

Отчет по Практическому заданию №2: ЕМ алгоритм для детектива

Григорьев Илья, 417 группа



1 Теория

✓ 1.

$$p(d_u | X_u, \theta, A) = \frac{p(X_u | d_u, \theta, A) p(d_u | A)}{\int p(X_u | d_u, \theta, A) p(d_u | A) dd_u} =$$

$$= \frac{p(X_u | d_u, \theta, A) p(d_u | A)}{\sum_{k=1}^K p(X_u | d_u, \theta, A) p(d_u | A)} = \frac{p(X_u | d_u, \theta) p(d_u | A)}{\sum_{k=1}^K p(X_u | d_u, \theta) p(d_u | A)} =$$

$$= \frac{\prod_{ij \in FA(d_u)} \mathcal{N}(X_u(i, j) | F(i - d_u^h, j - d_u^w), s^2) \cdot \prod_{ij \notin FA(d_u)} \mathcal{N}(X_u(i, j) | B(i, j), s^2) \cdot A(d_u^h, d_u^w)}{\sum_{k=1}^K \prod_{ij \in FA(d_u)} \mathcal{N}(X_u(i, j) | F(i - d_u^h, j - d_u^w), s^2) \cdot \prod_{ij \notin FA(d_u)} \mathcal{N}(X_u(i, j) | B(i, j), s^2) \cdot A(d_u^h, d_u^w)}$$

✓ 2.

$$\mathbb{E}_{q(d)} \log p(X, d | \theta, A) \rightarrow \max_{\theta, A}$$

$$\mathbb{E}_{q(d)} \log p(X, d | \theta, A) = \mathbb{E}_{q(d)} \log \prod_{k=1}^K p(X_k, d_k | \theta, A) =$$

$$= \mathbb{E}_{q(d)} \log \prod_{k=1}^K p(X_k | d_k, \theta) p(d_k | A) =$$

$$= \sum_{k=1}^K \left(\mathbb{E}_{q(d_k)} \log p(X_k | d_k, \theta) + \mathbb{E}_{q(d_k)} \log p(d_k | A) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^K \left(\sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log p(X_k | d_k = (m, u), \theta) + \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log p(d_k = (m, u) | A) \right) =$$

①

$$= \left\{ p(d_u = (m, u) | A) = A(m, u) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_u = (m, u)) \left(\sum_{ij \in fA(m, u)} (-\log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} (X_k(i, j) - F(i-m, j-u))^2) + \sum_{ij \notin fA(m, u)} (-\log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} (X_k(i, j) - B(i, j))^2) + \log A(m, u) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_u = (m, u)) \left(-HW \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} \sum_{ij \in fA(m, u)} (X_k(i, j) - F(i-m, j-u))^2 - \frac{1}{2s^2} \sum_{ij \notin fA(m, u)} (X_k(i, j) - B(i, j))^2 + \log A(m, u) \right) =$$

$$= HWK \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} \sum_{ij \in fA(m, u)} (X_k(i, j) - F(i-m, j-u))^2$$

$$+ \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} \sum_{ij \notin fA(m, u)} (X_k(i, j) - B(i, j))^2 =$$

$$= -HWK \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_u = (m, u)) \cdot$$

$$\sum_{ij \in fA(m, u)} (X_k(i, j) - F(i-m, j-u))^2 - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_u = (m, u)) \cdot$$

(2)

$$\cdot \sum_{ij \in A(m,n)} (X_k(i,j) - B(i,j))^2 +$$

$$\cancel{\sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m,n))} + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m,n)) \log A(m,n).$$

$$= -HWK \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m,n)).$$

$$\cdot \sum_{ij \in A(m,n)} (X_k(i,j) - \bar{X}(i-m, j-n))^2 -$$

$$- \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m,n)) \sum_{ij \in A(m,n)} (X_k(i,j) - B(i,j))^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m,n)) \log A(m,n)$$

$$\mathcal{Z}(A, \lambda) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m,n)) \log A(m,n) -$$

$$- \lambda \left(\sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} A(m,n) - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}(A, \lambda)}{\partial A(i,j)} = \frac{\sum_{k=1}^K q(d_k = (i,j))}{A(i,j)} - \lambda = 0$$

$$A(i,j) = \frac{\sum_{k=1}^K q(d_k = (i,j))}{\lambda}$$

$$\sum_{i=0}^{H-h} \sum_{j=0}^{W-w} A(i,j) = 1 = \sum_{i=0}^{H-h} \sum_{j=0}^{W-w} \frac{\sum_{k=1}^K q(d_k = (i,j))}{\lambda} =$$

(3)

$$= \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{H-h} \sum_{j=0}^{W-w} q(d_k = (i, j))}{\lambda} = \frac{K}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = K$$

$$A(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^K q(d_k = (i, j))}{K}$$

$$\mathcal{Z}(F) = - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \cdot$$

$$\cdot \sum_{ij \in A(m, u)} (X_k(i, j) - F(i, j))^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}(F)}{\partial F(i, j)} = - \frac{1}{s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) (X_k(i+m, j+u) - F(i, j)) =$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) (X_k(i+m, j+u) - F(i, j)) = 0$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) X_k(i+m, j+u) =$$

$$= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) F(i, j)$$

$$F(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) X_k(i+m, j+u)}{K}$$

$$Z(B) = - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)).$$

$$\cdot \sum_{ij \notin A(m, n)} (x_k(i, j) - B(i, j))^2$$

$$= - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)).$$

$$\sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[m \leq i \leq m+h])$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[i \in [m, m+h)] I[j \in [n, n+w]]) (x_k(i, j) - B(i, j))^2$$

$$\frac{\partial Z(B)}{\partial B(i, j)} = \frac{1}{s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)).$$

$$\cdot (1 - I[i \in [m, m+h)] I[j \in [n, n+w]]) (x_k(i, j) - B(i, j)) = 0$$

$$B(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)) (1 - I[i \in [m, m+h)] I[j \in [n, n+w]]) x_k(i, j)}{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)) (1 - I[i \in [m, m+h)] I[j \in [n, n+w]])}$$

$$\mathcal{Q}(s) = -H W K \log s \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)).$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{w-1} (X_k(i+m, j+n) - F(i, j))^2 -$$

$$- \frac{1}{2s^2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)).$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[i \in [m, m+h]] I[j \in [n, n+w]]) (X_k(i, j) - B(i, j))^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}(s)}{\partial s} = -\frac{H W K}{s} + \frac{1}{s^3} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)).$$

$$\cdot \left(\sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{w-1} (X_k(i+m, j+n) - F(i, j))^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[i \in [m, m+h]] I[j \in [n, n+w]]) (X_k(i, j) - B(i, j))^2 \right)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)) \cdot \left(\sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{w-1} (X_k(i+m, j+n) - F(i, j))^2 + \right.}{H W K}$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[i \in [m, m+h]] I[j \in [n, n+w]]) (X_k(i, j) - B(i, j))^2 \right)$$

$$H W K$$

$$s = \left(\frac{1}{H W K} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{n=0}^{W-w} q(d_k = (m, n)) \left(\sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{w-1} (X_k(i+m, j+n) - F(i, j))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[i \in [m, m+h]] I[j \in [n, n+w]]) (X_k(i, j) - B(i, j))^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

MAP-EM алгоритм:

$$q(d_k = (m, n)) = I[m = d_{k, \text{MAP}}^h] I[n = d_{k, \text{MAP}}^w] -$$

возможна в формуле EM алгоритма.

$$A(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^K I[m = d_{k, \text{MAP}}^h] I[n = d_{k, \text{MAP}}^w]}{K}$$

$$R(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^K X_k(i + d_{k, \text{MAP}}^h, j + d_{k, \text{MAP}}^w)}{K}$$

$$B(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^K (1 - I[i \in [d_{k, \text{MAP}}^h, d_{k, \text{MAP}}^h + h)]) I[j \in [d_{k, \text{MAP}}^w, d_{k, \text{MAP}}^w + w)]) X_k(i, j)}{\sum_{k=1}^K (1 - I[i \in [d_{k, \text{MAP}}^h, d_{k, \text{MAP}}^h + h)]) I[j \in [d_{k, \text{MAP}}^w, d_{k, \text{MAP}}^w + w)])}$$

$$S = \left(\frac{1}{HWK} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{w-1} (X_k(i + d_{k, \text{MAP}}^h, j + d_{k, \text{MAP}}^w) - R(i, j))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} (1 - I[i \in [d_{k, \text{MAP}}^h, d_{k, \text{MAP}}^h + h)]) I[j \in [d_{k, \text{MAP}}^w, d_{k, \text{MAP}}^w + w)]) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (X_k(i, j) - B(i, j))^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

~3.

$$Z(q, \theta, A) = \mathbb{E}_{q(d)} \log p(x, d | \theta, A) - \mathbb{E}_{q(d)} \log q(d) =$$

$$= \mathbb{E}_{q(d)} \log \prod_{k=1}^K p(x_k | d_k, \theta) p(d_k | A) - \mathbb{E}_{q(d)} \log q(d) \quad \textcircled{=}$$

$$\mathbb{E}_{q(d)} \log \prod_{k=1}^K p(x_k | d_k, \theta) p(d_k | A) =$$

$$= \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{q(d_k)} \log p(x_k | d_k, \theta) + \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_{q(d_k)} \log p(d_k | A) =$$

$$= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log p(x_k | d_k = (m, u), \theta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log A(m, u)$$

$$\textcircled{=} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log p(x_k | d_k = (m, u), \theta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log A(m, u) - \cancel{H}$$

$$- \sum_{m=0}^{H-h} \sum_{u=0}^{W-w} q(d_k = (m, u)) \log q(d_k = (m, u))$$

The MAP-EM algorithm:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(q, \theta, A) = & \sum_{k=1}^K \log p(x_k | d_k = (d_{k, \text{MAP}}^h, d_{k, \text{MAP}}^w), \theta) + \\ & + \sum_{k=1}^K \log A(d_{k, \text{MAP}}^h, d_{k, \text{MAP}}^w) \end{aligned}$$

2 Анализ

ЕМ алгоритм был протестирован на сгенерированных данных. В ходе экспериментов было выявлено, что начальные приближения лица и фона сильно влияют на работу алгоритма. При выборе равномерно распределенного на отрезке $[0, 1]$ начального приближения для лица, в результате работы алгоритма было найдено совершенно другое изображение, которое составляло часть фона. При выборе равномерно распределенного на отрезке $[0, 255]$ начального приближения для лица, ЕМ и hard ЕМ алгоритмы нашли искомое лицо. Для данной задачи стоит запускать ЕМ алгоритм из разных начальных приближений. Для большей эффективности запуски можно производить параллельно.

На сгенерированных данных ЕМ алгоритм показывает результаты лучше, чем hard ЕМ алгоритм. Разница обусловлена тем, что в ЕМ алгоритме берется полное апостериорное распределение на латентные переменные, в то время как в hard ЕМ алгоритме используется лишь точечное значение, в котором достигается максимум апостериорного распределения на латентные переменные. По этой же причине ЕМ алгоритм работает дольше hard ЕМ алгоритма. На выборке из 1000 изображений размера 100 на 200 ЕМ алгоритм работал шесть с половиной минут, а hard ЕМ – 50 секунд.

ЕМ алгоритм был применен к данным с зашумленными снимками преступника. Ниже приведены результаты работы ЕМ и hard ЕМ алгоритмов на выборках разного размера. Во всех этих экспериментах число итераций алгоритма было ограничено пятью. Качество полученных изображений позволило распознать личность преступника.

Из полученных результатов видно, что чем больше выборка, тем точнее получается изображение лица преступника. Причем ЕМ алгоритм позволяет получить более качественный результат, но и работает он в среднем в 7 раз дольше hard ЕМ алгоритма.

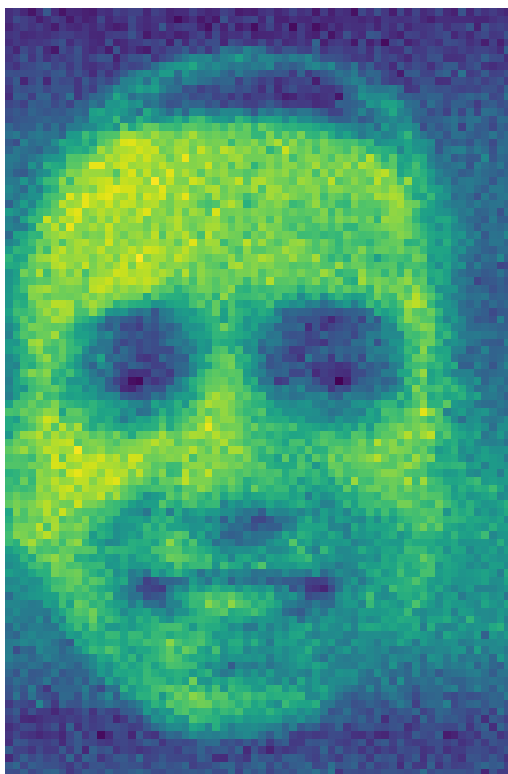


Рис. 1: EM, $N=1000$

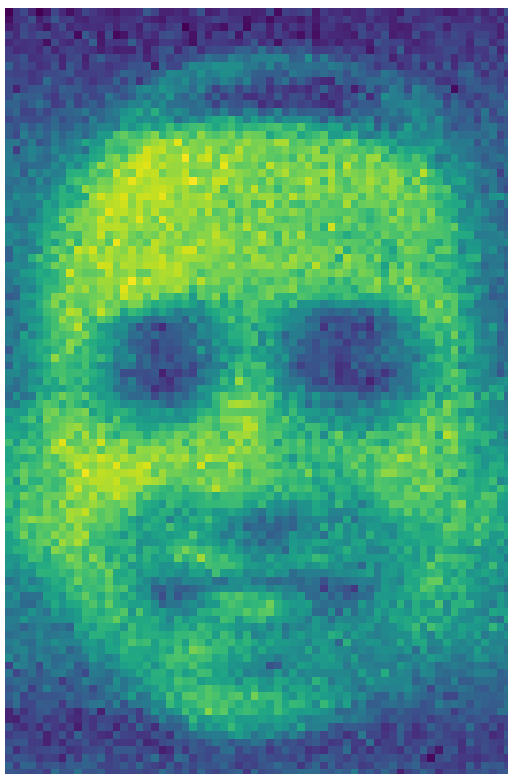


Рис. 2: hard EM, $N=1000$

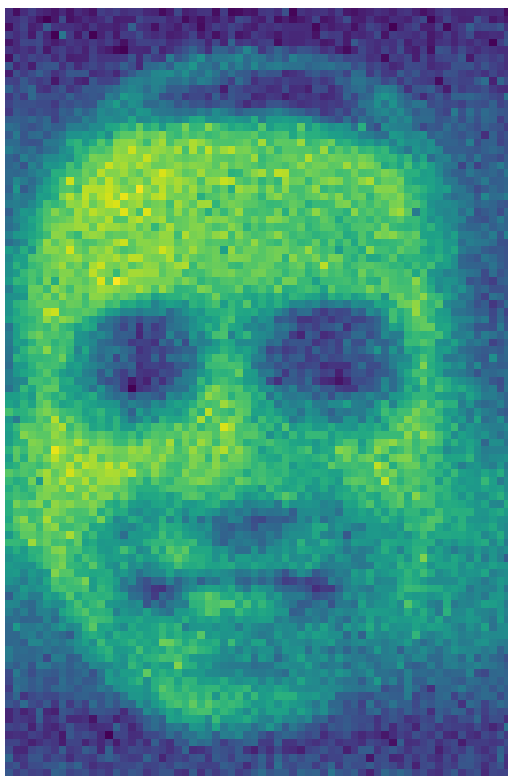


Рис. 3: EM, $N=800$

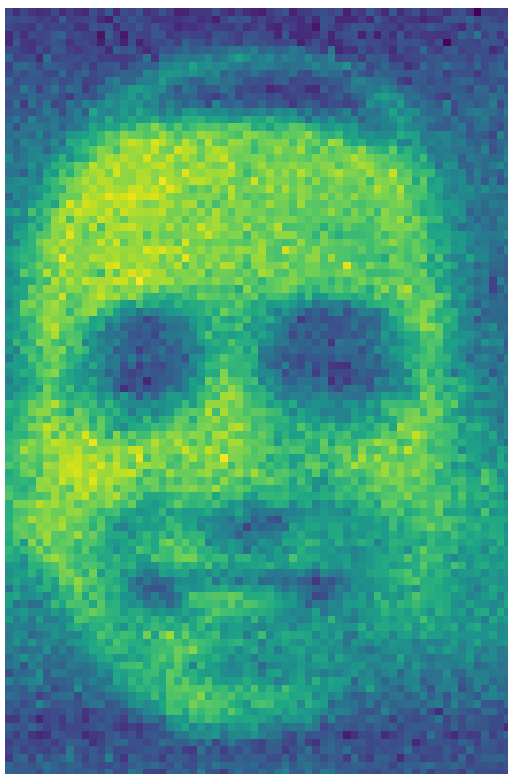


Рис. 4: hard EM, $N=800$

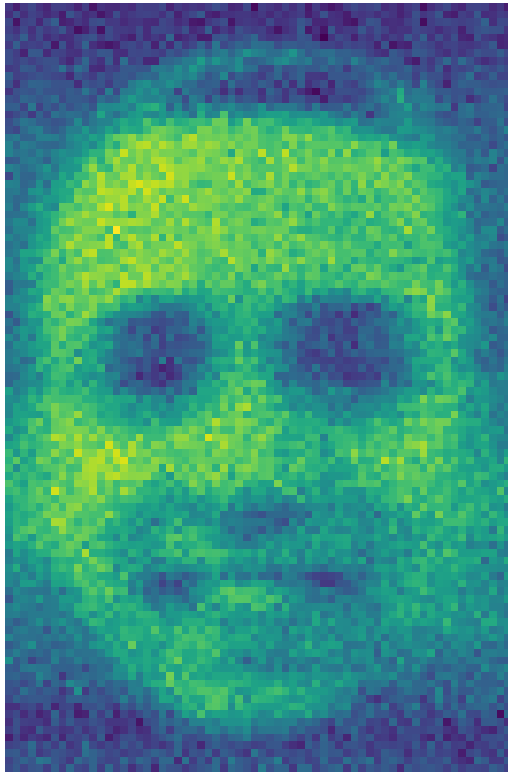


Рис. 5: EM, $N=600$

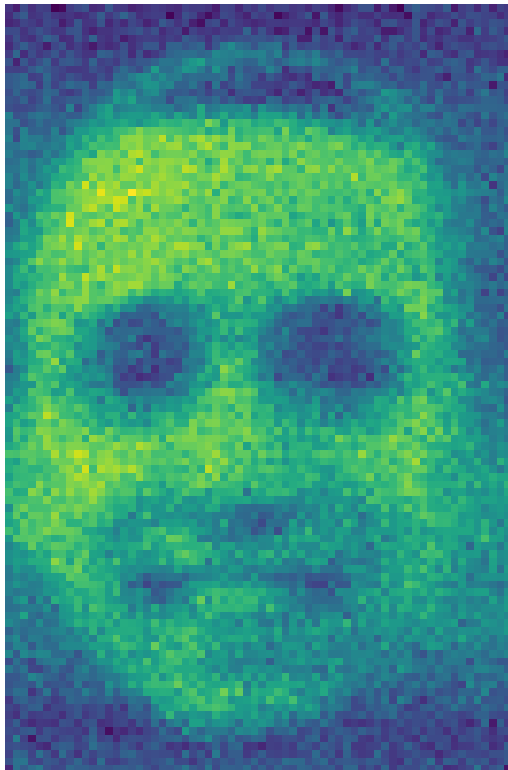


Рис. 6: hard EM, $N=600$

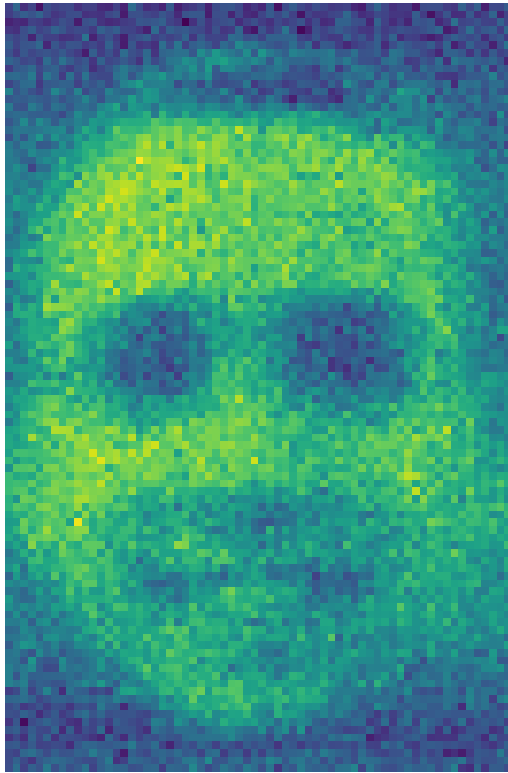


Рис. 7: EM, $N=400$

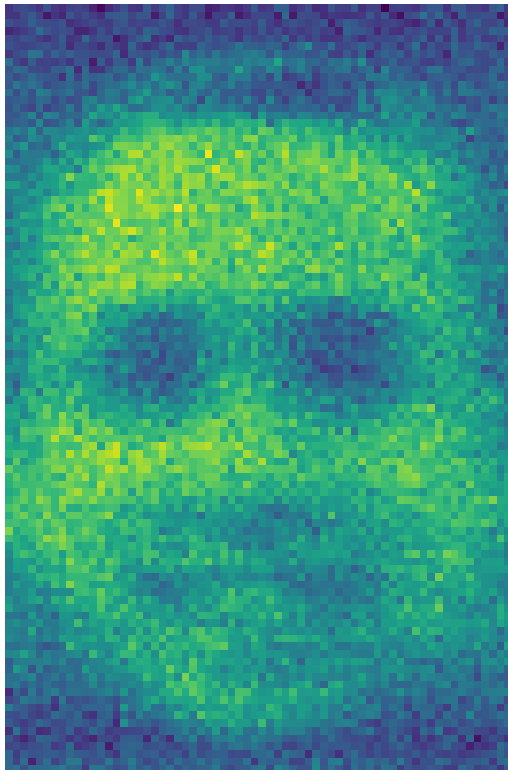


Рис. 8: hard EM, $N=400$

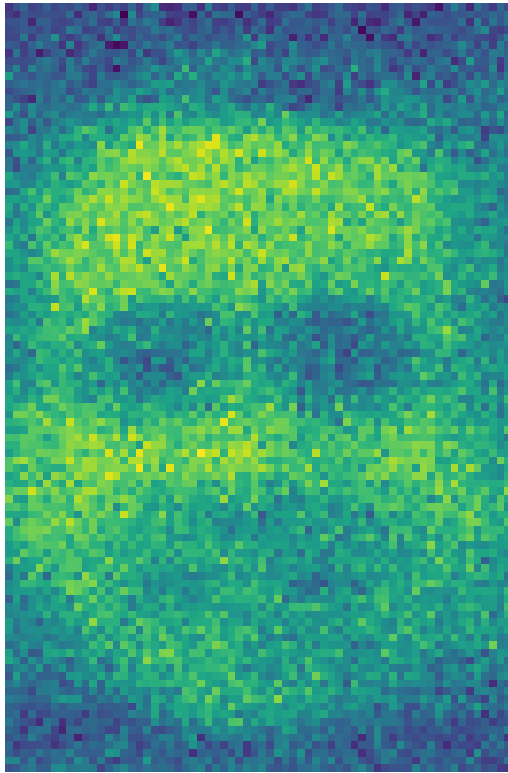


Рис. 9: EM, $N=200$

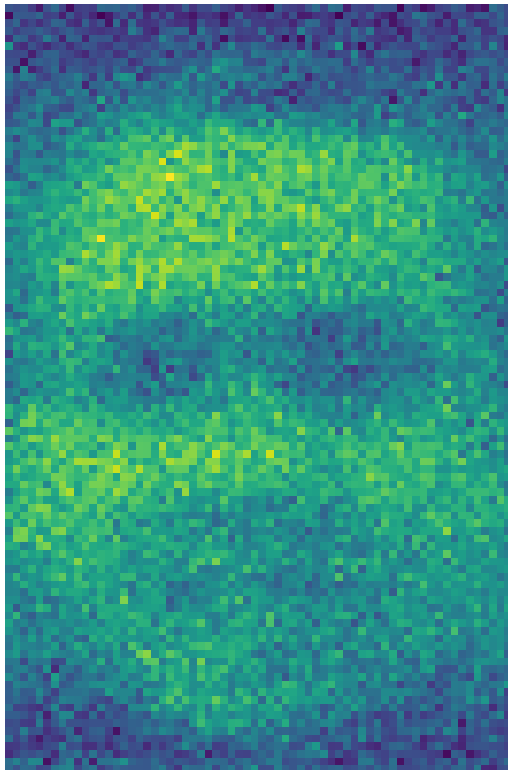


Рис. 10: hard EM, $N=200$