

# **SOFTWARE DESIGN DOCUMENT - PROPOSTA DE PROJETO**

## *Análise do campo de distribuição de temperatura em corpo condutor bidimensional em condição estável de fluxo de calor:*

Marcos Túlio Barbosa Abreu

*Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Física*

### **1. INTRODUÇÃO**

A transferência de calor é um fenômeno natural já bem conhecido e estudado ao longo da história humana. Sabemos, pela lei de Fourier, que um fluxo de calor é observado em gradientes de temperatura nos processos de condução térmica, e, por meio da análise de tais fluxos, é possível abstrair-se o campo de temperaturas de determinado condutor. Assim, dadas as condições iniciais das barreiras do sistema, é possível, através do método das diferenças finitas, obter-se um modelo numérico que descreve a temperatura de cada ponto do material analisado, permitindo análises do sistema com um método de baixo custo de implementação. Um exemplo de importante aplicação de tais estudos é a busca por otimização da modelagem de soldas mecânicas, as quais podem perder eficiência devido às diferenças de temperaturas e propriedades entre o material da solda e o material soldado.

### **2. OBJETIVO**

Objetiva-se com esse trabalho, através do método das diferenças finitas e de métodos numéricos iterativos, determinar e organizar graficamente a distribuição de temperaturas ao longo de um material condutor, considerando-se bidimensionalidade e condução de calor estável, observando-se a transferência de calor entre pontos do condutor e entre este e o meio externo, rodeado por um fluido de propriedades conhecidas, a fim de fornecer análise precisa das propriedades térmicas do sistema.

### **3. METODOLOGIA TEÓRICA**

Partindo-se de uma análise puramente física da conservação de energia de uma amostra do sistema, tomar-se-á como base a equação diferencial de conservação de energia na condução térmica em um volume de controle, um sistema controlado e de massa variável, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Em que os termos diferenciais representam a lei de Fourier para o fluxo de calor em cada uma das direções -  $x$ ,  $y$  e  $z$  - o termo  $\dot{q}$  refere-se à geração de energia interna no volume de controle e o termo à direita do sinal de igualdade refere-se ao processo de advecção, que é a transferência de calor devido ao fluxo de massa para dentro e para fora do sistema.

Para o sistema a ser tratado no presente trabalho, desconsidera-se a geração interna de calor pelo material condutor e considera-se um material sólido e rígido bidimensional, de modo que a equação (1) reduz-se à forma:

$$\nabla^2 T = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Em alternativa, aplicando-se a lei de conservação da energia advinda da primeira lei da termodinâmica ao sistema considerado, vemos que ela assume a forma:

“A variação da energia acumulada em um volume de controle é igual a diferença entre a energia que entra no volume de controle e a energia que sai deste, somada à energia gerada no interior do volume de controle.”

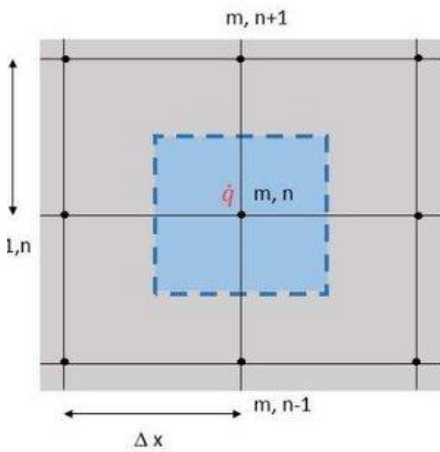
De tal maneira, obtemos a seguinte equação de conservação de energia para a condução de calor que será fundamental para a análise posterior

$$\Delta E_{acum} = E_{entra} - E_{sai} + E_{gerada} \quad (3)$$

O **Método das Diferenças Finitas** a ser utilizado fundamenta-se na aplicação das equações (1), (2) e (3) na análise do sistema. Divide-se o meio a ser analisado em regiões menores centradas em um ponto de coordenadas  $(m, n)$  chamado de *nó*, cujo coletivo é denominado *rede nodal*. Desse modo, como observa-se na figura ao lado, considerando-se a equação (2), aproxima-se as diferenciais pelos métodos *forward difference* e *backward difference* para definir a equação (2) de diferenças finitas para cada ponto nodal pertencente à rede, obtendo-se para a derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} \Big|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (4) \text{ e}$$

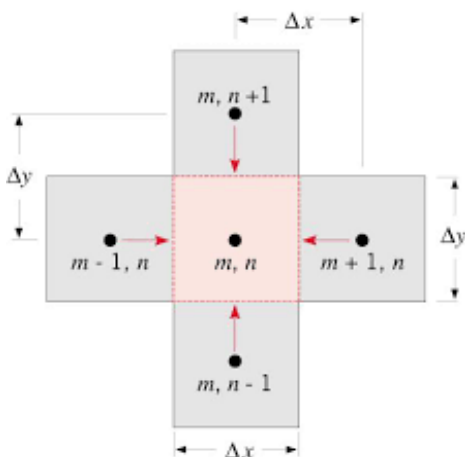
$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} \Big|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (5)$$



Além disso, utilizando-se a equação (3), obtemos o **Método do Balanço de Energia**, que facilita o desenvolvimento das equações desejadas para cada nodo da rede. Nesse método, considerando um ponto nodal  $(m, n)$  interno e seus quatro vizinhos - norte, sul, leste e oeste - assumimos que todos os fluxos de calor apontam dos nodos vizinhos para dentro do nodo analisado, um evento impossível, mas cuja presunção nos leva à resposta desejada. Para a situação que

analisaremos, sem geração de energia interna e com estabilidade de condução, teremos que

$E_{entra} = 0$ , pois não há energia saindo e nem sendo gerada no nó, e, como a condução é estável, este não absorve o calor pois já estabilizou sua temperatura, de modo então que a energia interna não varia.



Em vista disso, a energia total que entra no nó  $(m, n)$  pode ser dada pela soma da parcela de energia que o nó recebe de cada um

de seus vizinhos,  $\sum_{i=1}^4 q_{(i) \rightarrow (m,n)}$ . A condução de calor de um nodo

específico, como o nodo  $(m-1, n)$  para o nodo  $(m, n)$  pode ser dada pela lei de Fourier:

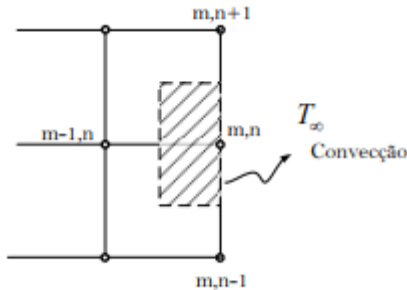
$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$ , em que  $\Delta y \cdot 1$  é a área de secção transversal, em que multiplica-se  $\Delta y$  por 1 pois não se considera profundidade no eixo  $z$ , admitindo-se então profundidade 1, e o termo final da equação representa o gradiente de temperatura calculado pelas equações derivação numérica.

Realizando tal processo para todos os nós vizinhos, considerando-se  $\Delta x = \Delta y$ , verifica-se que o balanço energético resultará na equação:

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} - 4T_{m,n} = 0 \quad (6)$$

Dessa forma, estendendo essa análise a todos os nós da rede nodal, considerando que nas fronteiras do sistema há perda de calor por convecção para o fluido que circunda o condutor, cuja taxa de condução depende da temperatura do fluido ( $T_\infty$ ), da temperatura do nó ( $T_{m,n}$ ) e do coeficiente de transferência de calor por condução do fluido ( $h$ ), teremos, além do caso acima, os casos abaixo:

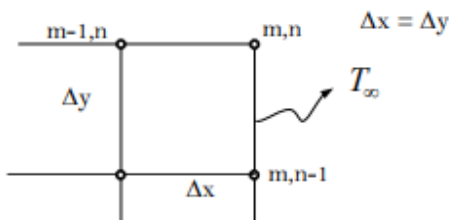
a)



Caso de convecção com nó sobre a superfície de contorno ou dentro de uma região muito próxima a ela, dentro de um erro mínimo, onde obteremos:

$$2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{2h}{k}\Delta x T_\infty \dots - 2T_{m,n} \left( \frac{h}{k}\Delta x + 2 \right) = 0 \quad (7)$$

b)



Caso de convecção com nodo na quina do sistema, onde obteremos:

$$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + 2\frac{h}{k}\Delta x T_\infty - 2T_{m,n} \left( \frac{h}{k}\Delta x + 1 \right) = 0 \quad (8)$$

Por fim, após definidas as equações de diferenças finitas para cada nó do sistema, obteremos um sistema de equações que assumirá a forma:

$$a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + \dots + a_{1N}T_N = C_1$$

$$a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + \dots + a_{2N}T_N = C_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + a_{N3}T_3 + \dots + a_{NN}T_N = C_N$$

Sendo  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ...,  $C_1$ , ...,  $C_N$  constantes conhecidas advindas da análise pelo balanço de energia. Por fim, utilizaremos o **Método de Gauss-Seidel** para alcançar a solução deste sistema linear. Tal método se baseia nas seguintes etapas:

1º) Na medida do possível, organiza-se cada equação do sistema de modo que o elemento  $a_{ii}$ , ou seja, o coeficiente da equação que fará parte da diagonal principal da matriz seja o maior de todos da linha em módulo: ( $|a_{11}| > |a_{12}|, \dots; |a_{22}| > |a_{21}|, |a_{23}|, \dots$ ).

2º) Após reordenada, escreve-se cada uma das equações na forma explícita, ou seja, isola-se a temperatura  $T_1$  na linha 1,  $T_2$  na linha 2, etc. Assim, cada equação assumirá uma forma tal que

$$T_i^{(k)} = \frac{C_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(k-1)}, \text{ de modo que } i \text{ refere-se à temperatura que está}$$

sendo calculada (1, 2, 3, ..., N) e k representa o número da iteração.

3º) Escolhe-se um valor inicial (ou seja, iteração número  $k = 0$ ) para cada temperatura  $T_i$ . É possível realizar-se um “chute preciso” caso se definam valores coerentes para as temperaturas, advindos de análise da situação.

4º) Na primeira iteração ( $k = 1$ ), calcula-se  $T_1$  a partir dos valores que se escolheu inicialmente para o resto das temperaturas, sendo  $T_i^{(k-1)}$  o termo que representa essas temperaturas da iteração anterior, nesse caso, a iteração 0. Assim, atualiza-se o valor de  $T_1$  e, usando-o juntamente com as outras temperaturas que chutamos ( $T_2, T_3, \dots, T_N$ ), calcula-se  $T_2$ , atualiza-se seu valor e se utiliza  $T_1$  e  $T_2$  juntamente com as outras temperaturas que foram escolhidas inicialmente para calcular  $T_3$  e assim por diante. Essa é a primeira iteração ( $k = 1$ ).

5º) Terminada a primeira iteração, obtemos novos valores para cada  $T_i$  que foram calculados, de modo que realizar-se-á a iteração novamente, de modo que agora os valores  $T_i^{(k-1)}$  são os valores da 1ª iteração e  $T_i^{(k)}$  são os valores que estão sendo descobertos durante a iteração atual. Assim, repete-se todo o processo de iteração, usando-se como base os valores descobertos na iteração anterior.

6º) Por fim, o processo é parado quando algum critério é atingido, como por exemplo, quando a diferença em módulo entre cada uma das temperaturas atuais ( $T_i^{(k)}$ ) e todas as temperaturas antigas ( $T_i^{(k-1)}$ ) são menores ou iguais a um erro arbitrariamente estabelecido, ou seja:

$$|T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon.$$

#### 4. MILESTONES E TIMELINE

### Timeline and Milestones

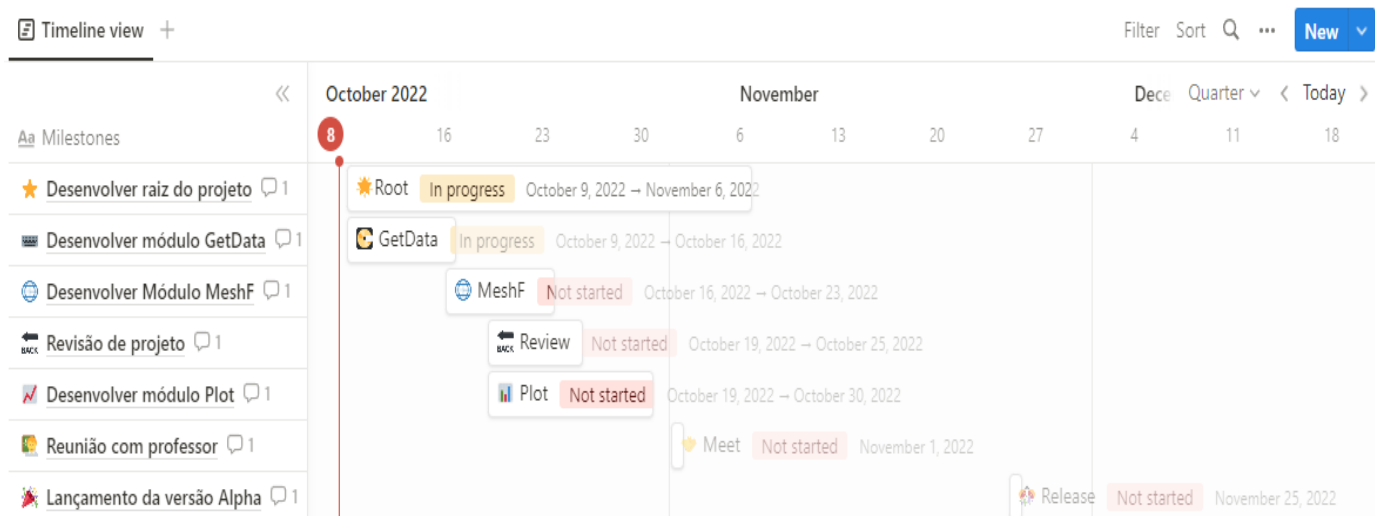
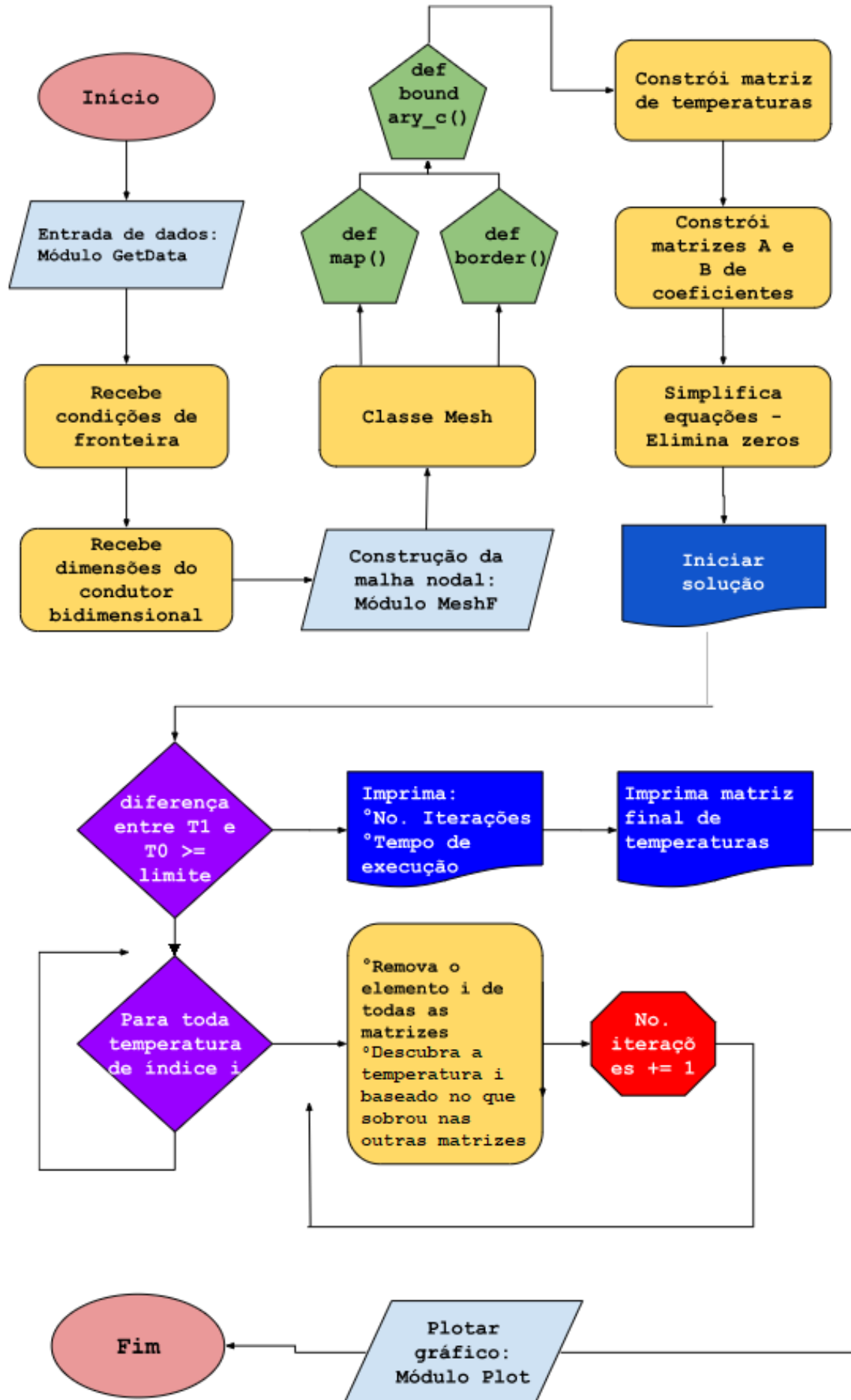


Tabela original presente no endereço:

<https://prairie-chord-fa8.notion.site/f899493e05c34acda32b33d6530a0302?v=748e4f0f9b684b3e8926930bbcf3ccce>

## 5. FLOWCHART



A imagem acima evidencia o funcionamento básico do software a ser desenvolvido, bem como os dados de entrada do programa e o resultado esperado. O arquivo raiz do software será o main.py, que contará com os módulos abaixo explicitados para o desenvolvimento do algoritmo supracitado. Todo o software será desenvolvido em linguagem Python, utilizando-se da ferramenta editora VisualStudio Code e utilizar-se-á a ferramenta Git para controle de versões. O software final será publicado na plataforma GitHub, no perfil pessoal do autor, conforme data prevista para lançamento da versão Alpha.

#### **Módulos:**

- GetData: Responsável pelo recebimento de dados de entrada. É necessária a inserção das condições de fronteira do sistema e das dimensões/características do condutor, que serão chave para a obtenção da distribuição de temperatura. Portanto, tal módulo é o responsável pela entrada de dados, utilizando-se para isso os fundamentos de entrada de dados em Python.
- MeshF: Responsável pela geração da rede nodal, dividindo as dimensões do condutor em uma malha nodal  $n \times n$  e gerando a matriz de coordenadas dos nós. Além disso, também é responsável pela identificação dos nós vizinhos a um determinado nó dado como parâmetro, identificando também quais deles estão em alguma das fronteiras e em qual das fronteiras este se encontra. Utiliza-se para esse módulo a biblioteca científica para Python Numpy. Além disso, utilizar-se-á aqui um sistema orientado ao objeto para definir a classe “mesh” que representará o campo de nós, que possuirá atributos que identificam o número de nós, as dimensões da rede, etc.
- Plot: Responsável, uma vez que já se possui a matriz final de temperaturas de cada nó, por construir o gráfico do campo de temperaturas utilizando-se da biblioteca científica para Python Matplotlib e a biblioteca Numpy para organização dos dados base.

## **6. BIBLIOGRAFIA:**

1. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* - T. L Bergman, Theodore L. Bergman, Frank P. Incropera, David P. DeWitt, Adrienne S. Lavine, 6 ed., 2008.
2. *PME – 3361 Processos de Transferência de Calor: Notas de aula*, Prof. Dr. José R. Simões Moreira, Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia Mecânica, [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5229933/mod\\_resource/content/1/Aula%2011%20%20M%C3%A9todos%20Num%C3%A9ricos.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5229933/mod_resource/content/1/Aula%2011%20%20M%C3%A9todos%20Num%C3%A9ricos.pdf)