i = 1$  to  $n$  do
6:     for  $j = 1$  to  $n$  do
7:       if  $I_j > I_i$  then
8:          $D \leftarrow \{k \mid b_{i,k} \neq b_{j,k}\}$ 
9:         Chọn ngẫu nhiên TỐI DA  $m_{\max}$  vị trí từ  $D$ 
10:        Với mỗi vị trí được chọn:  $b_{i,k} \leftarrow b_{j,k}$ 
11:       end if
12:     end for
13:     if  $\text{rand}() < \alpha_{\text{flip}}$  then
14:       Chọn ngẫu nhiên vị trí  $k$  và lật:  $b_{i,k} \leftarrow 1 - b_{i,k}$ 
15:     end if
16:     if strategy == repair then
17:        $\mathbf{b}_i \leftarrow \text{GreedyRepair}(\mathbf{b}_i)$  {Loại items có  $v/w$  thấp}
18:     else
19:       Áp dụng penalty nếu vi phạm capacity
20:     end if
21:     Cập nhật  $f(\mathbf{b}_i), I_i$ .
22:   end for
23:   Ghi nhận nghiệm tốt nhất  $\mathbf{b}^*$ ,  $f^*$ .
24: end for
25: Output:  $\mathbf{b}^*$ , giá trị balo =  $-f^*$ .
```

6 Cuckoo Search

6.1 Giới thiệu thuật toán

Cuckoo Search (CS) là một thuật toán metaheuristic được đề xuất bởi Xin-She Yang và Suash Deb vào năm 2009,[YD09, Yan14] lấy cảm hứng từ hành vi sinh sản ký sinh của loài chim cu (cuckoo), kết hợp với cơ chế Lévy flight để khám phá không gian tìm kiếm hiệu quả.[LL22]

Cuckoo Search thuộc nhóm *Swarm Intelligence* tương tự như PSO hay ABC, với ý tưởng là mỗi cá thể (tổ chim) đại diện cho một nghiệm ứng viên trong không gian tìm kiếm. Quá trình tiến hóa xảy ra thông qua việc các tổ chim được thay thế dần bằng các nghiệm tốt hơn.

6.2 Ý tưởng thuật toán

Mỗi con chim cu đẻ trứng vào tổ của các loài chim khác. Nếu trứng bị phát hiện là "kẻ lạ", chủ tổ sẽ loại bỏ trứng đó hoặc bỏ tổ và xây tổ mới. Cuckoo Search mô phỏng hành vi này bằng cách:

- Mỗi "tổ" đại diện cho một nghiệm trong không gian tìm kiếm.
- Một số trứng (nghiệm) mới được tạo ra thông qua Lévy flight từ các tổ hiện tại.
- Một tỷ lệ p_a các tổ xấu nhất sẽ bị loại bỏ và thay bằng các tổ mới ngẫu nhiên.
- Tổ tốt nhất được giữ lại qua các thế hệ.

6.3 Cơ sở toán học của thuật toán

Giả sử không gian tìm kiếm có d chiều và n tổ chim. Mỗi tổ $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id}]$ tương ứng với một nghiệm. Tại mỗi vòng lặp, tổ mới được tạo ra theo công thức:

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + \alpha \cdot \text{Levy}(\beta) \quad (3)$$

Trong đó:

- α là hệ số bước bay (step size),
- $\text{Levy}(\beta)$ là bước nhảy theo phân phối Lévy với tham số β (thường $\beta = 1.5$).[LL22]

Phân phối Lévy thường được sinh ra theo công thức Mantegna:[Man94]

$$s = \frac{u}{|v|^{1/\beta}}, \quad u \sim N(0, \sigma_u^2), \quad v \sim N(0, 1) \quad (4)$$

với

$$\sigma_u = \left[\frac{\Gamma(1 + \beta) \sin(\pi\beta/2)}{\Gamma((1 + \beta)/2)\beta 2^{(\beta-1)/2}} \right]^{1/\beta} \quad (5)$$

Sau mỗi lần cập nhật, các tổ bị phát hiện (với xác suất p_a) sẽ bị thay thế ngẫu nhiên:

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + r \cdot (x_j^{(t)} - x_k^{(t)}), \quad (6)$$

trong đó x_j, x_k là hai tổ ngẫu nhiên khác nhau, và r là một số ngẫu nhiên trong $[0, 1]$.

6.4 Triển khai thuật toán

6.4.1 Cách hoạt động của thuật toán

1. **Khởi tạo quần thể:** Tạo n tổ ngẫu nhiên trong không gian tìm kiếm.
2. **Dánh giá:** Tính giá trị hàm mục tiêu (fitness) của từng tổ.
3. **Bay Lévy:** Tạo các tổ mới bằng cách bay Lévy từ các tổ hiện tại.
4. **Cập nhật:** Nếu tổ mới tốt hơn, thay thế tổ cũ.
5. **Phát hiện trung lợ:** Với xác suất p_a , thay thế các tổ tệ nhất bằng tổ mới ngẫu nhiên.
6. **Ghi nhận nghiệm tốt nhất:** Cập nhật tổ có giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất.
7. **Lặp lại** cho đến khi đạt số vòng lặp tối đa hoặc hội tụ.

6.4.2 Mã giả

Algorithm 5 Thuật toán Cuckoo Search

- 1: Khởi tạo n tổ x_i ngẫu nhiên trong không gian tìm kiếm
- 2: Dánh giá giá trị hàm mục tiêu $f(x_i)$ cho mỗi tổ
- 3: **for** $t = 1$ đến T_{max} **do**
- 4: **(Pha 1: Lévy flight)**
- 5: **for** mỗi tổ x_i **do**
- 6: Sinh bước Lévy $s \sim \text{Levy}(\beta)$
- 7: $x'_i = x_i + \alpha \cdot s$
- 8: Nếu $f(x'_i) < f(x_i)$ thì cập nhật $x_i = x'_i$
- 9: **end for**
- 10: **(Pha 2: Phát hiện trứng)**
- 11: Chọn ngẫu nhiên một phần p_a các tổ tệ nhất
- 12: Thay thế chúng bằng tổ mới ngẫu nhiên trong không gian tìm kiếm
- 13: Cập nhật tổ tốt nhất hiện tại
- 14: **end for**
- 15: Xuất ra nghiệm tốt nhất tìm được

7 Các thuật toán truyền thống để so sánh

7.1 Genetic Algorithm

7.1.1 Giới thiệu chung

Genetic Algorithm (GA - Giải thuật di truyền) là một kỹ thuật tìm kiếm nhằm tìm ra đáp án gần đúng trong các bài toán tối ưu hóa mô hình và bài toán tìm kiếm. GA được xem là một trong những metaheuristic phổ biến và được ứng dụng nhiều nhất.[Hol75, Gol89]

Trong một quần thể trong tự nhiên, các loài sinh vật phải thích nghi và thay đổi qua từng thế hệ để có thể sinh tồn, đó gọi là sự tiến hóa (theo học thuyết tiến hóa của Darwin). Ở hình trên, các con hươu cao cổ thông qua một cơ chế tiến hóa gọi là chọn lọc tự nhiên, những con thấp sẽ không thể ăn lá và chết dần, qua thời gian dài chỉ còn lại những con cao hơn tiếp tục sinh sản và phát triển quần thể. Như vậy, các loài sinh vật luôn phải tiến hóa để tránh bị đào thải trong môi trường tự nhiên khắc nghiệt.

GA được phát minh bởi John Holland và các cộng sự tại đại học Michigan vào những năm 1960,[Hol75] và được phổ biến rộng rãi trong cộng đồng tối ưu hóa thông qua cuốn sách kinh điển của Goldberg vào cuối thập niên 1980.[Gol89] Thuật toán dựa trên các nguyên tắc của tiến hóa, bao gồm các quá trình lai tạo (crossover), đột biến (mutation) và chọn lọc (selection), và đã trở thành một công cụ tiêu chuẩn trong nhiều ứng dụng tối ưu hóa và học máy.

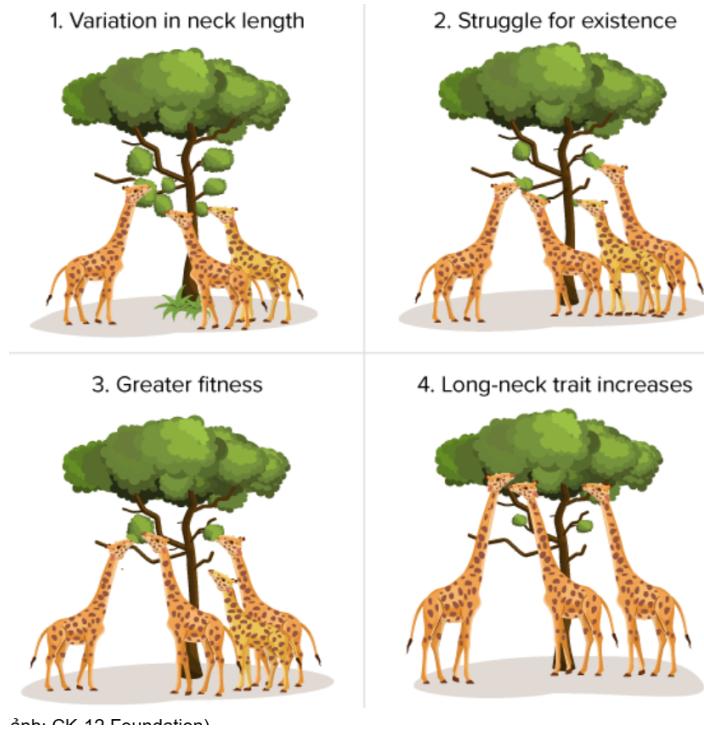
7.1.2 Cơ sở toán học

Không gian nghiệm và mã hoá. Gọi \mathcal{C} là không gian các nhiễm sắc thể (chromosomes). Một nhiễm sắc thể thường được biểu diễn là một chuỗi ký tự có độ dài l :

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_l) \in \{0, 1\}^l \quad \text{hoặc} \quad c \in \mathbb{R}^l$$

Mỗi nhiễm sắc thể c tương ứng với một *phenotype* (lời giải) thông qua một ánh xạ giải mã $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$. Hàm đánh giá (fitness) là

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(c) \text{ là mức "tốt" của lời giải } c.$$



Hình 1: Quá trình tiến hóa của hươu cao cổ (Ảnh: CK-12 Foundation)

Chọn lọc (Selection). Một phương pháp phổ biến là chọn theo tỉ lệ fitness (roulette-wheel). Nếu quần thể hiện tại có N cá thể $c^{(1)}, \dots, c^{(N)}$ thì xác suất chọn cá thể i là:

$$p_i = \frac{F(c^{(i)})}{\sum_{j=1}^N F(c^{(j)})}. \quad (7)$$

Schema và Schema Theorem. Một *schema* H là một mẫu cố định trên một số vị trí của nhiễm sắc thể, ký hiệu bằng chuỗi trong bảng chữ cái $\{0, 1, *\}$ ("*" là wildcard). Đặt:

- $m_H(t)$: số cá thể thuộc schema H ở thế hệ t ;
- $\bar{F}_H(t)$: độ fitness trung bình của các cá thể trong H ;
- $\bar{F}(t)$: độ fitness trung bình toàn quần thể;
- $F_H(t) = \frac{\bar{F}_H(t)}{\bar{F}(t)}$ là *relative fitness* của schema H ;
- l_H là khoảng cách giữa gene đầu và gene cuối được cố định trong H (schema length);
- o_H là order của H (số bit cố định trong schema);
- p_c là xác suất crossover, p_m là xác suất mutation (tại mỗi locus).

Schema Theorem (dạng bất đẳng thức cho kì vọng):

$$\mathbb{E}[m_H(t+1)] \geq F_H(t) m_H(t) \left(1 - p_c \frac{l_H}{l-1}\right) (1 - p_m)^{o_H}. \quad (8)$$

Ý nghĩa: những schema ngắn, có ít bit cố định (nhỏ o_H), và có relative fitness $F_H(t) > 1$ sẽ có xu hướng gia tăng trong quần thể. Đây là cơ sở trực giác cho "building-block hypothesis": GA kết hợp những phần tốt (building blocks) từ nhiều cá thể để tạo ra lời giải tốt hơn.

Các tham số quan trọng (toán học).

- Kích thước quần thể N : quyết định độ phong phú mẫu cho phân phối; quá nhỏ dễ mất đa dạng.
- Xác suất crossover p_c và mutation p_m : ảnh hưởng cân bằng khám phá/khai thác.
- Cost đánh giá fitness: độ phức tạp tính toán thường là $\mathcal{O}(N \cdot \text{cost_eval} \cdot G)$ với G là số thế hệ.

7.1.3 Cách hoạt động của thuật toán

Các toán tử chính.

- **Selection:** Lấy mẫu theo phân phối p_i như phương trình 7 hoặc dùng tournament selection.
- **Crossover:** Cho hai cha mẹ $c^{(a)}$ và $c^{(b)}$. Với 1-point crossover tại vị trí k với $1 \leq k < l$, sinh con:
$$c^{(\text{child})} = (c_1^{(a)}, \dots, c_k^{(a)}, c_{k+1}^{(b)}, \dots, c_l^{(b)}).$$
- **Mutation:** Với mỗi locus, thực hiện biến đổi theo Bernoulli(p_m). Với mã hóa bit-string, mutation là bit-flip.
- **Elitism:** Giữ lại e cá thể tốt nhất sang thế hệ sau để tránh mất nghiệm tốt do tính ngẫu nhiên.

Algorithm 6 Genetic Algorithm (GA)

- 1: **Input:** kích thước quần thể N , chiều dài NST l , xác suất crossover p_c , xác suất mutation p_m , số thế hệ tối đa G , elitism e .
 - 2: Khởi tạo quần thể $P^0 = \{c^{(1)}, \dots, c^{(N)}\}$ (thường ngẫu nhiên).
 - 3: **for** $t = 0$ **to** $G - 1$ **do**
 - 4: Tính $F(c)$ cho mọi $c \in P^t$.
 - 5: Sao chép e cá thể tốt nhất sang P^{t+1} (elitism).
 - 6: **while** $\text{size}(P^{t+1}) < N$ **do**
 - 7: Chọn cặp cha mẹ theo selection (ví dụ roulette hoặc tournament).
 - 8: Với xác suất p_c , áp dụng crossover để sinh 1 hoặc 2 con; ngược lại sao chép cha mẹ.
 - 9: Áp dụng mutation cho từng con với xác suất p_m trên mỗi locus.
 - 10: Thêm con vào P^{t+1} .
 - 11: **end while**
 - 12: **end for**
 - 13: Trả về cá thể tốt nhất tìm được.
-

7.2 Hill Climbing (Steepest Ascent)

7.2.1 Giới thiệu chung

Hill Climbing (leo đồi, *steepest-ascent hill climbing*) là một giải thuật tìm kiếm cục bộ (local search) đơn giản, hoạt động bằng cách lặp lại hai bước: sinh lân cận và di chuyển sang nghiệm lân cận “tốt nhất” nếu nó cải thiện hàm mục tiêu. Thuật toán mang tính tham lam (greedy): luôn ưu tiên cải thiện tức thời, nên dễ rơi vào cực trị địa phương, plateau (vùng bằng phẳng) hoặc ridge (sườn hẹp).[RN20]

Trong bối cảnh tối ưu hóa, Hill Climbing có thể áp dụng cho cả không gian nghiệm rời rạc (ví dụ: Knapsack) và liên tục (ví dụ: Rastrigin, nếu ta định nghĩa được phép biến đổi lân cận). Trong đồ án này, Hill Climbing được dùng như một baseline truyền thống để so sánh với các metaheuristic bầy đàn.

7.2.2 Cơ sở toán học

Gọi \mathcal{X} là không gian nghiệm và $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu (giả sử bài toán tối thiểu hóa). Với mỗi nghiệm $x \in \mathcal{X}$, ta định nghĩa một tập lân cận $N(x) \subset \mathcal{X}$ thông qua một phép biến đổi cục bộ (ví dụ: lật một bit trong mã hóa nhị phân, hoán vị hai phần tử, hoặc nhiễu Gaussian trong không gian liên tục).

Ở bước lặp k , Hill Climbing dạng *steepest ascent* (cho bài toán tối đa hóa) hoặc *steepest descent* (cho bài toán tối thiểu hóa) thực hiện:

$$x_{k+1} = \arg \min_{y \in N(x_k)} f(y)$$

và chỉ cập nhật nếu $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ (tối thiểu hóa). Thuật toán dừng khi:

$$\min_{y \in N(x_k)} f(y) \geq f(x_k),$$

tức là không còn lân cận nào cải thiện được hàm mục tiêu – ta đạt tới một cực trị địa phương (local optimum) theo cấu trúc lân cận đã chọn.

Độ phức tạp mỗi vòng lặp phụ thuộc vào kích thước lân cận:

$$\text{cost_per_iter} = \mathcal{O}(|N(x)| \cdot \text{cost_eval}),$$

trong đó cost_eval là chi phí tính $f(x)$. Tổng chi phí xấp xỉ $\mathcal{O}(K \cdot |N| \cdot \text{cost_eval})$ với K là số vòng lặp đến khi hội tụ hoặc đạt ngưỡng dừng.

7.2.3 Cách hoạt động của thuật toán

Algorithm 7 Hill Climbing (Steepest Ascent / Descent)

- 1: **Input:** nghiệm khởi tạo x_0 , hàm mục tiêu f , hàm sinh lân cận $N(x)$, số vòng lặp tối đa K , ngưỡng cải thiện ϵ .
- 2: Đặt $x \leftarrow x_0$.
- 3: **for** $k = 1$ **to** K **do**
- 4: Sinh tập lân cận $N(x) = \{y_1, \dots, y_m\}$.
- 5: Tìm nghiệm tốt nhất trong lân cận:

$$y^* = \arg \min_{y \in N(x)} f(y) \quad (\text{giả sử tối thiểu hóa}).$$

- 6: **if** $f(y^*) < f(x) - \epsilon$ **then**
- 7: Cập nhật $x \leftarrow y^*$.
- 8: **else**
- 9: **break** {Không còn cải thiện đáng kể, dừng}
- 10: **end if**
- 11: **end for**
- 12: **Output:** nghiệm cuối cùng x và giá trị $f(x)$.

7.3 Simulated Annealing

7.3.1 Giới thiệu chung

Simulated Annealing (SA - tối luyến mô phỏng) là một metaheuristic tìm kiếm cục bộ có yếu tố ngẫu nhiên, lấy cảm hứng từ quá trình tối luyến vật liệu trong vật lý. Khác với Hill Climbing, SA cho phép chấp nhận tạm thời các nghiệm *xấu hơn* với một xác suất phụ thuộc vào nhiệt độ T , giúp thuật toán có khả năng thoát khỏi cực trị địa phương.[KGV83]

SA được đề xuất bởi Kirkpatrick và cộng sự (1983) như một mở rộng của thuật toán Metropolis.[KGV83] Với lịch trình làm nguội (cooling schedule) đủ chậm, SA có bảo đảm hội tụ về nghiệm tối ưu toàn cục trong giới hạn lý thuyết, dù trong thực tế thường sử dụng lịch trình nhanh hơn để đạt hiệu quả tính toán.

7.3.2 Cơ sở toán học

Giả sử bài toán tối thiểu hóa $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Tại bước k , với nghiệm hiện tại x_k và nhiệt độ $T_k > 0$, SA sinh một lân cận $y \in N(x_k)$ và xét hiệu:

$$\Delta f = f(y) - f(x_k).$$

Quy tắc chấp nhận:

$$x_{k+1} = \begin{cases} y, & \text{nếu } \Delta f \leq 0 \quad (\text{cải thiện}) \\ y \text{ với xác suất } p_{\text{accept}} = \exp\left(-\frac{\Delta f}{T_k}\right), & \text{nếu } \Delta f > 0 \\ x_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Khi T_k cao, xác suất chấp nhận nghiệm xấu tương đối lớn, giúp thuật toán khám phá không gian rộng hơn. Khi $T_k \rightarrow 0$, thuật toán dần trở nên giống Hill Climbing (chỉ chấp nhận nghiệm cải thiện). Lịch trình làm nguội thường được chọn dưới dạng:

$$T_{k+1} = \alpha T_k, \quad 0 < \alpha < 1,$$

hoặc

$$T_k = \frac{T_0}{1 + \beta k},$$

với T_0 là nhiệt độ ban đầu và $\beta > 0$ là hệ số làm nguội.

7.3.3 Cách hoạt động của thuật toán

Algorithm 8 Simulated Annealing (SA)

```

1: Input: nghiệm khởi tạo  $x_0$ , hàm mục tiêu  $f$ , hàm sinh lân cận  $N(x)$ , nhiệt độ ban đầu  $T_0$ ,
   nhiệt độ tối thiểu  $T_{\min}$ , số vòng lặp tối đa  $K$ , hệ số làm nguội  $\alpha \in (0, 1)$ .
2: Đặt  $x \leftarrow x_0$ ,  $x_{\text{best}} \leftarrow x_0$ ,  $T \leftarrow T_0$ .
3: for  $k = 1$  to  $K$  do
4:   Chọn ngẫu nhiên  $y \in N(x)$ .
5:   Tính  $\Delta f = f(y) - f(x)$ .
6:   if  $\Delta f \leq 0$  then
7:     chấp nhận  $y$ :  $x \leftarrow y$ .
8:   else
9:     Lấy  $u \sim \text{Uniform}(0, 1)$ .
10:    if  $u < \exp(-\Delta f/T)$  then
11:      chấp nhận  $y$ :  $x \leftarrow y$ .
12:    end if
13:   end if
14:   if  $f(x) < f(x_{\text{best}})$  then
15:     Cập nhật nghiệm tốt nhất  $x_{\text{best}} \leftarrow x$ .
16:   end if
17:   Cập nhật nhiệt độ  $T \leftarrow \alpha T$ .
18:   if  $T < T_{\min}$  then
19:     break
20:   end if
21: end for
22: Output: nghiệm tốt nhất  $x_{\text{best}}$  và giá trị  $f(x_{\text{best}})$ .

```

7.4 Breadth-First Search (BFS)

7.4.1 Giới thiệu chung

Breadth-First Search (BFS - tìm kiếm theo bề rộng) là một thuật toán tìm kiếm trên đồ thị/ cây trạng thái, khám phá các đỉnh (trạng thái) theo từng “lớp độ sâu” tăng dần. BFS là thuật toán *uninformed search* kinh điển, đảm bảo tìm được lời giải tối ưu về số bước (nếu mỗi cạnh có cùng chi phí) và luôn hoàn chỉnh (complete) nếu không gian trạng thái hữu hạn.[RN20, CLRS09]

Trong đồ án, BFS được sử dụng như một baseline truyền thống cho các bài toán rời rạc có không gian trạng thái nhỏ, nơi có thể duyệt gần như toàn bộ không gian (ví dụ: phiên bản nhỏ của Knapsack, bài toán đường đi trên lưới, ...).

7.4.2 Cơ sở toán học

Mô hình hóa bài toán dưới dạng đồ thị trạng thái có hướng hoặc vô hướng:

$$G = (V, E),$$

trong đó mỗi đỉnh $v \in V$ tương ứng với một trạng thái, và mỗi cạnh $(u, v) \in E$ tương ứng với một phép chuyển trạng thái hợp lệ. Cho s là trạng thái xuất phát, G là tập đích (*goal states*).

BFS mở rộng các đỉnh theo thứ tự độ sâu tăng dần: tất cả các đỉnh ở độ sâu 0, rồi đến tất cả ở độ sâu 1, ..., cho tới khi gặp một đỉnh thuộc G .

Với b là hệ số phân nhánh (branching factor), d là độ sâu nhỏ nhất của lời giải, độ phức tạp xấp xỉ:

$$\text{Time} = \mathcal{O}(b^d), \quad \text{Space} = \mathcal{O}(b^d),$$

do phải lưu toàn bộ “vòng biên” (frontier) ở mỗi lớp độ sâu. Đây là điểm yếu của BFS trên không gian trạng thái lớn.

7.4.3 Cách hoạt động của thuật toán

Algorithm 9 Breadth-First Search (BFS)

- 1: **Input:** đồ thị trạng thái (V, E) (ngầm qua hàm sinh hàng xóm), trạng thái bắt đầu s , tập đích G .
 - 2: Khởi tạo hàng đợi $Q \leftarrow \emptyset$, tập đã thăm $Visited \leftarrow \emptyset$.
 - 3: Thêm s vào Q và $Visited$.
 - 4: **while** Q không rỗng **do**
 - 5: Lấy phần tử đầu hàng đợi $u \leftarrow Q.pop_front()$.
 - 6: **if** $u \in G$ **then**
 - 7: Dừng và trả về đường đi từ s đến u (truy vết qua $parent$).
 - 8: **end if**
 - 9: **for** mỗi hàng xóm v của u **do**
 - 10: **if** $v \notin Visited$ **then**
 - 11: Thêm v vào $Visited$.
 - 12: Gán $parent$ của v là u (để truy vết đường đi).
 - 13: Thêm v vào cuối hàng đợi Q .
 - 14: **end if**
 - 15: **end for**
 - 16: **end while**
 - 17: Nếu vòng lặp kết thúc mà không tìm được đích, báo “không có lời giải”.
-

7.5 Depth-First Search (DFS)

7.5.1 Giới thiệu chung

Depth-First Search (DFS - tìm kiếm theo chiều sâu) là một thuật toán tìm kiếm trên đồ thị/cây, luôn ưu tiên đi sâu theo một nhánh cho tới khi không đi tiếp được nữa, rồi quay lui (backtracking). DFS cũng là một thuật toán *uninformed search*, không đảm bảo tối ưu và trong không gian vô hạn có thể không dừng nếu không có cơ chế cắt tỉa.[RN20, CLRS09]

Ưu điểm chính của DFS là chi phí bộ nhớ thấp hơn BFS, nên được dùng như baseline cho các bài toán rời rạc với không gian trạng thái lớn nhưng độ sâu hữu hạn.

7.5.2 Cơ sở toán học

Với cùng mô hình đồ thị trạng thái $G = (V, E)$, DFS mở rộng các đỉnh theo thứ tự *đi sâu nhất có thể*. Nếu dùng phiên bản có giới hạn độ sâu L (depth-limited DFS), ta chỉ cho phép đi tối đa L rồi quay lui.

Với hệ số phân nhánh b và độ sâu tối đa m (có thể lớn hơn d), độ phức tạp:

$$\text{Time} = \mathcal{O}(b^m), \quad \text{Space} = \mathcal{O}(b \cdot m),$$

do chỉ lưu một đường đi hiện tại và các nhánh chưa mở ở mỗi mức.

7.5.3 Cách hoạt động của thuật toán

Algorithm 10 Depth-First Search (DFS) dạng dùng ngăn xếp

```

1: Input: đồ thị trạng thái  $(V, E)$  (ngầm qua hàm sinh hàng xóm), trạng thái bắt đầu  $s$ , tập
   đích  $G$ .
2: Khởi tạo ngăn xếp  $S \leftarrow \emptyset$ , tập đã thăm  $Visited \leftarrow \emptyset$ .
3: Thêm  $s$  vào  $S$ .
4: while  $S$  không rỗng do
5:   Lấy phần tử trên đỉnh ngăn xếp  $u \leftarrow S.pop()$ .
6:   if  $u \in Visited$  then
7:     continue
8:   end if
9:   Thêm  $u$  vào  $Visited$ .
10:  if  $u \in G$  then
11:    Dừng và trả về đường đi từ  $s$  đến  $u$  (truy vết qua parent).
12:  end if
13:  for mỗi hàng xóm  $v$  của  $u$  do
14:    if  $v \notin Visited$  then
15:      Gán parent của  $v$  là  $u$ .
16:      Thêm  $v$  vào ngăn xếp  $S$ .
17:    end if
18:  end for
19: end while
20: Nếu vòng lặp kết thúc mà không tìm được đích, báo “không có lời giải”.

```

7.6 A* Search

7.6.1 Giới thiệu chung

A* Search là một thuật toán tìm kiếm có định hướng (informed search) sử dụng hàm heuristic để dẫn hướng tìm kiếm tới đích. A* đặc biệt phổ biến trong các bài toán tìm đường (path-finding) trên lưới, đồ thị, hoặc bản đồ, nhờ khả năng tìm được đường đi tối ưu với chi phí trung bình thấp hơn nhiều so với các thuật toán uninformed như BFS.[HNR68, RN20]

Ý tưởng cốt lõi của A* là đánh giá mỗi trạng thái n bằng một hàm:

$$f(n) = g(n) + h(n),$$

trong đó $g(n)$ là chi phí thực tế từ trạng thái bắt đầu đến n , còn $h(n)$ là ước lượng chi phí còn lại từ n đến đích. Nếu $h(n)$ được chọn “tốt”, A* sẽ tập trung mở rộng các trạng thái tiềm năng, giảm đáng kể số lượng trạng thái phải duyệt.

7.6.2 Cơ sở toán học

Xét đồ thị có trọng số dương:

$$G = (V, E), \quad c(u, v) > 0 \text{ là chi phí trên cạnh } (u, v).$$

Cho s là trạng thái bắt đầu, G (trùng ký hiệu, nhưng ngữ cảnh khác) là tập trạng thái đích. Với mỗi nút n , ta định nghĩa:

- $g(n)$: chi phí đường đi tốt nhất từ s đến n đã biết cho tới thời điểm hiện tại;
- $h(n)$: heuristic ước lượng chi phí tối thiểu từ n đến một đích bất kỳ;

- $f(n) = g(n) + h(n)$: ước lượng tổng chi phí của đường đi qua n .

Heuristic h được gọi là *admissible* nếu:

$$0 \leq h(n) \leq h^*(n), \quad \forall n,$$

trong đó $h^*(n)$ là chi phí thật sự tối thiểu từ n đến đích. Khi h admissible và chi phí cạnh là dương, A* đảm bảo tìm được đường đi tối ưu. Nếu h còn thỏa thêm tính *consistent* (hay *monotone*):

$$h(u) \leq c(u, v) + h(v), \quad \forall (u, v) \in E,$$

thì giá trị $f(n)$ dọc theo một đường đi sẽ không giảm, và mỗi nút chỉ cần đưa ra khỏi hàng đợi ưu tiên một lần.

7.6.3 Cách hoạt động của thuật toán

Algorithm 11 A* Search

```

1: Input: đồ thị  $(V, E)$ , chi phí cạnh  $c(u, v)$ , trạng thái bắt đầu  $s$ , tập đích  $G$ , heuristic  $h(n)$ .
2: Khởi tạo tập mở (open set) là một hàng đợi ưu tiên OPEN, tập đóng CLOSED.
3: Với mọi  $n \in V$ , đặt  $g(n) \leftarrow +\infty$ . Đặt  $g(s) \leftarrow 0$ ,  $f(s) \leftarrow h(s)$ .
4: Thêm  $s$  vào OPEN với khóa  $f(s)$ .
5: while OPEN không rỗng do
6:   Lấy nút  $n$  trong OPEN có  $f(n)$  nhỏ nhất và loại nó khỏi OPEN.
7:   if  $n \in G$  then
8:     Dừng và trả về đường đi tối ưu từ  $s$  đến  $n$  (truy vết qua parent).
9:   end if
10:  Thêm  $n$  vào CLOSED.
11:  for mỗi hàng xóm  $v$  của  $n$  do
12:    if  $v \in CLOSED$  then
13:      continue
14:    end if
15:    Tính chi phí tạm thời  $g_{tent} \leftarrow g(n) + c(n, v)$ .
16:    if  $g_{tent} < g(v)$  then
17:      Cập nhật parent của  $v$  là  $n$ .
18:      Cập nhật  $g(v) \leftarrow g_{tent}$ .
19:      Cập nhật  $f(v) \leftarrow g(v) + h(v)$ .
20:      if  $v$  chưa nằm trong OPEN then
21:        Thêm  $v$  vào OPEN với khóa  $f(v)$ .
22:      else
23:        Cập nhật khóa của  $v$  trong OPEN.
24:      end if
25:    end if
26:  end for
27: end while
28: Nếu vòng lặp kết thúc mà không gặp trạng thái đích, báo “không có đường đi”.

```

8 Các bài toán sử dụng để đánh giá

8.1 Các bài toán rời rạc

8.1.1 The travelling salesman problem

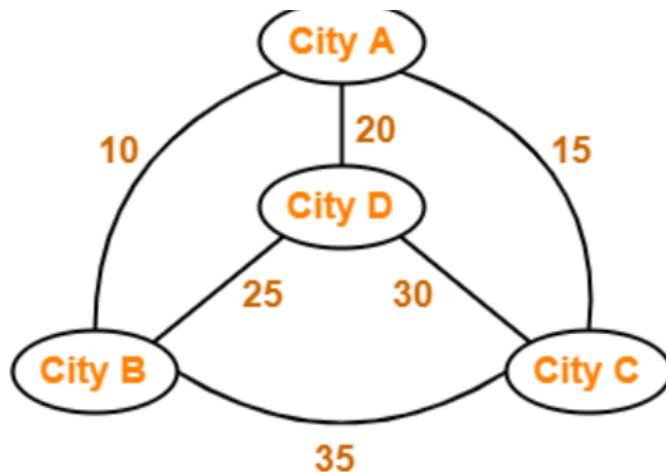
Giới thiệu chung

The travelling salesman problem (TSP) là một bài toán kinh điển trong lý thuyết đồ thị và có rất nhiều ứng dụng trong thực tế và kĩ thuật.[LLRKS85, Lap92]

Bài toán yêu cầu tìm ra tuyến đường ngắn nhất để một người đi qua tất cả các thành phố được cho, mỗi thành phố chỉ ghé thăm đúng một lần, và quay trở lại điểm xuất phát ban đầu.

Nó có thể được phát biểu dưới dạng đồ thị như sau: Cho một đồ thị vô hướng có trọng số, tìm chu trình ngắn nhất xuất phát từ một đỉnh bất kì, đi qua tất cả các đỉnh đúng một lần và quay về điểm xuất phát (chu trình hamilton ngắn nhất). Đây là một bài toán NP-hard[GJ79], có thể hiểu đơn giản là chúng ta chưa thể tìm ra lời giải đa thức chính xác cho bài toán này. Vì vậy, các phương pháp metaheuristic được đưa ra nhằm tìm ra lời giải chính xác gần đúng trong thời gian hợp lý.

Bài toán được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực của kĩ thuật và đời sống, đặc biệt là các bài toán tối ưu hóa như lập kế hoạch, lập lịch trình, hậu cần, đóng gói,...



Hình 2: Minh họa TSP (nguồn: Gate Vidyalay)

Những thuật toán áp dụng

ACO (Ant Colony Optimization) là một metaheuristic phù hợp cho các bài toán đồ thị, đặc biệt là TSP.

PSO (Particle Swarm Optimization) vốn thiết kế cho bài toán liên tục nhưng có thể điều chỉnh cho TSP bằng cách biểu diễn *thứ tự các thành phố* (permutation) là vị trí của từng hạt và biểu diễn vận tốc bằng các thao tác hoán vị (swap).

Tóm tắt cách PSO hoạt động trong TSP:

1. Mỗi hạt lưu một **route** (một hoán vị — chuỗi các chỉ số thành phố, bắt đầu và kết thúc tại 0).
2. Dánh giá độ phù hợp (fitness) của mỗi route bằng tổng khoảng cách giữa các cặp liên tiếp (dùng ma trận khoảng cách hoặc tính từ tọa độ).
3. Cập nhật “vận tốc” dưới dạng danh sách các cặp hoán đổi (swaps) dựa trên 3 thành phần: *inertia* (w) giữ một phần vận tốc cũ, *cognitive* (c1) hướng về personal best, và *social* (c2) hướng về global best.
4. Áp dụng các swap lên route để tạo route mới; nếu cần, thực hiện reshuffle (xáo trộn) để tăng khám phá.
5. Lặp lại cho đến khi đạt điều kiện dừng (số iter, hội tụ, v.v.).

Swap operation

- *Dịnh nghĩa:* Một swap là thao tác hoán đổi hai vị trí trong chuỗi route, ví dụ $\text{swap}(i, j)$ sẽ hoán đổi phần tử ở chỉ số i với phần tử ở chỉ số j trong route.
- *Ý nghĩa:* Mỗi swap thay đổi thứ tự thăm các thành phố, do đó có thể làm tăng hoặc giảm tổng chiều dài chuyến đi. Dùng tập hợp các swap (vận tốc rời rạc) để biểu diễn hướng di chuyển của một hạt trong không gian hoán vị.
- *Cách áp dụng trong PSO rời rạc:*
 1. Xây danh sách swap mới (kết hợp giữ lại một phần swap cũ theo *inertia*, thêm swap do *personal best* và swap do *global best*).
 2. Áp từng swap (theo thứ tự) lên route hiện tại: với mỗi (a, b) thực hiện hoán đổi phần tử tại vị trí a và b .
 3. Dảm bảo sau khi áp swap, route vẫn là một hoán vị hợp lệ (không xuất hiện đỉnh trùng lặp) — thao tác swap nguyên thủy luôn giữ tính hợp lệ vì chỉ hoán đổi vị trí giữa hai thành phần.

Genetic Algorithm (GA)

GA là thuật toán truyền thống dùng so sánh với ACO và PSO. GA thường thao tác trên biểu diễn nhiễm sắc (genotype) — ví dụ tọa độ thực của các thành phố hoán vị — và dùng các toán tử lai ghép (crossover), đột biến (mutation) để tìm kiếm. Trong đề tài này, GA có thể nhận tọa độ thực của thành phố làm đầu vào, sau đó chuyển sang ma trận khoảng cách để so sánh với ACO/PSO.

8.1.2 Knapsack Problem (KP)

Knapsack Problem (KP) là một bài toán tối ưu tổ hợp kinh điển. Phát biểu 0–1 Knapsack chuẩn như sau: cho n món đồ, mỗi món có trọng lượng $w_i > 0$ và giá trị $v_i > 0$, cùng một balo có sức chứa tối đa W . Ta cần chọn một tập con các món sao cho:

$$\max_{x \in \{0,1\}^n} f(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i \quad \text{thoả} \quad \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W,$$

trong đó $x_i = 1$ nghĩa là chọn món i , $x_i = 0$ là không chọn.

Bài toán 0–1 KP thuộc lớp NP-hard và là mô hình trùu tượng cho nhiều bài toán phân bổ tài nguyên: lựa chọn danh mục dự án dưới ràng buộc ngân sách, tải hàng lên xe với giới hạn tải trọng, chọn tập đặc trưng (feature subset selection) có chi phí, v.v.

Trong phạm vi đồ án, KP được dùng như một bài toán rời rạc đại diện, có không gian nghiệm $\{0,1\}^n$ và landscape nhiều cực trị cục bộ, giúp đánh giá khả năng tìm kiếm trên không gian tổ hợp của các thuật toán.

8.1.3 Graph Coloring (GC)

Giới thiệu chung

Graph Coloring (GC) là bài toán tô màu đồ thị: cho một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, mục tiêu là gán màu (số nguyên) cho mỗi đỉnh sao cho hai đỉnh kề nhau không trùng màu. Bài toán tối ưu kinh điển là tìm *chromatic number* $\chi(G)$ — số màu ít nhất cần dùng.[JT95, GJ79]

Có thể phát biểu dạng tối ưu:

$$\min_{c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}} k \quad \text{s.t.} \quad c(u) \neq c(v), \quad \forall (u, v) \in E.$$

Bài toán quyết định “đồ thị có tông được bằng $\leq k$ màu hay không” là NP-complete với hầu hết $k \geq 3$, và bài toán tìm $\chi(G)$ là NP-hard. GC xuất hiện trong nhiều ứng dụng: lập lịch thi, xếp ca kíp, phân bổ tần số, register allocation trong compiler, v.v.

Trong đồ án, GC đóng vai trò một bài toán rời rạc có cấu trúc đồ thị rõ ràng, giúp đánh giá khả năng xử lý ràng buộc cứng (hard constraints) của các thuật toán heuristic.

8.2 Các bài toán liên tục

Để đánh giá hiệu quả của các thuật toán metaheuristic trên không gian liên tục, nhóm sử dụng một bộ hàm chuẩn (benchmark functions) có tính chất đa dạng về độ lồi, số cực trị và mức độ “gai góc” của landscape. Các hàm này đều là bài toán tối thiểu hoá, với nghiệm tối ưu toàn cục và giá trị tối ưu đã biết trước, thuận tiện cho việc so sánh.

8.2.1 Sphere function

Giới thiệu chung

Sphere là hàm chuẩn đơn giản nhất, lồi, trơn, tách biến, thường dùng làm “bài kiểm tra sanity” cho thuật toán. Dạng d -chiều:

$$f(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2, \quad x_i \in [a, b],$$

với nghiệm tối ưu toàn cục tại $x^* = 0$, $f(x^*) = 0$. Miền thường dùng là $[-5.12, 5.12]^d$ hoặc $[-100, 100]^d$.[DJ75]

Hàm này unimodal (chỉ có một cực tiểu toàn cục), convex, và separable. Thuật toán hợp lý phải hội tụ rất nhanh trên Sphere; nếu không, gần như chắc rằng việc cài đặt hoặc tham số đang có vấn đề.

8.2.2 Rosenbrock function

Giới thiệu chung

Rosenbrock (Rosenbrock’s valley/banana function) là hàm chuẩn nổi tiếng vì có một “thung lũng parabol hẹp” chứa nghiệm tối ưu, khiến việc hội tụ trở nên khó dù hàm chỉ có một cực tiểu toàn cục. Dạng d -chiều:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2],$$

với nghiệm tối ưu toàn cục tại $x^* = (1, 1, \dots, 1)$, $f(x^*) = 0$. Miền thường dùng là $x_i \in [-5, 10]$.[Ros60]

Landscape của Rosenbrock có thung lũng dài, hẹp và cong; việc tìm được thung lũng khá dễ, nhưng “bò” dọc thung lũng đến điểm tối ưu thì khó, đặc biệt với thuật toán chỉ biết gradient cục bộ hoặc có bước nhảy cố định.

8.2.3 Rastrigin function [Ras74]

Giới thiệu chung

Rastrigin là hàm chuẩn đa cực trị (multimodal) kinh điển, được dùng để kiểm tra khả năng thoát bẫy cục bộ. Dạng d -chiều:

$$f(x) = 10d + \sum_{i=1}^d [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)], \quad x_i \in [-5.12, 5.12].$$

Nghiệm tối ưu toàn cục tại $x^* = 0$, $f(x^*) = 0$.

Hàm có rất nhiều cực tiểu cục bộ phân bố đều đặn; landscape “gợn sóng” dày đặc khiến các thuật toán dễ bị kẹt nếu kiểm soát khám phá/khuếch tán không tốt.

8.2.4 Ackley function

Giới thiệu chung

Ackley là một hàm chuẩn đa cực trị khác, có vùng biên ngoài tương đối phẳng và một “hố sâu” ở trung tâm. Dạng d -chiều thường dùng:

$$f(x) = -a \exp\left(-b \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(cx_i)\right) + a + e,$$

với các giá trị khuyến nghị $a = 20$, $b = 0.2$, $c = 2\pi$, và miền điển hình $x_i \in [-32.768, 32.768]$. Nghiệm tối ưu toàn cục tại $x^* = 0$, $f(x^*) = 0$. [Ack87]

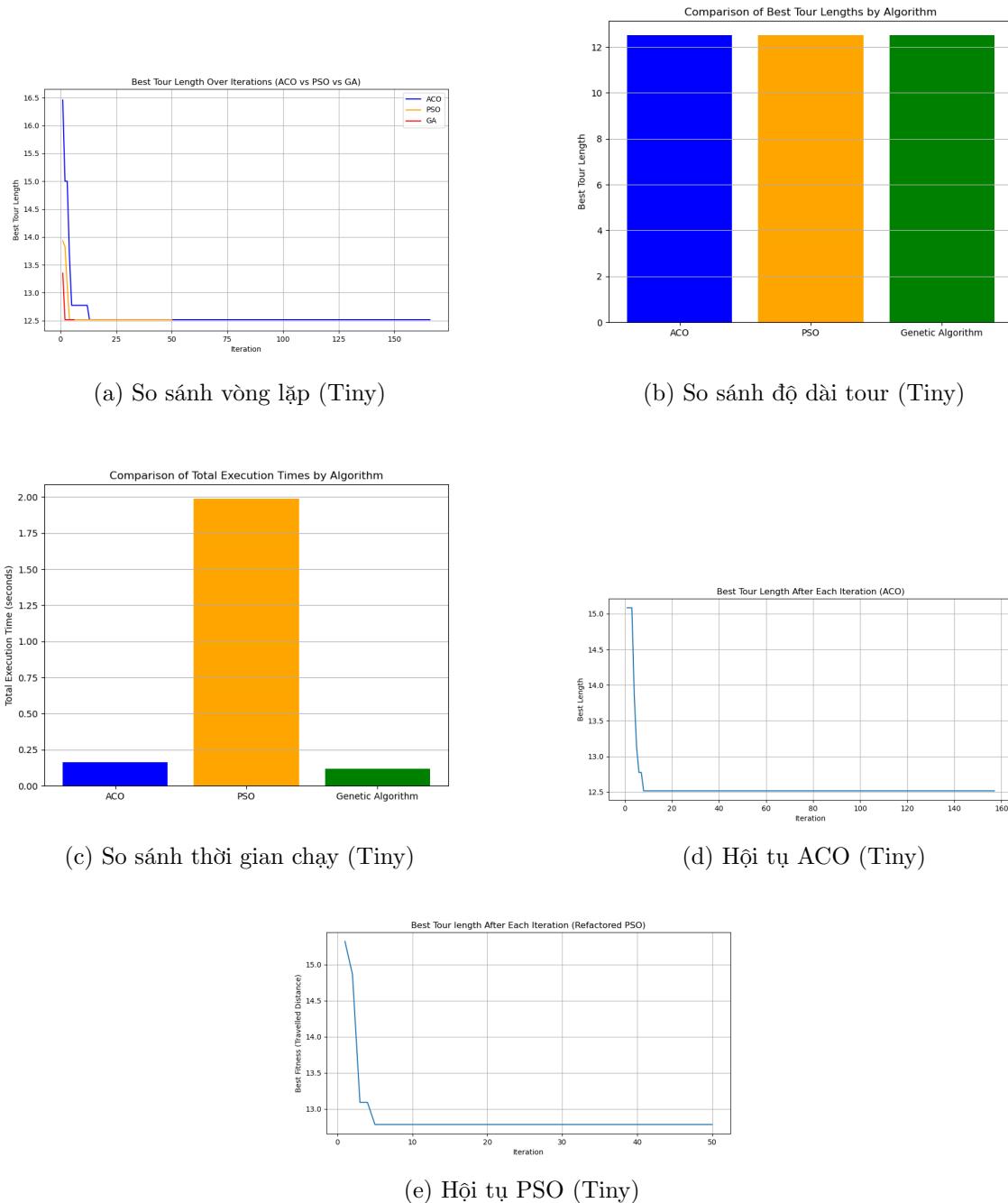
Ackley kết hợp một thành phần radial (phụ thuộc $\|x\|_2$) và một thành phần dao động cosine, tạo ra nhiều cực trị cục bộ nhưng có vùng biên khá “êm”; vì vậy rất hữu ích để kiểm tra xem thuật toán có bị lạc trong vùng bằng phẳng hay không.

9 Thiết lập và phân tích kết quả các bài toán đánh giá

9.1 ACO và PSO

Hai thuật toán này được áp dụng trên bài toán rác - TSP. Đối với thuật toán PSO, nó sẽ áp dụng tốt nhất trên bài toán liên tục, tuy nhiên vì đã có 2 thuật toán đảm nhận việc đó (ABC và CS) nên thuật toán PSO sẽ được áp dụng trên bài toán TSP để khám phá giới hạn của nó trong việc giải các bài toán khó.

9.1.1 Phân tích Bản đồ "Tiny" (10 đỉnh)



Hình 3: Kết quả thử nghiệm trên bản đồ “Tiny” (10 đỉnh).

Dựa trên các biểu đồ _tiny.png (Hình 3):

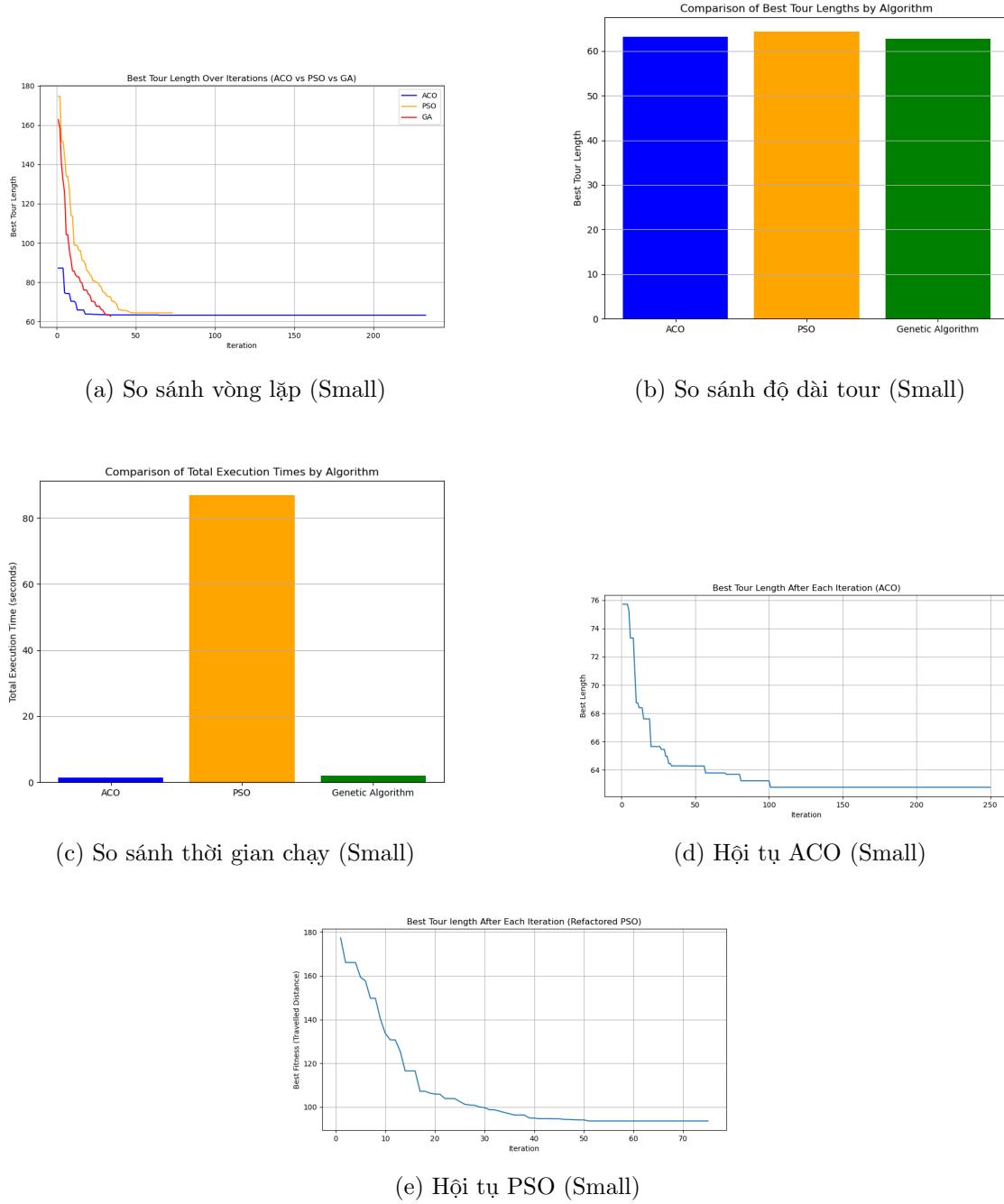
- **Về Chất lượng Giải pháp (Độ dài Tour tốt nhất):** Biểu đồ compare_length_tiny.png cho thấy cả ba thuật toán đều tìm được các giải pháp có chất lượng **gần như tương đương nhau**. ACO (màu xanh) và Genetic Algorithm (GA - màu xanh lá) tìm được độ dài tour tốt nhất, xấp xỉ 12.4. PSO (màu cam) cho kết quả kém hơn một chút, xấp xỉ 12.5. Với bài toán quá nhỏ, sự khác biệt này là không đáng kể.
- **Về Thời gian Chạy (Total Execution Time):** Đây là nơi có sự khác biệt rõ rệt nhất

(biểu đồ `compare_time_tiny.png`). **PSO (cam) cực kỳ chậm** (khoảng 1.85 giây). ACO (xanh) và GA (xanh lá) **rất nhanh** (lần lượt khoảng 0.15 giây và 0.08 giây). GA là nhanh nhất.

- Về **Tốc độ Hội tụ (Số vòng lặp)**: Biểu đồ `compare_iterator_tiny.png` cho thấy cả ba thuật toán đều hội tụ (tìm thấy giải pháp tốt nhất) **rất nhanh, chỉ trong khoảng 10-15 vòng lặp đầu tiên**.

Tóm tắt (Tiny): Với bài toán 10 đỉnh, cả ba thuật toán đều tìm ra giải pháp tốt gần nhau. Tuy nhiên, PSO tốn thời gian tính toán *lớn hơn hàng chục lần* so với ACO và GA.

9.1.2 Phân tích Bản đồ "Small" (30 đỉnh)



Hình 4: Kết quả thử nghiệm trên bản đồ “Small” (30 đỉnh).

Dựa trên các biểu đồ `_small.png` (Hình 4):

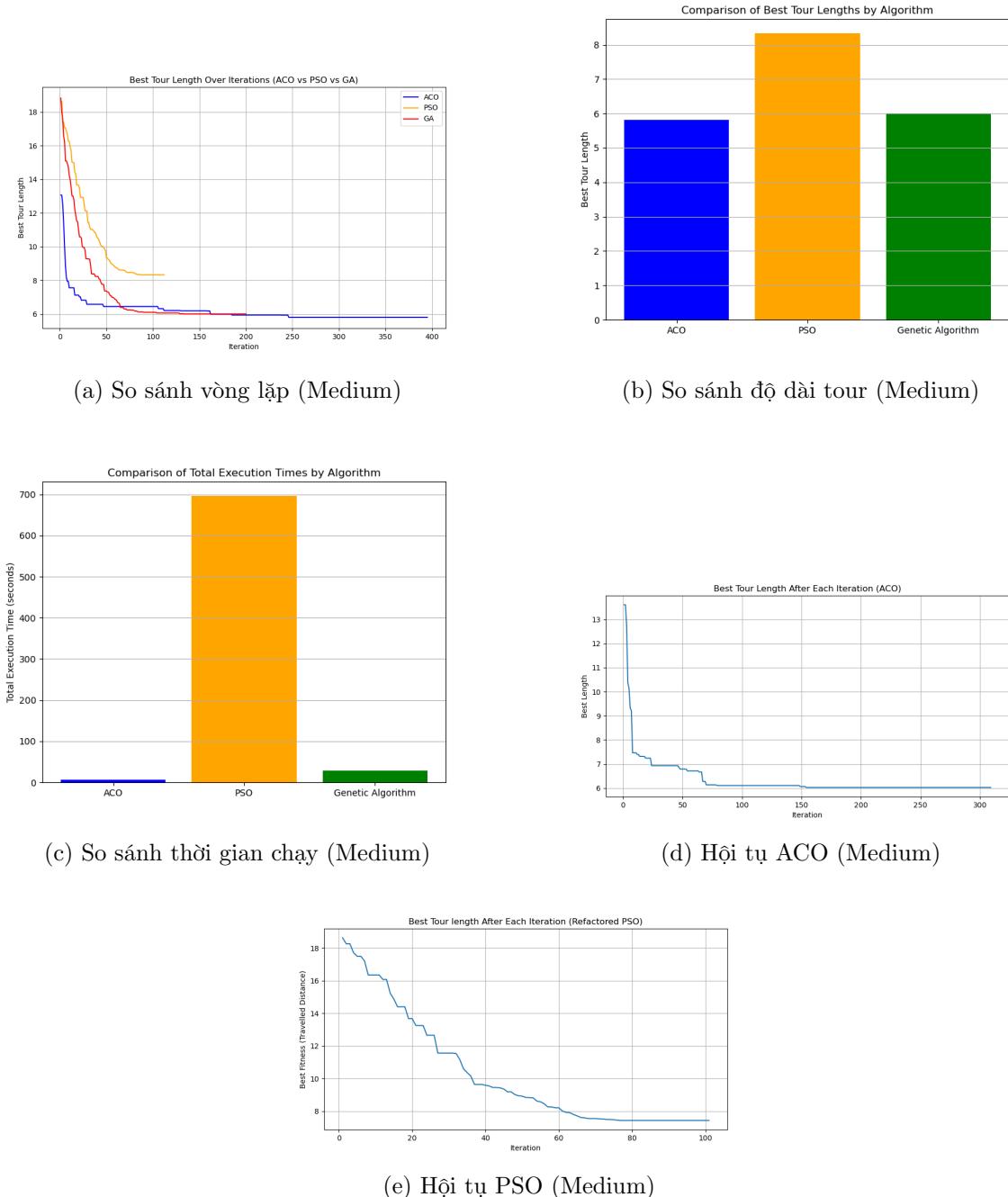
- **Về Chất lượng Giải pháp (Độ dài Tour tốt nhất):** Khi bài toán phức tạp hơn, sự khác biệt bắt đầu xuất hiện (biểu đồ `compare_length_small.png`). GA (xanh lá) tìm được giải pháp tốt nhất (ngắn nhất), khoảng 62.5. ACO (xanh) đứng thứ hai, rất sát sao, khoảng 63.0. PSO (cam) cho kết quả **tệ nhât** (dài nhất), khoảng 64.0.
- **Về Thời gian Chạy (Total Execution Time):** Xu hướng từ bản đồ "tiny" trở nên cực kỳ rõ rệt (biểu đồ `compare_time_small.png`). **PSO (cam) tốn thời gian một cách**

báo động (gần 90 giây). ACO (xanh) và GA (xanh lá) vẫn duy trì hiệu quả, **rất nhanh** (lần lượt khoảng 1.5 giây và 2.0 giây). Lần này, ACO là nhanh nhất.

- **Về Tốc độ Hội tụ (Số vòng lặp):** Biểu đồ `compare_iterator_small.png` cho thấy: ACO (xanh) cần nhiều vòng lặp nhất để hội tụ hoàn toàn (khoảng 75-80 vòng lặp) nhưng liên tục cải thiện để đạt kết quả tốt. PSO (cam) và GA (đỏ) đường như hội tụ (ngừng cải thiện) nhanh hơn (khoảng 40-50 vòng lặp), nhưng lại bị kẹt ở các giải pháp kém chất lượng hơn.

Tóm tắt (Small): Khi bài toán lớn lên 30 đỉnh, PSO bộc lộ rõ điểm yếu kép: vừa cho **kết quả tệ nhất** vừa tốn **thời gian chạy lâu nhất** (gấp ~45 lần GA và ~60 lần ACO). ACO và GA vẫn rất hiệu quả.

9.1.3 Phân tích Bản đồ "Medium" (50 đỉnh)



Hình 5: Kết quả thử nghiệm trên bản đồ “Medium” (50 đỉnh).

Dựa trên các biểu đồ `_medium.png` (Hình 5):

- **Về Chất lượng Giải pháp (Độ dài Tour tốt nhất):** Đối với bài toán rất phức tạp với số đỉnh lớn, sự khác biệt càng được lộ rõ (biểu đồ `compare_length_medium.png`). ACO và GA tìm được giải pháp tốt nhất (ngắn nhất) khá sát nhau, khoảng 6.0. PSO (cam) cho kết quả **tệ nhất**, khoảng 8.3.
- **Về Thời gian Chạy (Total Execution Time):** PSO (cam) tiếp tục ngắn quá nhiều thời gian. ACO (xanh) và GA (xanh lá) vẫn duy trì hiệu quả, tuy nhiên đã có sự vượt

trội từ ACO.

- **Về Tốc độ Hội tụ (Số vòng lặp):** ACO (xanh) cần nhiều vòng lặp nhất để hội tụ hoàn toàn nhưng liên tục cải thiện để đạt kết quả tốt. PSO (cam) và GA (đỏ) hội tụ nhanh hơn (theo số vòng lặp) nhưng bị kẹt và không thể tìm ra giải pháp tốt nhất.

Tóm tắt (Medium): Khi bài toán lớn lên 50 đỉnh, kết quả càng phân hóa rõ rệt. ACO tiếp tục thể hiện sự áp đảo, còn PSO trở nên càng tệ và chứng tỏ sự thiếu phù hợp.

9.1.4 Thảo luận

ACO: Ưu điểm / Nhược điểm.

Điểm mạnh:

- **Hiệu suất thời gian xuất sắc:** ACO là thuật toán nhanh nhất trong tất cả thử nghiệm và có khả năng mở rộng (scaling) thời gian rất tốt khi kích thước bài toán tăng lên.
- **Chất lượng giải pháp cao:** Luôn tìm được giải pháp nằm trong top 2, chứng tỏ khả năng tối ưu mạnh mẽ và không bị mắc kẹt ở điểm tối ưu cục bộ quá tệ.

Điểm yếu:

- **Hội tụ giai đoạn cuối chậm:** Biểu đồ ACO_small.png cho thấy thuật toán tìm ra giải pháp "khá tốt" (khoảng 64) rất nhanh (chỉ sau ~40 vòng lặp), nhưng phải mất thêm ~40 vòng lặp nữa để tinh chỉnh dần dần xuống giải pháp cuối cùng (63).

Tiềm năng cải thiện:

- Các tham số của ACO (như tốc độ bay hơi pheromone, tầm quan trọng của pheromone so với khoảng cách) có thể được **tinh chỉnh (tuning)**. Tăng cường "khai thác" (exploitation) ở giai đoạn sau có thể giúp hội tụ nhanh hơn.

PSO: Ưu điểm / Nhược điểm.

Điểm mạnh:

- Thuật toán phù hợp với các bài toán tối ưu **liên tục** và khá dễ cài đặt.
- Đường cong hội tụ vẫn cho thấy thuật toán có cải thiện nghiệm theo thời gian (không "chết đứng" hoàn toàn).

Điểm yếu:

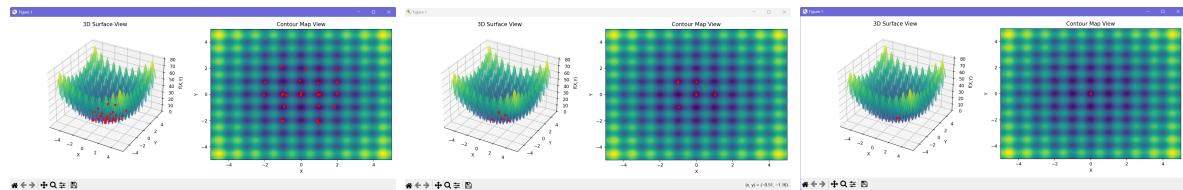
- **Không phù hợp với bài toán rời rạc:** PSO vốn được thiết kế cho các bài toán tối ưu liên tục. Việc phải "ép" nó giải TSP (bài toán rời rạc trên hoán vị) thông qua mã hoá phức tạp khiến hiệu quả rất kém.
- **Thời gian chạy rất chậm:** Thời gian thực thi cao hơn ACO và GA hàng chục lần khi kích thước bài toán tăng.
- **Chất lượng giải pháp thấp:** Dễ bị mắc kẹt tại các điểm tối ưu cục bộ kém; ở các bản đồ Small/Medium cho kết quả tệ nhất trong ba thuật toán.
- **Khả năng mở rộng cực kỳ tệ:** Thời gian chạy tăng vọt phi tuyến khi số đỉnh tăng, cho thấy PSO gần như không phù hợp với TSP.

Tiềm năng (và giới hạn) cải thiện:

- **Không nên dùng PSO cho TSP:** Với cấu trúc hiện tại, PSO đơn giản là lựa chọn sai bài toán; việc tinh chỉnh tham số khó mà cứu được bản chất này.
- **Ứng dụng đúng chỗ:** Sức mạnh thực sự của PSO nằm ở các bài toán tối ưu liên tục, nơi khái niệm “vị trí” và “vận tốc” có ý nghĩa tự nhiên. Trong bối cảnh đó, PSO có thể vượt trội hơn nhiều so với kết quả thu được trên TSP.

9.2 ABC

Sau nhiều lần thử với nhiều loại bài toán khác nhau, ta thấy thuật toán ABC có độ ổn định cao, performance tốt với cả những hàm số đa cực trị hay có cực trị đặc biệt



Hình 6: Sau lần 10

Hình 7: Sau lần 30

Hình 8: Kết quả

So sánh với các thuật giải truyền thống: như đã nói ở trên, thuật toán ABC có performance cao, giải quyết tốt những bài toán mà các thuật toán truyền thống không giải được, chẳng hạn như hàm rastrigin:

```

Thuật toán: abc
Thời gian chạy: 0.671781 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 707.01 KB
Kết quả đúng

Thuật toán: hill_climbing
Thời gian chạy: 0.036300 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 3.94 KB
Kết quả sai hoặc sai số lớn: Giá trị nhỏ nhất là 24.874466230559293 tại điểm [-2.983242132059743, -3.9805216831151227].
Ký vọng: Giá trị nhỏ nhất là 0 tại điểm [0, 0]. 

Thuật toán: simulated_annealing
Thời gian chạy: 0.083120 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 3.63 KB
Kết quả sai hoặc sai số lớn: Giá trị nhỏ nhất là 17.910252215396255 tại điểm [-2.986562219510941, 2.9864052936182723].
Ký vọng: Giá trị nhỏ nhất là 0 tại điểm [0, 0]. 

Thuật toán: genetic_algorithm
Thời gian chạy: 0.506472 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 50.28 KB
Kết quả sai hoặc sai số lớn: Giá trị nhỏ nhất là 1.0898544046660206 tại điểm [-1.015911273480227, -0.006289449494970234].
Ký vọng: Giá trị nhỏ nhất là 0 tại điểm [0, 0].

```

Tuy nhiên ABC cũng có điểm hạn chế, đó là tốc độ chậm hơn đáng kể so với các thuật toán truyền thống như hill climbing hay simulated annealing, đặc biệt là trong một số bài toán không quá phức tạp, chẳng hạn như hàm circle (nửa dưới hình cầu):

Thuật toán: abc
Thời gian chạy: 0.581222 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 696.69 KB
Kết quả đúng
Thuật toán: hill_climbing
Thời gian chạy: 0.020168 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 4.75 KB
Kết quả đúng
Bộ nhớ dùng (peak): 3.98 KB
Kết quả đúng
Thuật toán: genetic_algorithm
Thời gian chạy: 0.340867 giây
Bộ nhớ dùng (peak): 47.87 KB
Kết quả đúng

Ngoài ra, bộ nhớ sử dụng trong thuật toán ABC cũng nhiều hơn, tỉ lệ thuận với số lượng "con ong" được sử dụng.

9.3 Firefly Algorithm

9.3.1 Thuật toán dùng để so sánh

Để đặt Thuật toán Đom Đóm (FA) vào bối cảnh hợp lý, chúng tôi so sánh với ba thuật toán metaheuristic cổ điển: Hill Climbing (HC), Simulated Annealing (SA) và Genetic Algorithm (GA). Toàn bộ thuật toán được hiện thực trong cùng một khung mã Python, dùng chung: (i) giao diện bài toán, (ii) cơ chế sinh nghiệm khởi tạo, (iii) chuẩn hoá cách ghi log (history, số đánh giá, trạng thái run, ...) và (iv) pipeline phân tích/visualize dùng chung cho cả Rastrigin và Knapsack.

Hill Climbing (HC).

HC là baseline tham lam địa phương: luôn giữ một nghiệm hiện tại, sinh lân cận và chỉ chấp nhận nghiệm tốt hơn; khi không cải thiện sau một số vòng lặp thì restart.

- **Rastrigin (liên tục):** nghiệm được mã hoá dưới dạng vector thực; lân cận sinh bằng perturbation ngẫu nhiên trên từng chiều (Gaussian/Uniform tùy cấu hình). Mỗi vòng lặp đánh giá một tập lân cận có kích thước cố định và chọn best improvement; số vòng lặp hiệu dụng được suy ra từ budget và số lân cận mỗi vòng.
- **Knapsack (0/1):** nghiệm là vector nhị phân; lân cận sinh bằng bit-flip trên một số vị trí; khi bị kẹt lâu trên plateau (không cải thiện trong một số vòng) thì restart. Hàm mục tiêu dùng cùng quy ước với các thuật toán khác (tối đa hoá giá trị, đồng thời kiểm tra ràng buộc).

Simulated Annealing (SA).

SA dùng cùng cấu trúc lân cận với HC, nhưng cho phép chấp nhận nghiệm xấu hơn với xác suất

$$\mathbb{P}(\text{chấp nhận}) = \exp\left(-\frac{\Delta f}{T}\right),$$

trong đó T là nhiệt độ, giảm dần theo lịch làm nguội hình học $T_{k+1} = \text{cooling_rate} \cdot T_k$ cho tới khi chạm T_{\min} .

- **Rastrigin (liên tục):** dùng cùng kiểu perturbation như HC để đảm bảo so sánh công bằng; nhiệt độ khởi tạo T_0 tương đối cao, hệ số làm nguội gần 1, và T_{\min} cố định cho mọi cấu hình.

- **Knapsack (0/1):** vẫn dùng lân cận bit-flip; chỉ điều chỉnh T_0 và `cooling_rate`. Mỗi bước đánh giá đúng một nghiệm mới, nên số vòng lặp bằng budget.

Genetic Algorithm (GA).

GA duy trì một quần thể cá thể và lặp lại chu trình: chọn lọc (tournament selection), lai ghép (crossover) và đột biến (mutation), kèm một mức elitism để giữ lại các cá thể tốt nhất qua thế hệ.

- **Rastrigin (liên tục):** cá thể là vector thực chiều d ; crossover và mutation được thiết kế cho không gian liên tục, với tỉ lệ crossover/mutation và kích thước quần thể `pop_size` được cố định theo từng cấu hình Rastrigin trong `config.py`. Budget tổng được phân bổ thành $\text{max_iter} \times \text{pop_size}$ lượt đánh giá.
- **Knapsack (0/1):** cá thể là vector nhị phân; crossover và mutation đều thao tác trên bit; `pop_size` tăng theo kích thước bài toán (lớn hơn cho $n = 200$ so với $n = 50, 100$). Trong mọi trường hợp luôn bật elitism và sử dụng tournament selection với kích thước giải đấu cố định.

Firefly Algorithm (FA).

FA mô phỏng bầy đom đóm trong đó mỗi nghiệm là một cá thể phát sáng; cá thể kém sáng di chuyển về phía cá thể sáng hơn với cường độ phụ thuộc khoảng cách và tham số hấp dẫn β_0 , trong khi thành phần nhiễu có biên độ α giúp duy trì khả năng khám phá.

- **Rastrigin (liên tục):** FA được dùng dưới dạng chuẩn trong không gian liên tục: vị trí đom đóm là vector thực, khoảng cách được tính trong không gian Euclid, và chuyển động kết hợp giữa thành phần hút (về các nghiệm tốt hơn) và nhiễu ngẫu nhiên. Ba cấu hình Rastrigin trong `config.py`—`quick_convergence` ($d = 10$), `multimodal_escape` ($d = 30$) và `scalability` ($d = 50$)—mỗi cấu hình có một bộ tham số FA riêng (số đom đóm, α, β_0, γ). Khi dimension tăng, `n_fireflies` và budget tăng để bù lại độ khó; α được giữ trong khoảng vừa đủ để tránh hội tụ quá sớm; γ giảm dần theo d nhằm tránh việc lực hút bị triệt tiêu quá nhanh do khoảng cách tăng theo \sqrt{d} .
- **Knapsack (0/1):** [Pis05] dùng biến thể FA đã rời rạc hoá, đúng với cấu hình trong `config.py` và `instance_generator.py`: mỗi đom đóm là một vector nhị phân chiều n ; chuyển động có hướng lật tối đa `max_flips_per_move` = 3 bit để tiến gần cá thể sáng hơn; ngoài ra mỗi bit còn có xác suất bị lật do nhiều $\alpha_{\text{flip}} = 0,2$ để duy trì đa dạng. Ràng buộc sức chứa được xử lý bằng chiến lược repair `greedy_remove` (loại dần các vật phẩm có tỉ lệ v_k/w_k thấp nhất) để đưa nghiệm về trạng thái feasible; cơ chế penalty vẫn được hỗ trợ trong code nhưng không được dùng trong benchmark chính. Số đom đóm `n_fireflies` tăng theo kích thước bài toán: với $n \leq 100$ dùng 30 đom đóm, với $n = 200$ dùng 40; budget tổng tương ứng là 5000 và 10000 lần đánh giá, phân bổ thành $\text{max_iter} \times \text{n_fireflies}$.

Lưu ý về tham số. Các tham số *không* dùng chung cho toàn bộ lớp bài toán, mà được cố định theo từng kịch bản **benchmark**:

- **Rastrigin:** mỗi cấu hình `quick_convergence` (10D), `multimodal_escape` (30D), `scalability` (50D) có một *RastriginConfig* riêng trong `config.py`, chứa: dimension, budget, ngưỡng gold/silver/bronze và bộ tham số FA, SA, HC, GA tương ứng. Các tham số này được cố định cho toàn bộ 30 lần chạy (30 seeds) và không tune theo từng instance.
- **Knapsack:** `get_knapsack_configs()` sinh các cấu hình cho $n \in \{50, 100, 200\}$, mỗi cấu hình gắn với một loại instance (uncorrelated, weakly, strongly, inverse) và một `instance_seed` $\in \{42, 123, 999\}$. Trong mỗi cấu hình, budget, `n_fireflies` và `pop_size` được scale theo n như đã nêu; các tham số này cố định cho toàn bộ 30 lần chạy metaheuristic trên cùng một instance.

9.3.2 Bài toán đánh giá

Hàm Rastrigin (liên tục). Hàm Rastrigin là một hàm kiểm thử kinh điển trong tối ưu hoá toàn cục: phi lồi, đa cực trị mạnh, với rất nhiều cực tiểu địa phương phân bố đều trong không gian nghiệm, và một cực tiểu toàn cục tại $\mathbf{0}$ với $f(\mathbf{0}) = 0$. Hàm chuẩn được định nghĩa trên miền $[-5,12, 5,12]^d$

$$f(\mathbf{x}) = 10d + \sum_{i=1}^d (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)).$$

Trong benchmark này, chúng tôi sử dụng ba cấu hình được định nghĩa tương ứng minh trong RASTRIGIN_CONFIGS:

- **quick_convergence:** $d = 10$, budget 10^4 đánh giá; mục tiêu là quan sát tốc độ hội tụ sớm của các thuật toán trên một phiên bản tương đối dễ.
- **multimodal_escape:** $d = 30$, budget 3×10^4 ; nhấn mạnh khả năng thoát bẫy cục bộ khi không gian nghiệm mở rộng và số lượng cực tiểu địa phương tăng.
- **scalability:** $d = 50$, budget 5×10^4 ; đây là cấu hình khó nhất, dùng để kiểm tra xu hướng suy giảm hiệu năng khi tăng dimension trong điều kiện budget hữu hạn.

Mỗi cấu hình đi kèm một bộ ngưỡng chất lượng (gold/silver/bronze) riêng cho sai số so với optimum; các ngưỡng này được đặt nối lỏng dần khi dimension tăng và được sử dụng nhất quán trong toàn bộ pipeline phân tích.

Bài toán Knapsack 0/1 (rời rạc). [SMCM21] Bài toán Knapsack 0/1 được mô hình hoá dưới dạng tối ưu hoá tổ hợp: cho trước n vật phẩm với trọng lượng w_k và giá trị v_k , cùng sức chứa C , tìm tập con các vật phẩm sao cho tổng trọng lượng không vượt quá C và tổng giá trị là lớn nhất.

Các instance được sinh bằng `generate_knapsack_instance()` trong `instance_generator.py` với bốn kiểu phân phối giá trị-trọng lượng chuẩn trong literature:

- **uncorrelated:** v_k và w_k độc lập, đều phân bố đều trên cùng một khoảng; không có cấu trúc tương quan rõ rệt.
- **weakly correlated:** w_k được sinh trước, $v_k \approx w_k$ cộng thêm nhiễu nhỏ; tạo ra tương quan dương yếu.
- **strongly correlated:** $v_k = w_k + \text{const}$; tương quan dương mạnh, cấu trúc gần với trường hợp “giá trị tỷ lệ với trọng lượng”.
- **inverse:** v_k giảm khi w_k tăng (dựa trên w_{\max}); tạo ra tương quan âm, thường được xem là khó hơn với các heuristic tham lam.

Sức chứa C được đặt bằng một tỉ lệ cố định của tổng trọng lượng (capacity_ratio trong code).

Cấu hình benchmark. [DM02, MW09]

- **Kích thước:** $n \in \{50, 100, 200\}$.
- **Instance:** với mỗi cặp $(n, \text{instance_type})$, sinh 3 instance độc lập với $\text{instance_seed} \in \{42, 123, 999\}$.
- **Budget:** nếu $n \leq 100$ thì budget là 5000 lần đánh giá; nếu $n = 200$ thì budget là 10000. Budget này được chuyển thành số vòng lặp cho từng thuật toán dựa trên kích thước quần thể/tập lân cận.

- **Nghiệm tối ưu:** với mọi instance có $n \leq 200$, nghiệm tối ưu z^* được tính bằng Dynamic Programming (DP) trong `run_knapsack.py` và được lưu lại trong metadata; đây là chuẩn cho mọi tính toán optimality gap.
- **Số lần chạy metaheuristic:** trên mỗi instance, mỗi thuật toán được chạy 30 lần với seed khác nhau ($seed \in \{0, \dots, 29\}$), đúng như danh sách `seeds` trong code.

9.3.3 Chỉ số đánh giá

Rastrigin. Rastrigin được xem như bài toán minimization với nghiệm tối ưu toàn cục $f^* = 0$. Trên tập kết quả thu được, chúng tôi sử dụng các chỉ số sau, bám sát chuẩn COCO/BBOB và các công trình về benchmarking tối ưu hoá:

- **ECDF fixed-target:** hàm phân phối thực nghiệm của runtime (số đánh giá hàm) để đạt các mức sai số mục tiêu (gold/silver/bronze). Mỗi điểm trên đường cong biểu diễn tỉ lệ run đã đạt target trong không quá N đánh giá.
- **Fixed-budget summary:** sai số cuối cùng tại một số mốc budget chuẩn hoá (ví dụ 10%, 25%, 50%, 75%, 100% budget) được dùng để so sánh chất lượng nghiệm khi tài nguyên bị giới hạn.
- **ERT (Expected Running Time):** số lần đánh giá kỳ vọng để đạt một target nhất định. ERT được tính trên cả các run thành công và thất bại bằng công thức chuẩn trong literature: runtime của run thất bại được thay bằng budget và đưa vào mẫu.
- **Performance profiles:** theo định nghĩa của Dolan–Moré, performance profile là hàm phân phối của tỉ lệ hiệu năng $\rho_{p,s}$ giữa thuật toán s và thuật toán tốt nhất trên cùng bài toán p . Biểu đồ thể hiện xác suất một thuật toán có $\rho_{p,s} \leq \tau$ khi quét qua các problem.
- **Data profiles:** theo Moré–Wild, data profile đo tỉ lệ problem được giải tới một mức chất lượng cho trước trong budget chuẩn hoá ν (số đánh giá trên mỗi biến). Đây là góc nhìn “theo budget” bổ sung cho performance profile.

Mọi chỉ số runtime phía trên đều được tính dựa trên số đánh giá hàm (function evaluations), không dùng thời gian thực, để giảm nhiễu do khác biệt phần cứng.

Knapsack. Đối với Knapsack 0/1, chúng tôi khai thác việc có nghiệm tối ưu z^* từ DP để xây dựng các chỉ số dựa trên *optimality gap*:

$$\text{gap} = \frac{z^* - z_{\text{alg}}}{z^*} \times 100\%,$$

với z_{alg} là giá trị nghiệm tốt nhất của thuật toán.

- **Các tier chất lượng:** sử dụng ba ngưỡng

$$1\%, \quad 5\%, \quad 10\%$$

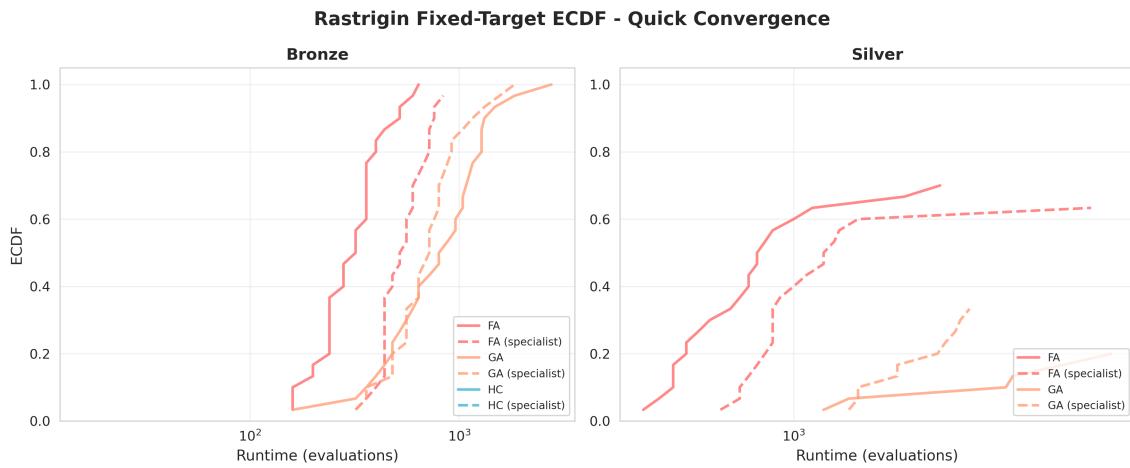
tương ứng với gold, silver, bronze, trùng với `KNAPSACK_GAP_THRESHOLDS` trong `config.py`. Các tier này được dùng vừa để đánh nhận chất lượng nghiệm cuối cùng, vừa làm target cho các phân tích runtime.

- **Tỉ lệ thành công theo tier:** trên mỗi cấu hình $(n, \text{instance_type})$, tính tỉ lệ run đạt gap \leq ngưỡng tương ứng trong budget cho phép.

- **Feasibility rate:** tỉ lệ nghiệm cuối cùng thoả ràng buộc sức chứa. Chỉ số này đặc biệt quan trọng khi so sánh các chiến lược xử lý ràng buộc (repair so với penalty).
- **Runtime và profile:** tương tự Rastrigin, chúng tôi xây dựng ECDF fixed-target, ERT, performance profiles và data profiles, nhưng target ở đây là các ngưỡng gap (1%, 5%, 10%). Để đảm bảo ý nghĩa, các phân tích này chỉ sử dụng các instance có `has_dp_optimal = True` trong metadata.

Toàn bộ chỉ số trên được trích xuất tự động bởi `analyze_results.py` dựa trên các JSON kết quả từ `run_rastrigin.py` và `run_knapsack.py`, sau đó được sử dụng bởi `visualize.py` để tạo các biểu đồ phục vụ đánh giá định tính và định lượng.

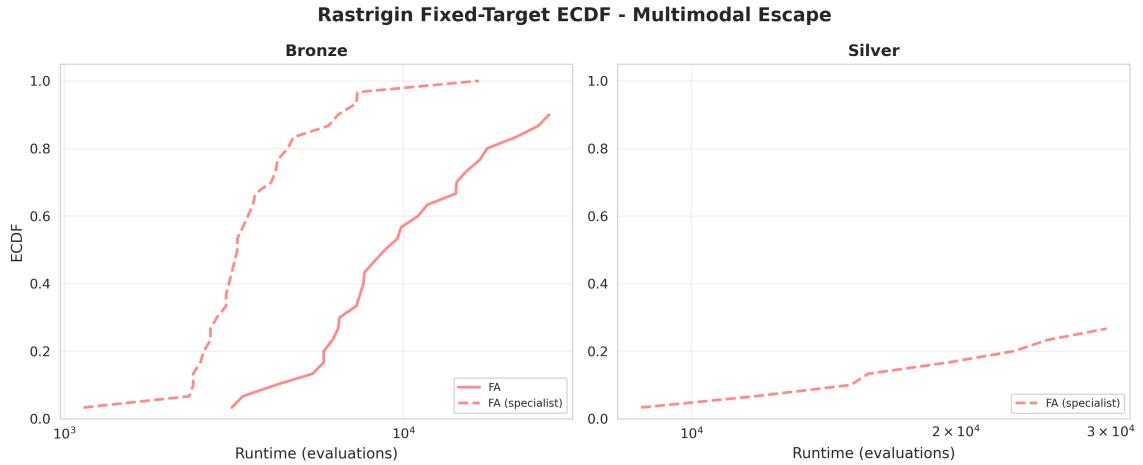
9.3.4 Rastrigin: mức độ tiệm cận nghiệm tối ưu và đặc trưng hội tụ



Hình 9: ECDF cho quick_convergence (dim=10).

ECDF theo ngưỡng mục tiêu. Đối với cấu hình 10 chiều, ECDF cho thấy:

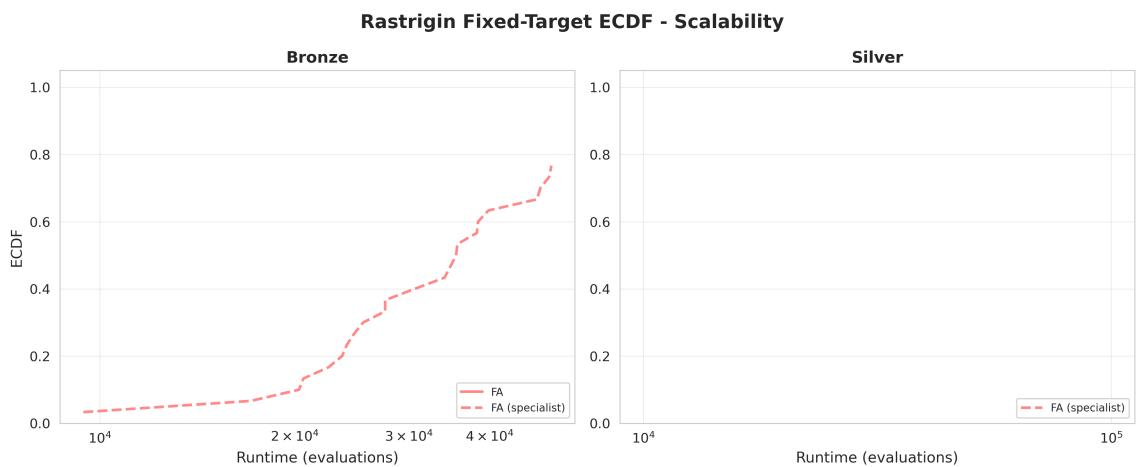
- Ở mức Bronze, cả FA và GA đều đạt tỉ lệ thành công rất cao: các đường ECDF tiệm cận 1 khi ngân sách tiến dần tới khoảng 10^3 lần đánh giá. FA có xu hướng đạt cùng mức ECDF với chi phí nhỏ hơn đôi chút, thể hiện lợi thế nhẹ về tốc độ hội tụ.
- HC chậm hơn rõ rệt: đường ECDF nằm thấp và tăng chậm, phản ánh việc thuật toán này thường bị kẹt trong các cực trị địa phương của Rastrigin ngay cả với ngưỡng Bronze.
- Ở mức Silver, sự khác biệt trở nên rõ ràng: chỉ FA (đặc biệt là cấu hình *specialist*) duy trì được ECDF đáng kể (xấp xỉ 0.6–0.7), trong khi GA và HC hầu như không chạm được ngưỡng trong ngân sách đang xét, các đường ECDF gần như bám sát trực hoành. FA vì vậy là thuật toán duy nhất còn hoạt động hiệu quả khi yêu cầu độ chính xác cao hơn trên Rastrigin 10 chiều.



Hình 10: ECDF cho multimodal_escape (dim=30).

Khi tăng lên 30 chiều, hình dạng ECDF cho thấy độ khó tăng rõ rệt:

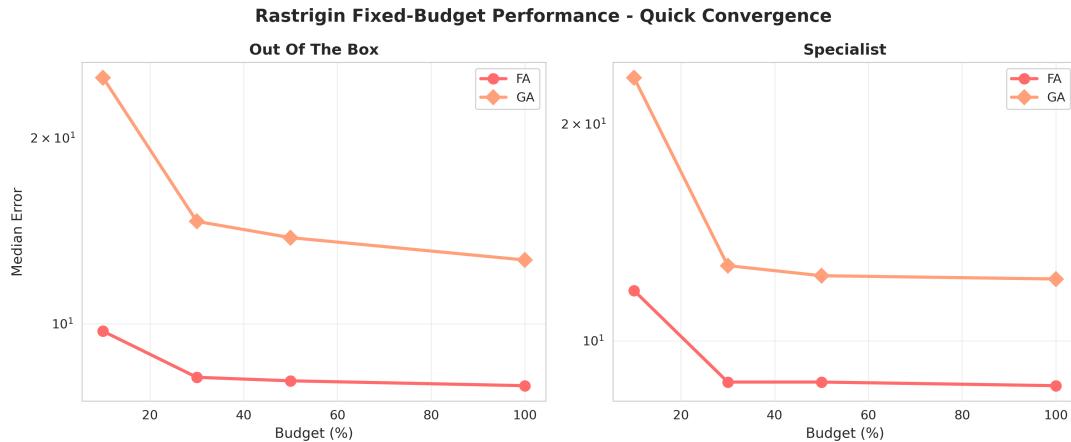
- Ở mức Bronze, chỉ còn các biến thể của FA (bản gốc và *specialist*) đạt được tỉ lệ thành công đáng kể. Cả hai đường cong đều bị dịch sang phải, cần tới cỡ 10^4 đánh giá để ECDF tiệm cận 1; cấu hình *specialist* đạt cùng mức ECDF với chi phí thấp hơn, cho thấy việc tinh chỉnh tham số giúp cải thiện rõ rệt khả năng thoát bẫy đa cực trị.
- Các thuật toán còn lại (GA, HC, SA) hầu như không đạt được ngưỡng Bronze trong ngân sách đã chọn nên không xuất hiện trên đồ thị; về thực chất, chúng thất bại gần như hoàn toàn trên Rastrigin 30 chiều ở mức mục tiêu này.
- Ở mức Silver, độ khó tăng vọt: chỉ FA *specialist* đạt được một phần nhỏ số lần chạy (ECDF dừng dưới 0.3 ngay cả ở rìa phải trực hoành), trong khi FA gốc và các thuật toán khác không có lần chạy nào chạm ngưỡng. Điều này cho thấy từ 30 chiều trở lên, mức Silver của Rastrigin đã vượt quá khả năng của hầu hết thuật toán trong bộ benchmark.



Hình 11: ECDF cho scalability (dim=50, trục log).

Ở cấu hình 50 chiều, Rastrigin trở thành một bài toán đặc biệt thách thức trong bối cảnh ngân sách giới hạn:

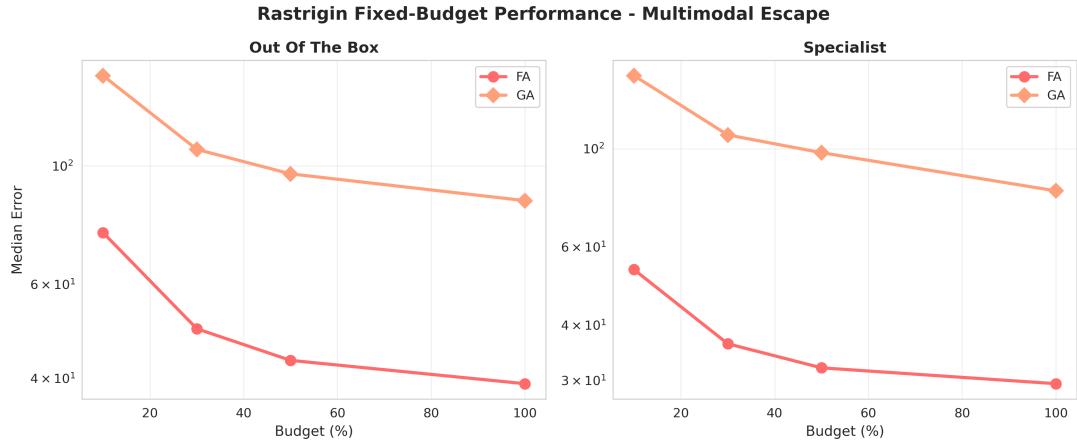
- Ở mức Bronze, chỉ còn FA *specialist* đạt được một tỉ lệ thành công trung bình khá khiêm tốn: đường ECDF tăng rất chậm và chỉ tiệm cận quanh 0.7 khi ngân sách tiến gần 4×10^4 đánh giá. FA gốc và các thuật toán khác không đạt được ngưỡng nên không để lại dấu vết trên đồ thị.
- Ở mức Silver, toàn bộ các đường ECDF nằm tại 0, tương đương việc không thuật toán nào đạt được ngưỡng Silver trên Rastrigin 50 chiều trong ngân sách tối đa. Rastrigin high-dimensional với yêu cầu độ chính xác cao vì thế có thể xem là “ngoài tầm với” đối với tập thuật toán đang xét.



Hình 12: Rastrigin – fixed-budget performance (quick_convergence, $d = 10$). Trục tung là sai số trung vị (median error), trục hoành là tỉ lệ ngân sách.

Fixed-Budget Performance: sai số cuối cùng dưới các mức ngân sách cố định. Với cấu hình quick_convergence (10 chiều), đường cong fixed-budget cho thấy:

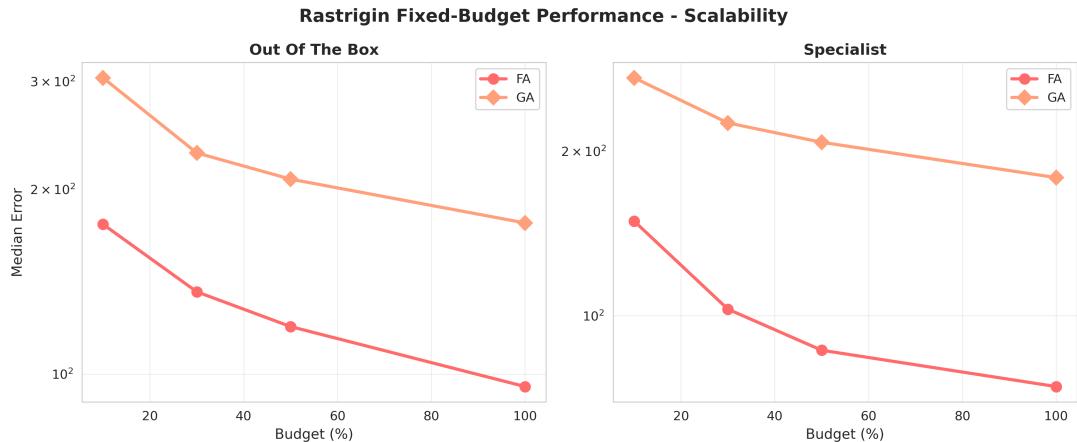
- Cả FA và GA đều có sai số trung vị giảm đơn điệu khi tăng ngân sách, nhưng FA luôn giữ mức sai số thấp hơn rõ rệt. Ở mọi mức budget (10%, 30%, 50%, 100%), đường của FA nằm dưới GA khoảng gần một bậc độ lớn trên thang log.
- Lợi ích của việc tăng ngân sách thể hiện mạnh mẽ giữa 10% và 30%; sau khoảng 50% ngân sách, cả hai thuật toán đều rơi vào vùng “diminishing returns”, sai số giảm thêm rất ít.
- Cấu hình *specialist* cải thiện nhẹ cho cả hai thuật toán, chủ yếu ở ngân sách nhỏ (10–30%). Tuy nhiên, thứ hạng tương đối không đổi: FA vẫn là thuật toán cho sai số cuối cùng thấp nhất, GA ổn định nhưng kém hơn trên toàn dải ngân sách.



Hình 13: Rastrigin – fixed-budget performance (multimodal_escape, $d = 30$).

Khi tăng lên cấu hình multimodal_escape (30 chiều), độ khó tăng rõ rệt:

- Mức sai số trung vị của cả FA và GA đều cao hơn đáng kể so với $d = 10$, ngay cả ở 100% ngân sách. Điều này phù hợp với ECDF: nhiều lần chạy không chạm được các target Silver dù đã dùng hết ngân sách.
- FA tiếp tục giữ lại thế ổn định: ở mọi mức budget, đường cong của FA nằm thấp hơn GA, và khoảng cách giữa hai thuật toán vẫn tương đối lớn.
- Tinh chỉnh *specialist* giúp FA giảm thêm vài đơn vị sai số trên toàn dải ngân sách, trong khi GA cũng cải thiện nhưng vẫn bị bỏ xa. Có thể hiểu rằng ở 30 chiều, FA không chỉ đạt tỉ lệ thành công cao hơn (ECDF) mà còn cho chất lượng nghiệm cuối cùng tốt hơn trong khung fixed-budget.

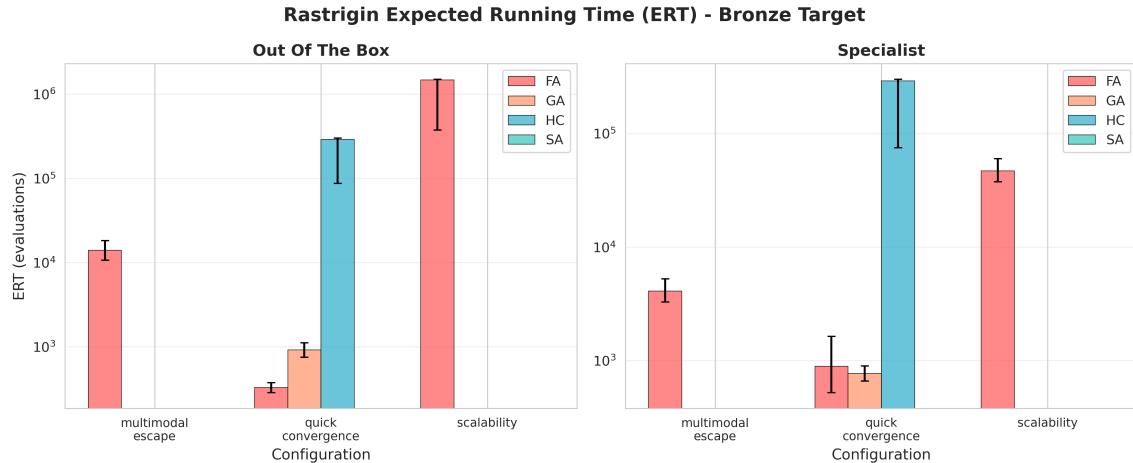


Hình 14: Rastrigin – fixed-budget performance (scalability, $d = 50$).

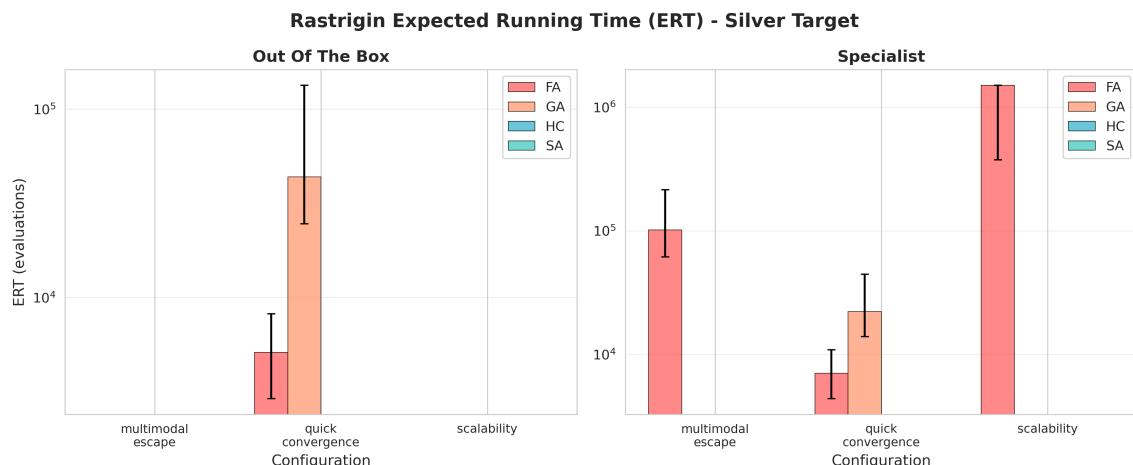
Ở cấu hình scalability (50 chiều), bức tranh trở nên bi quan hơn:

- Các đường cong cho thấy sai số trung vị vẫn rất cao ngay cả khi dùng 100% ngân sách: FA chỉ giảm từ khoảng $\sim 1.7 \times 10^2$ xuống dưới 10^2 , GA dao động quanh vùng $[1.8, 3] \times 10^2$. Điều này nhất quán với ECDF: gần như không có lần chạy nào đạt được các target Bronze/Silver ở 50 chiều.

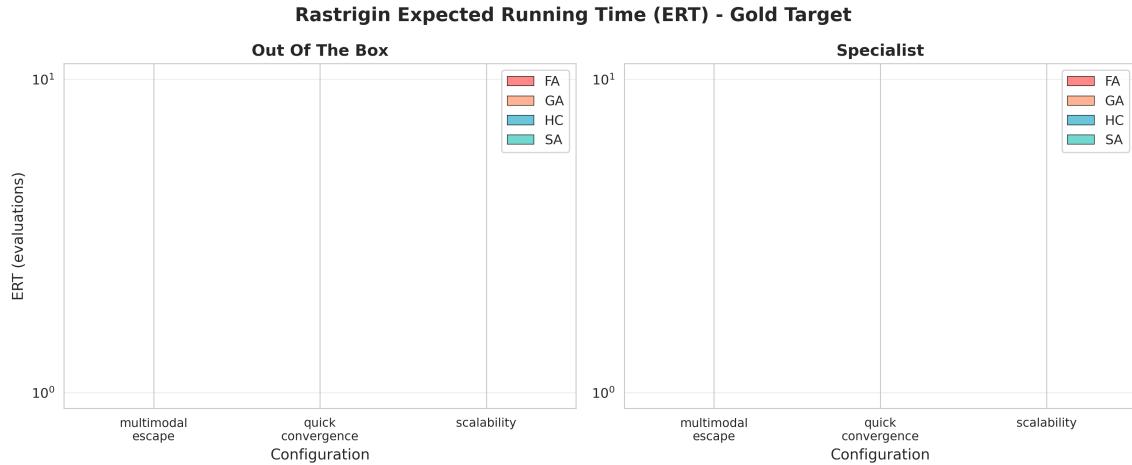
- FA tiếp tục vượt trội GA trên toàn bộ dải budget: với cùng một ngân sách, nghiệm trung vị của FA luôn tốt hơn đáng kể. Nói cách khác, nếu buộc phải chọn giữa hai thuật toán trong bối cảnh high-dimensional Rastrigin, FA luôn là lựa chọn “ít tệ hơn”.
- Cấu hình *specialist* giúp FA cải thiện thêm một chút (đặc biệt ở ngân sách thấp), nhưng không thay đổi bản chất vấn đề: với dimension 50 và ngân sách hiện tại, cả hai thuật toán đều đang hoạt động trong vùng “chưa hội tụ”, sai số tuyệt đối vẫn lớn so với nghiệm tối ưu.



Hình 15: Rastrigin – ERT tới ngưỡng Bronze.



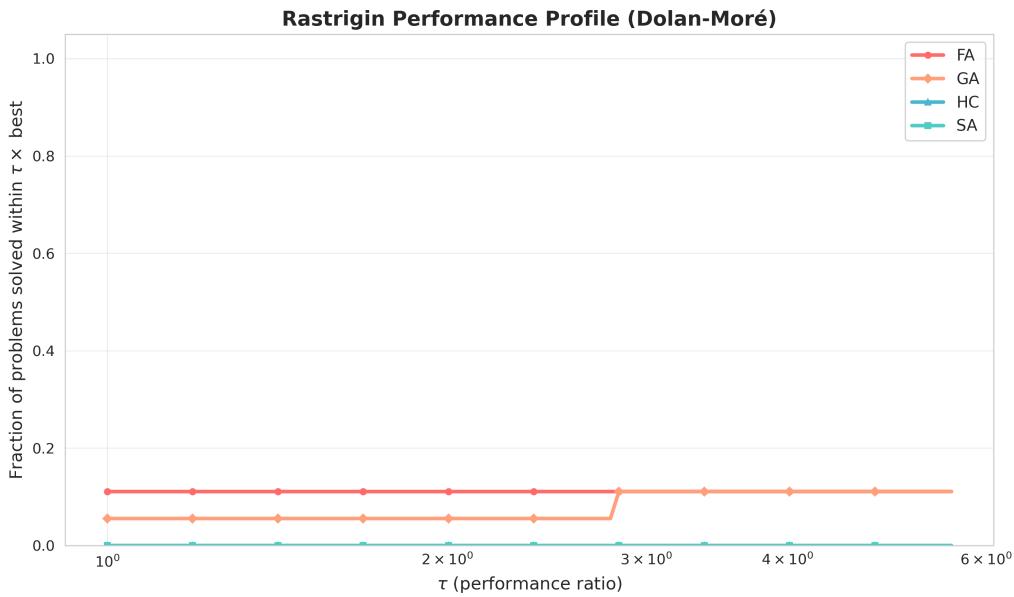
Hình 16: Rastrigin – ERT tới ngưỡng Silver.



Hình 17: Rastrigin – ERT tới ngưỡng Gold (không có thuật toán nào đạt target).

ERT, performance profiles và data profiles. ERT (Expected Running Time) chỉ có ý nghĩa khi tồn tại số lượng đủ lớn các lần chạy thành công trên target đang xét. Các biểu đồ ERT cho Rastrigin cho thấy:

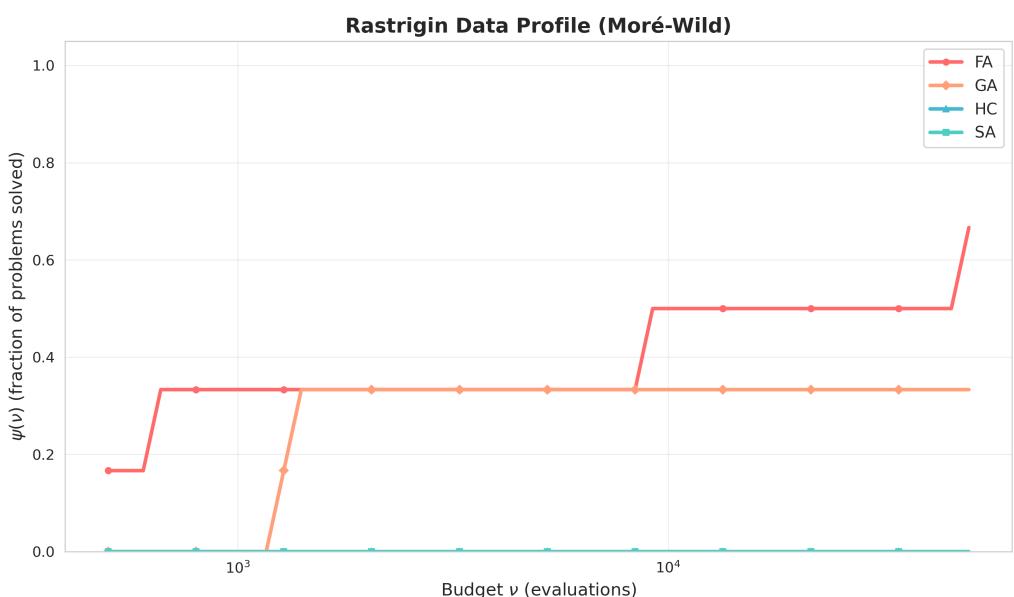
- **Ngưỡng Bronze.** Ở cấu hình *quick_convergence* (10 chiều), cả FA, GA và HC đều đạt được target Bronze. FA có ERT nhỏ nhất (cỡ 10^2 – 10^3 đánh giá), GA chậm hơn khoảng một bậc, còn HC chậm hơn rất nhiều bậc và do đó chỉ đóng vai trò baseline. SA hầu như không đạt được target. Ở hai cấu hình khó hơn (*multimodal_escape* 30 chiều và *scalability* 50 chiều), chỉ có FA đạt Bronze; các thuật toán còn lại không có run thành công nên không xuất hiện trên biểu đồ. Việc tinh chỉnh (*specialist*) giúp ERT của FA giảm đáng kể nhưng giá trị tuyệt đối vẫn nằm trong vùng từ vài chục nghìn tới hàng triệu đánh giá.
- **Ngưỡng Silver.** Với Silver, bức tranh càng khắt khe hơn. Ở 10 chiều, FA và GA vẫn đạt target nhưng ERT của GA lớn hơn FA rõ, phản ánh việc GA cần nhiều đánh giá hơn để hội tụ tới mức sai số sâu hơn. Ở 30 chiều, chỉ còn FA (đặc biệt là cấu hình *specialist*) đạt Silver với ERT rất lớn (khoảng 10^5 đánh giá), và ở 50 chiều chỉ FA *specialist* đạt Silver với ERT lên tới cỡ 10^6 . Điều này nhất quán với ECDF: Silver trên Rastrigin high-dimensional là một target cực khó.
- **Ngưỡng Gold.** Trên cả ba cấu hình và bốn thuật toán, không có run nào đạt được target Gold trong ngân sách cho phép. Vì vậy Hình 17 thực chất minh họa một trường hợp “ERT không xác định”: success rate bằng 0, và mọi so sánh ERT tại ngưỡng Gold đều vô nghĩa.



Hình 18: Performance profiles cho Rastrigin (Dolan–Moré).

Performance profile mô tả, với mỗi tỷ lệ hiệu năng τ , tỷ lệ các bài toán mà một thuật toán có thời gian chạy không vượt quá τ lần solver tốt nhất. Kết quả cho Rastrigin cho thấy:

- Đường cong của FA nằm cao hơn GA tại $\tau = 1$, tức là trong số rất ít các cặp (cầu hình, target) được giải thành công, FA thường là thuật toán nhanh nhất về số lần đánh giá.
- Khi tăng τ lên khoảng 3, đường của GA mới bắt kịp FA; hai đường đều tiệm cận một mức trần thấp (khoảng 0,1), phản ánh thực tế là chỉ một phần rất nhỏ các bài toán trong bộ test được giải bởi bất kỳ thuật toán nào.
- HC và SA hầu như không xuất hiện trên performance profile vì không giải được target nào trong tập Rastrigin ở các mức ngân sách đã chọn.



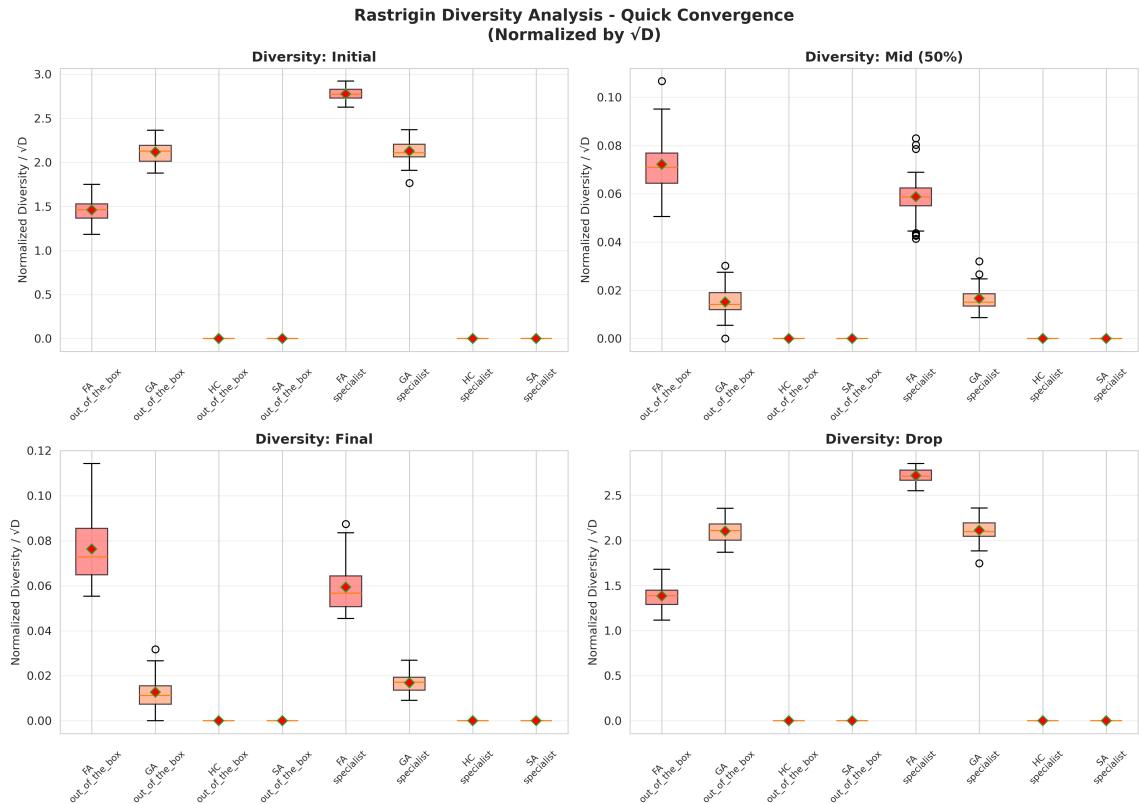
Hình 19: Data profiles cho Rastrigin (Moré–Wild).

Data profile $\psi(\nu)$ biểu diễn tỷ lệ bài toán được giải trong một ngân sách chuẩn hoá ν cho trước. Trên Rastrigin:

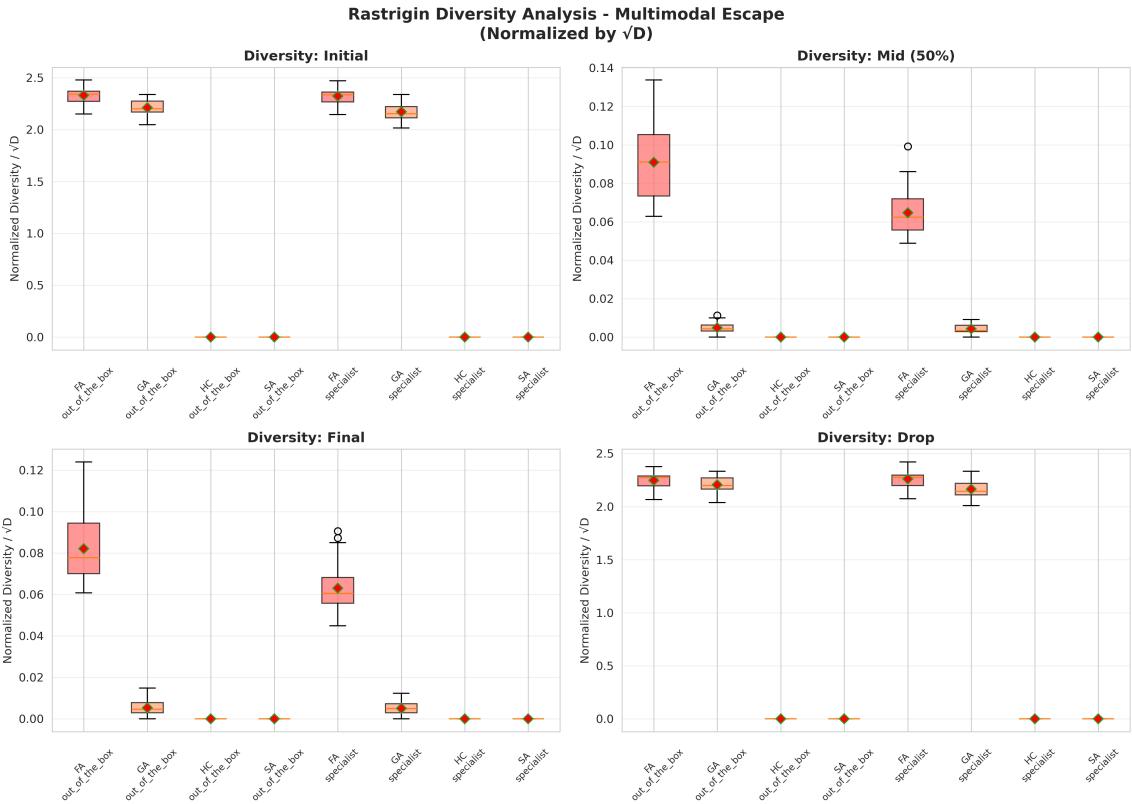
- FA luôn là thuật toán có coverage cao nhất: với ngân sách rất nhỏ (vài trăm đánh giá), FA đã giải được khoảng $1/6$ số bài toán; khi tăng ngân sách lên cỡ 10^4 – 3×10^4 đánh giá, coverage tăng dần lên gần $2/3$.
- GA chỉ bắt đầu giải được bài toán khi ngân sách tăng lên mức trung bình và nhanh chóng đạt trần quanh mức $1/3$ số bài toán; sau đó đường cong của GA hầu như phẳng, không hưởng lợi nhiều từ việc tăng ngân sách.
- HC và SA không giải được bất kỳ instance nào trong bộ target Rastrigin dưới các mức ngân sách đã xét, nên đường data profile gần như dính sát trực hoành.
- Ngay cả ở ngân sách lớn nhất, không có thuật toán nào đạt coverage gần 1; điều này cũng cố nhận định rằng Rastrigin high-dimensional (đặc biệt với các target Silver/Gold) về cơ bản là quá khó trong khung ngân sách hiện tại.

9.3.5 Rastrigin: đa dạng quần thể và hiện tượng dừng sớm (stagnation)

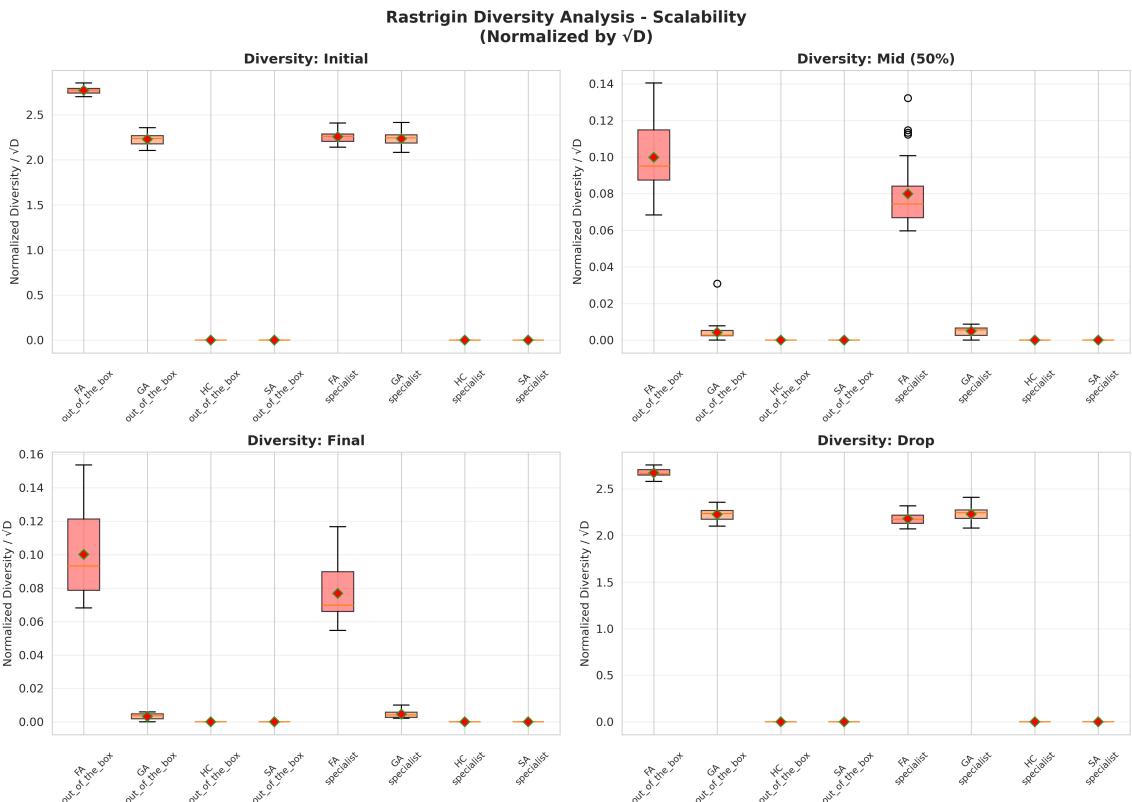
Đa dạng quần thể theo thời gian. Đa dạng quần thể được đo bằng khoảng cách Euclid trung bình giữa các cá thể, chuẩn hoá theo \sqrt{D} để cho phép so sánh giữa các chiều khác nhau. Hình 20–22 hiển thị boxplot của bốn thời điểm: *initial* (ngay sau khởi tạo), *mid* (50% ngân sách), *final* (kết thúc chạy) và *drop* (mức giảm đa dạng từ initial tới final).



Hình 20: Rastrigin – phân tích đa dạng quần thể (quick_convergence, $D = 10$).



Hình 21: Rastrigin – phân tích đa dạng quần thể (multimodal_escape, $D = 30$).



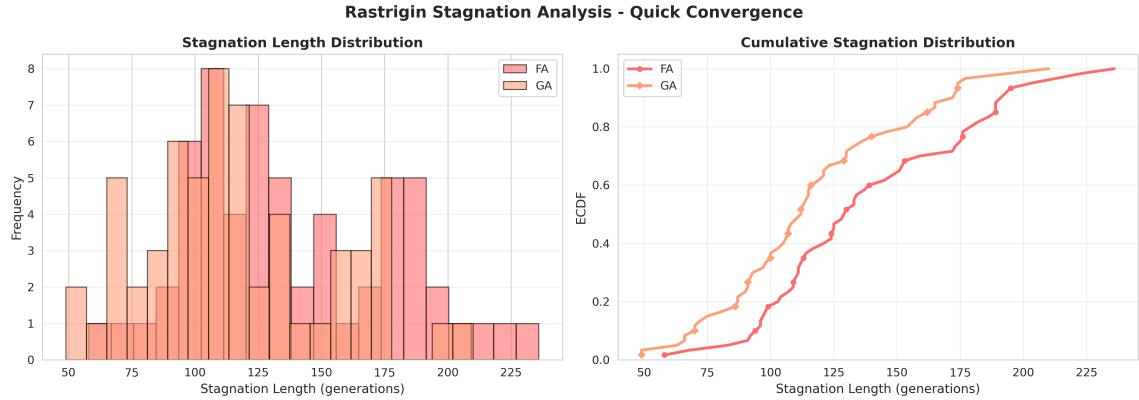
Hình 22: Rastrigin – phân tích đa dạng quần thể (scalability, $D = 50$).

Các quan sát chính:

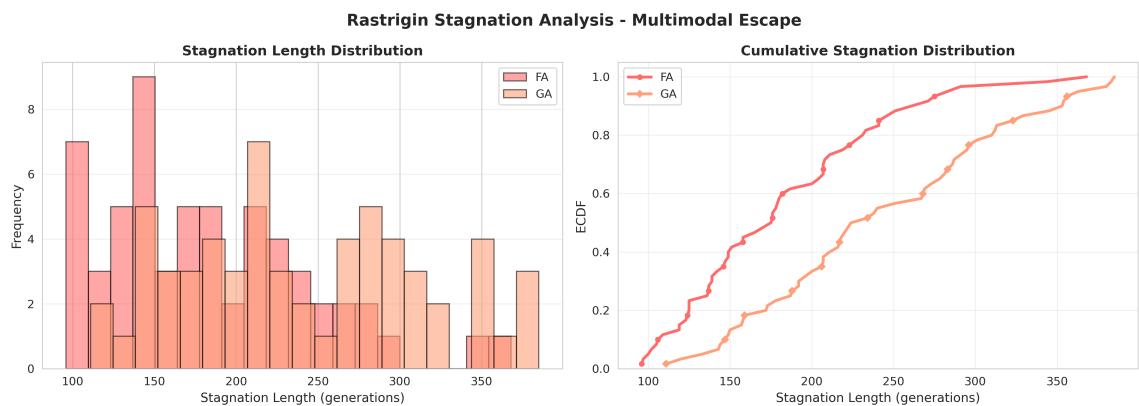
- **Khởi tạo.** Trên cả ba cấu hình, FA và GA đều bắt đầu với mức đa dạng khá cao ($\approx 2,0\text{--}2,8$ sau chuẩn hoá). Với cấu hình quick_convergence, GA (đặc biệt bản out-of-the-box) có đa dạng khởi tạo lớn hơn FA, trong khi FA specialist có mức cao nhất. Điều này cho thấy lợi thế của FA trên Rastrigin không đến từ việc “rải quần thể rộng hơn ngay từ đầu” mà chủ yếu do động lực cập nhật trong quá trình tối ưu.
- **Giữa quá trình (50% ngân sách).** Ở cả ba cấu hình, GA mất đa dạng rất nhanh: median diversity của GA chỉ còn $\approx 0,01\text{--}0,02$, trong khi FA vẫn duy trì quanh $\approx 0,06\text{--}0,10$. FA specialist có đa dạng mid hơi thấp hơn FA gốc nhưng vẫn cao hơn GA rõ rệt. Tức là GA trải qua hiện tượng premature convergence: áp lực chọn lọc và lai ghép làm quần thể co cụm sớm quanh một vài basin, trong khi FA vẫn giữ được một “vòng đai” nghiệm khác biệt hơn.
- **Cuối quá trình.** Tới thời điểm kết thúc, đa dạng của GA gần như bằng 0 ở mọi cấu hình, cho thấy quần thể gần như đồng nhất. FA vẫn giữ một mức đa dạng dương đáng kể (đặc biệt ở multimodal_escape và scalability), dù đã giảm hơn 90% so với ban đầu. Điều này phù hợp với quan sát ECDF: FA vẫn còn khả năng “nhúc nhích” sang các basin khác ở cuối run, trong khi GA gần như bị khoá cứng trong một vùng nghiệm.
- **Mức giảm đa dạng (drop).** Cả FA và GA đều có drop lớn (trên 90% initial diversity), riêng GA thường tụt về gần 0 nên drop tuyệt đối của GA thường lớn hơn hoặc tương đương FA. FA specialist có drop lớn nhất trên quick_convergence do khởi tạo rất rộng, nhưng vẫn duy trì đa dạng mid/final cao hơn GA – tức là FA tuned vừa mở rộng được phạm vi tìm kiếm ban đầu vừa không suy sụp quá nhanh.
- **HC và SA.** HC và SA làm việc với một quỹ đạo đơn (population size = 1), nên chỉ số đa dạng về mặt định nghĩa luôn bằng 0. Việc hai thuật toán này thất bại trên Rastrigin high-dimensional vì vậy không liên quan tới “quản lý đa dạng” mà nằm ở cơ chế bước nhảy và tiêu chí chấp nhận (đã được phản ánh ở ECDF và ERT).

Tóm lại, trên các bài toán Rastrigin khó, FA không hề “giữ đa dạng tốt” theo nghĩa tuyệt đối – quần thể của nó cũng co cụm mạnh. Tuy nhiên, so với GA, FA duy trì được một mức lan trải vừa đủ ở giai đoạn giữa và cuối quá trình, đủ để sinh ra một số lời giải thoát khỏi bẫy địa phương. GA lại đánh mất đa dạng quá sớm, dẫn tới trạng thái tìm kiếm gần như gradient-free quanh một cực trị trung bình.

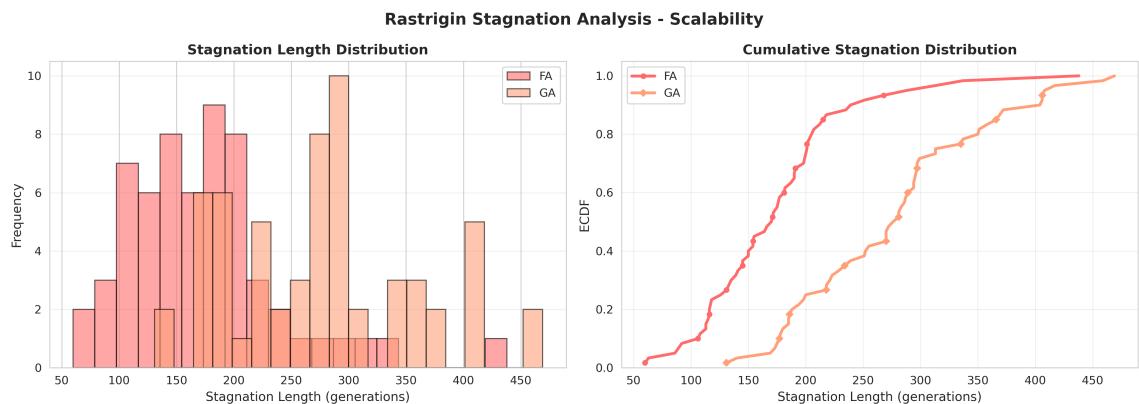
Phân tích stagnation. Để làm rõ hơn mối liên hệ giữa đa dạng và khả năng thoát bẫy, ta xem xét độ dài stagnation: số thế hệ liên tiếp mà giá trị tốt nhất toàn cục không được cải thiện. Với mỗi run, ta lấy đoạn stagnation dài nhất. Hình 23–25 trình bày phân bố độ dài này (histogram) và ECDF tương ứng cho FA và GA.



Hình 23: Rastrigin – phân tích stagnation (quick_convergence, $D = 10$).



Hình 24: Rastrigin – phân tích stagnation (multimodal_escape, $D = 30$).



Hình 25: Rastrigin – phân tích stagnation (scalability, $D = 50$).

Các kết quả cho thấy:

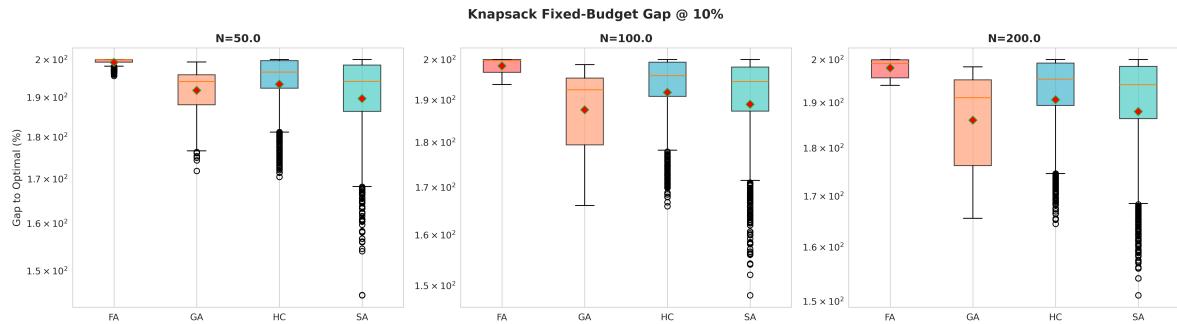
- **Quick_convergence (10 chiều).** Cả FA và GA đều có độ dài stagnation trung bình vào khoảng 100–160 thế hệ, phản ánh việc bài toán tương đối dễ: cả hai thuật toán vẫn tiếp tục tạo thêm cải thiện nhỏ cho tới gần cuối run. Đường ECDF của GA nằm hơi lệch sang trái so với FA, tức GA thường có đoạn stagnation dài nhất ngắn hơn một chút. Điều này phù hợp với fixed-budget plot: GA khai thác rất mạnh trong vùng lân cận nghiệm hiện tại và liên tục tạo ra cải thiện nhỏ, nhưng vẫn không đạt được sai số thấp như FA.

- **Multimodal _ escape (30 chiều).** Khi dimension tăng, tương quan đảo chiều. Histogram và ECDF cho thấy GA thường có đoạn stagnation dài hơn: nhiều run của GA có stagnation vượt quá 300 thế hệ, trong khi phần lớn run của FA dừng dưới khoảng 220–240 thế hệ. Nghĩa là trên landscape đa cực trị phức tạp hơn, GA dễ bị “đóng băng” trong một basin: quần thể đã đồng nhất (đa dạng gần 0) nhưng cơ chế đột biến / lai ghép không đủ mạnh để tạo ra bước nhảy mang tính phá vỡ.

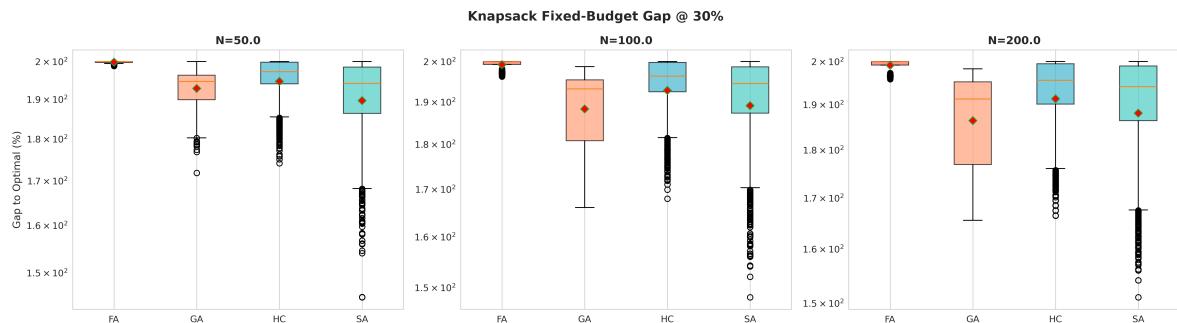
- **Scalability (50 chiều).** Ở cấu hình khó nhất, sự chênh lệch càng rõ: ECDF của FA nằm cao hơn GA trên toàn trực hoành. Khoảng 70–80% run của FA có đoạn stagnation dài nhất dưới 200 thế hệ, trong khi GA phải tới khoảng 300–350 thế hệ mới đạt mức ECDF tương đương. Điều này khớp với ERT và ECDF fixed-target: FA dù vẫn thất bại trên nhiều run nhưng vẫn tạo được một số cải thiện muộn (late improvements), còn GA gần như bị “lock” trong vùng nghiệm kém trong phần lớn thời gian chạy.

9.3.6 Knapsack: hiệu năng fixed-budget (gap tối thiểu)

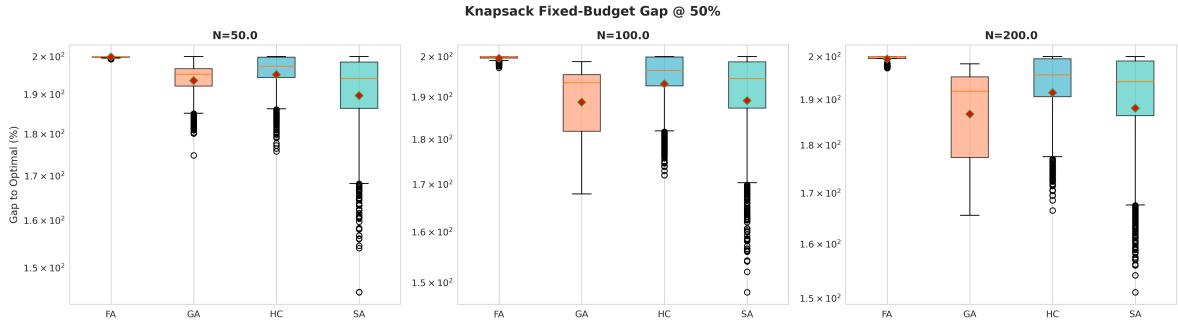
Trong bài toán Knapsack, ta dùng thước đo *Gap to Optimal (%)* sau khi tiêu tốn một tỉ lệ cố định của ngân sách đánh giá (10%, 30%, 50% và 100%). Gap được định nghĩa ở Mục 9.3.3; giá trị nhỏ hơn là tốt hơn, và các giá trị quanh 200% tương ứng với việc thuật toán chỉ đạt được khoảng một nửa giá trị tối ưu.



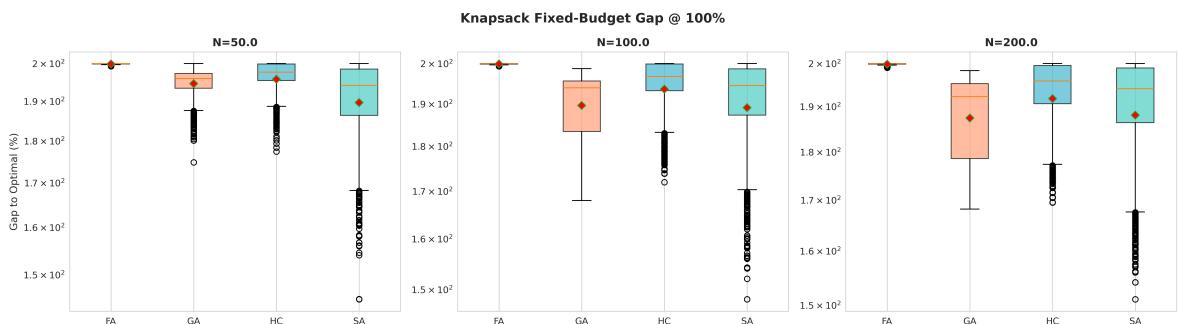
Hình 26: Knapsack – fixed-budget gap tại 10% ngân sách cho ba kích thước bài toán $N \in \{50, 100, 200\}$.



Hình 27: Knapsack – fixed-budget gap tại 30% ngân sách.



Hình 28: Knapsack – fixed-budget gap tại 50% ngân sách.



Hình 29: Knapsack – fixed-budget gap tại 100% ngân sách.

Các kết quả này cho thấy một bức tranh rất khác so với Rastrigin:

- **Mức độ khó tổng thể.** Ở mọi cấu hình, median gap của bốn thuật toán đều nằm trong dải 190%–200%. Điều này cho thấy các metaheuristic đang làm việc trong một landscape tổ hợp rất khó: lời giải thu được thường chỉ đạt xấp xỉ một nửa giá trị tối ưu. Việc tăng ngân sách từ 10% lên 100% chỉ giúp giảm gap thêm một vài đơn vị phần trăm, nghĩa là phần lớn lợi ích đã được “ăn” trong giai đoạn rất sớm; ngân sách còn lại chủ yếu làm thụ hẹp phương sai giữa các lần chạy và kéo dài đuôi dưới.

- **Xếp hạng giữa các thuật toán.** Thứ hạng tương đối giữa bốn thuật toán khá ổn định trên mọi N và mọi mức ngân sách:

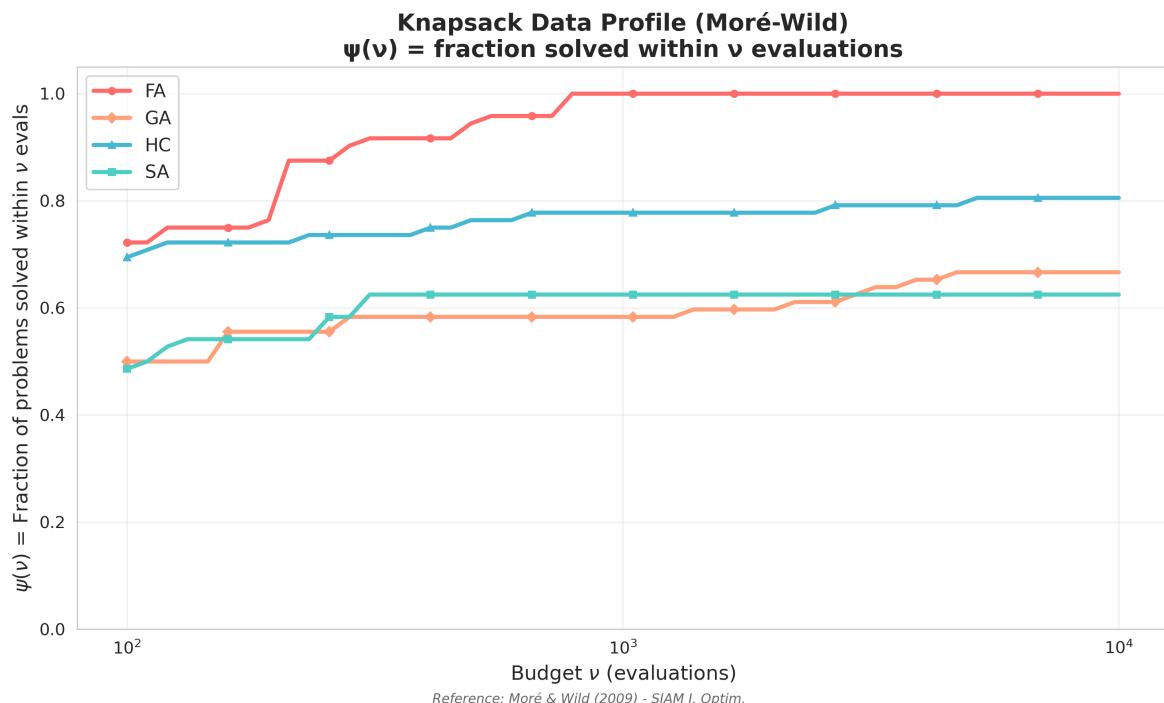
- **FA tệ nhất một cách ổn định.** Boxplot của FA gần như “dính” ở vùng gap xấp xỉ 200% với phương sai rất nhỏ, gần như không có đuôi dưới. FA hội tụ nhanh vào một vùng nghiệm kém và hầu như không cải thiện thêm khi tăng ngân sách.
- **GA cho chất lượng điển hình tốt nhất.** Trong hầu hết các panel, GA có median gap thấp nhất (hoặc ngang ngửa SA nhưng ổn định hơn), phân bố tập trung hơn quanh giá trị $\approx 190\%$. GA rõ ràng là thuật toán cho “chất lượng trung bình” tốt nhất trên Knapsack trong bộ thực nghiệm này.
- **SA có những lời giải tốt nhất nhưng hiếm.** Median của SA thường nhỉnh hơn GA một chút, nhưng SA là thuật toán duy nhất có đuôi dưới kéo dài xuống vùng 150%–170%, thể hiện một số run hiếm hoi tìm được lời giải tốt vượt trội so với phần còn lại. Nói cách khác, SA không phải là tốt nhất về mặt điển hình, nhưng lại có tiềm năng sinh ra những nghiệm rất tốt khi “gặp may”.
- **HC nằm giữa GA và FA.** HC có median thấp hơn FA nhưng cao hơn GA và thường không chạm được tới những nghiệm rất tốt như SA. Phân bố của HC dày đặc quanh một vùng gap cố định, cho thấy một chiến lược khai thác địa phương tương đối hiệu quả nhưng thiếu các bước nhảy đủ xa để tạo ra những lời giải đột phá.

- **Ảnh hưởng của kích thước bài toán.** Khi tăng số lượng vật phẩm từ $N = 50$ lên $N = 200$, median gap của từng thuật toán chỉ dao động nhẹ quanh ngưỡng 190%–200%, và thứ hạng tương đối hầu như không thay đổi. Độ khó mà các thuật toán đang gặp phải vì vậy có vẻ đến từ *cấu trúc* instance và cơ chế cập nhật hơn là riêng yếu tố số biến. Ở mọi N , SA vẫn là thuật toán duy nhất có đuôi dưới rất sâu, GA vẫn giữ median thấp nhất, trong khi FA luôn nằm sát phía trên.

- **Ảnh hưởng của ngân sách.** So sánh bốn mức ngân sách cho thấy:

- FA hầu như không phản ứng với việc tăng ngân sách – median và phương sai gần như bất biến. Đây là dấu hiệu của *stagnation triết để*: thêm đánh giá chỉ lặp lại các bước nhảy quanh một vùng nghiệm tệ.
- GA, HC và đặc biệt là SA có cải thiện chủ yếu ở phần tail: khi ngân sách tăng, số lượng run đạt được gap tốt (đuôi dưới) tăng lên, nhưng median chỉ nhích xuống rất nhẹ. Các thuật toán này do đó phụ thuộc khá nhiều vào một số run “may mắn”; để cải thiện một cách đáng tin cậy hơn, cần hoặc ngân sách lớn hơn đáng kể, hoặc các chiến lược đa khởi tạo / tái khởi tạo rõ ràng.

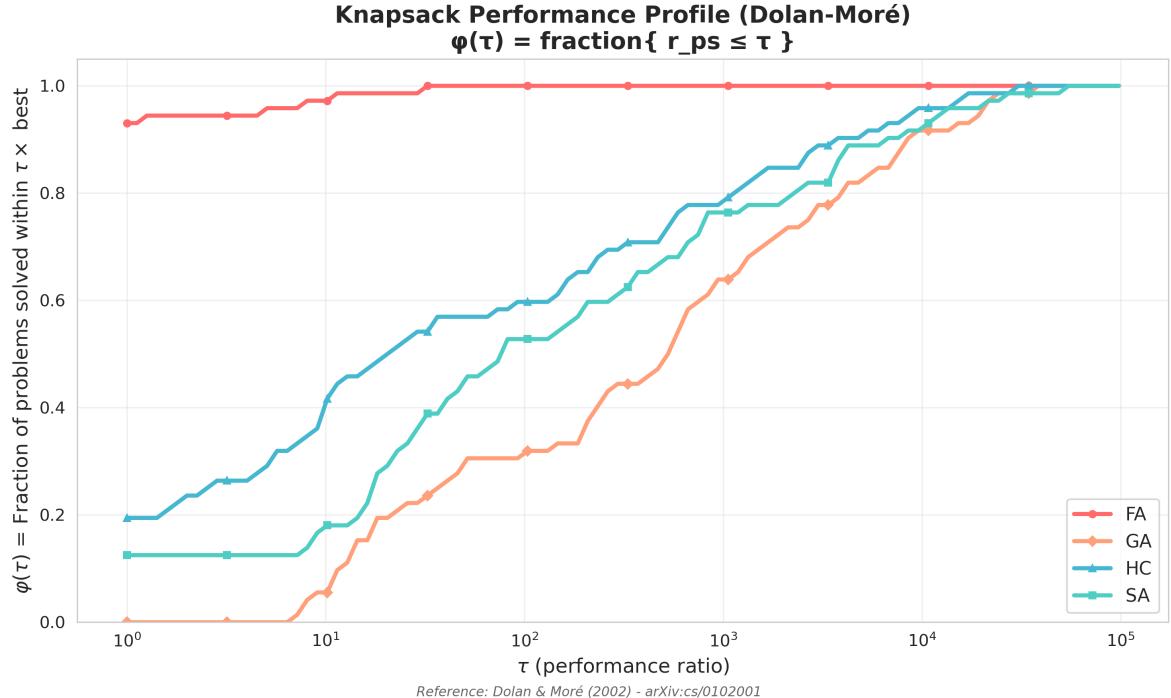
9.3.7 Knapsack: performance/data profiles và so sánh thống kê



Hình 30: Data profile Moré–Wild cho Knapsack.

Đối với Knapsack, data profile Moré–Wild $\psi(v)$ trong Hình 30 không còn suy biến như trường hợp Rastrigin. Với tập target được chọn, FA đạt giá trị $\psi(v)$ cao nhất trên toàn dải ngân sách: ngay từ $v \approx 10^2$ đã giải được hơn một nửa số cặp (bài toán, target), và khi v tiến tới 10^4 thì đường của FA gần như chạm tới 1. HC đứng thứ hai với mức phủ khoảng 0.8, trong khi GA và SA dừng lại quanh 0.6–0.65. Nói cách khác, dưới một định nghĩa thành công khá “thoáng” (gap tới tối ưu không cần quá nhỏ), FA là thuật toán có xác suất cao nhất đưa nghiệm vào vùng “chấp nhận được” trong ngân sách cho trước; HC theo sau, còn GA và SA chậm hơn đáng

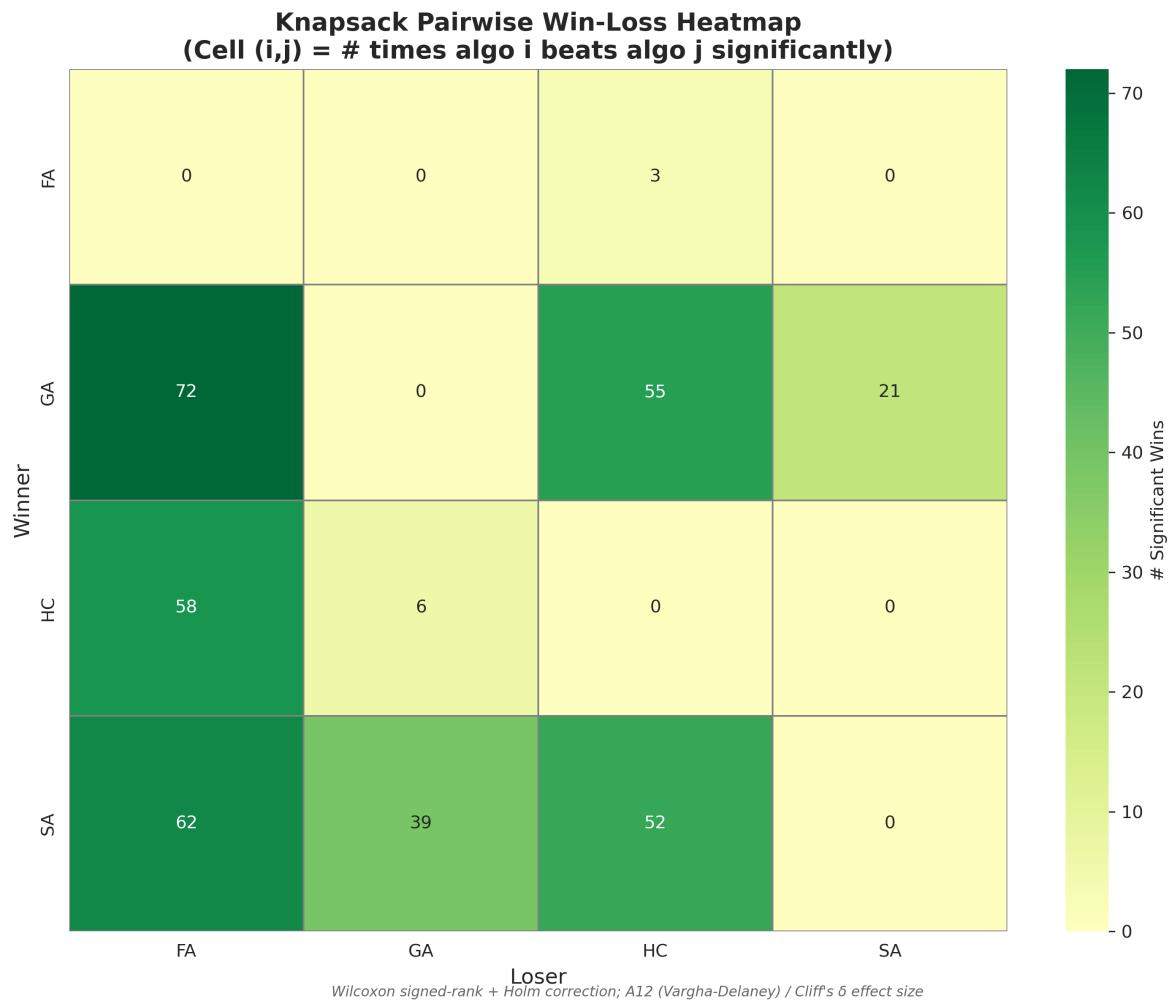
kể. Tuy nhiên, các ngưỡng target này vẫn tương đối xa tối ưu, nên data profile phản ánh chủ yếu khả năng đạt *xấp xỉ* hơn là khả năng tiệm cận nghiệm tối ưu thực sự.



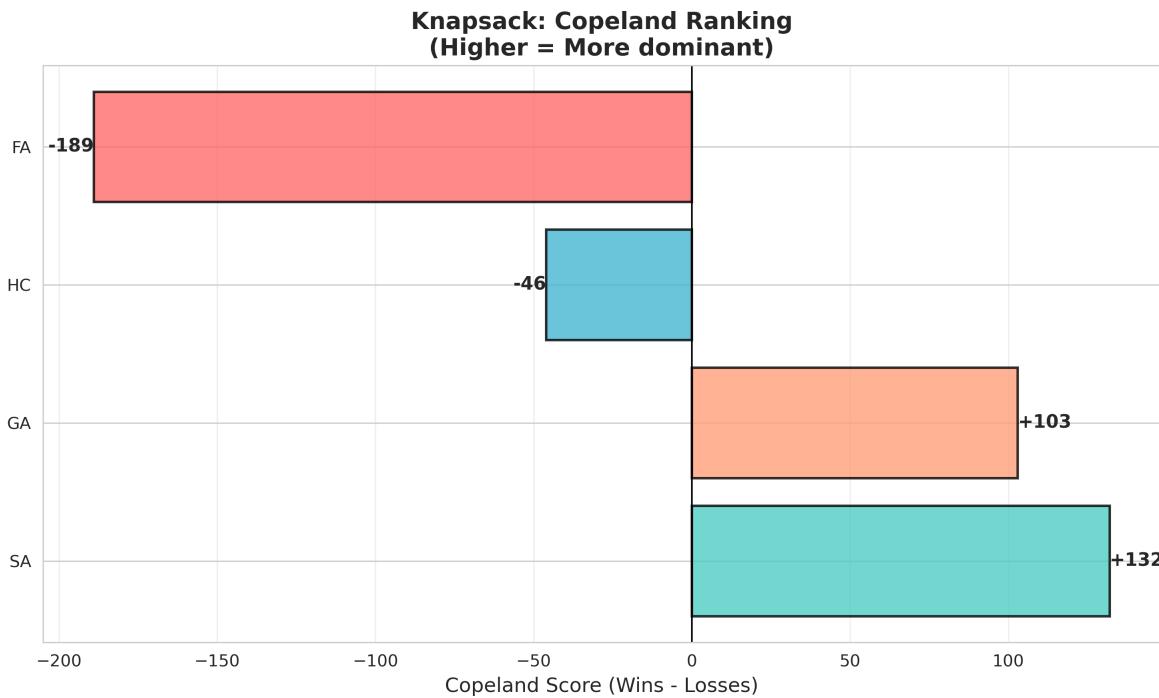
Hình 31: Performance profile Dolan–Moré cho Knapsack, dùng số phép đánh giá để đạt target làm metric.

Performance profile Dolan–Moré trong Hình 31 cũng có bức tranh đó. Đường $\varphi(\tau)$ của FA nằm rất cao ngay từ những giá trị τ nhỏ: với một hệ số hiệu năng khiêm tốn, FA đã giải được gần như toàn bộ các cặp (bài toán, target) nhanh nhất hoặc gần nhanh nhất trong tập thuật toán. Ba thuật toán còn lại chỉ dần bắt kịp khi τ tăng lên vài bậc độ lớn, cho thấy chúng thường cần nhiều phép đánh giá hơn FA để đạt cùng một target “dễ”. Giữa ba baseline, HC và SA nhìn chung nằm phía trên GA trong phần lớn dải τ , tức là về tốc độ đạt target thô thì GA thậm chí còn kém cạnh hơn.

Quan trọng là, cũng như với data profile, performance profile ở đây hoàn toàn *tương đối*: metric được chuẩn hoá theo thuật toán tốt nhất trên từng cặp (bài toán, target), và target lại là các ngưỡng gap khá lỏng. Vì vậy, việc FA “thống trị” Hình 31 chỉ nói rằng FA hiếm khi tệ nhất và rất ổn định trong việc đạt một mức xấp xỉ tương đối, chứ không hề phủ định kết luận từ các biểu đồ fixed-budget rằng nghiệm cuối của FA vẫn cách rất xa tối ưu.



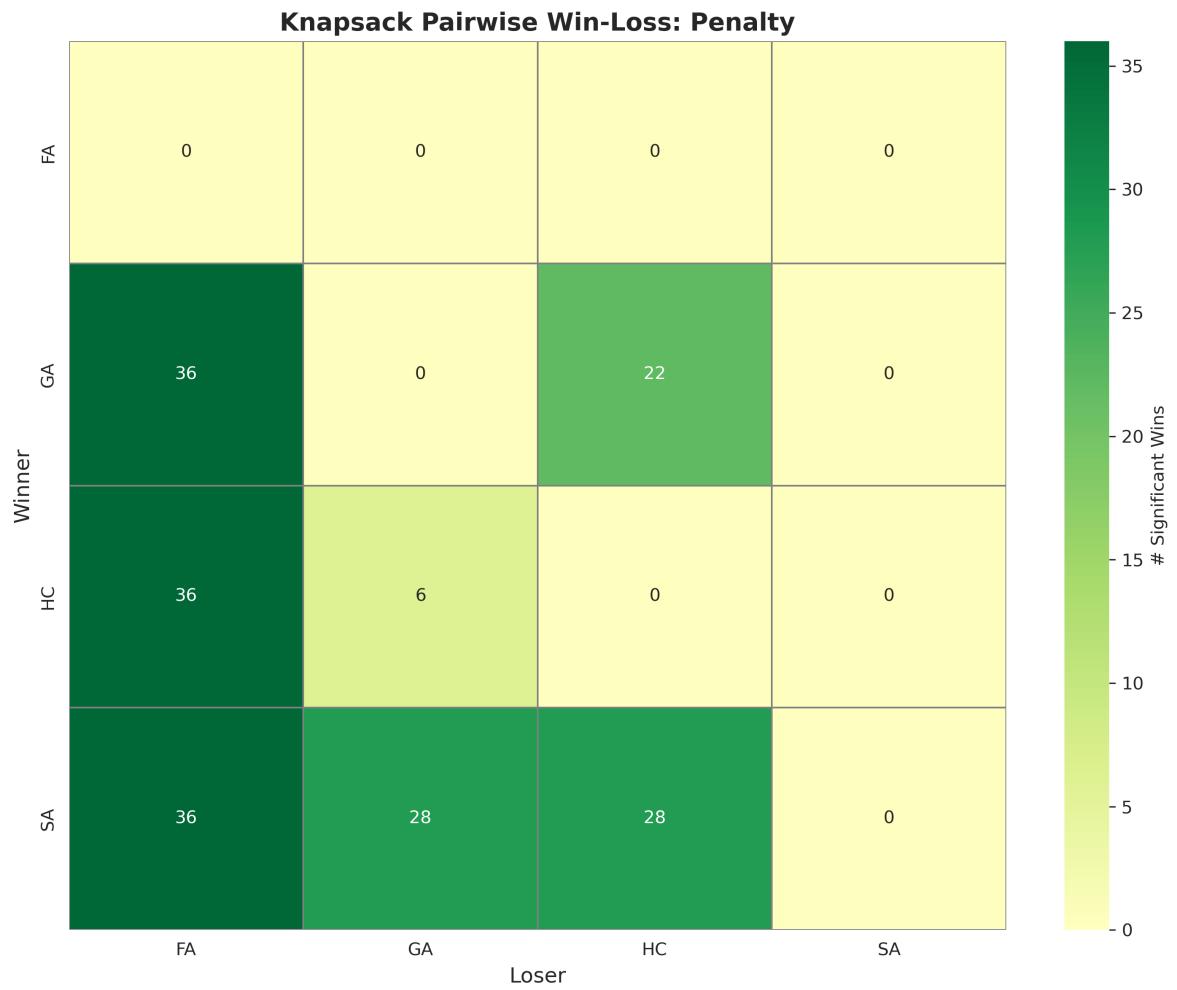
Hình 32: Heatmap số lần thắng-thua có ý nghĩa thống kê giữa các cặp thuật toán trên toàn bộ nghiệm cuối.



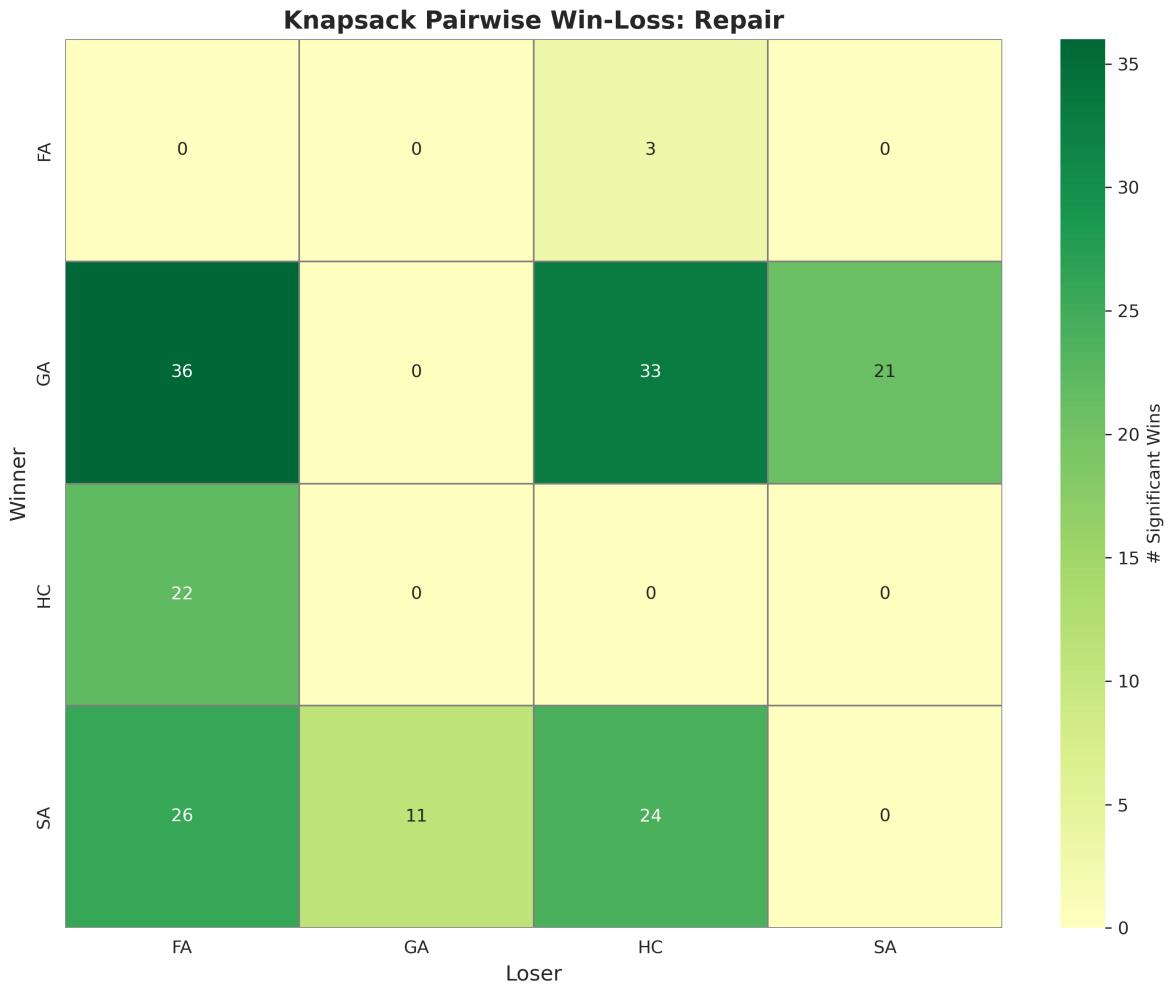
Hình 33: Điểm Copeland (thắng trừ thua) cho từng thuật toán Knapsack.

Để có một bức tranh cân bằng hơn, chúng tôi dựa vào so sánh thống kê cặp đôi và điểm Copeland. Hình 32 cho thấy mọi thuật toán còn lại đều áp đảo FA: GA thắng FA 72 lần có ý nghĩa thống kê, HC thắng 58 lần và SA thắng 62 lần, trong khi FA chỉ thắng được HC đúng 3 lần và không có trận thắng nào trước GA hoặc SA. Giữa ba thuật toán GA, HC và SA, cần cân nhắc rõ về phía SA: SA thắng GA 39 lần trong khi GA chỉ thắng SA 21 lần; SA thắng HC 52 lần và HC hoàn toàn không có trận thắng đáng kể nào trước SA. GA lại thắng HC 55 lần so với 6 lần ngược lại, nên xét theo đối đầu trực tiếp, trật tự ưu thế tổng quát là SA > GA > HC > FA.

Điểm Copeland trong Hình 33 tóm tắt gọn các quan sát này: SA đạt +132 điểm, GA đạt +103, HC ở mức -46 và FA rơi xuống -189. Như vậy, dù FA trông rất “đẹp” dưới lăng kính data/performance profile, khi đánh giá bằng số trận thắng-thua có ý nghĩa thống kê trên toàn bộ tập nghiệm thì SA vẫn là thuật toán chiếm ưu thế rõ rệt nhất, GA là đối thủ cạnh tranh trực tiếp, HC là trung bình và FA là lựa chọn kém nhất.



Hình 34: Heatmap thắng-thua khi chỉ xét chất lượng nghiệm penalty (trước pha repair).



Hình 35: Heatmap thắng-thua khi chỉ xét chất lượng nghiệm sau pha repair.

Hai heatmap bổ sung trong Hình 34 và 35 giúp tách riêng vai trò của pha penalty và pha repair. Ở mức penalty (trước khi repair), SA nổi bật nhất: SA thắng GA 28 lần và thắng HC 28 lần, trong khi GA không có trận thắng nào trước SA. GA vẫn thắng HC 22 lần so với 6 lần thua, và cả GA, HC, SA đều thắng FA 36 lần. Điều này gợi ý rằng quỹ đạo tìm kiếm của SA tạo ra nhiều nghiệm “thô” có giá trị mục tiêu rất tốt (dù còn vi phạm ràng buộc), GA đứng thứ hai, còn HC và đặc biệt là FA sinh ra các nghiệm penalty kém cạnh hơn nhiều.

Sau pha repair (Hình 35), bức tranh thay đổi phần nào. GA lúc này tương tác rất tốt với heuristic repair: GA thắng SA 21 lần, trong khi SA chỉ thắng GA 11 lần; GA cũng thắng HC 33 lần và thắng FA 36 lần. SA vẫn thắng HC 24 lần và thắng FA 26 lần, còn HC thắng FA 22 lần (FA chỉ gỡ gạc được 3 trận thắng trước HC). Nói cách khác, repair đã “bù đắp” một phần bất lợi ban đầu của GA, giúp GA tận dụng tốt các nghiệm penalty của mình để xây dựng nghiệm khả thi chất lượng cao, trong khi SA vẫn giữ được ưu thế nhưng không còn vượt trội tuyệt đối.

Kết hợp tất cả các lát cắt trên, bức tranh cuối cùng cho Knapsack là: FA tuy có data/profile rất đẹp nhờ ổn định và nhanh đạt target thô, nhưng về chất lượng nghiệm cuối và số lần thắng có ý nghĩa thống kê thì liên tục bị các thuật toán còn lại chi phối và có thể xem như một baseline đơn giản. HC cải thiện rõ rệt so với FA nhưng hiếm khi vượt được GA và SA. GA là đối thủ mạnh thứ hai: sau pha repair, GA cho chất lượng điển hình tốt nhất và thường xuyên thắng HC, đôi khi thua SA trên các instance khó. SA là thuật toán thể hiện tốt nhất về tổng thể, đặc biệt mạnh ở giai đoạn penalty và trong các so sánh cặp đôi, dẫn đến điểm Copeland cao nhất. Dù vậy, cả bốn thuật toán vẫn đang hoạt động trong vùng *xấp xỉ thô*: các fixed-budget boxplot cho thấy gap tới nghiệm tối ưu còn rất lớn, nên mọi kết luận về Knapsack trong báo cáo này

cần được hiểu là so sánh giữa các metaheuristic chưa hội tụ, chứ không phải giữa những thuật toán đã thực sự giải được bài toán tới gần mức tối ưu.

9.3.8 Thảo luận

Rastrigin: giới hạn của bộ thuật toán trong bối cảnh high-dimensional. Khi đặt ERT và performance profiles cạnh ECDF và data profiles, bức tranh trở nên rõ ràng hơn rất nhiều: các tín hiệu “tốt” của GA và FA ở dimension thấp không kéo dài được sang dimension cao.

- Ở 10 chiều, GA và FA giảm sai số cuối đáng kể so với HC và SA, nhưng tỷ lệ thành công cho các target khó vẫn không cao.
- Ở 30 và 50 chiều, cả bốn thuật toán gần như đồng loạt “chụng lại”: ECDF phẳng, data profiles có coverage rất thấp và đa phần các lần chạy dừng xa optimum.
- GA vẫn là lựa chọn tương đối tốt nhất trong bốn thuật toán, nhưng chỉ theo nghĩa tương đối. Xét giá trị tuyệt đối, không thuật toán nào tiệm cận mức “giải tốt Rastrigin high-dimensional” dưới ngần sáu hiện hành.

Do đó, phần Rastrigin của benchmark không nhầm tìm ra thuật toán “giải trọn” bài toán, mà nhầm minh họa giới hạn vận hành của bốn heuristic này khi dimensionality tăng và ngần sáu hạn chế.

Firefly Algorithm trên Rastrigin: tác động của độ suy giảm hấp dẫn. FA trên không gian continuous high-dimensional gặp điểm nghẽn quen thuộc:

$$\beta(r) = \beta_0 \exp(-\gamma r^2).$$

Khoảng cách điển hình trong không gian d chiều tăng theo \sqrt{d} ; vì vậy nếu γ không được giảm mạnh theo d , thì $\beta(r)$ gần như bị triệt tiêu. Điều này đúng trong toàn bộ thí nghiệm:

- Dù đã giảm γ theo dimension, mức giảm vẫn không đủ để giữ tương tác giữa các cá thể.
- Khi $\beta(r)$ nhỏ, FA thoái hoá thành một dạng random walk có nhiều: di chuyển nhiều nhưng không “hút” nhau, dẫn tới không thể chui sâu vào basin tốt trong thời gian hữu hạn.

Điểm này gợi ý rằng muốn FA cạnh tranh được trên continuous high-dimensional, cần cơ chế điều chỉnh γ và α theo thời gian hoặc theo phân bố quần thể thay vì giữ cố định.

Knapsack: FA rời rạc giữa tốc độ hội tụ và chất lượng nghiệm cuối. Trên Knapsack, FA rời rạc kết hợp repair heuristic vẫn có một số điểm mạnh rất rõ, nhưng không còn là “người thắng tuyệt đối” nếu nhìn vào chất lượng nghiệm cuối và so sánh thống kê.

- Cơ chế lật bit có hướng khiến FA rất phù hợp để nhanh chóng đẩy nghiệm về một vùng có giá trị mục tiêu chấp nhận được trong không gian 0/1; data profile cho thấy FA đạt coverage cao với các ngưỡng gap tương đối “thoáng”.
- Greedy repair theo tỷ số v_k/w_k giúp khôi phục feasibility và cải thiện giá trị mục tiêu, nên mỗi bước repair vẫn giống một pha tối ưu hoá cục bộ hợp lý.
- Tuy nhiên, các boxplot fixed-budget cho thấy median gap của FA gần như luôn cao nhất trong bốn thuật toán, với phương sai nhỏ và ít tail tốt: FA hội tụ nhanh nhưng bị kẹt trong vùng nghiệm kém và không tận dụng thêm ngần sáu.

- So sánh cặp đôi và điểm Copeland cũng có kết luận này: GA và đặc biệt là SA thắng FA một cách có hệ thống cả ở mức penalty lắn sau repair, trong khi HC cũng thường xuyên vượt lên FA.

Nói cách khác, trong biến thể rắc hiện tại, FA là một *baseline nhanh và ổn định* để đạt xấp xỉ thô trên Knapsack 0/1, nhưng *không phải* thuật toán tốt nhất nếu quan tâm tới chất lượng nghiệm cuối sát tối ưu; vai trò đó thuộc về SA (mạnh nhất về tổng thể) và GA (đối thủ cạnh tranh trực tiếp, tương tác rất tốt với repair).

Ý nghĩa và hạn chế của performance/data profiles khi success rate thấp hoặc target “thoảng”. Dolan–Moré performance profile và Moré–Wild data profile là công cụ so sánh mạnh, nhưng rất dễ gây ảo giác nếu success rate thấp hoặc nếu tập target được chọn quá lỏng:

- Performance profile chỉ xét những run đạt target \Rightarrow một thuật toán có ít run thành công vẫn có thể trông “đẹp” nếu số ít lần thành công đó xảy ra nhanh.
- Data profile phản ánh coverage tốt hơn nhưng phụ thuộc mạnh vào cách chọn target và ngân sách; nếu target chỉ yêu cầu gap thô, thì một thuật toán nhanh nhưng dừng sớm vẫn được đánh giá cao.

Trong báo cáo này:

- Rastrigin high-dimensional: GA và FA trông tương đối tốt trên performance profile, nhưng ECDF và data profile cho thấy coverage rất thấp ở các target khó; phần lớn run không thật sự giải được bài toán.
- Knapsack: data/profile cho thấy FA có tốc độ và độ ổn định rất cao để đạt các ngưỡng gap tương đối lỏng, nhưng khi đổi chiều với fixed-budget gap và so sánh cặp đôi/Copeland, rõ ràng GA và đặc biệt là SA cho nghiệm cuối tốt hơn và áp đảo FA về mặt thống kê.

Kinh nghiệm rút ra là: performance/data profiles luôn phải được đọc cùng với ECDF, fixed-budget gap và phân tích thống kê, đặc biệt khi ta chỉ đang làm việc với các mức xấp xỉ thô, chưa tiệm cận optimum.

Không có thuật toán tối ưu “mọi nơi”: liên hệ với No Free Lunch. Ngay trong hai bài toán của benchmark, tính “không miễn phí” thể hiện rõ:

- Trên Rastrigin continuous (đặc biệt ở 10 chiều), GA mạnh hơn ba thuật toán còn lại cả về sai số cuối lắn xác suất đạt các target khó, dù bản thân nó vẫn chưa “giải tốt” bài toán ở dimension cao.
- Trên Knapsack 0/1, SA là thuật toán mạnh nhất về tổng thể (Copeland cao nhất, tail nghiệm tốt nhất), GA là đối thủ cạnh tranh trực tiếp nhờ tương tác tốt với repair, trong khi FA chủ yếu nổi bật ở khả năng nhanh chóng đạt được xấp xỉ thô và độ ổn định cao trên các target lỏng.
- HC và đặc biệt là FA hiếm khi đứng đầu về chất lượng nghiệm cuối, nhưng là baseline quan trọng để đánh giá mặt bằng độ khó và để phân tách rõ vai trò của local search đơn giản so với các metaheuristic phức tạp hơn.

Điểm cốt lõi: *hiệu năng phụ thuộc bài toán* (landscape, ràng buộc, cách mã hoá, ngân sách), không có solver nào thống trị toàn bộ.

Bài học về thiết kế benchmark và cách diễn giải kết quả. Một số kinh nghiệm rút ra từ quá trình xây dựng pipeline:

- **Metric phải đúng:** nhằm hướng cực trị khiết performance/data profile phẳng hoàn toàn — bài học lớn nhất khi phân tích Rastrigin.
- **ERT phải đi cùng success rate:** nếu không, ERT trên target khó trở nên vô nghĩa.
- **Hyperparameter cố định theo kịch bản:** thiết kế này đảm bảo công bằng, nhưng chỉ đại diện cho “out-of-the-box baseline”, không phải hiệu năng tối ưu.
- **Kết luận phải phản ánh giới hạn:** báo cáo tốt phải dám chỉ ra nơi thuật toán thất bại (ví dụ FA trên Rastrigin high-dimensional, hay FA trên Knapsack nếu xét nghiệm cuối) thay vì chỉ nhấn mạnh điểm mạnh.

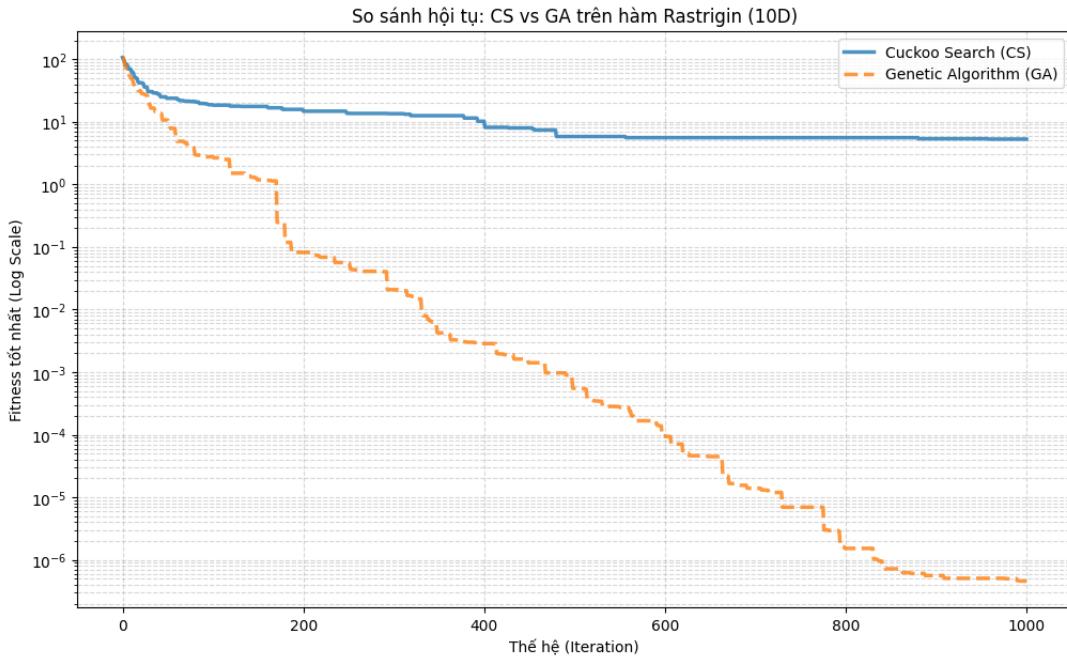
Tổng kết. Benchmark này cho thấy:

- Trên Rastrigin, không thuật toán nào đạt mức giải strong khi dimension tăng; GA vẫn là lựa chọn tương đối tốt nhất trong bốn, nhưng chỉ theo nghĩa tương đối.
- Trên Knapsack, FA rác rưởi hợp greedy repair là một baseline nhanh và ổn định để đạt xấp xỉ thô, thể hiện rất tốt trên data/performance profiles với các target lỏng; tuy nhiên, về chất lượng nghiệm cuối và so sánh thống kê, SA là thuật toán mạnh nhất, GA là đối thủ cạnh tranh trực tiếp, HC đứng giữa, còn FA thường xuyên là lựa chọn kém nhất.

Giá trị của benchmark không nằm ở việc tìm một “người thắng tuyệt đối”, mà ở việc chỉ ra thuật toán nào phù hợp với cấu trúc nào, dưới ngân sách nào — và minh bạch về nơi mỗi thuật toán thất bại.

9.4 Cuckoo Search

- CS hoạt động rất tốt trên hàm lồi như **Sphere**.
- Trên hàm đa cực như **Rastrigin**, CS chưa tìm đến giá trị tối ưu 0, còn GA đạt 0. Nguyên nhân phổ biến:
 - Rastrigin có nhiều local minima; CS có cơ chế Lévy giúp khám phá, nhưng tham số (step_size, p_a , β , số cá thể) có thể chưa phù hợp.
 - GA có cơ chế mutation và có thể dễ dàng duy trì tính đa dạng quần thể nếu được cấu hình tốt.
- CS có ít tham số và đơn giản hơn; GA có nhiều thao tác (selection/crossover/mutation) cho phép đa dạng nghiệm mạnh hơn.
- Trong thực nghiệm thì CS chạy nhanh hơn GA ở cùng quy mô và số vòng lặp, nhưng yếu tố này phụ thuộc vào cài đặt chi tiết (vectorization, cách tính fitness, chi phí crossover/mutation...).



Hình 36: Kết quả so sánh CS và GA trên Rastrigin 10D

- Hình 36 trình bày đường hội tụ của hai thuật toán Cuckoo Search (CS) và Genetic Algorithm (GA) trên hàm Rastrigin trong không gian 10 chiều. Kết quả cho thấy GA giảm giá trị fitness nhanh và ổn định hơn, trong khi CS có xu hướng chậm lại sau một số vòng lặp đầu và bị kẹt tại mức fitness cao hơn. Điều này minh họa sự khác biệt trong khả năng khai thác cục bộ của GA và khả năng khám phá mang tính ngẫu nhiên mạnh của CS.

10 Kết luận chung

Phân công công việc

Họ và Tên	MSSV	Công việc phụ trách
Lê Hải Đăng	23122006	<ul style="list-style-type: none">- Tìm hiểu và triển khai ABC- Tham gia quay video demo- Viết báo cáo
Nguyễn Nhật Minh	23122010	<ul style="list-style-type: none">- Tìm hiểu và triển khai ACO, PSO- Tham gia quay và chỉnh sửa video demo- Viết báo cáo
Nguyễn Văn Khoa	23122016	<ul style="list-style-type: none">- Tìm hiểu và triển khai Cuckoo Search- Tham gia quay video demo- Viết báo cáo
Bùi Anh Quân	23122017	<ul style="list-style-type: none">- Tìm hiểu và triển khai FA- Tham gia quay video demo- Viết và hiệu chỉnh báo cáo

Phụ lục

Tài liệu

- [Ack87] David H. Ackley. *A Connectionist Machine for Genetic Hillclimbing*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1987.
- [CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA, 3 edition, 2009.
- [DBS06] Marco Dorigo, Mauro Birattari, and Thomas Stützle. Ant colony optimization: Artificial ants as a computational intelligence technique. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 1(4):28–39, 2006.
- [DDC99] Marco Dorigo and Gianni Di Caro. The ant colony optimization meta-heuristic. In David Corne, Marco Dorigo, and Fred Glover, editors, *New Ideas in Optimization*, pages 11–32. McGraw-Hill, London, 1999.
- [DG89] Jean-Louis Deneubourg and Simon Goss. Collective patterns and decision-making. *Ethology Ecology & Evolution*, 1:295–311, 1989.

- [DG97] Marco Dorigo and Luca Maria Gambardella. Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1):53–66, 1997.
- [DJ75] Kenneth A. De Jong. *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*. PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI, 1975.
- [DM02] Elizabeth D. Dolan and Jorge J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2):201–213, 2002.
- [DMC96] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo, and Alberto Colomi. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 26(1):29–41, 1996.
- [Dor92] Marco Dorigo. *Optimization, Learning and Natural Algorithms*. PhD thesis, Politecnico di Milano, Milan, Italy, 1992.
- [DS04] Marco Dorigo and Thomas Stützle. *Ant Colony Optimization*. MIT Press, Cambridge, MA, 2004.
- [GJ79] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, San Francisco, 1979.
- [Gol89] David E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [HNR68] Peter E. Hart, Nils J. Nilsson, and Bertram Raphael. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 4(2):100–107, 1968.
- [Hol75] John H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- [IEH⁺25] Ashraf Osman Ibrahim, Elsadig Mohammed Elbushra Elfadel, Ibrahim Abaker Targio Hashem, Hassan Jamil Syed, Moh Arfian Ismail, Ahmed Hamza Osman, and Ali Ahmed. The Artificial Bee Colony algorithm: A comprehensive survey of variants, modifications, applications, developments, and opportunities. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 32:3499–3533, 2025.
- [JT95] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [KA09] Dervis Karaboga and Bahriye Akay. A comparative study of artificial bee colony algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 214(1):108–132, 2009.
- [Kar05] Dervis Karaboga. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization. Technical Report Technical Report TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, Kayseri, Turkey, 2005.
- [KE95] James Kennedy and Russell C. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, pages 1942–1948. IEEE, 1995.
- [KGV83] Scott Kirkpatrick, C. Daniel Gelatt, and Mario P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.

- [Lap92] Gilbert Laporte. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*, 59(2):231–247, 1992.
- [LL22] Jihong Li and others Li. Survey of lévy flight-based metaheuristics for optimization. *Mathematics*, 10(15):2785, 2022.
- [LLRKS85] Eugene L. Lawler, Jan Karel Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and David B. Shmoys, editors. *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley, Chichester, 1985.
- [Man94] Rosario N. Mantegna. Fast, accurate algorithm for numerical simulation of lévy stable stochastic processes. *Physical Review E*, 49(5):4677–4683, 1994.
- [MW09] Jorge J. Moré and Stefan M. Wild. Benchmarking derivative-free optimization algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 20(1):172–191, 2009.
- [Pis05] David Pisinger. Where are the hard knapsack problems? *Computers & Operations Research*, 32(9):2271–2284, 2005.
- [PKB07] Riccardo Poli, James Kennedy, and Tim Blackwell. Particle swarm optimization: An overview. *Swarm Intelligence*, 1(1):33–57, 2007.
- [Ras74] Leonid A. Rastrigin. *Systems of Extremal Control*. Nauka, Moscow, 1974.
- [Rey87] Craig W. Reynolds. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 21(4):25–34, 1987.
- [RN20] Stuart J. Russell and Peter Norvig. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson, 4 edition, 2020.
- [Ros60] Howard H. Rosenbrock. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *The Computer Journal*, 3(3):175–184, 1960.
- [SMCM21] Kate Smith-Miles, Jeffrey Christiansen, and Mario Andrés Muñoz. Revisiting “where are the hard knapsack problems?” via instance space analysis. *Computers & Operations Research*, 128:105184, 2021.
- [TN17] Surafel Luleseged Tilahun and Jean Medard Tchuenche Ngnotchouye. Firefly algorithm for discrete optimization problems: a survey. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 21(2):535–545, 2017.
- [TN19] Surafel Luleseged Tilahun and Jean Medard Tchuenche Ngnotchouye. Continuous versions of firefly algorithm: a review. *Artificial Intelligence Review*, 51(3):445–492, 2019.
- [VK13] B. K. Verma and Dharmender Kumar. A review on Artificial Bee Colony algorithm. *International Journal of Engineering and Technology*, 2(3):175–186, 2013.
- [WTL18] Dingwei Wang, Dejun Tan, and Li Liu. Particle swarm optimization algorithm: An overview. *Soft Computing*, 22(2):387–408, 2018.
- [Yan10] Xin-She Yang. Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimisation. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, 2(2):78–84, 2010.
- [Yan14] Xin-She Yang. Cuckoo search: recent advances and applications. *Neural Computing and Applications*, 24(1):169–174, 2014.

- [YD09] Xin-She Yang and Suash Deb. Cuckoo search via lévy flights. In *2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC)*, pages 210–214. IEEE, 2009.