

Вопрос по выбору
Электромагнитные волны в волноводах

Илья Прамский

Декабрь 2023

Введение

Цель работы: Знакомство с методами изучения и анализа электромагнитных волн СВЧ-диапазона, распространяющихся в волноводе.

В работе используются: Генератор СВЧ типа Г4-83, измерительная линия Р1-28, Усилитель 28ИМ, заглушка, отрезок волновода с поглощающей нагрузкой, отрезки волноводов различных сечений, детекторная головка.

Теоретическая справка

Для передачи энергии электромагнитных колебаний очень больших частот (с длинами волн в вакууме от 1 метра до 1 миллиметра (СВЧ-диапазон)) используют волноводы - каналы, вдоль которых распространяются электромагнитные волны. Волновод имеет стенки, которые хорошо отражают волны, в результате чего энергия передаётся от входа к выходу с минимальными потерями.

Рассмотрим структуру электромагнитных полей в волноводе. Для этого построим электромагнитное поле в волноводе, складывая падающую и отражённую от стенок плоские волны. Данный метод называется концепцией Бриллюэна.

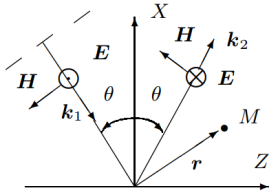


Рис. 1 — Отражение плоской волны от проводящей плоскости

Опишем отражение плоской волны от идеально проводящей поверхности (стенки волновода считаются такими поверхностями). Направим вектор напряженности \mathbf{E} перпендикулярно \mathbf{k} , вдоль плоскости. Найдём значение напряженности в произвольной точке M (поставим ее в плоскости Oxz , т.к. координата y в нашем случае не играет роли).

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{пад}0} \cdot e^{i(\omega \cdot t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})}$$

$$E_{\text{отр}} = E_{\text{отр}0} \cdot e^{i(\omega \cdot t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}$$

Из граничных условий ($E_t = 0$) следует, что $E_{\text{пад}0} = -E_{\text{отр}0} = E_0$. Также $k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c}$ (т.к. распространяются в одной среде). Спроецируем \mathbf{k} на оси координат, изображённые на рисунке.

$$k_{1x} = -k \cdot \cos \theta; k_{1z} = k \cdot \sin \theta;$$

$$k_{2x} = k \cdot \cos \theta; k_{2z} = k \cdot \sin \theta.$$

$$\mathbf{r} = (x, 0, z);$$

Также воспользуемся принципом суперпозиции полей. Тогда

$$E = E_0 \cdot (e^{i(\omega \cdot t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} - e^{i(\omega \cdot t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})})$$

$$E = E_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - k z \cdot \sin \theta)} \cdot (e^{i(k x \cdot \cos \theta)} - e^{-i(k x \cdot \cos \theta)})$$

$$E = 2iE_0 \cdot \sin(kx \cdot \cos \theta) \cdot e^{i\omega(t - z \cdot \frac{\sin \theta}{c})}$$

Полученная волна является бегущей по направлению оси z с амплитудой $2iE_0 \cdot \sin(kx \cdot \cos \theta)$ с фазовой скоростью

$$v_{\Phi} = \frac{c}{\sin \theta}$$

Получилось, что если мы зафиксируем угол падения, то в направлении оси x образуется система стоячих волн. Электрическое поле стоячей волны равно нулю в точках, где $kx \cos \theta = n\pi$, т.е. там, где

$$x = \frac{n\pi}{k \cos \theta}; n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, поверхность нулевого электрического поля представляет собой плоскость, параллельную отражающей поверхности. Расположим в этой плоскости вторую проводящую поверхность. Эта поверхность не исказит полученного распределения поля, т.к. на ней автоматически удовлетворяются граничные условия $E(t) = 0$.

Итак, было показано, что в волноводе прямоугольного сечения может распространяться электромагнитная волна, которую в пределах волновода можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн. Каждая плоская волна является чисто поперечной, так что электрическое и магнитное поля перпендикулярны к направлению их распространения. В суммарной волне электрическое поле имеет только составляющую E_y , и, следовательно, перпендикулярно оси волновода, а магнитное поле имеет составляющие H_x и H_z . Получается, что электромагнитное поле в волноводе не является чисто поперечным, а имеет также и продольные составляющие.

Рассмотренный случай представляет собой магнитную волну (H-волна или TE-волна). Мы могли бы взять другую поляризацию исходной падающей волны ($H = H_y$) и тогда возникла бы электрическая волна с $E_z \neq 0$ (E-волна или TH-волна).

Теперь рассмотрим граничные условия. На поверхности волновода касательная компонента напряженности должна быть равна нулю. Так, если стенки волновода расположены друг от друга на расстоянии a по оси x, то при $x = 0$, и при $x = a$ электрическое поле (в нашем случае оно направлено вдоль оси y, а значит касательная к плоскостям Oyz будет равная суммарному значению поля) должно быть равно нулю. Значит

$$x = a = \frac{n\pi}{k \cos \theta}$$

Значит, движение электромагнитной волны по волноводу будет возможно, если угол падения удовлетворяет условию ($\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$)

$$\cos \theta = \frac{n\pi}{ak} = \frac{n\pi c}{a\omega} = \frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1$$

Получается, что для каждого n будет существовать критическая частота, начиная с которой волна может проходить через волновод. Так, критическая частота при $n=1$.

$$\omega_{кр} = \frac{\pi c}{a}$$

Соответствующая ей критическая длина волны $\lambda_{кр} = 2a$. Тогда фазовую скорость можно найти как

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\pi c}{a\omega})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_{кр}}{\omega})^2}}$$

Фазовая скорость (скорость перемещения поверхности постоянной фазы $v_{\phi} = \frac{\omega}{k_z}$) в волноводе больше скорости света в пустоте, а групповая (скорость распространения возмущения $u = \frac{d\omega}{dk}$) всегда меньше.

Зная скорость, можно найти волновое число k_z , описывающее распространение волны вдоль оси волновода

$$k_z = \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{1 - (\frac{\omega_{кр}}{\omega})^2}$$

Из данного выражения следует, что при убывании частоты волновое число k_z тоже уменьшается, и при $\omega < \omega_{кр}$, волновое число становится мнимым. Получается при частотах меньше критической волны вдоль трубы экспоненциально затухают, вследствие чего критическую частоту также называют граничной частотой волновода.

Из предыдущих соотношений нетрудно получить связь длин волн в волноводе (λ_v), открытом пространстве (λ_0) и критической ($\lambda_{кр}$)

$$\frac{1}{\lambda_v^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{кр}^2}$$

У оси x никакой выделенности нет, а значит, что вдоль оси y может образоваться точно такое же синусоидальное распределение поля. Поэтому для каждого вида E и H -волны получается бесчисленное множество решений, каждое из которых имеет свою критическую частоту и длину волны. Так, в случае прямоугольного волновода с поперечными размерами a и b все возможные критические длины волн определяются общей формулой

$$\lambda_{кр} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{m}{2a})^2 + (\frac{n}{2b})^2}}$$

где m и n - целые числа, которые представляют из себя количество полуволн поля, которое укладывается вдоль размера волновода (a и b соответственно). Этими же символами обозначаются волны - соответственно E_{mn} и H_{mn} . Обычно для передачи СВЧ-энергии по прямоугольным волноводам используется волна H_{10} . Её критическая длина волны - максимальная среди всех типов волн в прямоугольном волноводе, и поэтому её называют основной. Тем самым, для волновода заданного сечения существует диапазон частот, ограниченный снизу критической частотой волны H_{10} , а сверху - критической частотой следующей распространяющейся волны (к примеру $H_{10}c\lambda_{кр} = 2b$). В этом частотном диапазоне СВЧ-энергия переносится только одним типом волно, что существенно облегчает её дальнейшее использование.

Если в волноводе имеется препятствие, то в нём появляется отражённая волна. Падающая и отражённая волны интерферируют и создают в волноводе волну, которую можно разбить на стоячую волну и бегущую. Запишем прямую и отражённую волны, движущиеся по оси z (первая вдоль оси, вторая против оси).

$$E_1 = E_0 \cdot \exp(i(\omega t - k_z z))$$

$$E_2 = \rho E_0 \cdot \exp(i(\omega t + k_z z + \varphi))$$

где ρ - коэффициент отражения. Тогда суммарное поле

$$E(z) = E_1 + E_2 = E_0 \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}(1 + \rho e^{i(2k_z z + \varphi)}) = A_0 e^{i\omega t}$$

Тогда получается, что квадрат амплитуды равен

$$A_0^2 = E_0^2((1 + \rho \cos(2k_z z + \varphi))^2 + (\rho \sin(2k_z z + \varphi))^2)$$

$$A_0^2 = E_0^2(1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2k_z z + \varphi))$$

Максимальное(в пучности) и минимальное(в узле) значения поля равны соответственно

$$E_{\max} = E_0(1 + \rho); E_{\min} = E_0(1 - \rho)$$

Получается, расстояние между соседними узлами(или пучностями) равно

$$2k_z l = 2\pi$$

$$l = \frac{\pi}{k_z} = \frac{\lambda_B}{2}$$

Что позволяет измерить длину волны λ_B . Коэффициент

$$K = \frac{E_{\max}}{E_{\min}}$$

Называется коэффициентом стоячей волны. Подставив в него значения полей, выраженные через амплитуду бегущей и коэффициент отражения, можно найти чему этот коэффициент отражения равен

$$\rho = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{K - 1}{K + 1}$$

Так, в случае полного отражения $\rho = 1$, а если волна в волноводе полностью поглощается, то $\rho = 0$.

Экспериментальная установка

Волны в волноводе при частоте выше критической

Схема для исследования структуры волн в волноводе при частоте выше критической представлена на рис. 2. Модулированный сигнал от высокочастотного генератора (цуги с частотой повторения 1 кГц) поступает на вход А измерительной линии, вдоль которой перемещается зонд S. Высокочастотный сигнал с зонда поступает на кристаллический детектор D.

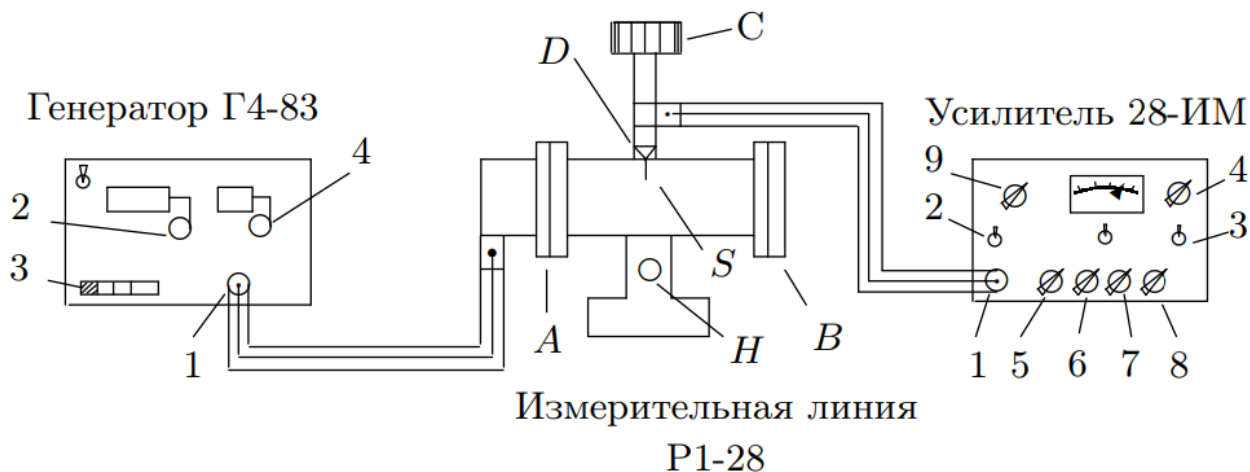
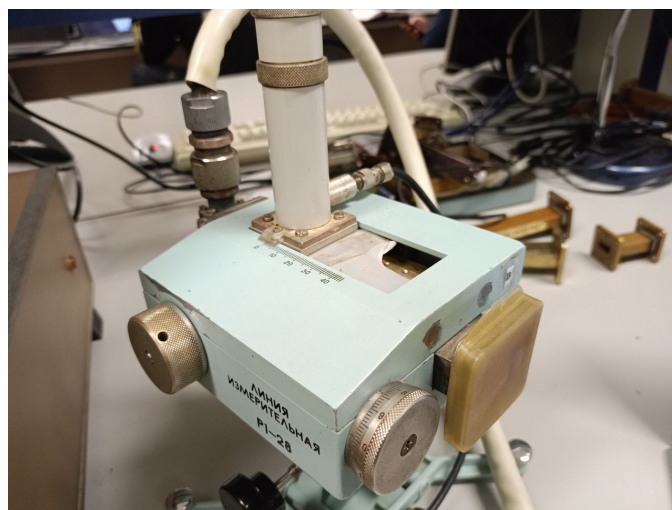


Рис. 2 — Схема для исследования структуры волн СВЧ



С нагрузки детектора (с RC-цепочки) снимается огибающая высокочастотного сигнала и подаётся на усилитель низкой частоты. Величина сигнала регистрируется вольтметром, вмонтированным в усилитель. Ручка С — настройка измерительной линии — служит для согласования зонда (как антенны) со входом усилителя. В волноводе с закрытым выходом образуется стоячая волна. Определив расстояние между узлами, можно рассчитать длину волны и фазовую скорость СВЧ-сигнала в волноводе. Устройство детекторной головки, установленной на измерительной линии, таково, что отклик вольтметра U на величину напряжённости электрического поля E в волноводе пропорционален E^n

$$U \propto E^n,$$

а показатель степени n сам зависит от величины сигнала: при малых сигналах детектирование квадратичное ($n = 2$), при больших — линейное ($n = 1$). Если известно распределение поля $E(z)$ вдоль измерительной линии, то, изучив распределение $U(z)$, можно по графику $\ln(U) =$

$f[\ln(E)]$ определить характер детектирования: в двойном логарифмическом масштабе любая степенная функция — прямая линия, по наклону которой можно определить n . Распределение $E(z)$ нетрудно рассчитать для волновода с закороченным концом (металлической заглушкой), когда фаза отражённой волны $\phi = \pi$, а $\rho = 1$. Электрическое поле в этом случае имеет вид:

$$E(z) = E_0 e^{-ik_1 z} (1 - e^{2ik_z z}) e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ik_1 z} - e^{ik_1 z}) = 2E_0 e^{i\omega t} \sin(k_z z) \propto \sin(k_z z),$$

где z — смещение от узла. Меняя нагрузку на выходе измерительной линии (В на рис. 2) и сравнивая максимальное и минимальное показания вольтметра, можно рассчитать коэффициент стоячей волны (к.с.в.) и коэффициент отражения ρ .

Волны в волноводе при частоте ниже критической

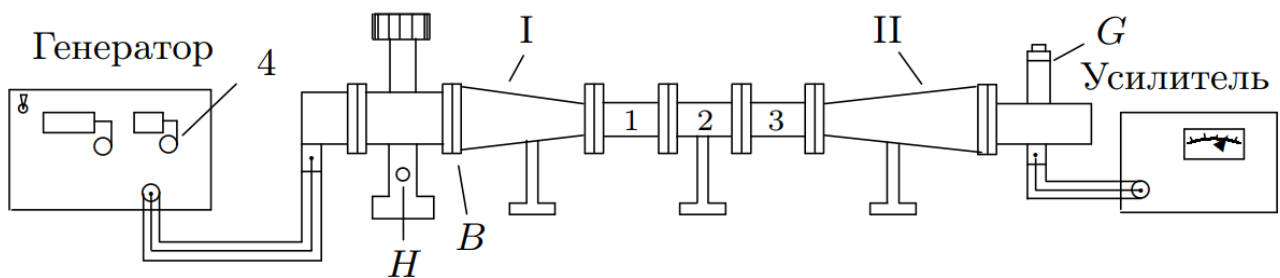
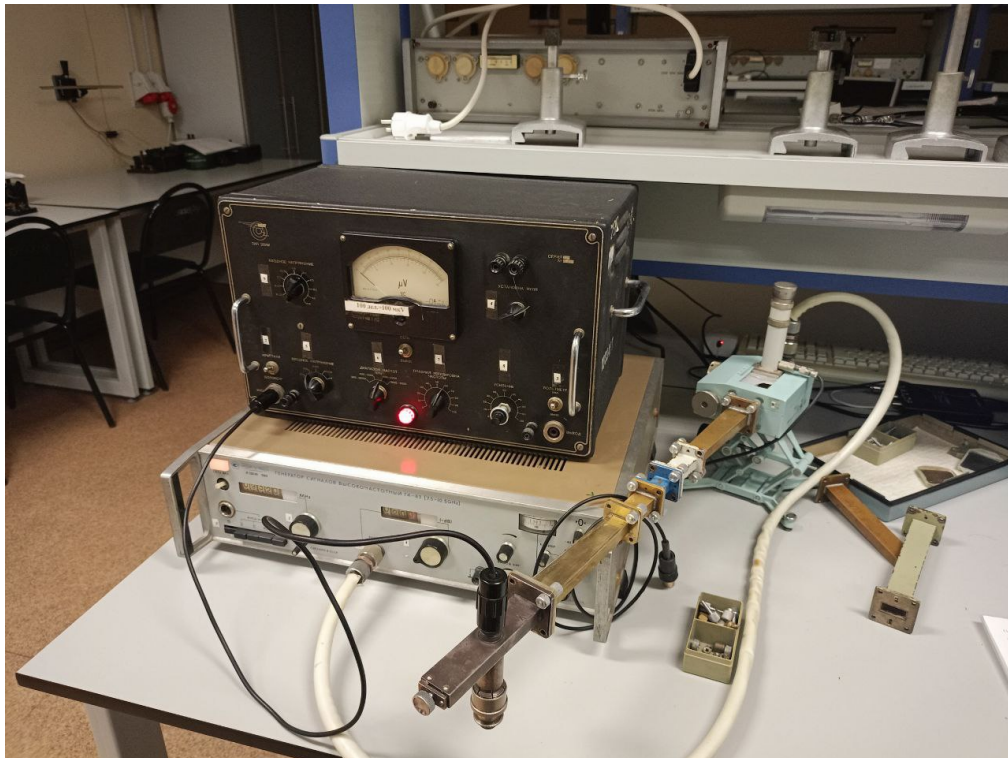


Рис. 3 — Схема для исследования затухания



Для исследования затухания волн в волноводе при частоте ниже критической используются те же генератор, усилитель, измерительная линия и дополнительный набор волноводов с отдельной детекторной головкой G (рис. 3). Дополнительный набор начинается и заканчивается волноводами переменного сечения I и II. Между ними можно разместить 1, 2 или 3 одинаковых отрезка с постоянным сечением. В такой системе волны с частотами меньше критической экспоненциально затухают. Мощность сигнала на выходе из волновода W можно связать с мощностью входного сигнала W_0 двумя способами:

$$W = W_0 e^{-\alpha z} \text{ или } W = W_0 10^{-\beta z}, \text{ } z - \text{длина волновода.}$$

Коэффициент (αz) измеряется в неперах (Нп). 1 непер соответствует отношению интенсивностей, равному основанию натуральных логарифмов. Коэффициент (βz) принято измерять в децибелах [дБ]: один бел соответствует уменьшению мощности в 10 раз; децибел — одна десятая бела. Измеренное в децибелах затухание определяется формулой

$$(\beta z) = 10 \lg \frac{W_0}{W}$$

Из этого определения вытекает, что

$$\alpha = 2,3\beta$$

В закритическом волноводе при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону $E^2 \propto e^{-\alpha z}$, где α — коэффициент затухания:

$$\alpha = 2ik_z$$

Получается

$$\alpha = 2ik_z = \frac{2\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2}$$

Здесь $\lambda_0 = c/\nu = 3,22$ см — длина волны в свободном пространстве, соответствующая рабочей частоте $\nu = 9320$ МГц, $a = 1,6$ см — размер широкой стенки волновода-вставки.

Ход работы

определение длины волны СВЧ-сигнала в волноводе

Для начала определим критическую частоту для нашего волновода. $a = 23,0 \pm 0,5$ мм. $\nu_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{кр}}}{2\pi} = \frac{c}{2a}$. $\nu_{\text{гр}} = 6,52 \pm 0,14$ ГГц.

При рабочей частоте $\nu = 9320$ МГц, перемещая зонд, снимем зависимость напряжения на вольтметре от положения зонда.

U, mV	37	25	16	7,8	2,9	0,3	0,54	3,5	9,7	19	29	43	57	72	84
z, mm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
U, mV	91	99	102	98	85	75	62	47	32	22	12	5,2	1,25	0,09	1,8
z, mm	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
U, mV	6,15	14	23	36	49,5	64	78	89	98	102	97	90	78	66	52
z, mm	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44



Как было сказано выше, расстояние между узлами составляет половину длины волны в волноводе. Из графика найдем это значение $l = 22$ мм. Значит, длина волны равна $\lambda_b = 44$ мм.

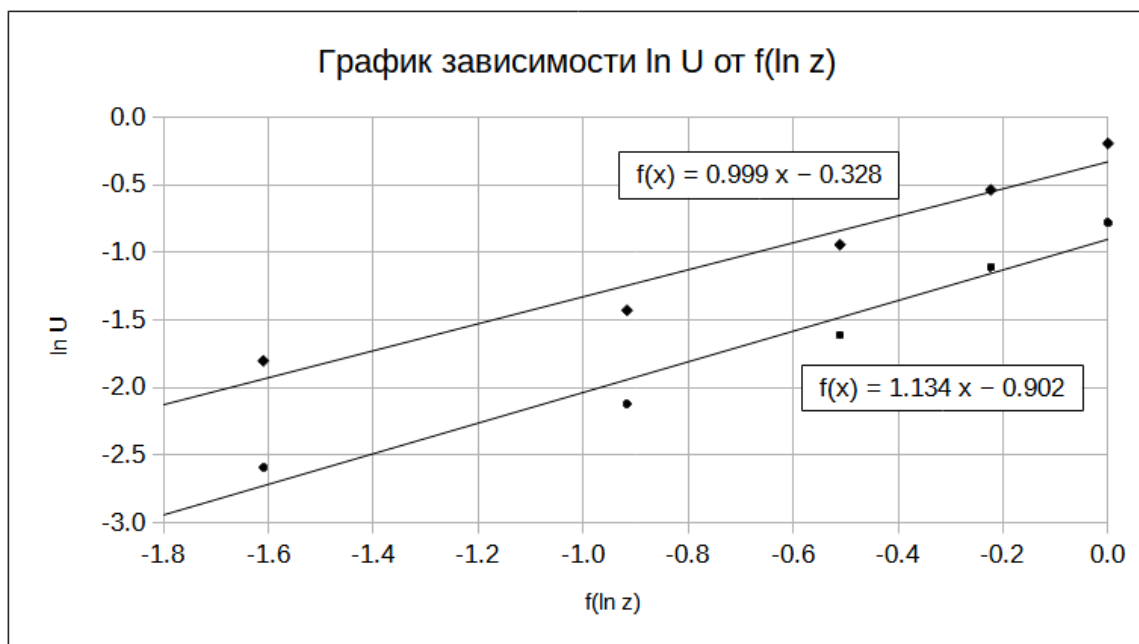
Посчитаем теоретическое значение этой длины волны по формуле $\frac{1}{\lambda_b^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{кр}^2}$. $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = 32$ мм. $\lambda_{кр} = 2a = 46$ мм. Тогда $\lambda_b = 45$ мм. Отсюда можно сказать, что зонд исправен.

Найдем также фазовую и групповую скорости ($u = \frac{c^2}{v_\phi}$). $v_\phi = 42 \pm 1 \cdot 10^4$ км/с. $u = 214 \pm 5 \cdot 10^3$ км/с.

Определение характера детектирования

Теперь, перемещая зонд около узла $z = 28$ мм, снимем зависимость напряжения на вольтметре при малых смещениях зонда, построим график зависимости $\ln(U) = f(\ln(z))$ (при малых смещениях заменяем $\sin z$ на z).

U, mV	0,825	0,585	0,39	0,24	0,165	0,0825	0,075	0,12	0,2	0,33	0,46
z, mm	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1



Коэффициент пропорциональности должен показывать характер детектирования. Как видно из графика, коэффициент пропорциональности примерно равен единице, а это значит, что в нашем случае характер детектирования линейный.

Определение коэффициента отражения

Теперь найдем коэффициент отражения в разных случаях.

1. С металлической заглушкой $U_{\max} = 102$ мВ, $U_{\min} = 0,09$ мВ. Тогда коэффициент стоячей волны можно определить, как отношение максимальной к минимальной амплитуде (т.к. детектирование линейное). Тогда получается, что $K = 1133$, $\rho = 0,998$.
2. Без заглушки $U_{\max} = 162$ мВ, $U_{\min} = 43$ мВ. $K = 3,77$, $\rho = 0,580$
3. Наденем на выходной фланец отрезок волновода с поглощающей нагрузкой. Получилось $U_{\max} = 96$ мВ, $U_{\min} = 71$ мВ. Тогда $K = 1,35$, $\rho = 0,149$.

Значения коэффициентов отражения совпадают с ожидаемыми. Действительно, при присоединении металлической заглушки, волна должна полностью отражаться, если же надеть нагрузку, то волна должна практически полностью поглощаться, что совпадает с полученным значением коэффициента отражения.

Исследования затухания волн при частоте ниже критической

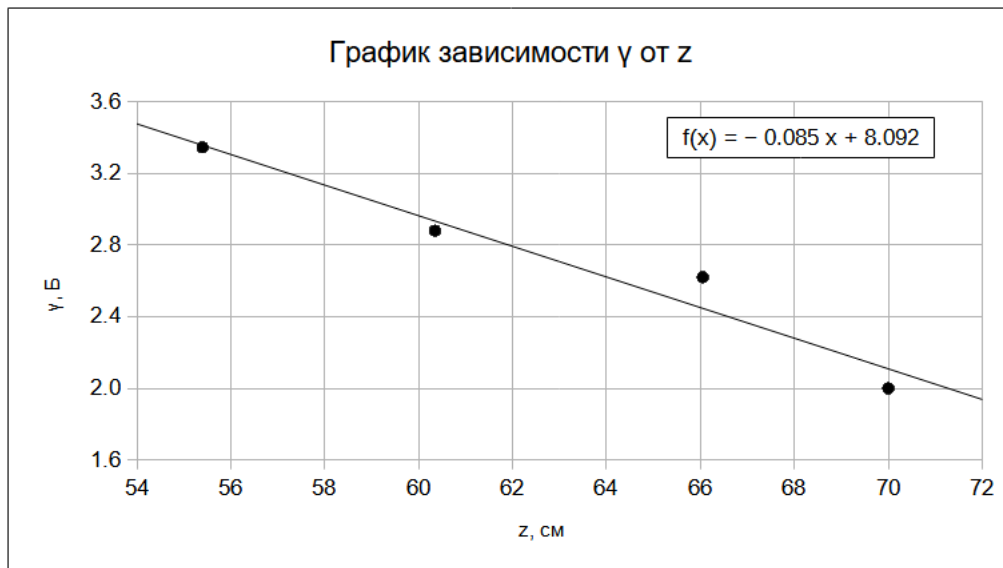
Соберем схему, изображенную на рисунке 3, а также измерим длину каждой секции. Получилось

$$l_{I-II} = 14,5 \text{ см}, l_y = 4,95 \text{ см}, l_b = 3,95 \text{ см}, l_w = 5,7 \text{ см}, l_H = 15,3 \text{ см}, l_G = 11,1 \text{ см}.$$

Теперь найдем критическую частоту для данного волновода. $\nu_{кр} = \frac{c}{2a} = 9,38 \pm 0,18$ ГГц. Рабочая же частота $\nu = 9,32$ ГГц.

Будем подбирать ослабление γ с генератора так, чтобы при уменьшении количества секций волновода с трёх до нуля, показания вольтметра на усилителе ($U = 5$ мВ) оставались постоянными. Построим таблицу по результатам. По полученным результатам также построим график зависимости γ от z .

γ , Б	z , см
2	70
2,62	66,05
2,88	60,35
3,345	55,4



Найдем коэффициент затухания по углу наклона. $\beta = -k = 0,085 \pm 0,013$ Б/см. Тогда найдем коэффициент $\alpha = 2,3 \cdot \beta = 0,20 \pm 0,03$ Нп/см.

Теперь найдем теоретические значения этих коэффициентов. В теоретической справке был приведён спосо расчета при квадратичном детектировании. В нашем же случае это линейное детектирование, а значит $E \sim e^{-\alpha z}$. Тогда получается, что $\alpha = ik_z = 0,22$ Нп/см. $\beta = 0,095$ Б/см. Сравним теоретические и экспериментальные данные

$$\alpha_{т} = 0, \text{ Нп/см}; \alpha_{\text{эксп}} = 0,20 \pm 0,03 \text{ Нп/см}$$

$$\beta_{т} = \text{Б/см}; \beta_{\text{эксп}} = 0,085 \pm 0,013 \text{ Б/см}$$

Видно, что результаты практически совпадают с теоретическими. Также заметим, что при использовании формулы для квадратичного детектирования, практические значения отличались бы от теоретических в два раза, что подтверждает предположение о том, что в нашем случае детектирование линейное.

Заключение

В ходе работы были изучены методы анализа электромагнитных волн СВЧ-диапазона, распространяющихся в волноводе. Так, при помощи описанных методов была измерена длина падающей волны, которая практически совпала со значением, полученным теоретически, также были определены фазовая и групповая скорости. Был определён характер детектирования зонда, который оказался линейным, что в дальнейшем подтвердилось при подсчёте коэффициентов затухания. Были также вычислены коэффициенты отражения в различных случаях (с металлической заглушкой, без заглушки, с поглощающей нагрузкой), значения которых согласовываются с теорией. Также было исследовано затухание волн в волноводе при частоте ниже критической, получен коэффициент этого затухания, который практически равен теоретическому.