Solution COLOR – Beginner Free Contest 01

Nguồn: Lời giải bài tập Free Contest

1. Tóm tắt đề bài

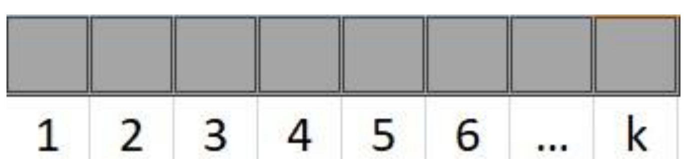
Cho một dãy n $(0 \le n \le 10^9)$ ô vuông kề nhau. Đếm số cách tô màu k $(k \le 5000)$ ô vuông trong n ô vuông này sao cho không có hai ô nào được tô màu nằm cạnh nhau.

2. Lời giải

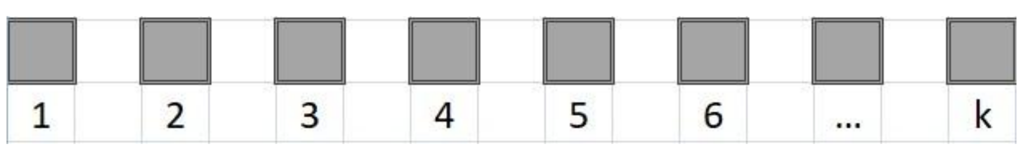
Trước hết, nếu $k > n$, dĩ nhiên không có cách tô màu.

Để giải bài toán này, ta sẽ tưởng tượng thay vì tô màu các ô trên n ô, ta sẽ đếm số cách xếp k ô được tô màu và $n - k$ ô không được tô màu thành một dãy thỏa mãn điều kiện đã cho như sau:

- Đầu tiên đặt k ô đã được tô màu nằm cạnh nhau (các ô màu xám)



- Đặt $k - 1$ ô vuông không được tô màu vào $k - 1$ khoảng trống giữa các ô vuông đã được tô màu (các ô màu trắng)



- Với cách đặt như vậy đã thỏa mãn điều kiện tô màu k ô và giữa không có 2 ô được tô màu nào nằm cạnh nhau. Như vậy còn lại $n - k - (k - 1) = n - 2 * k + 1$ ô không được tô màu chưa được xếp vào (gọi là những ô tự do). Mỗi ô tự do này có thể được xếp vào $k+1$ nhóm ($k-1$ khoảng trống giữa k ô vuông được tô màu và 1 khoảng trống bên trái ô được tô màu thứ 1, 1 khoảng trống bên phải ô được tô màu thứ k). Số cách chia này chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = n - 2 * k + 1$$

- Số lượng nghiêm nguyên không âm của phương trình trên là $\binom{n-k+1}{k}$. Việc chứng minh công thức trên các bạn có thể đọc bài toán chia kẹo Euler kinh điển tại link https://sites.google.com/site/nhatnguyendrgs/home/math/bai-toan-chia-keo-cua-euler.

Tóm lại kết quả bài toán là $\binom{n-k+1}{k}$.

Do n lớn ($n \leq 10^9$) và k nhỏ ($k \leq 5000$) nên ta có cách tính $\binom{n}{k}$ như sau.

$$\binom{n}{k} = \frac{n * (n-1) * (n-2) * \ldots * (n-k+1)}{1 * 2 * 3 * \ldots * k}$$

Có một lưu ý là trong biểu thức trên có xuất hiện phép chia, nghĩa là ta phải tính $\frac{a}{b}$ $mod\ p$. Do $p = 10^9 + 7$ là số nguyên tố nên $\frac{a}{b}$ $mod\ p \equiv a * b^{p-2}$ $mod\ p$ (định lý Fermat nhỏ https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_little_theorem).

Để tính b^{p-2} với p lớn có thể dùng lũy thừa nhanh. Ví dụ cần tính a^b thì ta có công thức truy hồi như sau:

$$\begin{cases} a^b = 1 \text{ nếu } b = 0 \\ a^b = a \text{ nếu } b = 1 \\ a^b = a^{\frac{b}{2}} * a^{\frac{b}{2}} \text{ nếu } b \text{ chẵn} \\ a^b = a^{\frac{b-1}{2}} * a^{\frac{b-1}{2}} * a \text{ nếu } b \text{ lẻ} \end{cases}$$

3. Đánh giá độ phức tạp

Tính phần tử số và mẫu số của kết quả trong $O(k)$, tính tử số chia mẫu số mất $O(log2(10^9 + 5))$ cho việc lũy thừa nhanh.