Министерство образования и науки РФ
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Факультет №3 «Системы управления, информатика и электроэнергетика»
Кафедра 304 «Вычислительные машины, системы и сети»

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

ТЕМА: «НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ» ВАРИАНТ №93

Курсовая работа студента
группы М30-109Б-19
Кузнецова Ильи Игоревича

Проверил:
доц. к.304, к.т.н. Волков В.И.

Москва
2020

Содержание

1 Задание

$s - m - n$ теорема. Доказать, что предикат «p-ое рекурсивно перечислимое множество равно q-ому рекурсивно перечислимому множеству ($A_p = A_q$) не разрешим».

2 Введение

Для доказательства неразрешимости проблемы «$A_p = A_q$» воспользуемся тем, что нам известны другие неразрешимые проблемы. То есть в ходе доказательство будем сводить одну проблему к другой и в конечном итоге придем к неразрешимости проблемы упомянутой выше.

Вначале ознакомимся с некоторым понятиями, используемыми в процессе доказательства: МНР, МНР - вычислимость, нумерация МНР вычислимых функций, Тезис Чёрча, рекурсивно перечислимое множество.

3 Используемый материал

3.1 Вычислимость

Если алгоритм, или эффективная процедура, используется для вычисления значений числовой функции, то эта функция называется эффективно вычислимой или просто вычислимой.

В общем случае предположим, что $M(x_1, ..., x_n)$ $n-$местный предикат на натуральных числах. *Характеристической функцией* этого предиката $C_M(x)$ (здесь $x = (x_1, ..., x_n)$ называется функция

$$C_M(x) \quad = \begin{cases} 1, & if \text{ M(x) } true \\ 0, & if \text{ M(x) } false \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом предикат $M(x)$ разрешим, если функция C_M вычислима

3.2 МНР - машина с неограниченными регистрами

МНР содержит бесконечно число регистров, обозначаемых $R_1, R_2, R_3, ...$ каждый из которых в любой момент времени содержит некоторое натуральное число; число содержащееся в R_n, мы будем обозначать через r_n. Это можно представить следующим образом:

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	...
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	...

Далее будет пояснено что означает выражение вида «функция f вычислима на МНР».

3.3 МНР-вычислимость

Пусть f - частичная функция $\mathbb{N}^n$, где $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, тогда:

1. Предположим, что P - программа, а $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{N}$

   (a) $P(a_1, a_2, a_3, ..) \downarrow$ обозначает что вычисление $P(a_1, a_2, a_3, ..)$ в конце концов остановится.

   (b) Вычисление $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ сходится к b, если $P(a_1, a_2, ..., a_n) \downarrow$ и в заключительной конфигурации в регистре R находится b. Этот факт записывается как $P(a_1, a_2, ..., a_n) \downarrow b$

   (c) Программа P МНР-вычисляет функцию f, если для всех $a_1, ..., a_n, b$ имеет место $(a_1, ..., a_n) \downarrow b$ тогда, и только тогда, когда $(a_1, ..., a_n) \in Domf$ и $f(a_1, .., a_n) = b$

2. Функция f называется МНР-вычислимой, если существует программа, которая МНР вычисляет f.

В дальнейшем термин вычислимое будет обозначать МНР-вычислимость, а термин программа - МНР-программу.

3.4 Нумерация программ

Множество X счетно, если существует биекция $f : X \to N$

1. Перечислением, или нумерацией, множества X называется сюръективное отображение $g : N \to X$; часто его представляют следующей записью: $X = (x_0, x_1, x_2, ...)$, где $x_n = g(n)$. Если функция g инъективна, то говорят о перечислении или нумерации без повторений.

2. Пусть X - множество конечных объектов (например, множество команд или множество программ); X называется эффективно счетным, если существует биекция $f : X \to N$, такая, что обе функции f и f^{-1} эффективно вычислимы.

3.5 Гёделева номера

Определим биекцию $\Upsilon : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$: обозначим множество всех команд как Υ, а множество всех программ $\mathbb{P}$. Так как известно, что эти множества эффективно счетны, то можно сделать вывод о существование биекции.

Число $\Upsilon(P)$ называется кодовым номером, или геделевым номером программы P, или просто номером P. Положим

$$P_n = \text{программа с (кодовым) номером } n = \Upsilon^{-1}(n)$$

и будет называть P_n n-й программой. Для дальнейших результатов крайне важно, что функции Υ и Υ^{-1} эффективно вычислимы, т.е.

1. По данной программе P можно эффективно найти ее кодовый номер $\Upsilon(P)$.

2. По данному номеру n можно эффективно найти программу $P_n = \Upsilon^{-1}(n)$.

3.6 Нумерация вычислимых функций

Используя нашу фиксированную нумерацию программ можно пронумеровать вычислимые функции, а также их области определения и множества значений.

$\forall\ a \in N$ и $n \geq 1$:

1. $\phi_a^{(n)}$ - n-местная функция, вычислимая по программе $P_a = f_{P_a}^{(n)}$

2. $W_a^{(n)}$ – область определения $\phi_a^{(n)}$, $W_n^{(n)} = [(x_1, \ldots, x_n) \mid \mathrm{P}_a(x_1, \ldots, x_n) \downarrow])$, $E_a^{(n)}$ – множество значений функций $\phi_n^{(n)}$

Когда мы имеем дело с одноместными функциями для удобства можно опустить верхний индекс (1); то есть будем писать ϕ_a вместо $\phi_a^{(n)}$ и так далее.

3.7 Тезис Чёрча

Тезис Чёрча: интуитивно и неформально определенный класс эффективно вычислимых частичных функций совпадает с классом МНР-вычислимых функций.

Предположим, что мы располагаем неформально описанным алгоритмом для вычисления значений функции f. В такой ситуации нам понадобиться доказательство МНР-вычислимости f, сделать это можно двумя способами, с помощью тезиса *Чёрча*, рассмотрим более строгий метод:

Дать неформальное (хотя и строгое) доказательство того, что данный неформальный алгоритм действительно вычисляет f. Затем аппелировать к тезису Чёрча и немедленно сделать заключение об МНР-вычислимости функции f.

3.8 Рекурсивно перечислимое множество

Пусть A – подмножество множества N. Тогда множество называется рекурсивно перечислимым, если функция f, задаваемая формулой:

$$f(x) \quad = \begin{cases} 1, & if \text{ x} \in A \\ \text{undefined}, & if \text{ x} \notin A \end{cases} \tag{2}$$

вычислима.

3.9 s-m-n теорема

Для всяких $m, n \geq 1$ существует тотальная (определенная везде) вычислимая $(m+1)$ – местная функция $s_n^m(e, x)$, такая, что:

$$\phi_e^{(m+n)}(x, y) \cong \phi_{s_n^m(e,x)}(y)$$

где m - длина вектора x, n - длина вектора y, $\phi_e^{(m+n)}(x, y)$ – вычислимая функция, e – геделев номер некоторой функции, которую вычисляет $\phi_e^{(m+n)}(x, y)$

4 Доказательство

В введение уже оговаривалось, что для доказательства неразрешимости проблемы мы будем сводить нашу проблему к другим уже известным. Докажем неразрешимость проблем, которые используется в доказательстве.

4.1 Неразрешимость $x \in W_x$

Характеристическая функция данной проблемы:

$$f(x) \quad = \begin{cases} 1, & if \text{ x} \in W_x \\ 0, & if \text{ x} \notin W_x \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что эта функция f вычислима и приведем предположение к противоречию. Именно с помощью диагонального метода мы построим вычислимую функцию g, такую, что $Dom(g) \neq W_x (= Dom(\phi_x))$, при всех x, чего, очевидно, быть не может.

Как всегда при использовании диагонального метода, мы будем стремиться к тому, чтобы множество $Dom(g)$ отличалось от W_x в точке x. Будет поэтому добиваться того, чтобы

$$x \in Dom(g) \leftrightarrow x \notin W_x$$

Определим теперь функцию g следующим образом:

$$g(x) \quad = \begin{cases} 0, & if \text{ x} \notin W_x \text{ (i.e. if } f(x) = 0) \\ \text{undefined}, & if \text{ x} \in W_x \text{ (i.e. if } f(x) = 1) \end{cases} \tag{4}$$

Поскольку функция f вычислима то (по тезису Чёрча) вычислима и g, что и дает требуемое противоречие. (Более подробно, посколько функция g вычислима, возьмем такое m, что $g = \phi_m$, тогда $m \in W_m \leftrightarrow m \in Dom(g) \leftrightarrow m \notin W_m$, чего не может быть.)

Итак, мы заключаем, что функция f не является вычислимой, и, следовательно, проблема "$x \in W_x$" неразрешим

Теперь с помощью неразрешимости этой проблемы мы можем свести следующую проблему "$\phi_x = 0$" к упомянутой выше.

4.2 Неразрешимость $\phi_x = 0$

Рассмотрим функцию f, определенную формулой

$$f(x, y) \quad = \quad \begin{cases} 0, & if \text{ x} \in W_x \\ \text{undefined}, & if \text{ x} \notin W_x \end{cases} \tag{5}$$

Эту функцию мы ввели для того, чтобы далее воспользоваться $s-m-n$ теоремой. Тем самым мы рассматриваем x как параметр, и нас интересует функции g_x, такие, что $g_x(y) \cong f(x, y)$. При этом мы выбрали f так, что $g_x = 0 \leftrightarrow x \in W_x$.

Тезис Чёрча показывает, что функция f вычислима. Поэтому существует тотальная вычислимая функция $k(x)$, даваемая $s-m-n$ теоремой, такая, что $f(x, y) \cong \phi_{k(x)}(y)$. То есть $\phi_{k(x)} = g_x$. Таким образом по определению

$$x \in W_x \leftrightarrow \phi_{k(x)} = 0$$

Следовательно, вопрос о том, верно ли, что $x \in W_x$, можно решить, ответив сначала на вопрос: верно ли, что $\phi_{k(x)} = 0$? Тем самым мы свели общую проблему "$x \in W_x$" к общей проблеме "$\phi_x = 0$"; поскольку первая из них неразрешима, то неразрешима и вторая, что и требовалось доказать.

Доказав неразрешимость проблемы "$\phi_x = 0$" с помощью неразрешимости проблемы $x \in W_x$ можем опять же свести следующую проблему "$\phi_x = \phi_x$" к $\phi_x = 0$.

4.3 Неразрешимость $\phi_x = \phi_y$

Пусть c – такое число, что $\phi_c = 0$. Если $f(x, y)$ - характеристическая функция проблемы $\phi_x = \phi_y$, то функция $g(x) = f(x, c)$ есть характеристическая функция проблемы "$\phi_x = 0$".

Так как проблема “$\phi_x = 0$” неразрешима, то её характеристичкая функция g невычислима, но тогда не вычислима и функция f, таким образом проблема “$\phi_x = \phi_y$” – тоже неразрешима.

Доказав неразрешимостиь всех предыдущих проблем, может приступить к доказательству.

4.4 Неразрешимость $A_p = A_q$

После доказательства неразрешимости предыдущих проблем мы можем приступить к доказательству неразрешимости нашей проблемы.
В ходе доказательство мы сведем проблему $A_p = A_q$ к другой уже известной нам проблеме $\phi_x = \phi_y$, после получим противоречивость, что и докажет неразрешимость нашей проблемы.
Положим:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & if\ \mathrm{x} \in A_p \\ \text{undefined}, & if\ \mathrm{x} \notin A_p \end{cases} \tag{6}$$

$$q(x) = \begin{cases} 1, & if\ \mathrm{x} \in A_q \\ \text{undefined}, & if\ \mathrm{x} \notin A_q \end{cases} \tag{7}$$

Тогда характеристическая функция проблемы:

$$r(p,q) = \begin{cases} 1, & if\ \mathrm{A}_p = A_q \\ 0, & if\ \mathrm{A}_p \neq A_q \end{cases} \tag{8}$$

Так как множества из условия A_p и A_q рекурсивно перечислимы, то p и q – вычислимы. Положим:

1. Функция $p(x) = \phi_m$, где $m = \Upsilon(P)$ кодовый номер, P – программа вычисляющая $p(x)$;

2. Функция $q(x) = \phi_n$, где $n = \Upsilon(Q)$ кодовый номер, Q – программа вычисляющая $q(x)$.

Исходя из определения рекурсивно перечислимого множества слудует, что множества A_p и A_q равны тогда, и только тогда, когда $p(x) = q(x)$.
Таким образом, если $A_p = A_q$, то и $\phi_n = \phi_m$, и если $A_p \neq A_q$, то и $\phi_n \neq \phi_m$;
Тогда запишем характеристическую функцию проблемы $\phi_x = \phi_y$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ \phi_x = \phi_y \text{ (or if } r(p,q) = 1) \\ 0, & if\ \phi_x \neq \phi_y \text{ (or if } r(p,q) = 0) \end{cases} \tag{9}$$

То есть, если проблема "$A_p = A_q$" разрешима, то $r(p,q)$ будет вычислима, тогда и $f(x,y)$ будет также вычислима. Тогда можно будет сделать вывод о том, что проблема "$\phi_x = \phi_y$" – разрешима.

Но ранее мы продемонстрировали доказательство того, что проблема "$\phi_x = \phi_y$" неразрешима что и приводит нас к противоречию. Таким образом проблема "$A_p = A_q$" неразрешима, что и требовалось доказать.

5 Литература

Список литературы

[1] Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций (М.: Мир. 1983. 256 с.)

[2] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость (М.: Мир 1972. 624 с.)