

Progetto di Robotica Aerospaziale

Missione ESE



*Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Robotica e dell'Automazione
Anno Accademico 20/21*

Università di Pisa

Studenti

Daniele Caradonna
Giuseppe Milazzo
Alessio Tumminello
Federico Vitabile

Professore

Mario Innocenti

Sommario

INTRODUZIONE.....	3
METODO PATCHED CONICS	3
SFERA DI INFLUENZA.....	3
FLY-BY	5
RIFERIMENTI	5
MISSIONE	6
VIAGGI INTERPLANETARI.....	7
USCITA DALL'ORBITA TERRESTRE.....	9
IPERBOLE DI FUGA	10
CAMBIO DI PIANO	12
ORBITA DI PARCHEGGIO	13
FLY-BY	14
IMPLEMENTAZIONE: flyby.m	16
ARRIVO SU SATURNO	19
IPERBOLE DI CATTURA	19
ORBITA DI PARCHEGGIO SU SATURNO	21
ENCELADO	22
CONFRONTO CON HOHMANN.....	25
ANIMAZIONI	31
BIBLIOGRAFIA.....	31

INTRODUZIONE

METODO PATCHED CONICS

Lo scopo del progetto è quello di simulare una missione interplanetaria dalla Terra ad Encelado, un satellite di Saturno. Per realizzare ciò è stata utilizzata l'approssimazione data dal metodo “**Patched Conics**” che ha permesso di suddividere la missione in una serie di fasi, in ognuna delle quali la navicella si trova soggetta principalmente sotto l'azione gravitazionale di uno specifico corpo celeste. La risoluzione del **problema dei due corpi**, applicata ad ogni fase della missione, permette di ottenere in modo univoco una forma chiusa della traiettoria nello spazio del corpo secondario (navicella), orbitante attorno al corpo principale (corpo celeste).

Gli archi di conica della traiettoria associati ad ogni fase dovranno essere opportunamente raccordati. Ciò richiede l'utilizzo di ulteriori ipotesi semplificative; risulta necessario introdurre il concetto di *sfera di influenza*.

SFERA DI INFLUENZA

Detta anche sfera di Hill, dall'astronomo George William Hill che la definì, indica la porzione di spazio sferico attorno ad un corpo celeste, nella quale un corpo secondario orbitante risulta interamente soggetto all'influenza gravitazionale del corpo celeste (potendo trascurare le perturbazioni di terzi corpi). Esprimendo con $\frac{p_s}{a_p}$ il rapporto tra l'accelerazione perturbativa data alla navicella a causa del Sole e l'accelerazione gravitazionale data dal pianeta, si è in grado di esprimere la deviazione dell'orbita della navicella da quella kepleriana derivante dal pianeta, allo stesso modo con $\frac{P_p}{A_s}$ si esprime l'influenza del pianeta sull'orbita della navicella rispetto al Sole.

Dunque se:

$$\frac{p_s}{a_p} < \frac{P_p}{A_s}$$

allora l'effetto perturbante del Sole sull'orbita della navicella attorno al pianeta è inferiore all'effetto perturbante del pianeta sull'orbita della navicella attorno al Sole.

Si dice pertanto che la navicella si trova nella *sfera di influenza* del pianeta.

$$\frac{r_{SOI}}{R} = \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}}$$

La presenza di queste sfere di influenza, relative ad ogni pianeta, ci obbliga a definire delle iperboli di cattura e di fuga per entrare ed uscire da esse mentre, oltre il valore del raggio di Hill, il Sole avrà influenza maggiore sulla navicella determinando così delle traiettorie eliocentriche.

Il concetto della sfera di influenza è una notevole semplificazione del problema, in quanto nelle zone di raccordo si passa improvvisamente dall'azione gravitazionale di un corpo celeste a quella di un altro. Sarebbe opportuno considerare la transizione che nella realtà è molto graduale ma ciò complicherebbe notevolmente il problema facendo cadere le semplificazioni del modello kepleriano.

SISTEMI DI RIFERIMENTO

Di notevole importanza è anche l'assunzione di un opportuno sistema di riferimento che permette una semplificazione del problema. Come è immediato aspettarsi, in ogni fase, risulta opportuno scegliere un sistema di riferimento centrato nel corpo principale (legato al concetto di unica attrazione gravitazionale prima introdotto). Dal punto di vista di un ipotetico osservatore solidale al Sole (fase eliocentrica), le sfere di influenza risultano sostanzialmente puntiformi, coincidenti con il baricentro del corpo celeste a cui si riferiscono. Se invece si paragona il raggio della sfera di Hill di un pianeta, con una sua dimensione caratteristica (ad esempio il suo raggio medio), tale sfera apparirebbe notevolmente più grande.

In generale, comunque, il metodo Patched Conics permette di mantenere una sufficiente accuratezza pur garantendo una elevata semplicità delle analisi e per tale motivo è stato ampiamente utilizzato nelle analisi preliminari della missione.

FLY-BY

Per realizzare la missione si sono sfruttati gli effetti della fionda gravitazionale eseguendo due fly-by, uno su Venere e uno sulla Terra. Questi hanno permesso di aumentare l'energia necessaria a raggiungere Saturno ed ottimizzare il viaggio in termini di consumo di carburante.

La scelta dei fly-by su questi due pianeti è dovuta al fatto che, essendo Saturno uno dei pianeti più remoti del sistema solare, è stato necessario aumentare notevolmente l'energia della navicella. Si è quindi eseguito un primo fly-by su Venere, che è uno dei pianeti più vicini alla Terra, e in seguito, dato che durante il suo moto di rivoluzione la Terra si presenta nella traiettoria di uscita dall'orbita di Venere, si effettua un secondo fly-by sulla Terra per accumulare un'energia tale da permettere di raggiungere Saturno. Non sono stati scelti Marte o Giove per eseguire i fly-by poiché nelle date prescelte risultavano lontani da Saturno.

Inoltre, la scelta di questi pianeti su cui eseguire la manovra di fionda gravitazionale è stata anche ispirata alla missione Cassini, lanciata nel 1997, con l'obiettivo di raggiungere Saturno ed anche alla missione Dragonfly, programmata per il 2027, che ha lo scopo di raggiungere il satellite Titano di Saturno.

RIFERIMENTI

Ci siamo avvalsi dell'utilizzo del software "Nasa's Eyes" per la scelta più opportuna delle date, mentre per quanto riguarda il progetto di tutte le traiettorie e l'uso delle informazioni relative ai pianeti, sono state usate le slide del corso e il libro "Orbital Mechanics for Engineering Students – Howard Curtis". Da quest'ultimo è stato anche preso in considerazione il materiale digitale fornitoci col libro, a partire dal quale si è basata la programmazione Matlab dell'intero progetto.

MISSIONE

La missione inizia il 02 Agosto 2022, data in cui la Terra e Saturno si trovano in opposizione, da un'orbita circolare equatoriale a 200 km di altezza dalla Terra a partire dalla quale la navicella esegue un'iperbole di uscita dalla sfera di influenza della Terra ed inizia il suo primo volo interplanetario verso il pianeta Venere. Raggiunto quest'ultimo, il 02 Dicembre 2022 viene eseguito il primo fly-by della missione che permette alla navicella di aumentare la sua velocità ed arrivare così nuovamente sulla Terra. Qui eseguirà il secondo fly-by il 02 Maggio 2023 che darà alla navicella la velocità necessaria per raggiungere Saturno.

A circa $5 \cdot 10^7 km$ da Saturno la navicella entra nella sfera di influenza del pianeta ed inizia l'iperbole di cattura che la porterà sull'orbita di parcheggio il 02 Febbraio 2028. La navicella rimarrà su quest'orbita fino al 28 Maggio 2028, data in cui viene eseguita la traiettoria ellittica che in un giorno le permette di spostarsi verso il satellite Encelado, entrare nella sua sfera di influenza e posizionarsi in un'orbita circolare equatoriale a 100 km da esso e concludere così la missione il 29 Maggio 2028.

Al termine della missione si è tracciata la traiettoria di Hohmann per effettuare un confronto in termini di tempo di volo e di delta v tra le traiettorie da noi progettate e quella ottimale di Hohmann.

VIAGGI INTERPLANETARI

Come premesso, le traiettorie interplanetarie della navicella vengono calcolate sfruttando il metodo “patched conics”. Nello specifico caso, il metodo consiste nella risoluzione del problema dei due corpi, considerando il Sole come unico attrattore. Vengono dunque calcolate le traiettorie della navicella quando questa si trova all’interno della sfera di influenza del Sole e quindi sufficientemente lontana dagli altri pianeti. Solo successivamente si considerano le sfere di influenza dei pianeti di interesse, adattando localmente la traiettoria della navicella ed imponendone la continuità al punto di ingresso (nel caso di cattura) o di uscita (nel caso di fuga) della sfera di influenza del pianeta in questione.

Le rotte interplanetarie che siamo interessati a calcolare in questa fase sono:

1. Dalla Terra (02/08/2022) a Venere (02/12/2022), per il primo fly-by.
2. Da Venere (02/12/2022) alla Terra (02/05/2023), per il secondo fly-by.
3. Dalla Terra (02/05/2023) a Saturno (02/02/2028), dove la navicella, una volta entrata nella sfera di influenza del pianeta, eseguirà una manovra iperbolica di cattura per inserirsi in orbita di parcheggio attorno al pianeta.

La traiettoria dall’orbita di parcheggio attorno a Saturno ad un’orbita di parcheggio attorno Encelado verrà calcolata successivamente ed in maniera differente, poiché in quest’ultimo caso la navicella si trova all’interno della sfera di influenza di Saturno per tutta la durata del viaggio e bisognerà quindi risolvere il problema dei due corpi considerando Saturno come unico pianeta attrattore, anziché il Sole.

Il primo passo è quello di definire la posizione dei pianeti di interesse al variare del tempo usando un sistema di riferimento eliocentrico. Questo compito viene svolto attraverso la Matlab function “*planet_elements_and_sv_MOD.m*”, ottenuta riadattando la function “*planet_elements_and_sv.m*”, in cui sono stati inseriti anche i dati necessari al calcolo della posizione di Encelado.

La function prende in ingresso l’ID del pianeta di interesse e una data in formato “anno, mese, giorno, ora, minuto, secondo” e restituisce gli elementi orbitali del pianeta, la sua posizione e la sua velocità a quella determinata data, nonché la data stessa secondo

il calendario giuliano. Gli output sono calcolati a partire dallo standard “J2000”, che fornisce i parametri di interesse esatti dei pianeti alla data “01/01/2000 00:00:00”, e risolvendo l’equazione di Keplero con il metodo di Newton attraverso la function “*Kepler_E.m*”, per ottenere gli output ad una qualunque data successiva. Per quanto riguarda Encelado, noti i coefficienti orbitali della sua orbita attorno a Saturno ed una posizione iniziale di riferimento, la posizione finale del satellite è ottenuta sommando alla posizione di Saturno la posizione relativa di Encelado.

Le orbite vengono calcolate dalla function “*orbit_generator.m*”, che prendendo in input gli identificativi dei pianeti e le date di partenza e di arrivo, fornisce le posizioni e le velocità iniziali e finali della navicella, la durata del volo e gli elementi orbitali della traiettoria eseguita, risolvendo il problema di Lambert attraverso la function “*lambert.m*”; quindi si utilizza la funzione “*orbitMOD.m*” per ottenere la traiettoria della navicella e gli istanti di tempo che caratterizzano la sua legge oraria.

Le orbite dei pianeti vengono plottate in 3D attraverso la function “*plot_orbit.m*”, che calcola la posizione dei pianeti orbitanti giorno dopo giorno durante un’orbita completa del pianeta attorno al Sole e la grafica.

A scopo esemplificativo viene riportata una porzione di codice utilizzata nel calcolo della traiettoria Terra – Venere, che verrà sfruttata, cambiando opportunamente i parametri delle function, anche per il calcolo delle traiettorie successive.

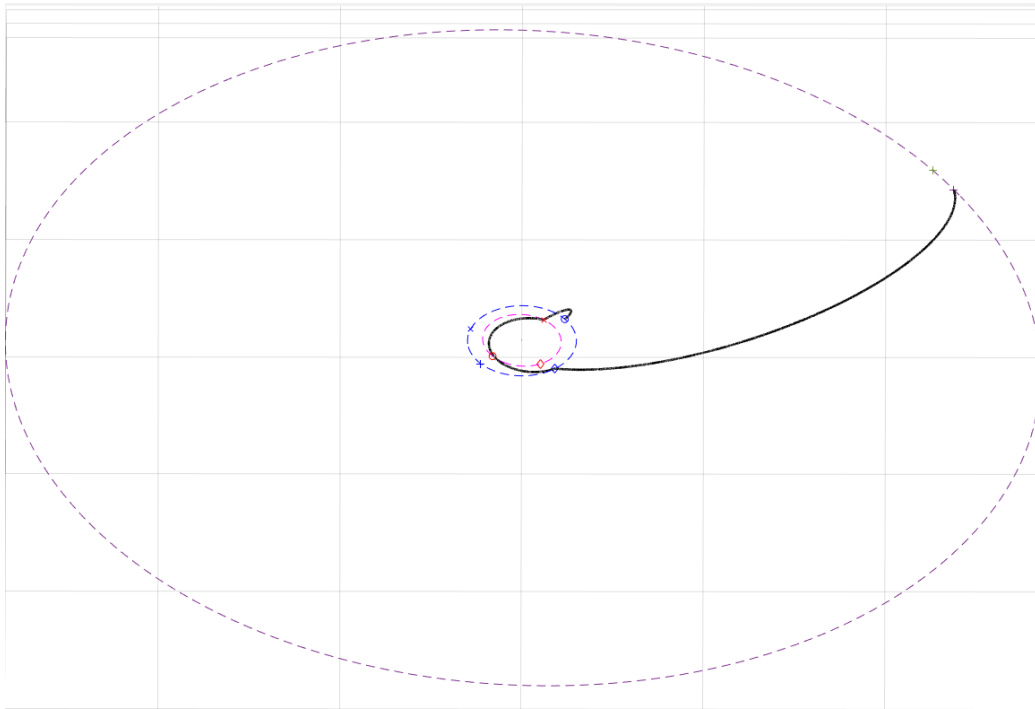
```
%Interplanetary orbit
fprintf('\n\n EARTH TO VENUS \n\n')
%02/08/2022 -> 02/12/2022
[body_pos1, sp_v1, body_posf1, sp_vf1, tof1, orb_elem1] = ...
    orbit_generator(3,2,[data0.year    data0.month    data0.day    0    0
0],[data1.year data1.month data1.day 0 0 0]);

Ev_orbit = orbitMOD(tof1,Earth_r0,sp_v1);

%Planet orbits
plot_orbit(3,data0.year)
plot_orbit(2,data1.year)
```

Ripetendo l’algoritmo anche per le altre traiettorie di interesse, si ottiene il grafico finale delle traiettorie interplanetarie, che verranno successivamente modificate in

maniera opportuna in prossimità dei pianeti, per includere i fly-by e le fasi iperboliche di fuga e di cattura.



USCITA DALL'ORBITA TERRESTRE

Una volta determinate le traiettorie interplanetarie da percorrere, tramite le quali si raggiungeranno i pianeti su cui effettuare i fly-by ed infine Saturno, si può passare a determinare le manovre orbitali intermedie. Queste sono necessarie per passare da una traiettoria interplanetaria all'altra, nel caso dei fly-by, e per entrare o uscire dalla sfera di influenza di un pianeta nelle fasi di cattura o fuga.

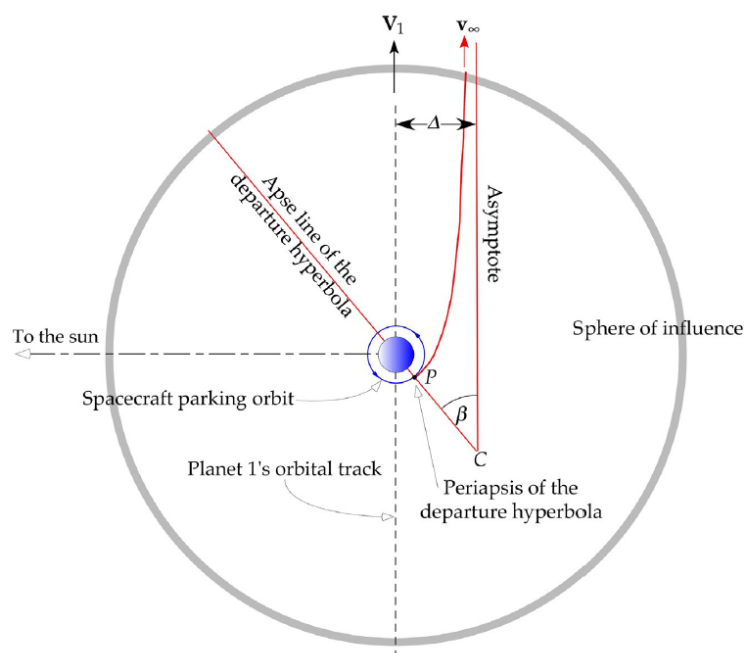
La prima manovra esaminata è quella necessaria per uscire dalla sfera di influenza della Terra ed entrare in orbita nella traiettoria interplanetaria che porterà la navicella verso Venere. Questa manovra si compone di due fasi, un cambio di piano dell'orbita di parcheggio e di un'iperbole di fuga per abbandonare il pianeta.

La necessità di due manovre nasce dal fatto che l'orbita di parcheggio iniziale intorno alla terra è equatoriale, mentre la traiettoria interplanetaria su cui ci si dovrà portare no. Quindi si effettuerà, come prima cosa, un cambio dell'inclinazione dell'orbita di parcheggio intorno alla Terra per ottenere la stessa inclinazione dell'orbita

interplanetaria, pari a $3,68^\circ$. Una volta ricondotto il problema sullo stesso piano, si imprimerà il Δv necessario per passare dalla nuova orbita circolare all'iperbole di fuga e quindi lasciare il pianeta Terra.

Per la determinazione delle orbite da seguire e dei Δv necessari si è proceduto in ordine temporale inverso rispetto alla procedura appena illustrata. In particolare, si è partiti dal calcolo dell'iperbole di fuga necessaria per entrare nell'orbita interplanetaria. Una volta nota l'iperbole di fuga e i suoi elementi orbitali si è potuta calcolare l'orbita di parcheggio complanare ad essa. Infine, si è calcolato il Δv necessario a passare dall'orbita equatoriale a quella determinata nel passo precedente.

IPERBOLE DI FUGA



Per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un pianeta, la navicella spaziale deve percorrere una traiettoria iperbolica intorno al pianeta, arrivando alla sua sfera di influenza con una velocità relativa v_∞ (eccesso di velocità iperbolica) maggiore di zero. Questo eccesso di velocità iperbolica è calcolabile come la differenza tra la velocità che dovrà avere la navicella spaziale sull'orbita interplanetaria e la velocità della Terra, ovvero:

$$v_\infty = v_{out} - v_{earth}$$

L'iperbole di fuga sarà caratterizzata da un periasse r_p pari al raggio dell'orbita di parcheggio iniziale, quindi 200 km. Dal raggio di periasse e dall'eccesso di velocità di fuga ci si può quindi calcolare il momento angolare h e l'eccentricità e dell'iperbole come:

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_1}{r_p}}$$

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_1}$$

Da cui ci si può ora calcolare la velocità al perigeo dell'iperbole v_p

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_1}{r_p}}$$

Il Δv quindi da fornire sarà dato da $\Delta v = v_p - v_c$, con $v_c = \sqrt{\frac{\mu_{earth}}{r_p}}$ la velocità della navicella sull'orbita circolare terrestre.

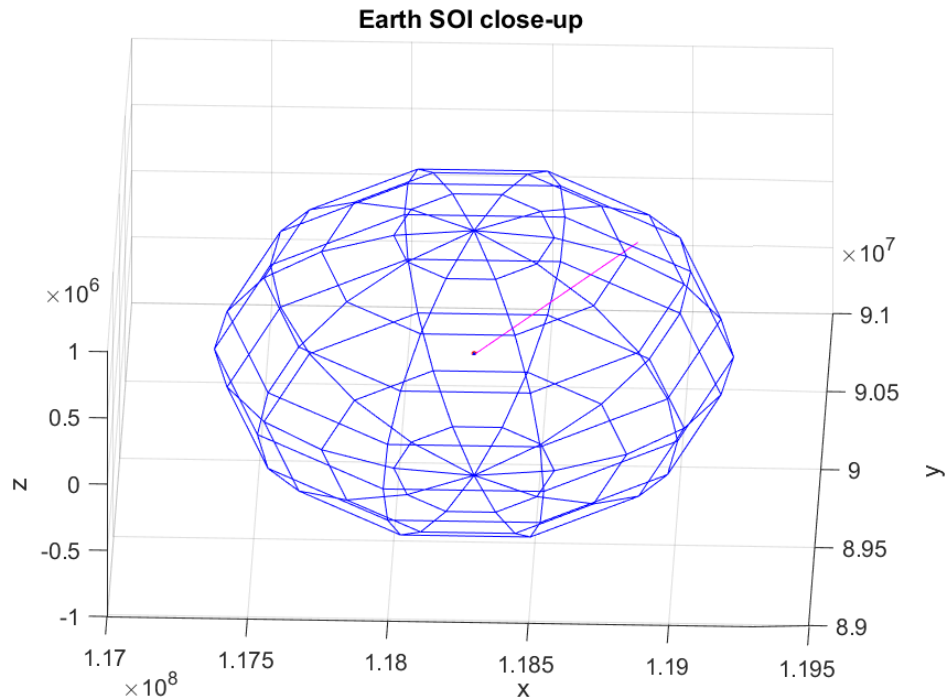
$$\Delta v = v_p - v_c = v_c \left(\sqrt{2 + \left(\frac{v_\infty}{v_c} \right)^2} - 1 \right)$$

Il Δv così trovato risulta essere di 5,705 Km/s.

L'iperbole di fuga è stata implementata su Matlab con la function “*escape_hyperbola.m*”. Questa function prende in ingresso un ID relativo al pianeta da cui si deve uscire, i primi due punti e gli elementi orbitali della traiettoria interplanetaria, la data di partenza dal pianeta, il raggio dell'orbita di parcheggio e la velocità che deve avere la navicella spaziale una volta uscita dalla SOI. La function restituisce una matrice contenente le coordinate x, y e z della traiettoria iperbolica e il Δv necessario per la manovra.

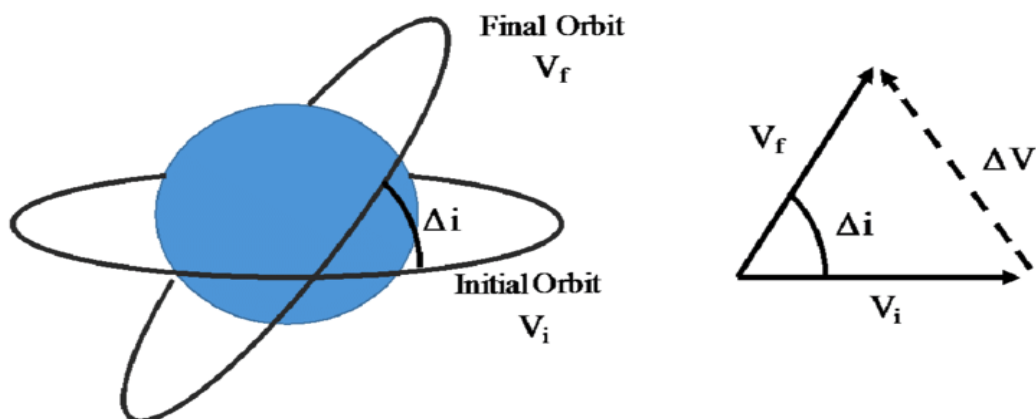
La function si compone di due parti. Nella prima si calcola il Δv e gli elementi orbitali dell'iperbole con le formule viste prima, nella seconda parte si sfruttano gli elementi orbitali calcolati per determinare la traiettoria iperbolica che seguirà la navicella.

La function, oltre alle uscite già citate, restituisce una rappresentazione grafica dell'iperbole di fuga trovata.



CAMBIO DI PIANO

Una volta determinata l'iperbole di fuga si passa a determinare il Δv necessario a passare dall'orbita equatoriale di parcheggio ad una stessa orbita ma con inclinazione uguale all'iperbole di fuga.



Il cambio di piano è una manovra a singolo impulso che può essere usata per variare l'inclinazione e la longitudine del nodo ascendente di un'orbita. Nel nostro caso ci riferiremo alla sola variazione di inclinazione.

La manovra si compone di un singolo impulso, da erogare in uno dei due punti in cui le due orbite si intersecano, pari a $\Delta v = 2v_{init} \sin \frac{\Delta i}{2}$. Con Δi la variazione di inclinazione desiderata e v_{init} la velocità nella navicella nell'orbita di parcheggio iniziale.

Il calcolo del Δv necessario è effettuato con la function “*change_of_plane.m*”. Essa prende in ingresso i valori dell'inclinazione iniziale i_1 e finale i_2 , l'angolo del nodo ascendente iniziale Ω_1 e finale Ω_2 e la velocità iniziale.

Da questi angoli, nel caso più generale, si può calcolare l'angolo fra i vettori velocità iniziali e finali θ dalla relazione

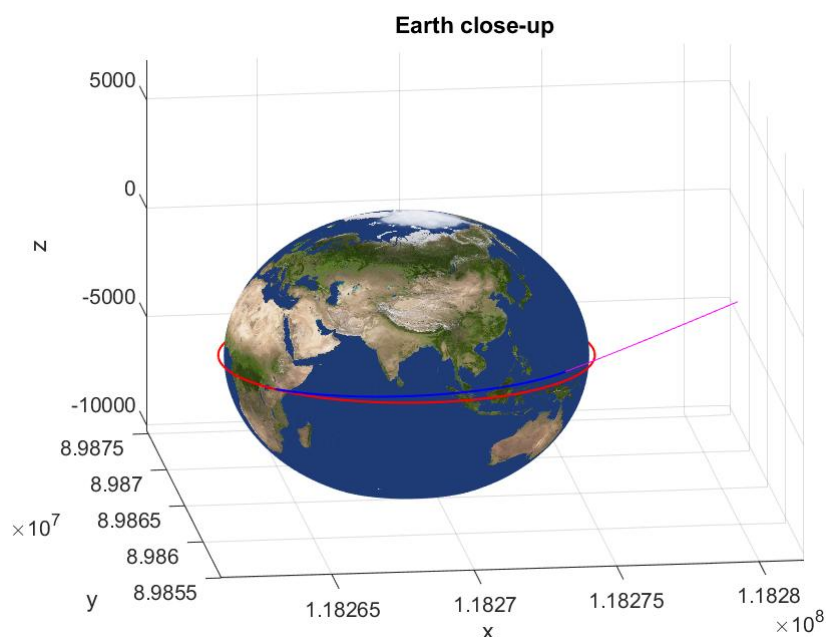
$$\cos \theta = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1)$$

Ed infine ponendo $\Delta i = \theta$ si calcola il Δv come visto prima.

Il Δv così trovato risulta essere di 0.4997 km/s.

ORBITA DI PARCHEGGIO

Nella figura di seguito si può vedere l'orbita di parcheggio equatoriale di partenza (di colore rosso), la nuova orbita di parcheggio dopo il cambio di piano (di colore blu) ed infine l'iperbole di fuga.



Le due orbite di parcheggio sono state calcolate con l'uso della function *"park_orbit_out.m"*. Quest'ultima considera che l'orbita di parcheggio preceda un'iperbole di fuga e prende in ingresso l>ID identificativo del pianeta di riferimento e la sua posizione nella data di riferimento, il raggio dell'orbita di parcheggio, gli elementi orbitali dell'iperbole, il primo punto dell'iperbole e le date di inizio e di fine dell'orbita di parcheggio. Nel caso dell'orbita di parcheggio equatoriale si sono sostituite le coordinate del primo punto dell'iperbole con un vettore di zeri e al posto degli elementi orbitali dell'iperbole si sono usati quelli di un'orbita circolare equatoriale.

FLY-BY

L'incontro iperbolico o fly-by è una tecnica per aumentare (o diminuire) la velocità della sonda senza consumo di carburante, grazie all'azione gravitazionale di un pianeta intermedio. Nelle missioni spaziali, l'effetto fionda è fondamentale per raggiungere pianeti relativamente remoti del sistema solare, mantenendo minime le quantità di carburante utilizzate. I fly-by proposti nella missione ESE sono uno su Venere e uno sulla Terra. Infatti, a seconda delle date scelte, Marte e Giove non permettevano un fly-by per la traiettoria interplanetaria Terra - Saturno.

Breve richiamo:

L'incontro iperbolico consiste in un'entrata nella sfera di influenza (SOI) del pianeta intermedio con una traiettoria iperbolica. All'uscita della stessa, il vettore di velocità assoluta della navicella, acquista un termine di trascinamento dovuto al movimento del pianeta stesso, di fatto ruotando il vettore.

Il fly-by inoltre può essere di 2 tipi:

- *Leading-side fly-by*: La navicella passa davanti al pianeta e la velocità in uscita dalla traiettoria iperbolica è minore di quella entrante. La velocità di trascinamento del pianeta rallenta la navicella.

- *Trailing-side fly-by*: La navicella passa dietro il pianeta, ottenendo una spinta gravitazionale e aumentando la sua velocità in uscita.

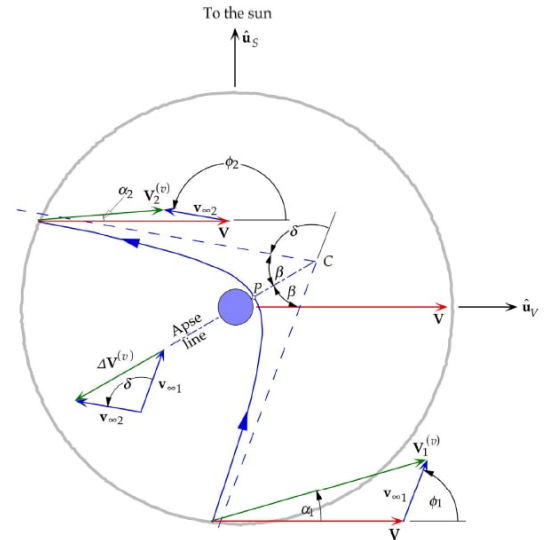
Siano $v_{\infty}^{(1)}$ $v_{\infty}^{(2)}$ la velocità relativa al pianeta di ingresso e di uscita.

Siano inoltre i seguenti angoli:

β : Angolo formato da ciascun asintoto dell'iperbole.

ν_{∞} : Anomalia vera al raggiungimento della SOI.

δ : Angolo di svolta, ovvero l'angolo di cui ruota il vettore velocità.



Sussistono le seguenti relazioni:

$$\cos(\nu_{\infty}) = -\frac{1}{e}$$

$$\nu_{\infty} = \pi - \beta$$

$$\pi = 2\beta + \delta$$

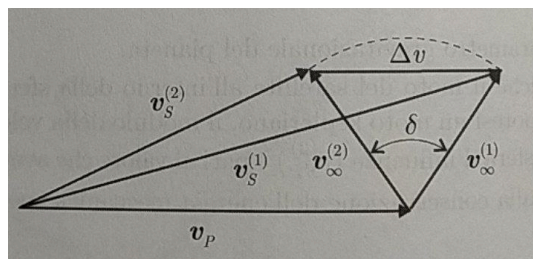
Inoltre, i parametri dell'iperbole sono pari a:

$$a = \frac{r_p}{e-1} \quad b = a\sqrt{e^2 - 1}$$

L'iperbole, dunque può essere scritta in forma parametrica come: $\begin{cases} x = a \cosh s \\ y = b \sinh s. \end{cases}$

Dal triangolo di velocità, è possibile trovare facilmente la variazione di velocità imposta dal fly-by. Infatti:

$$\Delta v = 2v_{\infty} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$



IMPLEMENTAZIONE: *flyby.m*

L'implementazione del fly-by avviene attraverso la M-function "*flyby.m*". Essa prende in ingresso:

- L'ID del pianeta intermedio attorno cui effettuare l'incontro iperbolico.
- L'angolo di svolta.
- L'altitudine, ovvero la minima distanza dal pianeta nella fase critica.
- Un flag che permette di scegliere tra trailing e leading fly-by.
- La data della manovra.
- 3 angoli di Eulero che individuano l'inclinazione nello spazio dell'iperbole.

Da questi ingressi, vengono calcolati i parametri necessari per il calcolo dell'orbita iperbolica, scritti precedentemente nel richiamo.

Il tracciamento dell'iperbole usa una struttura iterativa che divide in 3 parti la traiettoria.

1. Dall'ingresso della SOI al punto critico. Quest'ultimo è individuato dall'equazione caratteristica dell'iperbole, particolarizzata per v_{∞} .
2. Dal punto critico al punto simmetrico rispetto all'asse y, di fatto coincidendo con la parte dell'iperbole più vicina al pianeta.
3. Dal punto critico simmetrico all'uscita della SOI.

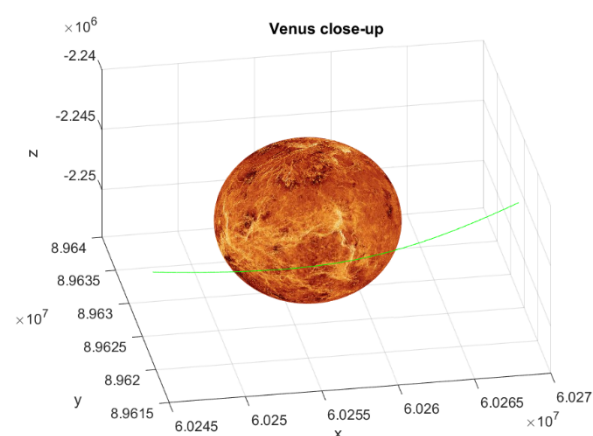
Tracciata l'iperbole, viene applicata un'eventuale matrice di rotazione con gli angoli di Eulero forniti in ingresso. Successivamente, il resto dello script grafica l'iperbole in 3D attorno al pianeta, lo schema delle orbite interplanetarie e un plot polare, per visualizzare al meglio gli angoli in gioco.

Fly-by 1: Venus 02/12/2022

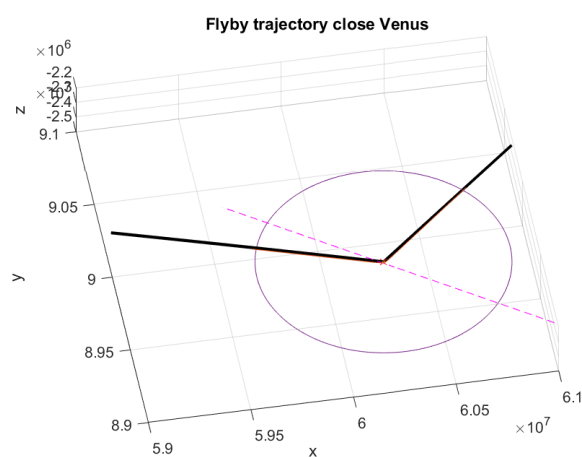
Il fly-by attorno Venere avviene 4 mesi dopo dall'uscita della SOI della terra. Esso permette di aumentare la velocità e ridurre il tempo di arrivo per Saturno.

Di seguito i dati:

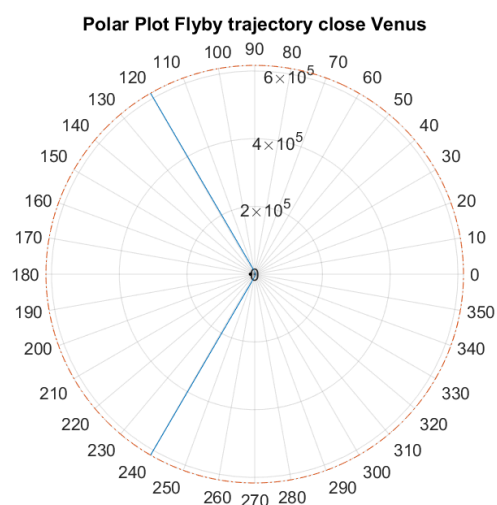
Radius of influence of Venus	= 616400 (km)
Radius of Venus	= 6051 (km)
Altitude	= 300 (km)
True anomaly	= 120.2621
Beta angle	= 59.7379
Delta angle	= 60.5243
Eccentricity	= 1.9843
V infinity	= 7.0956 (km/s)
Semi major axis	= 6452.3208 (km)
Semi minor axis	= 11058.5976 (km)



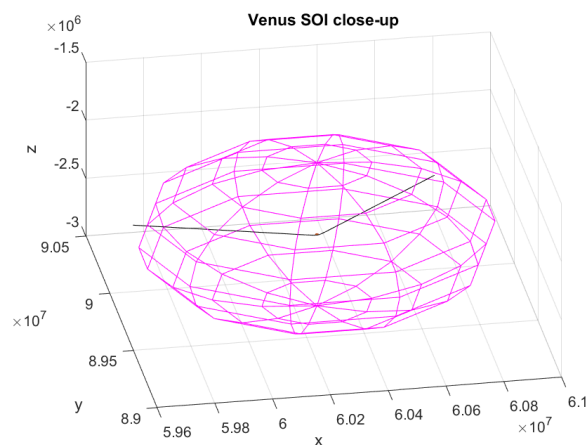
(a)



(b)



(c)



(d)

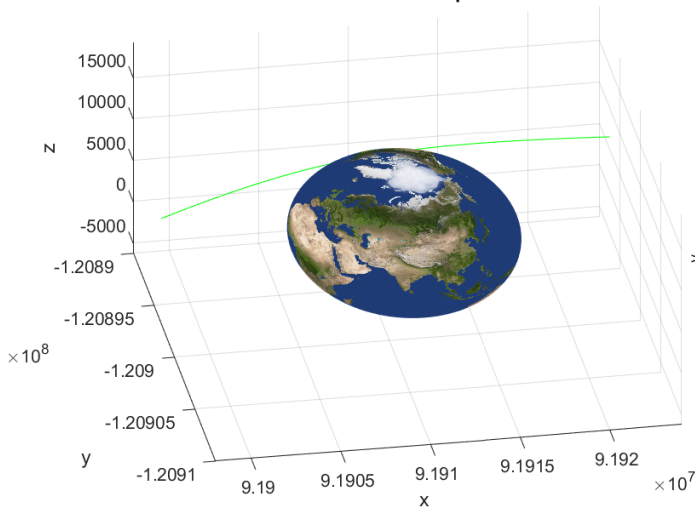
Fly-by 2: Earth 02/5/2023

Il secondo fly-by approfitta del passaggio della Terra per ricevere un'ulteriore spinta prima di intraprendere l'orbita per Saturno.

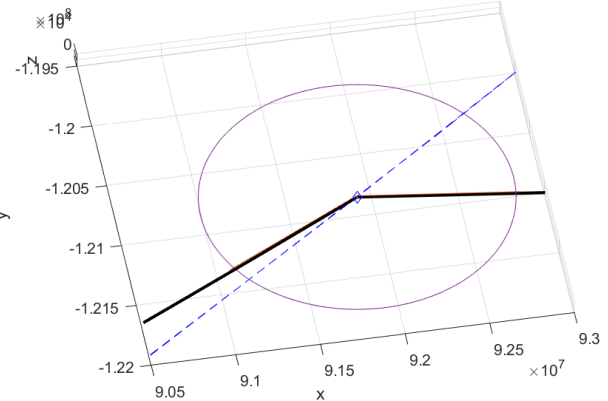
Di seguito i dati:

Radius of influence of Earth	= 924600 (km)
Radius of Earth	= 6371 (km)
Altitude	= 1000 (km)
True anomaly	= 108.7712
Beta angle	= 71.2288
Delta angle	= 37.5424
Eccentricity	= 3.1076
V infinity	= 10.6758 (km/s)
Semi major axis	= 3497.3169 (km)
Semi minor axis	= 10290.2423 (km)

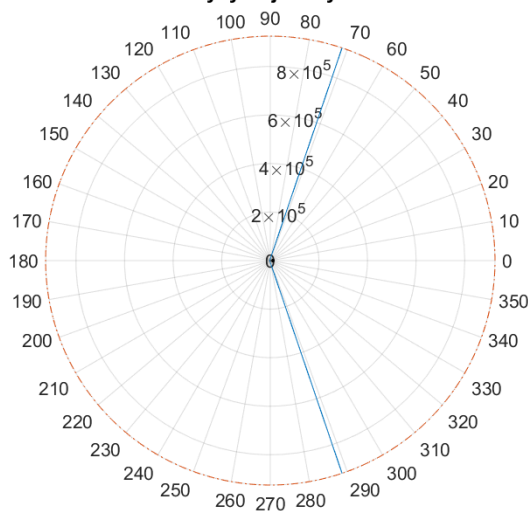
Earth close-up 2



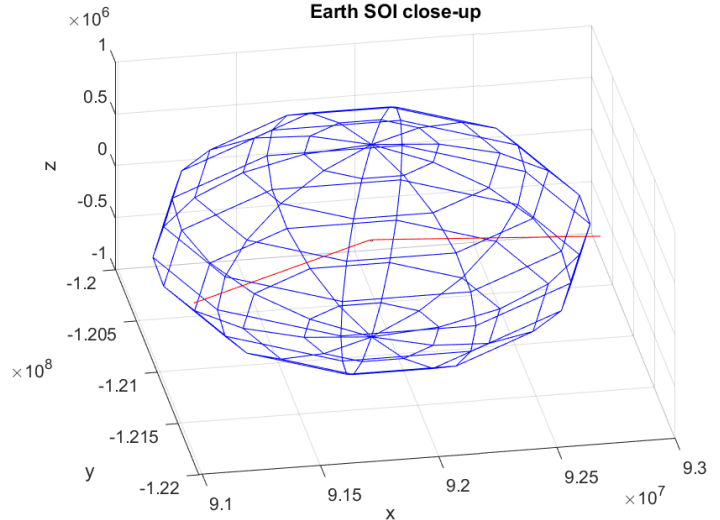
Flyby trajectory close Earth



Polar Plot Flyby trajectory close Earth



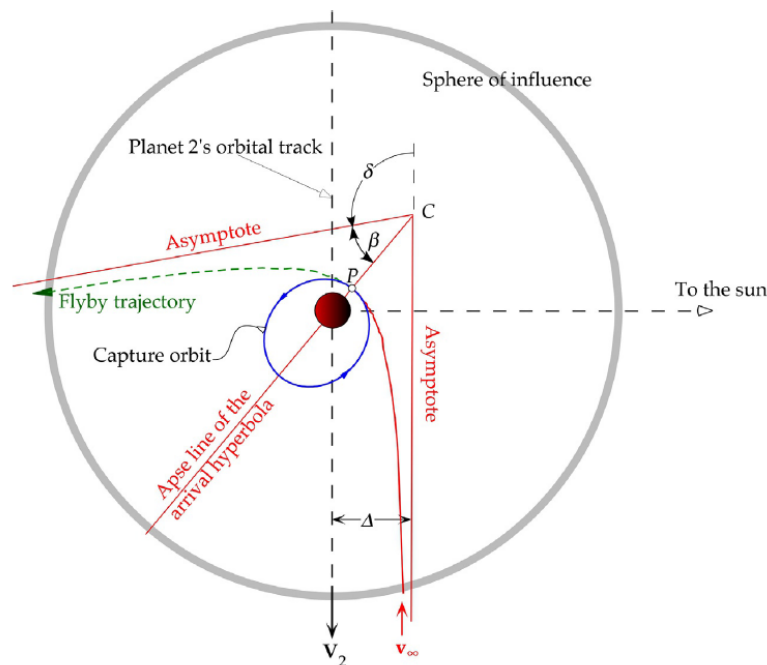
Earth SOI close-up



ARRIVO SU SATURNO

Una volta arrivati all'inizio della sfera di influenza di Saturno cade l'ipotesi di unico attrattore il Sole e subentra al suo posto Saturno. Bisogna ora progettare una traiettoria che porti la navicella dall'orbita interplanetaria di partenza ad un'orbita circolare di parcheggio di altezza 400 km . Per fare ciò si procede in maniera duale al caso di uscita dalla SOI terrestre, progettando in questo caso un'iperbole di cattura.

IPERBOLE DI CATTURA



In questo caso la navicella arriva sul pianeta con un eccesso di velocità v_∞ dato dalla differenza tra la velocità della navicella e quella del pianeta. Servirà quindi fornire un Δv negativo per rallentare la navicella, senza il quale non si entrerebbe in orbita sul pianeta ma si effettuerebbe un fly-by. L'impulso dovrà essere fornito quando la navicella si troverà al periasse dell'iperbole, che coincide con il periasse dell'orbita di cattura.

La velocità al periasse dell'iperbole di cattura è data da

$$v_p)_{\text{hyp}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_2}{r_p}}$$

mentre quella dell'orbita di parcheggio, nello stesso punto

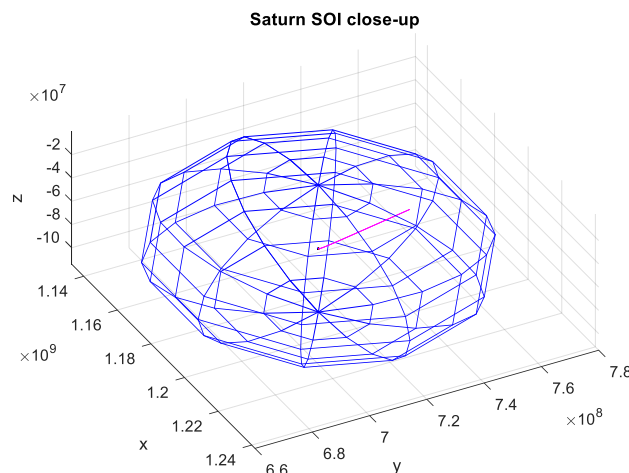
$$v_p)_{\text{capture}} = \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{r_p}}$$

di conseguenza il Δv da fornire sarà dato da

$$\Delta v = v_p)_{\text{hyp}} - v_p)_{\text{capture}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_2}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{r_p}}$$

L'iperbole di cattura viene calcolata dalla function *"capture_hyperbola.m"*. Quest'ultima prende in ingresso un identificativo relativo al pianeta su cui si vuole entrare in orbita, gli ultimi due punti e gli elementi orbitali della traiettoria interplanetaria, la data di arrivo nel pianeta, il raggio dell'orbita di parcheggio e la velocità che della navicella spaziale all'ingresso della SOI. La function restituisce una matrice contenete le coordinate x, y e z della traiettoria iperbolica e il Δv necessario per la manovra.

La function è moto simile a quella per l'iperbole di fuga e si compone sempre di due parti. Nella prima si calcola il Δv e gli elementi orbitali dell'iperbole e nella seconda si sfruttano gli elementi orbitali calcolati prima per determinare la traiettoria iperbolica che seguirà la navicella. Anch'essa restituisce una rappresentazione grafica dell'iperbole di cattura trovata.

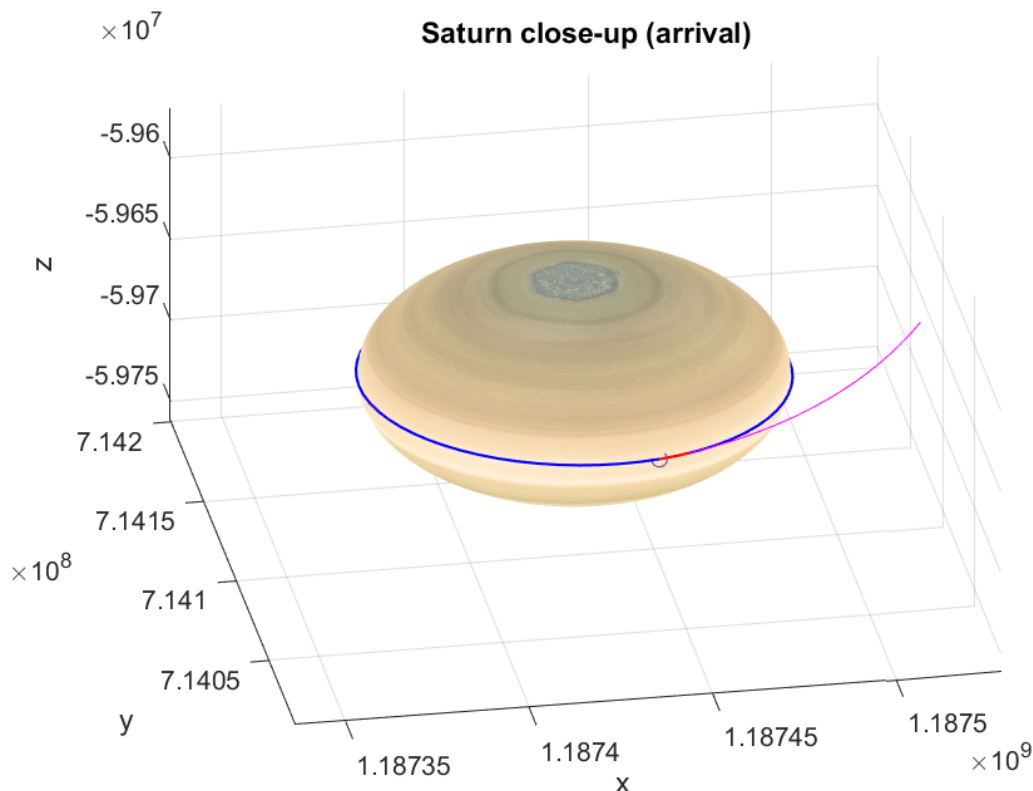


ORBITA DI PARCHEGGIO SU SATURNO

Una volta calcolata l'iperbole di cattura si calcola l'orbita di parcheggio su Saturno. Quest'ultima non sarà equatoriale ma avrà la stessa inclinazione dell'iperbole di cattura e durerà poco meno di 4 mesi, dopo i quali la navicella riprenderà il suo viaggio in direzione di Encelado.

Per il calcolo dell'orbita di parcheggio si usa la function "*park_orbit_in.m*", duale della già vista "*park_orbit_out.m*". Questa function considera che l'orbita di parcheggio segua un'iperbole di cattura e prende in ingresso l'ID identificativo del pianeta di riferimento e la sua posizione nella data di riferimento, il raggio dell'orbita di parcheggio, gli elementi orbitali dell'iperbole, l'ultimo punto dell'iperbole e le date di inizio e di fine dell'orbita di parcheggio.

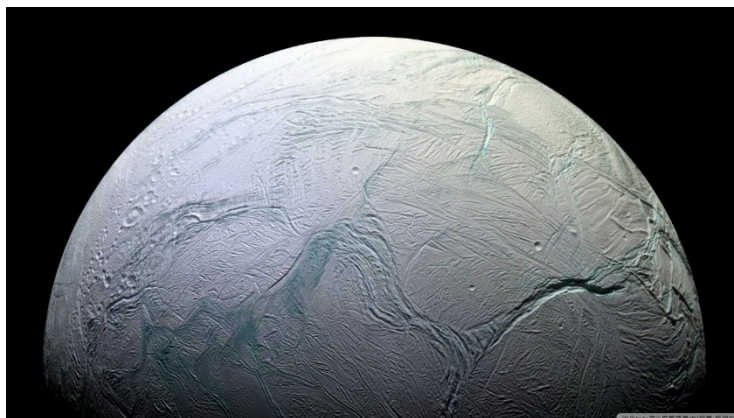
La function considera che al tempo iniziale la navicella si trovi all'interno di un'orbita di parcheggio circolare caratterizzata dall'inclinazione e dal nodo ascendente degli elementi orbitali dati in ingresso ed attraverso un algoritmo di integrazione calcola tutta l'orbita dalla data di inizio a quella di fine.



ENCELADO

Dopo poco meno di 4 mesi in orbita attorno Saturno, la navicella dovrà raggiungere Encelado, il satellite target della missione. Esso ha un'orbita relativamente piccola intorno Saturno e chiaramente appartiene alla SOI del pianeta gassoso. L'orbita di Encelado attorno Saturno è approssimabile a circolare, con inclinazione 0.02° (rispetto Saturno).

Appartenendo alla SOI di Saturno, non è necessario effettuare un'iperbole di fuga, ma un più semplice cambio di orbita di parcheggio. Al contrario, per entrare nella SOI di Encelado, è necessario effettuare un'iperbole di cattura.



Partenza da Saturno: 28/05/2028

La partenza da Saturno viene effettuata facendo un cambio di orbita di parcheggio, da quella di arrivo a quella di raggio pari alla distanza Saturno Encelado. L'implementazione di tale trasferimento orbitale è dovuta alla “*transfer_orbitSE.m*”. Essa, infatti usa le due funzioni “*lamert.m*” e “*rkf45.m*”, le quali calcolano l'orbita di trasferimento tra le due orbite di parcheggio desiderate.

La prima in particolare, risolve il problema di Lambert, fornendo le condizioni iniziali di integrazione, usate successivamente dalla seconda funzione. Quest'ultima integra utilizzando l'algoritmo di Runge-Kutta-Fehlberg, ricavando così l'orbita di trasferimento.

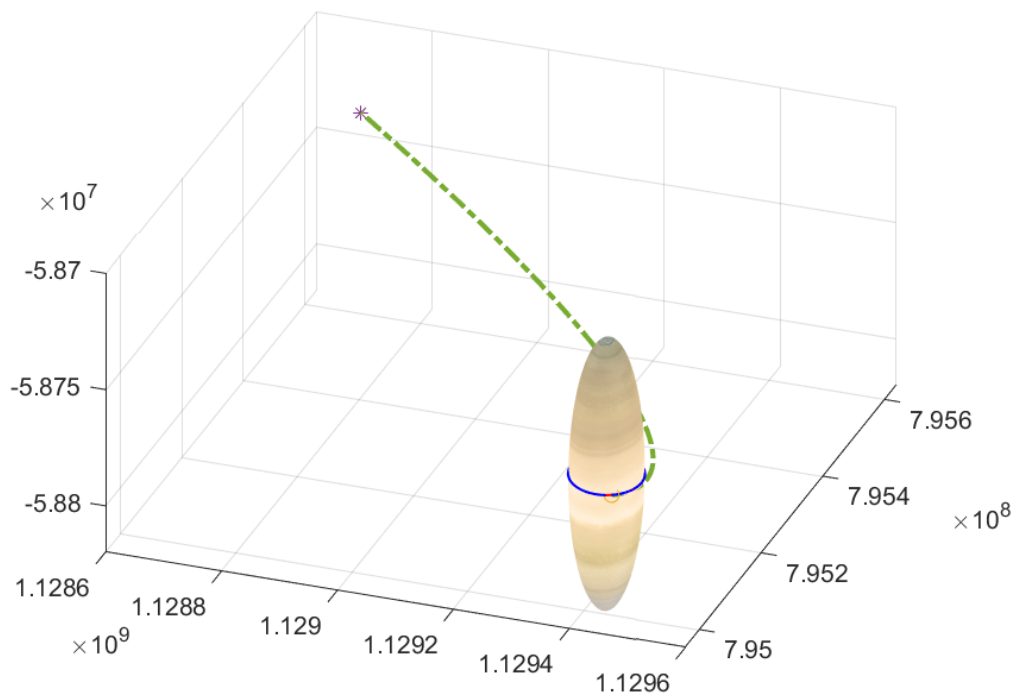
Infine, “*transfer_orbitSE.m*” calcola il consumo di carburante totale.

Date V_1 e V_2 , uscite dalla funzione *lambert*:

$$\Delta v_1 = |V_1| - v_{p1} \quad \text{dove} \quad v_{pi} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{pi}}}$$

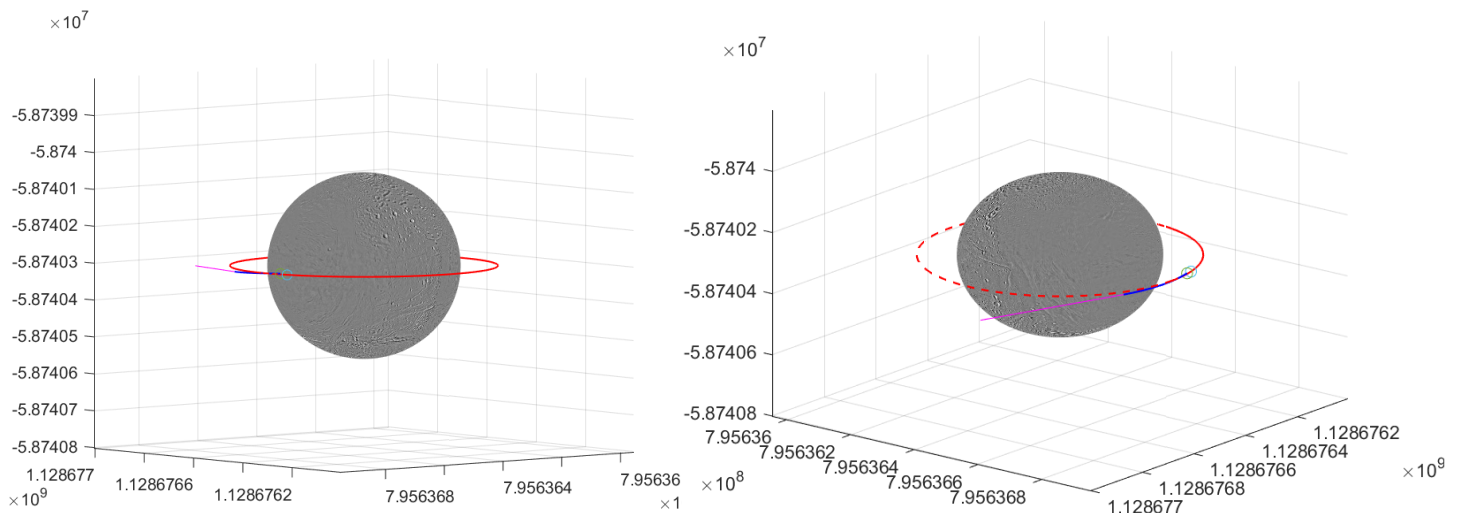
$$\Delta v_2 = |V_2| - v_{p2}$$

Di seguito il grafico dell'orbita di trasferimento:



Arrivo su Encelado: 29/05/2028

Per entrare nella sfera di influenza di Encelado, è necessario effettuare un'iperbole di cattura. Essa è implementata dalla function *"escape_hyperbola.m"*. Effettuata la manovra, si entra in un'orbita di parcheggio di raggio 100 Km. Viene successivamente effettuato un cambio di piano dell'orbita, per arrivare ad un'orbita di parcheggio equatoriale.



Consumi:

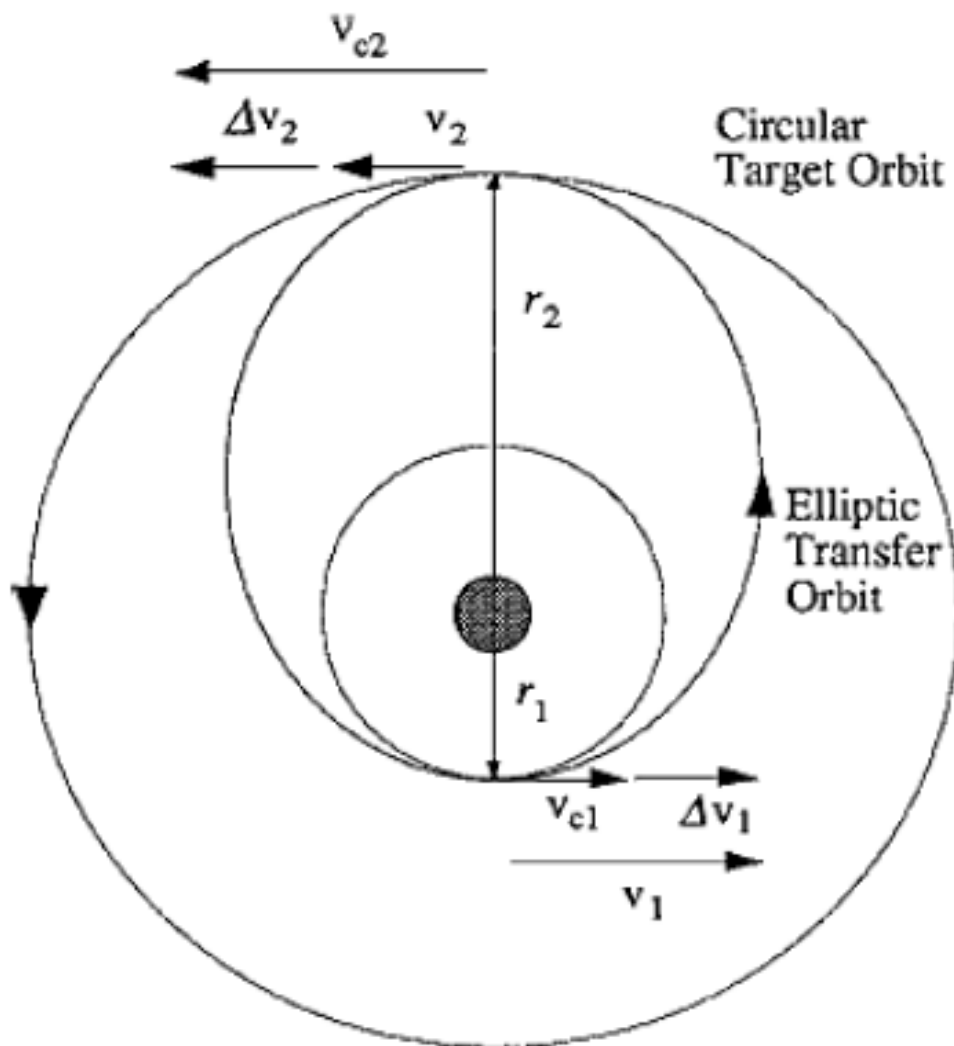
Il Δv necessario per effettuare queste due manovre è pari a:

- Partenza Saturno: 12,05 km/s
- Cattura Encelado: 4,53 km/s
- Cambio di piano Encelado: 0,006 km/s

CONFRONTO CON HOHMANN

Come ultima richiesta del progetto, si riprogramma la missione sostituendo la traiettoria utilizzata con un trasferimento di Hohmann diretto dalla Terra a Saturno e si confrontano i risultati ottenuti in termini di consumo di carburante e di tempo necessario per portare al termine la missione.

Il trasferimento orbitale di Hohmann è una manovra a due impulsi che permette di passare da un'orbita circolare interna ad un'orbita circolare esterna, il cui fuoco coincide con quello della precedente, seguendo un'orbita di trasferimento ellittica. Si suppone che l'impulso dei motori fornisca alla navicella un cambio di velocità Δv istantaneo. Il trasferimento di Hohmann è stato dimostrato essere ottimale dal punto di vista del consumo energetico tra tutte le manovre a due impulsi tra due orbite ellittiche coassiali.



Tale trasferimento necessita delle seguenti ipotesi applicative:

- Le orbite di partenza e di arrivo sono complanari.
- La navicella risente dell'attrazione di un singolo pianeta.
- La posizione iniziale della navicella alla partenza è il perigeo dell'orbita circolare più interna, mentre la posizione finale della navicella all'arrivo è all'apogeo dell'orbita circolare più esterna.

Quest'ultima ipotesi implica che i pianeti di partenza e di arrivo devono trovarsi in delle posizioni ben precise per poter effettuare il trasferimento, influenzando la scelta della data. La data selezionata per la partenza, in modo tale da soddisfare quest'ultima ipotesi, è il 02 Aprile 2022. Dunque, noti i raggi delle orbite iniziali e finali desiderate, si possono calcolare tutti i parametri necessari ad effettuare il trasferimento ed in particolare la propulsione che bisogna fornire alla navicella per immettersi nell'orbita di trasferimento (primo impulso) e per immettersi nell'orbita finale desiderata (secondo impulso).

$$\begin{aligned}
 v_{init} &= \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} & v_{trans,p} &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}} = \sqrt{2\mu \frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \\
 \Delta v_1 &= v_{trans,p} - v_{init} = \sqrt{2\mu \frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{(r_1 + r_2)}} - 1 \right) \\
 v_{trans,a} &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{2\mu \frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} & v_{fin} &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \\
 \Delta v_2 &= v_{fin} - v_{trans,a} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{2\mu \frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{(r_1 + r_2)}} \right)
 \end{aligned}$$

Il tempo necessario al trasferimento orbitale coincide con il semiperiodo dell'orbita ellittica.

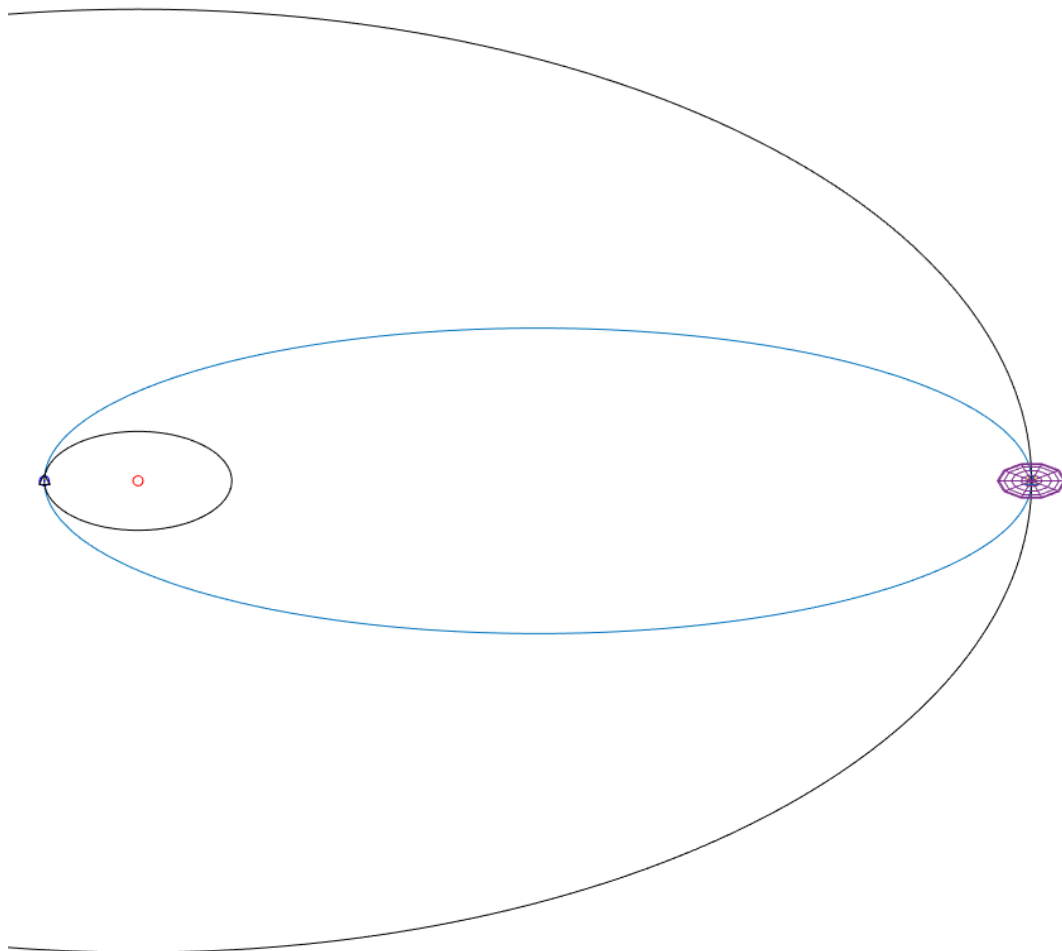
$$\Delta t = \frac{\tau}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8\mu}} \qquad a = \frac{r_p^e + r_a^e}{2}$$

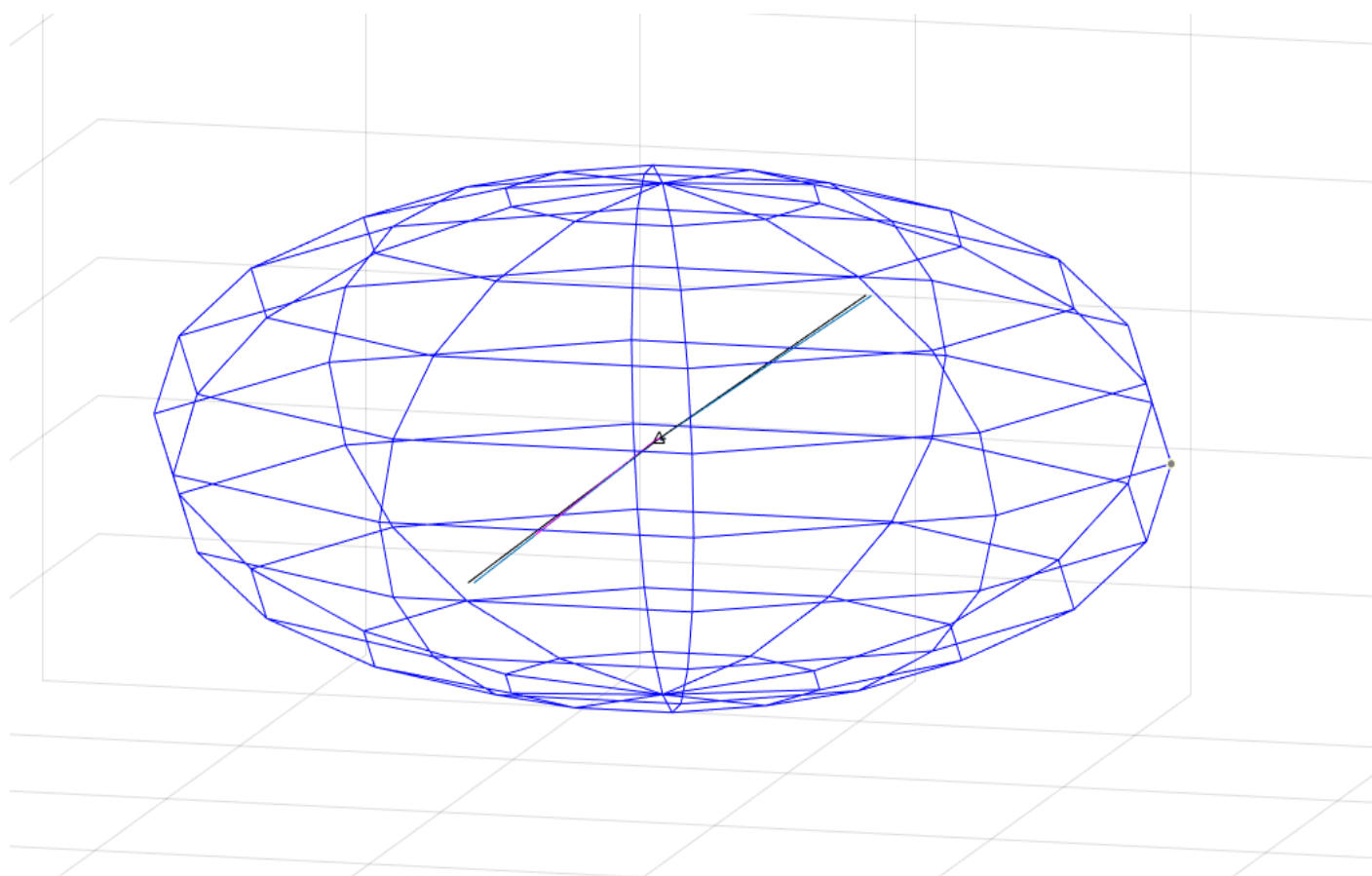
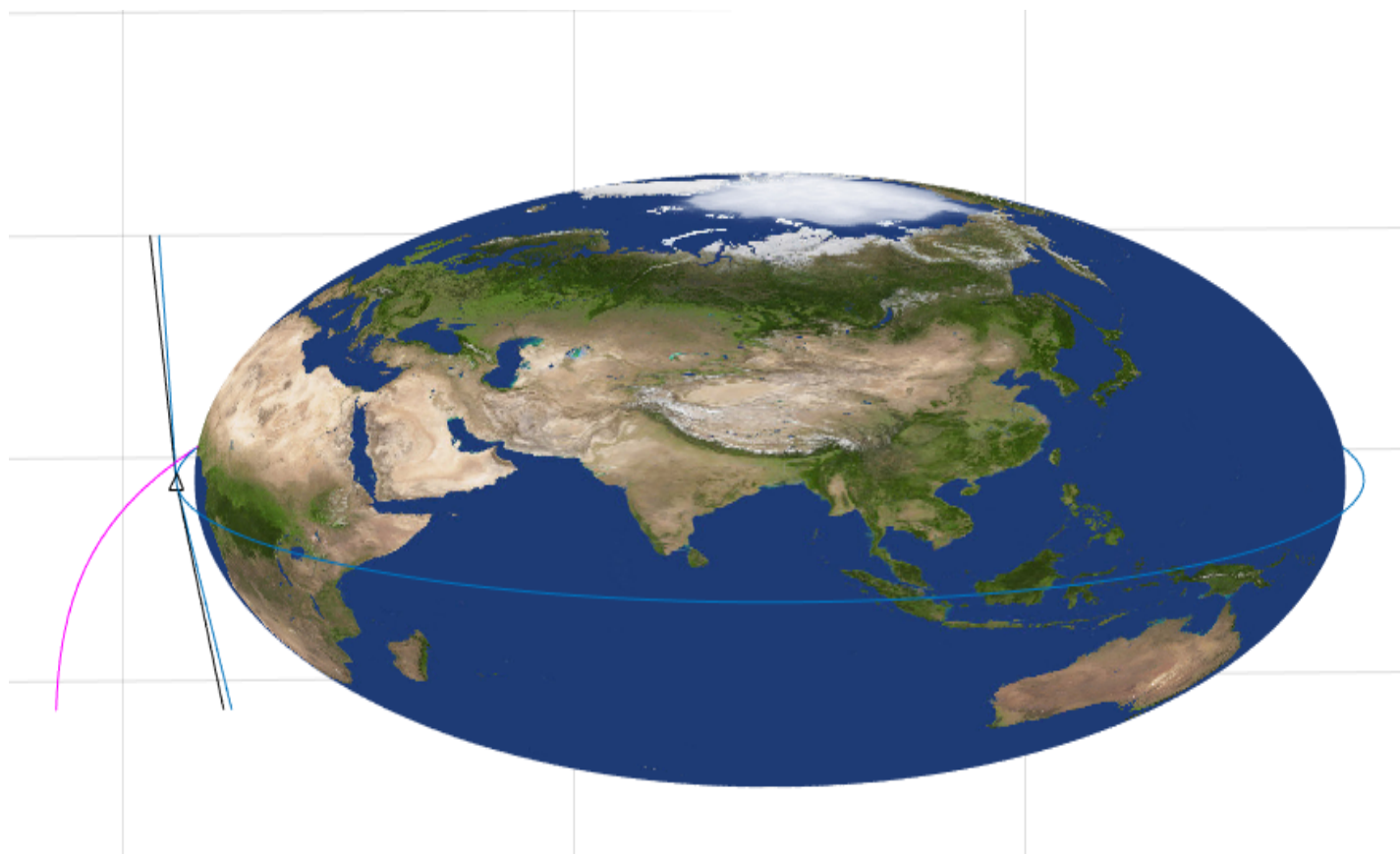
Tuttavia, il trasferimento di Hohmann così definito è pensato per trasferimenti orbitali attorno ad un unico pianeta attrattore (viene infatti spesso utilizzato per allargare un'orbita di parcheggio), ma può essere facilmente adattato anche ai viaggi interplanetari. Per effettuare il trasferimento di Hohmann dalla Terra a Saturno, si calcola inizialmente la traiettoria di trasferimento di Hohmann che dovrebbe seguire la navicella considerando il Sole come unico pianeta attrattore. Nella fase di partenza e di arrivo, la navicella si troverà all'interno delle sfere di influenza della Terra e di Saturno rispettivamente e risentirà dell'attrazione di questi due pianeti in maniera maggiore rispetto a quella del Sole. Le traiettorie devono quindi essere ricalcolate in prossimità dei pianeti di interesse, comprendendo delle fasi iperboliche di fuga e di cattura ed imponendo la continuità con l'orbita di trasferimento di Hohmann ai punti di ingresso e di uscita delle sfere di influenza dei pianeti di partenza e di arrivo.

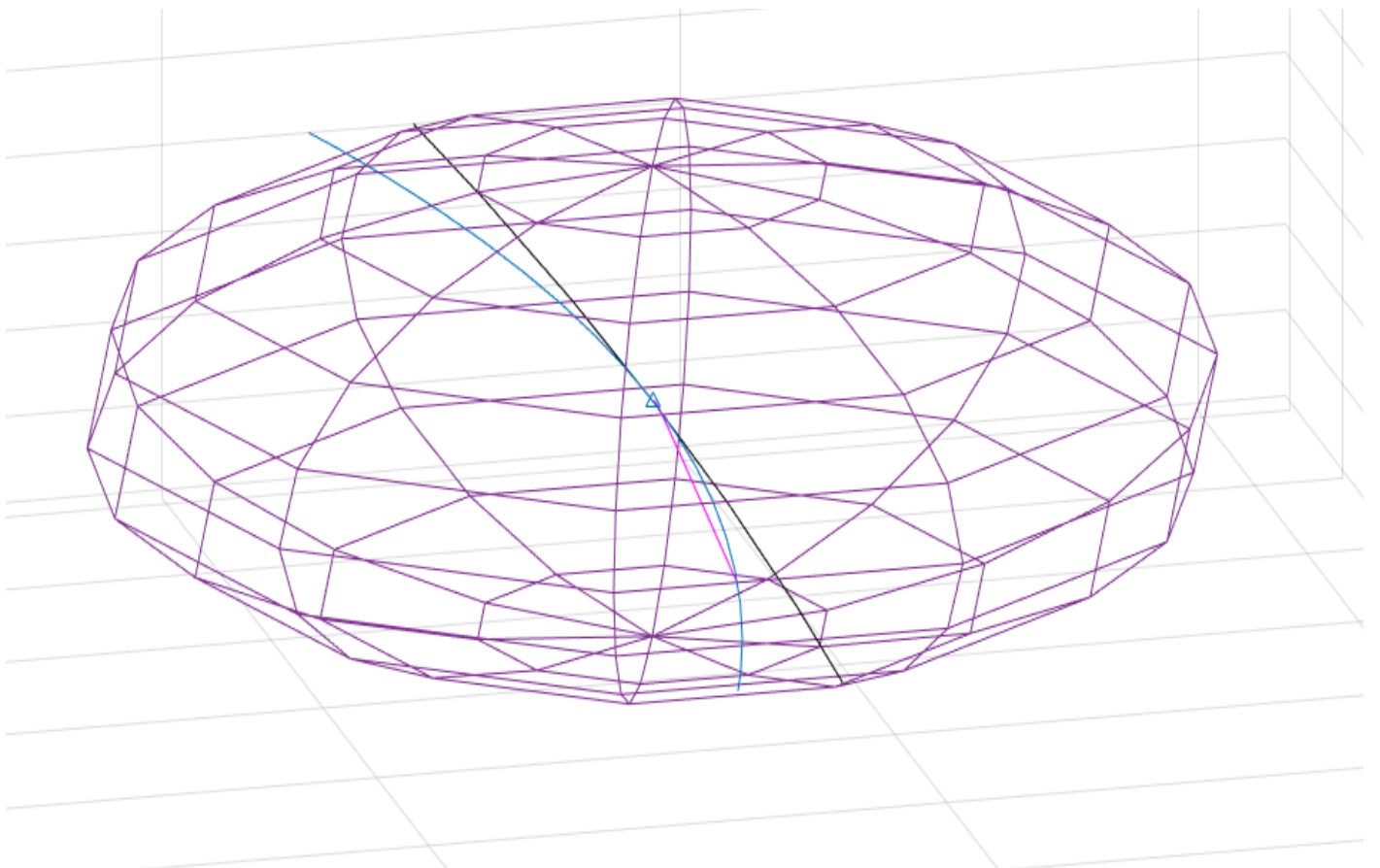
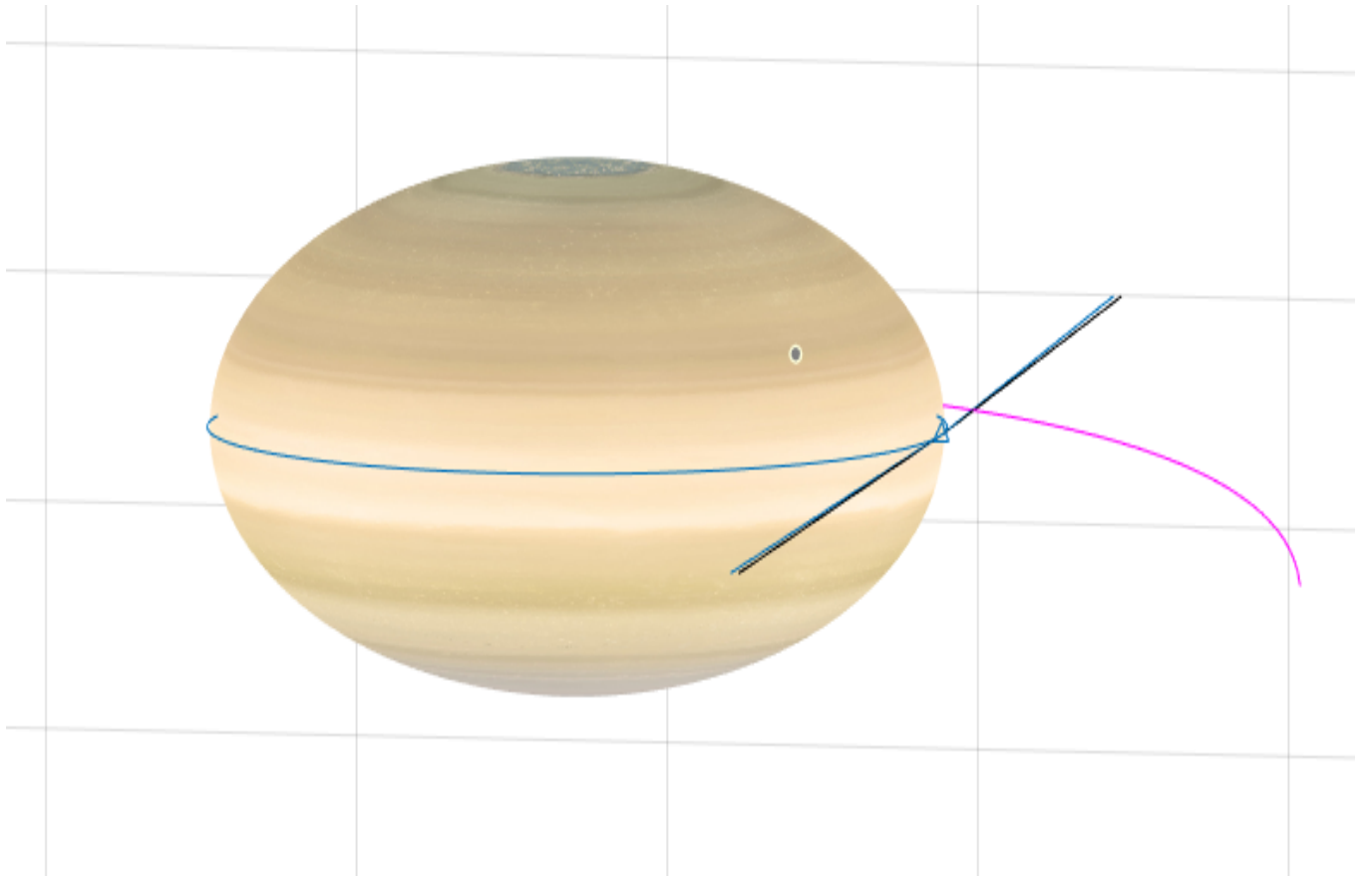
Il trasferimento di Hohmann dalla Terra a Saturno viene effettuato attraverso lo script "*Hohmann_Earth_Saturn.m*".

Per applicare il trasferimento di Hohmann, si suppone che la Terra e Saturno orbitino intorno al Sole con la stessa inclinazione, in modo tale da ottenere un'orbita di trasferimento planare, come da ipotesi. Nello script, una volta definiti i parametri di inizializzazione dei pianeti, si applicano le formule riportate sopra per calcolare la durata del trasferimento orbitale e il relativo consumo di carburante necessario. L'orbita viene tracciata attraverso la function "*ellipse.m*" che sfrutta i parametri orbitali dell'orbita di trasferimento, calcolati a partire dalle orbite iniziali e finali desiderate. In figura, viene mostrata la traiettoria di Hohmann preliminare con le sfere di influenza dei pianeti di interesse. Bisogna quindi adesso gestire le fasi di fuga e di cattura dei suddetti pianeti. Le iperboli di fuga e di cattura vengono calcolate attraverso le function "*Hohmann_esc_hyp.m*" e "*Hohmann_cap_hyp*", che sfruttano lo stesso metodo visto in precedenza, ma con delle lievi modifiche fatte per adattare le iperboli nel caso bidimensionale e quindi per vincolare le traiettorie al caso planare, sullo stesso piano delle orbite dei pianeti, come precisato dalle ipotesi preliminari del trasferimento di Hohmann. Il risultato finale è mostrato nelle successive figure. Il Δv totale della

traiettoria di Hohmann è di 18.229 km/s e la durata del trasferimento è di 6 anni 18 giorni e 6 ore. Con questa traiettoria si ottiene dunque un Δv di poco minore (1,853 km/s in meno), a discapito di un tempo di volo più lungo di 6 mesi 18 giorni e 6 ore. Bisogna inoltre considerare che la differenza nel consumo è anche dovuta all'ipotesi di traiettorie planari, che non è stata effettuata in precedenza e che quindi non tiene conto di cambi di piano e traiettorie tridimensionali.







ANIMAZIONI

Le animazioni che illustrano il moto dei pianeti e tutte le traiettorie che la navicella compie, per andare da un'orbita ad una altezza di 200km dalla Terra ad un'orbita a 100km da Encelado, sono eseguite dallo script *"animation.m"*.

Dopo aver eseguito il main *"mission ESE.m"*, in modo tale da caricare nel workspace tutte le variabili necessarie a graficare le traiettorie, in *"s_s_animation_init.m"* sono state descritte le dimensioni e i colori dei pianeti di interesse e della navicella; inoltre si sfrutta la funzione *"ymd_gen.m"* la quale, sulla base della data di inizio e fine missione, crea una matrice di 3 colonne ognuna contenente le date relative ad anno, mese e giorno comprese tra le date prescelte. In questo modo vengono determinati i giorni totali della missione.

Nello script *"pos_spcr.m"* viene determinato un vettore che contiene la posizione della navicella giorno per giorno.

Infine, viene eseguito *"animation.m"*, che richiama *"s_s_animation_init.m"* e *"pos_spcr.m"*, e plotta sia la traiettoria che compie la navicella ma anche le orbite dei corpi celesti di interesse (Terra, Venere, Saturno e EnceladO). La posizione dei pianeti giorno per giorno viene calcolata dalla function *"planet_elements_and_svMOD"*, mentre le orbite di tutti i pianeti con *"plot_orbit_anim.m"*. Attraverso le function *"drawnow"* e *"VideoWriter"* di Matlab viene eseguita la simulazione 3D del sistema solare e della traiettoria della navicella e viene salvato il video dell'animazione nella directory corrente.

BIBLIOGRAFIA

- Slide del corso di *"Robotica Aerospaziale"*.
- *Nasa's Eyes*.
- Libro di testo: *"Orbital Mechanics for Engineering Students – Howard Curtis"*.