

Free Contest 101 - Sumfrac

iluvgirlswithglasses

Nov-5-2022

Nhắc nhở:

- $f(N)$: Số nguyên tố nhỏ nhất $> N$
- $g(N)$: Số nguyên tố lớn nhất $\leq N$
- Vì khoảng cách tối đa giữa hai số nguyên tố liên tiếp có giá trị không quá 10^9 là 288 (https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_gap), ta có thể tìm giá trị $f(N)$ và $g(N)$ của một số N cho trước trong một khoảng thời gian rất ngắn.

Lời giải:

Gọi $K = f(K) - 1$, ta có đẳng thức sau:

$$\sum_{i=2}^K \frac{1}{f(i) \times g(i)} = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{x}{g(K) \times f(K)} = \frac{K-1}{2 \times f(K)}$$

Vậy, bài toán ban đầu có thể được viết thành:

$$\sum_{i=2}^K \frac{1}{f(i) \times g(i)} + \sum_{i=g(N)}^N \frac{1}{f(i) \times g(i)} = \frac{K-1}{2 \times f(K)} + \frac{N-K}{f(N) \times g(N)}$$

Mà $f(K) = g(N)$, nên khi quy đồng, ta có kết quả của bài toán là:

$$\frac{(K-1) \times f(N) + (N-K) \times 2}{2 \times f(N) \times g(N)}$$