Оглавление

1. Математический анализ

1.1 Аксиоматика и общие свойства множества действительных чисел. Полнота множества действительных чисел.

Определение 1.1. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы действительными (вещественными) числами, если выполняются следующие условия (аксиомы действительных чисел):

1.1.1 Аксиомы сложения

Определено отображение (операция сложения):

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

которое каждой упорядоченной паре (x, y) ставит в соответствие элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент 0 (в случае сложения называется нулем) такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$:
$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным элементом к x, такой, что:
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. Операция $+$ — ассоциативна, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. Операция $+$ — коммутативна, т.е. для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено:
$$x + y = y + x.$$

Если на каком-то множестве G выполнены аксиомы 1-3, говорят, что G — группа. Если операцию называют сложением, то группа называется аддитивной. Если известно, что операция коммутативна (т.е. выполнена аксиома 4), говорят, что группа коммутативна или абелева.

1.1.2 Аксиомы умножения

Определено отображение (операция умножения):

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

составляющая каждой упорядоченной паре $(x, y)x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент $1 \in R \setminus 0$, в случае умножения называемый единицей, так что
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. Для $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеется элемент x^{-1}, называемый обратным, такой, что:
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. Операция $\cdot$ — ассоциативна, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. Операция $\cdot$ — коммутативна, т.е. для $x, y \in \mathbb{R}$:
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Связь сложения и умножения: умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(x + y) \cdot z = xz + xy.$$

Если на множестве G действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным выше аксиомам, то G называется алгебраическим полем или просто полем.

1.1.3 Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение $\leq$, т.е. для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется ли $x \leq y$ или нет. При этом должны удовлетворятся следующие условия:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$.

2. $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \implies (x = y)$.

3. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \implies (x \leq z)$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Отношение $\leq$ называется отношением неравенства в $\mathbb{R}$.

Множество, в котором выполняются аксиомы 1-3 называют частично упорядоченным. Если сверх того выполнена аксиома 4, т.е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется линейно упорядоченным.

Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \implies (x + z \leq y + z)$. Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$: $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \implies (0 \leq x \cdot y)$.

1.1.4 Аксиома (полноты) непрерывности

Если X и Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует такое $c : x \leq c \leq y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

1.1.5 Общие свойства множества действительных чисел

Следствия из аксиом сложения

1. В множестве действительных чисел имеется только один нуль.
2. В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется только один противоположный элемент.
3. Уравнение $a + x = b$ в $\mathbb{R}$ имеет и притом единственное решение: $x = b + (-a)$.

Следствия из аксиом умножения

1. В множестве действительных чисел имеется только одна единица.
2. Для каждого числа $x \neq 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1}.
3. Уравнение $a \cdot x = b$ при $a \in R \setminus 0$ имеет и притом единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.

Следствия из аксиом связи сложения и умножения

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
2. $(x \cdot y = 0) \implies (x = 0) \vee (y = 0)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} : -x = (-1) \cdot x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot (-x) = x$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} : (-x) \cdot (-x) = x \cdot x$.

Следствия аксиом порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место в точности одно из отношений:
$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$(x < y) \wedge (y \leq z) \implies (x < z),$$
$$(x \leq y) \wedge (y < z) \implies (x < z).$$

Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

1. $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered}(x<y) \implies (x+z)<(y+z),\\ (0<x) \implies (-x<0),\\ (x \le y) \wedge (z \le w) \implies (x+z \le y+w),\\ (x \le y) \wedge (z < w) \implies (x+z < y+w).\end{gathered}$$

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered}(0<x) \wedge (0<y) \implies (0<xy),\\ (x<0) \wedge (y<0) \implies (0<xy),\\ (x<0) \wedge (0<y) \implies (xy<0),\\ (x<y) \wedge (0<z) \implies (xz<yz),\\ (x<y) \wedge (z<0) \implies (yz<xz).\end{gathered}$$

3. $0<1$.

4. $(0<x) \implies (0<x^{-1})$ и $(0<x) \wedge (x<y) \implies (0<y^{-1}) \wedge (y^{-1}<x^{-1})$.

1.2 Предел последовательности. Предел функции. Их свойства.

1.2.1 Предел последовательности

Определение 1.2. Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A, существует такой номер N (выбираемый в зависимости от $V(A)$), что все члены последовательности, с номерами больше N лежат в указанной окрестности точки A.

Другое, более распространенное определение:

Определение 1.3. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x\}_n$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует номер N, такой, что при всех $n > N$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$.

Последнее определение в логической символике выглядит следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - A| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел называется сходящейся. Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

1.2.2 Свойства предела последовательности

Общие свойства

Последовательность, принимающая только одно значение называется постоянной.

Определение 1.4. Если существует число A и номер N, такие, что $x_n = A$, при $\forall n > N$, то последовательность $\{x_n\}$ называется финально постоянной.

Определение 1.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число M, что $|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.6.
1. Финально постоянная последовательность сходится.
2. Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.
3. Последовательность не может иметь двух различных пределов.
4. Сходящаяся последовательность ограничена.

Предельный переход и арифметические операции

Определение 1.7. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — числовые последовательности, то их суммой, произведением, частным называются соответственно последовательности:

$$\{(x_n + y_n)\}, \{(x_n \cdot y_n)\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

Частое определено при $\{y_n\} \neq 0$.

Теорема 1.8. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — числовые последовательности. Если $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = A + B$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = A/B$, если $y_n \neq 0\, (n = 1, 2, \dots), B \neq 0$.

Предельный переход и неравенства

Теорема 1.9.
1. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Если $A < B$, то найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ будет выполнятся $x_n < y_n$.
2. Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Если при этом $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же приделу, то последовательность $\{y_n\}$ так же сходится к этому пределу.

1.2.3 Предел функции

Определение 1.10. Точка x называется предельной точкой множества A, если всякая проколотая окрестность точки x имеет с A непустое пересечение.

Определение 1.11. Пусть E — некоторое подмножество множества $\mathbb{R}$, а a — предельная точка множества E. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — вещественная функция, определенная на E.

Тогда A является пределом функции f при x стремящемся к a, если для $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, такое что для любой точки $x \in E$ такой, что $0 < |x - a| < \delta$, выполнено отношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В логической символике определение выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

1.2.4 Свойства предела функции

Общие свойства предела функции

Определение 1.12. Функцию $f : E \to R$ принимающая только одно значение называется постоянной.

Определение 1.13. Функцию $f : E \to R$ называется финально постоянной если она постоянна в некоторой проколотой окрестности точки a, предельной для множества E.

Теорема 1.14.

1. $f : E \to \mathbb{R}$ при $E \ni x \to a$, есть финально постоянная $A \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.
2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow f$ — финально ограничена при $E \ni x \to a$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1 \wedge \lim\limits_{x \to a} f(x) = A_2 \Rightarrow A_1 = A_2$.

1.2.5 Предельный переход и арифметические операции

Определение 1.15. Если две функции $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, то их суммой, произведением и частным называются функции:

$$\begin{gathered} (f + g)(x) = f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}(x)\right) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, x \in E. \end{gathered}$$

Теорема 1.16. Пусть две функции $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ с общей областью определения. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то

1. $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = A + B$.
2. $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{A}{B}$, если $g(x) \neq 0, B \neq 0$.

Определение 1.17. Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют бесконечно малой при $E \ni x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Теорема 1.18.

1. Если $\alpha : E \to \mathbb{R}$ и $\beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые функции, при $x \to a$, то их сумма $\alpha + \beta$ — тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2. Если $\alpha : E \to \mathbb{R}$ и $\beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые функции, при $x \to a$, то их произведение $\alpha \cdot \beta$ — тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3. Если $\alpha : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малая функция, а $\beta : E \to \mathbb{R}$ — финально ограниченная функция, при $x \to a$, то их произведение $\alpha \cdot \beta$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Предельный переход и неравенства

Теорема 1.19. 1. Если две функции $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ таковы, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $A < B$, то найдется проколотая окрестность U точки a в множестве E, в любой точке которой выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

2. Если между функциями $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, имеет место соотношение $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = C$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)$ и он равен C.

1.3 Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении.

Описательно говоря, функция f — непрерывна в точке a, если ее значение $f(x)$ по мере приближения аргумента x к точке приближается к значению $f(a)$ функции в самой точке a.

Определение 1.20. Функция f называется непрерывной в точке a, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции точки a, найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, образ которой при отображении f содержится в $V(f(a))$.

Формально-логическая запись определения:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

1.3.1 Свойства непрерывных функций

Локальный свойства

Локальный свойства — определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки области определения.

Теорема 1.21. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — непрерывная в точке $a \in E$ функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Функция f — ограничена в некоторой окрестности $U_E(a)$ точки a.

2. Если $f(a) \neq 0$ — то в некоторой окрестности $U_E(a)$ точки a, все значения функции положительны или отрицательны вместе с $f(a)$.

3. Если функция $g : U_E(a) \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки a, и, как и f — непрерывна в точке a, тогда

   (a) $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$,

   (b) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$,

   (c) $\dfrac{f}{g}(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$

   определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в ней.

4. Если функция $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $b \in Y$, а функция $f : E \to Y$, $f(a) = b$ и непрерывна в точке a, то композиция $(g \circ f)$ определена на E и так же непрерывна в точке a.

Глобальные свойства

Глобальные — свойства, связанные со всей областью определения функции.

Теорема 1.22 (Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении)**.** Если функция непрерывная на отрезке принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке есть точка, в которой функция обращается в нуль.

В логической символике:

$$f \in [a, b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = 0.$$

1.3.2 Теорема Вейерштрасса о максимальном значении

Теорема 1.23 (Теорема Вейерштрасса о максимальном значении)**.** Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем. При этом на отрезке есть точка, где функция принимает максимальное значение и есть точка, где функция принимает минимальное значение.

1.4 Производная и дифференциал. Основные правила дифференцирования. Формула Тейлора. Исследование функций.

Определение 1.24. Функция $f : E \to \mathbb{R}$, называется дифференцируемой в точке $x \in E$, предельной для множества E, если

$$f(x + h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x; h), \alpha(x; h) = o(h), h \to 0, x + h \in E.$$

$\Delta x(h) = (x + h)$ — приращение аргумента. $\Delta f(x; h) = f(x + h) - f(x)$ — приращение функции.

Определение 1.25. Линейная по h функция $h \mapsto A(x) \cdot h$ — называется дифференциалом функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x \in E$ и обозначается $df(x)$.

Определение 1.26. $A(x) = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0,\, x+h, x \in E} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ — производная функции f в точке x.

1.4.1 Основные правила дифференцирования

Теорема 1.27. Если функции $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемы в точке $x \in X$, то

1. Их сумма дифференцируема в x, причем $(f + g)'(x) = (f' + g')(x)$.
2. Их произведение дифференцируемо в x, причем $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. Их отношение дифференцируемо в x, причем $\left(\dfrac{f}{g}(x)\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Теорема 1.28. Если функция $f : X \to Y$ — дифференцируема в точке $x \in X$, а функция $g : Y \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $y = f(x) \in Y$, тогда композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке x, причем $d(g \circ f) = dg(y) \circ df(x)$ дифференциалов.

Теорема 1.29. Производная $(g \circ f)'(x)$ композиции дифференцируемых функций равна произведению $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ производных этих функций в соответствующих точках.

1.4.2 Формула Тейлора

Определение 1.30. Алгебраический полином, заданный соотношением:

$$P_n(x, x_0) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется полиномом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 1.31. Величина $f(x) - P_n(x_0, x) = r_n(x_0, x)$ — уклонение полинома P_n от функции $f(x)$, называемое часто остатком или n-м остатоком или n-м остаточным членом формулы Тейлора.

Таким образом формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r(x, x_0)$$

Разложения некоторых функций

1. e^x:
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + r_n(x, 0)$$

2. $a^x, 0 < a, a \neq 1$:
$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \dots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + r_n(x, 0)$$

3. $sin(x)$:
$$sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_n(x, 0)$$

4. $cos(x)$:
$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + r_n(x, 0)$$

1.4.3 Исследование функций

Утверждение 1.32. Между характером монотонности дифференцируемой на интервале $E = (a, b)$ функции $f(x) : E \to \mathbb{R}$ и знаком (положительностью) ее производной f' на этом интервале имеется следующая взаимосвязь:

1. $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

2. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ не убывает $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

3. $f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv const \Rightarrow f'(x) = 0$

4. $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ не возрастает $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

5. $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

Утверждение 1.33 (Необходимые условия внутреннего экстремума)**.** Для того, чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, необходимо выполнение одного из двух условий: либо функция не дифференцируема в x_0, либо $f'(x_0) = 0$.

Утверждение 1.34 (Достаточные условия эксремума (в терминах первой производной))**.** Кратко (не очень строго), если при переходе через точку производная меняет знак, то экстремум есть, а если знак при этом не меняется, то экстремума нет.

Утверждение 1.35 (Достаточные условия экстремума (в терминах высших производных))**.** Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в x_0 производные до порядка n включительно ($n \geq 1$).

Если $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)} = 0$ и $f^{(n)} \neq 0$, то при n нечетном экстремума нет, а при четном экстремум есть, причем это строгий локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и строгий локальный максимум, если $f^{(n)}(x) < 0$.

1.5 Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл Римана. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования.

1.5.1 Неопределенный интеграл

Определение 1.36. Неопределенный интеграл для функции $f(x)$ — совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на (a, b), а $F(x)$ — первообразная данной функции, т.е. $F'(x) = f(x), a < x < b$, тогда

$$\int f(x)dx = F(x) + C, a < x < b.$$

C — произвольная постоянная.

1.5.2 Определенный интеграл Римана

Определение 1.37. Разбиением P отрезка $[a, b], a < b$ называется конечная система точек $x_0, x_1, \ldots x_n$ этого отрезка, такая что $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Отрезки $[x_{i-1}, x_i], (i = 1, \ldots, n)$ называются отрезками разбиения P.

Максимум $\lambda(P)$ из длин отрезков разбиения называется параметром разбиения P.

Определение 1.38. Говорят, что имеется разбиение с отмеченными точками (P, ξ) отрезка $[a, b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a, b]$ и в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], (i = 1, \ldots, n)$.

Набор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обозначается одной буквой ξ.

Определение 1.39. Если функция определена на отрезке $[a, b]$, а (P, ξ) — разбиение с отмеченными точками этого отрезка, то сумма

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Определение 1.40 (Определенный интеграл Римана).

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

1.5.3 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1.41. Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, с конечным числом точек разрыва, то $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F : [a,b]$ — любая из первообразных функции f на $[a,b]$.

1.5.4 Методы интегрирования

Интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

Доказательство вытекает из формулы дифференцирования произведения.

1.5.5 Замена переменной в интеграле

Теорема 1.42. Если $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ — непрерывно дифференцируемое отображение (т.е. имеет непрерывную производную) отрезка $\alpha < t < \beta$ в отрезок $a < x < b$ такое, что $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то при любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ функция $f(\phi(t))\varphi'(t)$ — непрерывна на отрезке и справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

1.6 Функции многих переменных. Их предел и непрерывность.

Определение 1.43. Условимся через $\mathbb{R}^m$ обозначать множество всех упорядоченных наборов $(x^1, \ldots, x^m)$ состоящих из m действительных чисел $x^i \in \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, m)$. Каждый набор обозначается буквой x и называется точкой множества R^m.

Расстояние между точками x_1 и x_2:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_1^i - x_2^i)^2}$$

Функция $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ обладает свойствами:

1. $d(x_1, x_2) \geq 0$;

2. $d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$;

3. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$;

4. $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Определение 1.44. d — метрика или расстояние в X.

1.6.1 Предел

Определение 1.45. Совокупность $\mathcal{B}$ множества $\mathcal{B} \subset X$ множества X будем называть базой в множестве X, если выполнены два условия:

1. $\forall B \in \mathcal{B}(B \neq \varnothing)$

2. $\forall B_1 \in \mathcal{B}, \forall B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B \in \mathcal{B} : B \subset B_1 \cup B_2$.

Проще говоря, элементы совокупности $\mathcal{B}$ — непустые множества и в пересечении любых двух из них содержится элемент из той же совокупности.

Определение 1.46. Точка $A \in \mathbb{R}^m$ называется пределом отображения $f : X \to \mathbb{R}^m$ по базе $\mathcal{B}$ в X, если для любой окрестности $V(A)$ этой точки, найдется элемент $B \in \mathcal{B}$, образ которого $f(B)$ содержится в $V(A)$.

$$(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A) \Leftrightarrow \forall V(A), \exists B \in \mathcal{B} : (f(B) \subset V(A).$$

Или в более привычном виде:

$$(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists B \in \mathcal{B}, \forall x \in B : d(f(x), A) < \varepsilon.$$

1.6.2 Непрерывность

Пусть E — множество в пространстве R^m и $f : E \to R^n$.

Определение 1.47. Функция $f : E \to R^n$ называется непрерывной в точке $a \in E$, если для любой окрестности $V(f(a)) \in R^n$ найдется такая окрестность $U(a) \in E$, что ее образ $f(U(a)) \subset V(f(a))$.

Или тоже самое:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

1.7 Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Дифференциал и частные производные. Формула Тейлора. Экстремумы функций многих переменных.

1.7.1 Дифференцируемость и дифференциал функции в точке

Определение 1.48. Функция $f : E \to \mathbb{R}^n$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, называется дифференцируемой в точке $x \in E$, предельной для множества E, если

$$f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x,h),$$

где $L(x) : R^m \to R^n$ — линейная относительно h функция, $\alpha(x,h) = o(h)$, при $h \to 0$, $x + h \in E$.

Определение 1.49. Линейная функция $L(x) : R^m \to R^n$ называется дифференциалом функции $f : E \to \mathbb{R}^n$ в точке $x \in E$.

1.7.2 Частная производная

Определение 1.50. Предел

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h^i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)}{h^i}$$

называется частной производной функции f в точке $x = (x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_i.

Утверждение 1.51. Если функция $f : E \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то в этой точке функция имеет частные производные по каждой переменной и дифференциал этой функции однозначно определяется ими в виде:

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}h^m$$

1.7.3 Формула Тейлора

Теорема 1.52. Если функция $f : U(x) \to \mathbb{R}$ определена и принадлежит к классу $C^{(n)}$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, тогда имеет место равенство:

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m) - f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}(h_1\partial_1 + \dots + h_m\partial_m)^k f(x) + r_{n-1}(x,h),$$

где

$$r_{n-1}(x,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h_1\partial_1 + \dots + h_m\partial_m)^n f(x+th)dt$$

— интегральная форма остаточного члена.

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_{n-1}(x,h) = \frac{1}{n!}(h_1\partial_1 + \dots + h_m\partial_m)^n f(x+\theta h),\ 0 < \theta < 1$$

1.7.4 Экстремумы функций многих переменных

Определение 1.53. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ имеет локальный максимум (минимум) во внутренней точке x_0 множества E, если существует окрестность $U(x_0)$, такая что $f(x) \leq f(x_0)\,(f(x) \geq f(x_0))$, $\forall x \in U(x_0)$.

Теорема 1.54 (Необходимое условие локального экстремума)**.** Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U(x_0) \in \mathbb{R}^m$ точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ имеет в точке x_0 частные производные по каждой переменной $x_1, \dots, x_m$.

Для того, чтобы функция f имела локальный экстремум в x_0 необходимо, чтобы в этой точке были выполнены равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0.$$

Определение 1.55. Точка x_0 называется критической точкой отображения $f : U(x_0) \to \mathbb{R}^n$, если ранк матрицы Якоби меньше, чем $min(n, m)$, т.е. меньше, чем максимально возможный.

Теорема 1.56. Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^2(U(x_0), \mathbb{R})$, определенная в окрестностях точки x_0, и пусть x_0 — критическая точка этой функции f.

Если в точке x_0 квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{dx^i dx^j}(x_0) h^i h^j \equiv \partial_{i,j} f(x_0) h^i h^j$$

1. Знакоопределена, то в x_0 функция имеет локальный экстремум. Локальный минимум, если квадратичная форма положительно определена. Локальным максимумом, если квадратичная форма отрицательно определена.

2. Может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 функция не имеет экстремума.

1.8 Теорема о неявной функции. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

1.8.1 Теорема о неявной функции

Теорема 1.57 (Простейший вариант)**.** Если функция $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности точки $U(x_0, y_0)$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, такова что

1. $F(x, y) \in C^p(U, \mathbb{R}), \quad p \geq 1,$

2. $F(x, y) = 0,$

3. $F'(x, y) \neq 0,$

то существует двумерный промежуток $I = I_x \times I_y$, где $I_x = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \alpha\}$, $I_y = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \beta\}$, являющийся окрестностью точки (x_0, y_0) содержащейся в U, и такая функция $f \in C^p(I_x, I_y)$, что для любой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),$$

причем производная функции $y = f(x)$ в точках $x \in I_x$ может быть вычислена по формуле:

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F_x(x, f(x))].$$

1.8.2 Условный экстремум

Теорема 1.58. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}$ и $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$. Пусть S — гладкая поверхность в D.

Для того, чтобы точка $x_0 \in D$, некритическая для функции f была точкой локального экстремума функции f_S, необходимо выполнение условия:

$$TS_{x_0} \subset TN_{x_0},$$

где TS_{x_0} — пространство, касательное к поверхности S в точке x_0, а TN_{x_0} — пространство касательное к поверхности $N = \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}$ уровня функции f, которому принадлежит x_0.

1.8.3 Метод множителей Лагранжа

Для нахождения условного экстремума функции можно применять метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа выглядит следующим образом:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),$$

где $f(x)$ — искомая функция, $\varphi_i(x), i = 1, \ldots, m$ — ограничения, а $\lambda_i, i = 1, \ldots, m$ — множители (коэффициенты) Лагранжа.

Алгоритм отыскания условного экстремума методом Лагранжа (необходимое условие):

1. Составить функцию (многочлен) Лагранжа.
2. Приравнять ее частные производные по x_i и λ_i к нули и составить систему из $n + m$ уравнений, где n — размерность функции f, а m — число ограничений.
3. Найти решение системы, таким образом получаться точки «подозреваемые» на экстремум.

Достаточное условие: Если квадратичная форма $d^2L(x_0)$ (полная производная функции Лагранжа, т.е. попарная сумма частных производных по x_i, x_j) в «подозрительной» точке x_0 знакоопределена, то в x_0 — условный экстремум. Для положительно отрицательно определенной — максимум, для положительно определенной — минимум.

1.9 Кратные интегралы. Общие свойства интеграла. Теорема Фубини. Замена переменных в кратном интеграле.

1.9.1 Кратные интегралы. Кратный интеграл Римана.

Определение 1.59. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x < b_i, i = 1, \ldots n\}$ — промежуток или координатный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.60. Промежутку I ставится в соответствие число $|I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, называемое объемом или мерой промежутка.

Пусть задан промежуток I. Разбиения координатных отрезков $[a^i, b^i]$ индуцируют разбиение промежутка I на более мелкие промежутки.

Определение 1.61. Описанное представление промежутка в виде объединения более мелких промежутков будем называть разбиением промежутка I и обозначать P.

Определение 1.62. Описанное представление промежутка в виде объединения более мелких промежутков будем называть разбиением промежутка I и обозначать P.

Определение 1.63. Величина $\lambda(P) = \max 1 \leq j \leq kd(P)$ (максимальный из диаметров разбиение) называется параметром разбиения P.

Определение разбиения с отмеченными точками аналогично одномерному случаю.

Пусть $I \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция на промежутке I, а $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ — разбиение с отмеченными точками $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$.

Определение 1.64. Сумма

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)|I_i|$$

называется интегральной суммой Римана функции f по разбиению (P, ξ) с отмеченными точками промежутка I.

Определение 1.65. Величина

$$\int\limits_I f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)|I_i| = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi),$$

если указанный предел существует, называется интегралом (Римана) от функции f, на промежутке I.

1.9.2 Общие свойства интеграла

1. Линейность
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \int\limits_G \lambda f(x) + \mu g(x) dX = \lambda \int\limits_G f(x)dX + \mu \int\limits_G g(x)dX$$

2. Аддитивность по множеству интегрирования. Пусть множества G_1, G_2 — измеримы, причем $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 \cup G_2 = G$, тогда
$$\int\limits_G f(x)dX = \int\limits_{G_1} f(x)dX + \int\limits_{G_2} f(x)dX.$$

3. Пусть f, g интегрируемы на G, причем $\forall X \in G : f(x) \leq g(x)$, тогда
$$\int\limits_G f(x)dX \leq \int\limits_G g(x)dX.$$

4. Интегральное неравенство треугольника
$$\Big|\int\limits_G f(x)dX\Big| \leq \int\limits_G |f(x)|dX$$

5. Интегральная теорема о среднем Пусть G — компакт, $f(x)$ — непрерывна и интегрируема на G, тогда
$$\exists Y \in G : \int\limits_G f(x)dX = f(Y)\mu(G).$$
6. Постоянная функция $f(x) = c$ интегрируема на любом измеримом множестве G, причем
$$\int\limits_G f(x)dX = c\mu(G).$$

1.9.3 Теорема Фубини

Теорема 1.66. Пусть $X \times Y$ промежуток в $\mathbb{R}^{m+n}$, являющийся прямым произведением $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ тогда, если функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема на $X \times Y$, то интегралы
$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy = \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)\,dx$$
существуют одновременно и равны между собой.

1.9.4 Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 1.67. Пусть $D_x \subset \mathbb{R}^n$, f — интегрируемая на D_x функция, а $\varphi : D_t \to Dx$ — отображение t в $\varphi(t)$ множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на D_x, тогда
$$\int\limits_{D_x} f(x)dx = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t))|det\,\varphi'(t)|dt.$$

1.10 Криволинейные и поверхностные интегралы. Интегральные формулы Грина, Остроградского-Гаусса, Стокса.

1.10.1 Криволинейный интеграл первого рода

Определение 1.68. Пусть в трехмерном пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z) задана непрерывная кусочно гладкая кривая Γ, $x = \phi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s), (0 \leq s \leq \Lambda)$, где параметр s — длина дуги. Функции ϕ, ψ, χ — непрерывны на $[0, \Lambda]$ и этот отрезок можно разбить на конечное число частей $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \Lambda$, так что на каждом частичном отрезке $[s_i, s_{i+1}]$ функция ϕ, ψ, χ имеют непрерывные производные удовлетворяющие условию:
$$\phi'(s)^2 + \psi'(s)^2 + \chi'(s)^2 = 1.$$
Кривая Γ соответственно делится на конечное число гладких кусков $\Gamma = \sum\limits_1^N \Gamma_i$.

Пусть на Γ задана некоторая функция $F(x, y, z)$ непрерывная на каждом гладком куске Γ_i. Т.е. если F имеет разрывы то только в s_j и только первого рода. Выражение
$$\int\limits_\Gamma F(x,y,z)\,ds = \int\limits_0^\Lambda F(\phi(s), \psi(s), \chi(s))\,ds.$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой Γ.

1.10.2 Криволинейный интеграл второго рода

Пусть в трехмерном пространстве E, где определена прямоугольная система координат (x, y, z) задана ориентированная непрерывная кусочно гладкая кривая Γ, с начальной точкой A_0 и конечной точкой A_1, если кривая замкнута, то A_1 совпадает с A_0. Пусть

$$x = \phi(s),\ y = \psi(s),\ z = \chi(s), (0 \leq s \leq \Lambda),$$

где параметр s — длина дуги. При этом значению $s = 0$ соответствует точка A_0, а значению $s = \Lambda$ точка A_1 и возрастанию s соответствует ориентация Γ.

В каждой внутренней точке определен вектор τ, касательный к Γ (в направлении возрастанию s).

Пусть задан вектор

$$a = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k,$$

где P, Q, R — непрерывные функции на Γ.

Криволинейным интегралом от вектора a вдоль ориентированной кривой Γ называется величина:

$$\int\limits_{\Gamma} a\, ds = \int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{\Gamma} a\tau ds = \int\limits_{0}^{\Lambda} a\tau ds.$$

1.10.3 Поверхностный интеграл

Определение 1.69. Пусть гладкая поверхность S определяется уравнением

$$r(u, v) = \varphi i + \psi j + \chi k, (u, v) \in \Omega$$

Пусть на S задана непрерывная функция $F(x, y, z)$.

Интегралом функции F по поверхности S называется выражение

$$\int\limits_{S} F\, ds = \int\limits_{\Omega} F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))|\dot{r_u} \times \dot{r_v}|\, du\, dv.$$

1.10.4 Формула Грина

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

1.10.5 Формула Остроградского-Гаусса

Определение 1.70. Интеграл от дивергенции векторного поля F распространенный по некоторому объему V равен потоку вектора через поверхность S, ограничивающую данный объем:

$$\iiint\limits_{v} divF\, dV = \oiint\limits_{S} Fn\, ds$$

1.10.6 Формула Стокса

Определение 1.71. Поток вектора $rot\, a$ через ориентированную поверхность S равен циркуляции a по контору Γ этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации S:

$$\iint\limits_S (n rot\, a)\, ds = \int\limits_\Gamma a\, dl$$

1.11 Числовые и функциональные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости. Ряд Тейлора.

1.11.1 Числовой ряд

Определение 1.72. Выражение $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ и обычно называют рядом или бесконечным рядом.

Определение 1.73. Сумму $s_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_i$ называют частичной суммой ряда.

Определение 1.74. Если последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда сходится то ряд называется сходящимся. Если последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела, то ряд называют расходящимся.

Определение 1.75. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ последовательности частичных сумм, если он существует, называют суммой ряда.

1.11.2 Абсолютная и условная сходимость

Определение 1.76. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_i|$.

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится, т.к.

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Определение 1.77. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ называется условно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_i|$ — расходится.

1.11.3 Признаки сходимости

1. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами. Ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, члены которого неотрицательные числа сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограниченна сверху.

2. Мажорантный признак Вейерштрасса. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_i$ — два ряда. Пусть существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ имеет место соотношение $|a_n| \leq b_n$. При этих условиях для абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_i$ сходился.

3. Признак Коши. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ — данный ряд и $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ Тогда справедливы следующие утверждения:

   (a) $\alpha < 1$ — ряд сходится абсолютно.

   (b) $\alpha > 1$ — ряд расходится.

4. Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ существует предел $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, тогда

   (a) $\alpha < 1$ — ряд сходится абсолютно.

   (b) $\alpha > 1$ — ряд расходится.

5. Признак Коши. Если $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

1.11.4 Функциональные ряды

Определение 1.78. Функциональный ряд — ряд, каждый членом которого, в отличие от числового ряда, является не число, а функция $u_k(x)$.

Определения аналогичные числовым рядам, сходимость — равномерная.
Несколько признаков сходимости функциональных рядов:

1. Критерий Коши. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$, найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что для $\forall m \geq n > N$, в любой точке $x \in E$ выполнено неравенство $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$.

2. Признак Вейерштрасса. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ таковы, что $|a_n(x)| \leq b_n(x)$ при любом $x \in E$, и при всех достаточно больших номерах N, то из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ на том же множестве E.

1.11.5 Ряд Тейлора

Определение 1.79. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a. Тогда ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Называется рядом Тейлора функции f в точке a.

1.12 Ряд и интеграл Фурье.

Определение 1.80. Векторы x, y линейного пространства наделенного скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ называются ортогональными относительно этого скалярного произведения, если $(x, y) = 0$.

Определение 1.81. Система векторов $\{x_k, k \in K\}$ называется ортогональной, если векторы системы соответствующие различным значениям k попарно ортогональны.

Определение 1.82. Система векторов $\{e_k, k \in K\}$ называется ортонормированной (или ортонормальной), если для любых индексов $i, j \in K$ выполняется отношение $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

1.12.1 Коэффициенты Фурье и ряд Фурье

Определение 1.83. Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированная, а $\{l_i\}$ — ортогональная система векторов в пространстве X со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Допустим $x = \sum\limits_i x_i l_i$. Коэффициенты x_i в таком разложении находятся непосредственно:

$$x_i = \frac{(x, l_i)}{(l_i, l_i)}$$

Определение 1.84. Числа $\left\{\dfrac{(x, l_i)}{(l_i, l_i)}\right\}$ называются коэффициентами Фурье вектора x в ортогональной система $\{l_i\}$.

Определение 1.85. Если X – линейное пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, а $l_1, \ldots, l_n, \ldots$ — ортогональная система ненулевых векторов в X, то любому вектору $x \in X$ можно поставить в соответствие ряд:

$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x, l_i)}{(l_i, l_i)} l_i.$$

Этот ряд называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе векторов $\{l_k\}$.

Определение 1.86. Если для функции f имеют смысл интегралы:

$$a_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, k = 0, 1, \ldots,$$

тогда ряд

$$f \sim \frac{a_0(f)}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье.

1.12.2 Интеграл Фурье

Определение 1.87.

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha t} \, d\alpha,$$

где

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} \, dt$$

— преобразование Фурье функции f называется интегралом Фурье.

2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

2.1 Матрицы. Операции над матрицами и их свойства. Определитель. Обратная матрица. Ранг матрицы.

2.1.1 Матрица

Определение 2.1. Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Или $A = (a_{ij}), i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$.

Числа a_{ij} составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

2.1.2 Операции над матрицами и их свойства

Линейные операции над матрицами

1. Сложение матриц. Определено только для матриц одинаковой размерности. Элементы матрицы суммы равны сумме элементов на соответствующих позициях матриц слагаемых.

2. Умножение матрицы на число. Каждый элемент матрицы умножается на это число.

Произведение матриц

Определение 2.2. Пусть даны матрицы $A = (a_{ij}$ размером $m \times p$ и $B = (b_{ij}$ размеров $p \times n$. Матрицу $C = c_{ij}$ размером $m \times n$ элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^{p} a_{ip} \cdot b_{pi}.$$

называют произведение матриц A и B и обозначают $C = AB$.

Свойства умножения матриц:

1. $A(BC) = (AB)C$ — ассоциативность.

2. $A(B + C) = AB + AC$ — дистрибутивность умножения.

3. $(A + B)C = AC + BC$ — дистрибутивность умножения.

4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

Транспонирование

При транспонировании строки матрицы A становятся столбцами.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Свойства операции транспонирования:

1. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
2. $(A + B)^T = (A^T + B^T)$.
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
4. $(A^T)^T = A$.

Если $A^T = A$ — матрица называется симметрической. Если $A^T = -A$ — матрица называется кососимметрической.

2.1.3 Определитель

Определение 2.3. Определитель квадратной матрицы A — это число $detA$, которое ставится в соответствие матрице и вычисляется по ее элементам согласно следующим правилам:

1. Определителем матрицы $A = (a_{11})$ порядка $n = 1$ называется единственный элемент этой матрицы: $det(a_{11}) = a_{11}$.
2. $detA = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}M_{1i}$, для матрицы порядка $n > 1$, где M_{1i} — определитель матрицы M порядка $n - 1$, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и i-го столбца.

Определение 2.4. Дополнительным минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы a_{ij} называется определитель матрицы порядка $n - 1$, полученный из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение 2.5. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A Называется дополнительный минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{(i+j)}$.

Теорема 2.6. Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов произвольной строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}$$

— разложение по i-ой строке.

$$detA = \sum_{k=1}^{N} a_{kj}(-1)^{k+j}M_{kj}$$

— разложение по j-му столбцу.

2.1.4 Обратная матрица

Определение 2.7. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Матрица удовлетворяющая вместе с заданной матрицей равенствам:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

называется обратной.

Матрицу A называют обратимой, если для нее существует обратная матрица, иначе матрицу называют необратимой.

Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то для нее не существует обратной.

Теорема 2.8 (О существовании и единственности обратной матрицы)**.** Квадратная матрица, определитель которой отличен о нуля имеет обратную и притом только одну, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^+,$$

где A^+ — транспонированная матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A.

2.1.5 Ранг матрицы

Определение 2.9. Рангом матрицы A называется максимальное число линейно независимых строк (столбцов).

Альтернативное определение:

Определение 2.10. Минором k-го порядка матрицы A называется определитель матрицы k-го порядка образованный элементами, стоящими на пересечении произвольных k строк и k столбцов матрицы A.

Определение 2.11. Базисным называется минор порядка r, такой что он отличен он нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю или их вообще не существует.

Определение 2.12. Рангом матрицы называется порядок базисного минора.

2.2 Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера и Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.

2.2.1 Система линейных алгебраических уравнений

Определение 2.13. Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

В матричной форме система записывается следующим образом:

$$Ax = b$$

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет не одного решения, то система называется несовместной.

Система называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

2.2.2 Метод Крамера

Рассмотрим случай, когда m число уравнений равно n числу неизвестных.

Теорема 2.14 (Правило Крамера)**.** Если определитель Δ матрицы системы из n уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученный из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободные членов.

2.2.3 Метод Гаусса

Теорема 2.15 (Теорема Кронекера-Капелли)**.** Система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы системы $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b).$$

Пусть дана система линейных уравнений $Ax = b$, для ее решения методом Гаусса нужно выполнить следующие действия:

1. Составить расширенную матрицу системы $A|b$.

2. Используя элементарные преобразования над строками матрицы $A|b$ привести ее к ступенчатому виду $(\tilde{A}|\tilde{b})$

3. Выяснить совместна система или нет. Если система не совместна, она не имеет решений, иначе процесс продолжается.

4. Для совместной системы привести матрицу $(\tilde{A}|\tilde{b})$ к упрощенному виду. Для этого при помощи элементарных преобразований над строками добиваемся того, чтобы в каждом столбце входящем в базисный минор все элементы были равны нулю, за исключением одного, равного единице.

5. По упрощенному виду разделяем переменные на базисные и свободные. Неизвестные, соответствующие столбцам входящим в базисный минор называются базисными. Остальные – свободные. Выражаем базисные переменные через свободные. (Последний пункт прямого хода метода Гаусса).

6. Если ранг матрицы системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, иначе система имеет бесконечно много решений. (Обратный ход метода Гаусса).

2.3 Собственные векторы и собственные значения матрицы. Спектр. Приведение матрицы к диагональному виду с помощью преобразований подобия.

2.3.1 Собственные векторы и собственные значения матрицы

Определение 2.16. Пусть A — числовая квадратная матрица n-го порядка. Матрица $A - \lambda E$ — называется характеристической для A, а ее определитель $\Delta_A(\lambda) = \Big| A - \lambda E \Big|$ — характеристическим многочленом матрицы A.

Определение 2.17. Пусть A квадратная матрица порядка n. Вектор x удовлетворяющий уравнению

$$Ax = \lambda x$$

называется собственным вектором матрицы A, а число λ собственным значением матрицы A, соответствующим собственному вектору x.

Теорема 2.18. Все корни характеристического многочлена и только они являются собственными значениями матрицы.

2.3.2 Спектр

Определение 2.19. Совокупность всех собственных значений матрицы (с учетом их кратности) называется спектром матрицы.

Определение 2.20. Спектр матрицы называется простым, если все собственные значения матрицы попарно различные.

2.3.3 Приведение матрицы к диагональному виду с помощью преобразований подобия

Определение 2.21. Квадратные матрицы A и B порядка n называют подобными, если существует такая невырожденная матрица $S(detS \neq 0)$, что выполняется

$$B = S^{-1}AS.$$

Преобразование матрицы A по формуле $S^{-1}AS$ называется преобразованием подобия, а матрица S называется преобразующей.

Диагональный вид матрицы: $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Теорема 2.22 (О приведении матрицы к диагональному виду)**.** Для того, чтобы квадратная матрица порядка n приводилась к диагональному виду $\Lambda = S^{-1}AS$ необходимо и достаточно, чтобы она имела n линейно независимых собственных векторов.

Алгоритм преобразования матрицы A к диагональному виду и нахождения преобразующей матрицы S:

1. Найти n линейно независимых собственных векторов $s_1, \dots, s_n$.

2. Из собственных векторов составить преобразующую матрицу $S = (s_1, \dots, s_n)$.

3. Из собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ составить матрицу $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ или использовать матрицу S: $\Lambda = S^{-1}AS$.

2.4 Линейное пространство. Размерность и базис линейного пространства. Замена базиса.

2.4.1 Линейное пространство

Определение 2.23. Линейным (векторным) пространством называется множество V, произвольных элементов, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножение вектора на число, так что выполняются следующие условия (аксиомы линейного пространства):

1. $u + v = v + u, \forall v, u \in V$.
2. $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall v, u, w \in V$.
3. $\exists 0 \in V : 0 + v = v + 0, \forall v \in V$.
4. $\exists -v : -v + v = v + -v = 0, \forall v \in V$.
5. $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u, \forall v, u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
6. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
7. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
8. $\exists 1 : 1v = v1 = v, \forall v \in V$.

2.4.2 Размерность и базис линейного пространства

Определение 2.24. Система из k векторов называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ не все равные нулю одновременно, что выполняется равенство:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0.$$

Определение 2.25. Линейно пространство называется n-мерным если в нем существует система из n линейно независимых векторов, а любая система из большего числа векторов — линейно зависима.

Определение 2.26. Число n — называется размерностью (числом измерений) линейного пространства V и обозначается $dimV$.

Определение 2.27. Базисом линейного пространства называется упорядоченная совокупность из n линейно независимых векторов (базисных векторов).

2.4.3 Замена базиса

Пусть заданы два базиса в линейном пространстве V: $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ — старый и $(e') = (e'_1, \dots, e'_n)$ — новый. Пусть известны разложения каждого нового базисного вектора по старому базису:

$$e'_i = s_{1i}e_1 + s_{2i}e_2 + \cdots + s_{ni}e_n.$$

Записывая по столбцам координаты векторов $(e'_1, \ldots, e'_n)$ составляем матрицу перехода S:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Что можно записать короче:

$$(e') = (e)S.$$

Пусть вектор v имеет координаты v в старом базисе и координаты v' в новом, т.е. $v = ev = e'v'$.

Тогда

$$v = Sv'$$

— формула связи координат вектора в старом и новом базисах. Координатный столбец вектора в старом базисе получается в результате умножения матрицы перехода на координатный столбец вектора в новом базисе.

2.5 Евклидово пространство. Процесс ортогонализации. Определитель Грамма.

2.5.1 Евклидово пространство

Определение 2.28. Вещественнозначное линейное пространство называется Евклидовым, если каждой паре элементов u, v поставлено в соответствие действительное число (u, v), называемое скалярным произведением, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(u, v) = (v, u)$.
2. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$.
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$.
4. $(v, v) > 0, \forall v \neq 0, (v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

2.5.2 Процесс ортогонализации

Определение 2.29. Два вектора u, v называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $(u, v) = 0$.

Определение 2.30. Система векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется ортогональной, если все ее вектора попарно ортогональны.

Определение 2.31. Система векторов называется ортонормированной, если все векторы попарно ортогональны и длина (норма) каждого вектора равно единице.

Дана линейно независимая система векторов $v_1, \ldots, v_k$. Требуется построить ортогональную систему систему $w_1, \ldots, w_k$ векторов того же пространства, чтобы совпадали линейные оболочки:

$$Lin(v_1, \ldots, v_k) = Lin(w_1, \ldots, w_k).$$

Процесс ортогонализации выполняется за k шагов:

1. Положить $w_1 = v_1$.
2. Найти $w_2 = v_2 - \alpha_{21} \cdot w_1, \alpha_{21} = \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)}$
3. ...

k. $w_k = v_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} w_i, \alpha_{ki} = \dfrac{(v_i, w_i)}{(w_i, w_i)}, i = 1, \ldots, k-1$

2.5.3 Определитель Грамма

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис Евклидова пространства.

$$(x, y) = x^T G(e_1, \ldots, e_n) y,$$

где G — матрица Грамма:

$$\begin{pmatrix} \langle e_1,\ e_1 \rangle & \langle e_1,\ e_2 \rangle & \ldots & \langle e_1,\ e_n \rangle \\ \langle e_2,\ e_1 \rangle & \langle e_2,\ e_2 \rangle & \ldots & \langle e_2,\ e_n \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle e_n,\ e_1 \rangle & \langle e_n,\ e_2 \rangle & \ldots & \langle e_n,\ e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Определение 2.32. Определитель матрицы G называется определителем Грамма.

Свойства определителя Грамма:

1. Система векторов $v_1, \ldots v_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель Грамма этой системы равен нулю.
2. Определитель Грамма не изменяется в процессе ортогонализации системы векторов.

2.6 Линейное отображение. Ядро и образ линейного отображения. Линейные преобразования (операторы). Приведение линейного преобразования к каноническому виду.

Определение 2.33. Пусть V и W — линейные пространства над одним и тем же числовым полем. Отображение $\mathcal{A} : V \to W$ называется линейным, если:

1. $\mathcal{A}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}(v_1) + \mathcal{A}(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.
2. $\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}(v), \forall v \in V$.

Определение 2.34. Ядром линейного отображения $\mathcal{A} : V \to W$ называется множество таких векторов $v \in V$, что $\mathcal{A}(v) = 0_w$. Т.е. множество векторов из V которые отображаются в нулевой вектор W:

$$Ker(\mathcal{A}) = \{v \in V : \mathcal{A}(v) = 0_w\}.$$

Определение 2.35. Образом линейного отображения $\mathcal{A} : V \to W$ называется множество образов $\mathcal{A}(v)$ всех векторов $v \in V$:

$$Im(\mathcal{A}) = \{w \in W : w = \mathcal{A}(v), \forall v \in V\}.$$

2.6.1 Линейные преобразования (операторы)

Определение 2.36. Линейным преобразованием (оператором) пространства V называют линейное отображение $\mathcal{A} : V \to V$ пространства V в себя.

2.6.2 Приведение линейного преобразования к каноническому виду

Определение 2.37. Квадратную матрицу r-го порядка вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

называют жордановой клеткой r-го порядка, соответствующей собственному значению λ. Все элементы главной диагонали равны λ, элементы над главной диагональю равны 1, все остальные элементы равны 0.

Определение 2.38. Говорят, что линейное преобразование $\mathcal{A} : V \to V$ n-мерного линейного пространства V приводится к каноническому виду, если существует базис, в котором матрица A преобразования имеет нормальную жорданову форму (т.е. является блочно-диагональной матрицей, на главной диагонали которой стоят жордановы клетки: $J_A = diag(J_{r_1}(\lambda_1), \ldots, J_{r_n}(\lambda_n))$

Теорема 2.39. Если все корни характеристического многочлена являются собственными значениями преобразования, то это преобразование приводится к каноническому виду.

Из этого следует, что любое линейное преобразование приводится к каноническому виду, а преобразование вещественного линейного пространства приводится к каноническому виду только когда все корни характеристического уравнения — вещественные.

2.7 Линейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

2.7.1 Линейные и квадратичные формы

Определение 2.40. Многочлен первой степени называется однородным, если $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Многочлен $p(x)$ будет однородным тогда и только тогда, когда отсутствует свободный член: $c_0 = 0$.

Определение 2.41. Многочлен второй степени называется однородным, если $p(\lambda x) = \lambda^2 p(x)$.

Должны отсутствовать линейные члены и свободный член.

Определение 2.42. Линейной формой переменных $x_1, \dots, x_n$ называется однородный многочлен первой степени:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

Определение 2.43. Квадратичной формой переменных $x_1, \dots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

коэффициенты которого обладают условием симметричности: $a_{ij} = aji$.

Говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид, если ее матрица диагональная. Другими словами, в квадратичной форме имеются только члены с квадратами переменных.

Теорема 2.44. Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду используется метод Лагранжа, основная идея которого — выделение полного квадрата.

2.7.2 Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы

Определение 2.45. Вещественная квадратичная форма $q(x) = x^T A x$ называется положительно (отрицательно) определенной, если $q(x) > 0 (q(x) < 0)$, для любых $x \neq 0$.

2.7.3 Критерий Сильвестра

Теорема 2.46. Для того, чтобы квадратичная форма $q(x) = x^T A x$ была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны.

Для отрицательной определенности необходимо и достаточно, чтобы знак угловых миноров чередовался, начиная с отрицательного $\Delta_1 < 0$.

2.8 Векторы, линейные операции над векторами. Базис. Скалярное и векторное, смешанное произведение векторов. Их свойства. Аффинная система координат. Координаты вектора и точки.

2.8.1 Векторы, линейные операции над векторами

Определение 2.47. Вектор — упорядоченная пара точек. Первая точка – начало, вторая — конец.

Определение 2.48. Длина вектора — расстояние между началом и концом.

Линейные операции над векторами: сложение векторов и умножение вектора на число. Свойства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. $\vec{a}+o=\vec{a}+o=\vec{a}$.

4. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

5. $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$.

6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

7. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

8. $1\vec{a}=\vec{a}$.

2.8.2 Базис

Определение 2.49. Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

Определение 2.50. Базисом на плоскости называются два любых неколлинеарных вектора $\vec{e_1},\vec{e_2}$ на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Определение 2.51. Базисом в пространстве называют три любых некомпланарных вектора $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ взятые в определенном порядке.

2.8.3 Скалярное и векторное, смешанное произведение векторов

Скалярное произведение

Определение 2.52. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Алгебраические свойства:

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b})$.

2. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$.

3. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$.

4. $(\vec{a},\vec{a})\geq 0,(\vec{a},\vec{a})=0\Rightarrow\vec{a}=0$.

Геометрические свойства:

1. $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

2. $\cos\phi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Выражение скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе через координаты векторов:

$$(\vec{a},\vec{b})=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b.$$

Векторное произведение

Определение 2.53. Вектор $\vec{c}$ называется векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$,

2. вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

3. векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$ или $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Алгебраические свойства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = [-\vec{b}, \vec{a}]$.

2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

3. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.

Геометрические свойства:

1. Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на множителях.

2. Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его множители коллинеарны.

Теорема 2.54 (Формула вычисления векторного произведения)**.** Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в правом ортонормированном базисе имеют координаты a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z соответственно, то векторное произведение ищется по формуле:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение

Определение 2.55. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $[\vec{b}, \vec{c}]$. Обозначается: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Геометрические свойства:

1. Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Произведение положительно, если тройка векторов — правая и отрицательно, если тройка векторов левая.

2. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарны.

Алгебраические свойства:

1. Смешанное произведение меняет знак при перестановке любых двух множителей.

2. Линейного по любому множителю.

2.8.4 Афинная система координат

Определение 2.56. Пусть в пространстве фиксирована точка O. Совокупность базиса и этой точки называется аффинной системой координат (декартовой).

2.8.5 Координаты вектора и точки

Определение 2.57. Координатами вектора в заданной системе координат называются разложение вектора по базису.

Определение 2.58. Координатами точки в заданной системе координат называются координаты радиус-вектора этой точки в заданном базисе.

2.9 Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Линии второго порядка.

2.9.1 Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости

Различные виды уравнений прямой на плоскости:

1. Общее уравнение прямой.

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

2. Параметрическое уравнение прямой.

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases} \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

3. Каноническое уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b} = 0.$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = 0.$$

5. Уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 0.$$

6. Уравнение с угловым коэффициентом.

$$y = kx + y_0.$$

2.9.2 Линии второго порядка

1. Уравнение эллипса.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
2. Уравнение мнимого эллипса.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
3. Уравнение мнимых пересекающихся прямых.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$
4. Уравнение гиперболы.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
5. Уравнение пересекающихся прямых.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$
6. Уравнение пораболы.
$$y^2 = px.$$
7. Уравнение пары параллельных прямых.
$$y^2 - b^2 = 0.$$
8. Уравнение пары мнимых параллельных прямых.
$$y^2 + b^2 = 0.$$
9. Уравнение пары совпадающих прямых.
$$y^2 = 0.$$

2.10 Прямая в пространстве. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Плоскость. Различные виды уравнений плоскости. Поверхности второго порядка.

2.10.1 Прямая в пространстве. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Некоторые виды уравнений прямой в пространстве:

1. Каноническое уравнение прямой.
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2. Параметрическое уравнение прямой.

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases}$$

где (a, b, c) — координаты вектора, коллинеарного прямой.

3. Каноническое уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

где (a, b, c) — координаты вектора, коллинеарного прямой.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

2.10.2 Плоскость. Различные виды уравнений плоскости

1. Каноническое уравнение плоскости.

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

2. Параметрическое уравнение плоскости.

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + a_2 t, \\ y = y_0 + b_1 t + b_2 t, \\ z = z_0 + c_1 t + c_2 t, \end{cases}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через точку и компланарной двум не неколлинеарным векторам.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}$$

5. Уравнение плоскости в отрезках.

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1, x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, z_1 \neq 0.$$

2.10.3 Поверхности второго порядка

1. Уравнение эллипсоида.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
2. Уравнение мнимого эллипсоида.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$
3. Уравнение мнимого конуса.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$
4. Уравнение однополосного гиперболоида.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
5. Уравнение двухполосного гиперболоида.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$
6. Уравнение конуса.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$
7. Уравнение эллиптического параболоида.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$
8. Уравнение гиперболического параболоида.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$
9. Уравнение эллиптического цилиндра.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
10. Уравнение мнимого эллиптического цилиндра.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
11. Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

12. Уравнение гиперболического цилиндра.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

13. Уравнение пары пересекающихся плоскостей.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

14. Уравнение параболического цилиндра.

$$y^2 = 2px.$$

15. Уравнение пары параллельных плоскостей.

$$y^2 - b^2 = 0.$$

16. Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей.

$$y^2 + b^2 = 0.$$

17. Уравнение пары совпадающих прямых.

$$y^2 = 0.$$

3. Дискретная математика

3.1 Понятие множества. Операции над множествами. Основные тождества алгебры множеств. Диаграммы Эйлера-Венна. Равномощность множеств. Счетные множества. Континуум.

3.1.1 Понятие множества

Определение 3.1. Под множеством S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое.

3.1.2 Операции над множествами

1. Объединение множеств.
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

2. Пересечение множеств.
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

3. Относительное дополнение.
$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

4. Симметрическая разность.
$$A \div B = A \backslash B \cup B \backslash A.$$

3.1.3 Основные тождества алгебры множеств

1. $A \cup B = B \cup A$.

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. $A \cup \varnothing = A$.

5. $A \cup \overline{A} = A$

6. $A \cup A = A$.

7. $A \cup U = U$.

8. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

9. $A \cup (A \cap B) = A$.

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cap U = U$.
5. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
6. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
7. $A \cap A = A$.
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. $A \cap (A \cup B) = A$.

Для наглядного представления отношений между подмножествами универсального множества используют диаграммы Эйлера-Венна.

3.1.4 Равномощность множеств

Определение 3.2. Множества A и B называются равномощными, если существует взаимнооднозначное соответствие $f : A \to B$.

3.1.5 Счетные множества

Определение 3.3. Счетное множество есть бесконечное множество элементы которого можно пронумеровать натуральными числами.

3.1.6 Континуум

Определение 3.4. Мощность множества действительный чисел.

3.2 Отношения, свойства отношений. Понятие функции. Понятие функции. Отношение эквивалентности. Разбиение множества на классы эквивалентности. Отношение порядка. Алгебраические операции.

3.2.1 Отношения, свойства отношений

Определение 3.5. Бинарным или двуместным отношением ρ называется множество упорядоченных пар $< x, y >$.

Свойства:

1. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
2. $(\rho_2 \circ \rho_1)^{-}1 = \rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1}$.

3.2.2 Понятие функции

Определение 3.6. Бинарное отношение $< x, y >$ называется функцией, если из $< x, y > \in f$ и $< x, z > \in f \Rightarrow y = z$.

3.2.3 Отношение эквивалентности

Определение 3.7. Отношение ρ на множестве X называется рефлексивным, если выполняется $x\rho x$.

Определение 3.8. Отношение ρ на множестве X называется симметричным, если для $\forall x, y \in X : x\rho y \Rightarrow y\rho x$.

Определение 3.9. Отношение ρ на множестве X называется транзитивным, если для $\forall x, y, z \in X : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

Определение 3.10. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называется отношением эквивалентности.

3.2.4 Разбиение множества на классы эквивалентности

Определение 3.11. Классом эквивалентности, порожденным элементом $x \in X$ называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$ для которых выполняется $x\rho y$:

$$[x] = \{y | y \in X, x\rho y\}.$$

3.2.5 Отношение порядка

Определение 3.12. Отношение ρ на множестве X называется антисимметричным, если из $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$.

Определение 3.13. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение на множестве X называется отношением частичного порядка на множестве X и обозначается $\preccurlyeq$.

3.2.6 Алгебраические операции

Определение 3.14. Пусть дано множество M. Говорят, что на множестве M задана алгебраическая операция, если всякой упорядоченной паре из этого множества по некоторому закону ставится в соответствие определенный элемент из множества M.

3.3 Высказывания. Операции над высказываниями и их свойства. Тождественно истинные формулы. Правильные рассуждения. Приведение формулы логики высказываний к конъюнктивной нормальной форме, дизъюнктивной нормальной форме.

3.3.1 Высказывания. Операции над высказываниями и их свойства

Определение 3.15. Под высказыванием принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

Операции над высказываниями:

1. Отрицание высказывания: $\neg P$.

2. Конъюнкция высказываний: $A\&B$.

3. Дизъюнкция высказываний: $A \wedge B$.

4. Импликация высказываний: $A \supset B (A \Rightarrow B)$.

5. Эквивалентность высказываний: $A \sim B$.

Свойства:

1. $A\&B \equiv B\&A$.

2. $A\&A \equiv A$.

3. $(A\&B)\&C = A\&(B\&C)$.

4. $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

5. $A \wedge A \equiv A$.

6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.

7. $A \wedge (B\&C) \equiv A \wedge B\&A \wedge C$.

8. $A\&(B \wedge C) \equiv A\&B \wedge A\&C$.

9. $A\&(A \wedge B) \equiv A$.

10. $A \wedge (A\&B) \equiv A$.

11. $\neg\neg A \equiv A$.

12. $\neg(A\&B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

13. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A\&\neg B$.

14. $A \equiv (A\&B) \wedge (A\&\neg B)$.

15. $A \equiv (A \wedge B)\&(A \wedge \neg B)$.

3.3.2 Тождественно-истинные формулы

Определение 3.16. Пусть формула A зависит от списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$. Формула A называется тождественно-истинной (или тавтологией) если она истина на любых оценках списка X.

3.3.3 Правильные рассуждения

Определение 3.17. Рассуждение называется правильным, когда из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. каждый раз когда посылки истины — заключение тоже истинно.

3.3.4 Приведение формулы логики высказываний к конъюнктивной нормальной форме, дизъюнктивной нормальной форме

Определение 3.18. Формулу называют элементарной конъюнкцией, если она является конъюнкцией (быть может одночленной) переменных и отрицаний переменных.

Определение 3.19. Говорят, что формула находится в ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме), если она является дизъюнкцией (быть может одночленной) элементарных конъюнкций.

1. $A \sim B \equiv (A\&B) \wedge (\neg A\&\neg B)$.

2. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \wedge B$.

Теорема 3.20. Для любой формулы A можно найти такую формулу B, находящуюся в ДНФ, что $A \equiv B$.

1. Избавляемся от $\sim, \Rightarrow$.

2. Отрицания должны находится только перед переменными.

Определение 3.21. Формулу называют элементарной дизъюнкцией, если она является дизъюнкцией (быть может одночленной) переменных и отрицаний переменных.

Определение 3.22. Говорят, что формула находится в КНФ (конъюнктивно нормальной форме), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Теорема 3.23. Для любой формулы A можно найти такую формулу B, находящуюся к КНФ, что $A \equiv B$.

3.4 Булевы функции. Полные системы булевых функций.

3.4.1 Булевы функции

Определение 3.24. Булевой функцией $f(X_1, \ldots, X_n)$ называется произвольная n-местная функция из множества $\{0, 1\}$ во множество $\{0, 1\}$.

3.4.2 Полные системы булевых функций

Определение 3.25. Система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$ называется полной, если любая булева функция может быть выражена через функции $f_1, \ldots, f_n$ с помощью суперпозиций.

Утверждение 3.26. Пусть система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — полная и любая из функций f_i может быть выражена с помощью суперпозиций через функции $g_1, \ldots, g_m$, тогда система $\{g_1, \ldots, g_m\}$ — тоже полная.

3.5 Аксиоматические теории. Понятие вывода, теоремы. Исчисление высказываний как формальная аксиоматическая теория. Полнота и непротиворечивость исчисления высказываний. Независимость аксиом.

3.5.1 Аксиоматические теории. Понятие вывода, теоремы

Определение 3.27. Формальная аксиоматическая теория T считается определенной, если

1. задано некоторое счетное множество символов — символов теории T,
2. имеется подмножество выражений теории T, называемых формулами теории T,
3. выделено некоторое подмножество формул, называемых аксиомами,
4. имеется конечное множество $R_1, \ldots, R_n$ отношений между формулами, называемые правилами вывода.

Определение 3.28. Выводом теории T называется последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$ в которой для любого i формула A_i либо является аксиомой, либо является непосредственным следствием каких-либо предыдущих формул.

Определение 3.29. Формула A называется теоремой теории T, если в ней существует вывод, в котором последней формулой является A.

3.5.2 Исчисление высказываний как формальная аксиоматическая теория

1. Символы исчисления высказываний: $\neg, \supset, (,)$ и буквы X_i с целыми положительными числами в качестве индексов.
2. Формулы исчисления высказываний:
   (a) все переменные X_i — формулы,
   (b) если A и B — формулы, то $\neg A$, $A \supset B$ — тоже формулы.
3. Аксиомы исчисления высказываний:
   (a) $A \supset (B \supset A)$.
   (b) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.
   (c) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.
4. Единственное правило вывода: если A и $A \supset B$, то B.

3.5.3 Полнота и непротиворечивость исчисления высказываний. Независимость аксиом

Определение 3.30. Формальную аксиоматическую теорию называют непротиворечивой, если не существует такой формулы A, что одновременно выводимы формулы A и $\neg A$.

Теорема 3.31. Исчисление высказываний непротиворечиво.

Определение 3.32. Формальную аксиоматическую теорию называют полной в узком смысле, если добавление любой невыводимой формулы в качестве схемы аксиом приводит к противоречивой теории.

Теорема 3.33. Исчисление высказываний полно в узком смысле.

Определение 3.34. Если ни одну из аксиом нельзя вывести из других, применяя правила вывода данной системы, то система аксиом называется независимой.

Теорема 3.35. Система аксиом исчисления высказываний независима.

3.6 Логика и исчисление предикатов. Кванторы, формулы, интерпретации. Выполнимость, общезначимость формулы.

Определение 3.36. Предикатом $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества M, а сама она принимает два значения: истинна или ложь.

Определение 3.37 (Квантор общности)**.** Пусть $P(x)$ — некоторый предикат, принимающий значения И или Л для каждого элемента $x \in M$. Тогда под выражением $(\forall x)P(x)$ будем подразумевать высказывание истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого $x \in M$ и ложное в противном случае. Символ $\forall x$ называется квантором общности.

Определение 3.38 (Квантор существования)**.** Пусть $P(x)$ — некоторый предикат. Тогда под выражением $(\exists x)P(x)$ будем понимать высказывание истинное, когда существует элемент множества $x \in M$ для которого предикат $P(x)$ истинно, и ложное в противном случае. Символ $\exists x$ называется квантором существования.

Алфавит логики предикатов содержит следующие символы:

1. Символы предметных переменных: $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.
2. Символы предикатов: $A_1^{(t)}, \ldots, A_k^{(t)}, \ldots$ — символы предикатов.
3. Логические символы: $\neg, \&, \wedge, \supset, \sim$.
4. Символы кванторов: $\forall, \exists$.
5. Скобки и запятую: «(», «)», «,».

Слово в алфавите логики предикатов называется формулой, если оно удовлетворяет следующему определению:

1. Если $A_l^{(t)}$ — символ предиката, а $x_1, \ldots, x_n$ — символы предметных переменных, то $A(x_1, \ldots, x_n)$ — формула. Такая формула называется атомарной. Все переменные атомарной формулы свободные.
2. Пусть A — формула, тогда $\neg A$ — тоже формула. Свободные и связанные переменные формулы $\neg A$ — это свободные и связанные переменные формулы A.

3. Пусть A и B — формулы, причем нет таких переменных, которые были бы связаны в одной формуле и свободны в другой, тогда

$$(A \wedge B), (A \& B), (A \supset B), (A \sim B)$$

— тоже формулы, в которых свободные переменные A и B остаются свободными, а связанные — связанными.

4. Пусть A — формула, содержащая свободную переменную x, тогда $(\forall x)A, (\exists x)B$ — тоже формулы. Переменная x в них связана.

Под интерпретацией понимают систему $M =< M, F >$, состоящую из непустого множества M и соответствия f, сопоставляющую каждому предикатному символу $A^{(t)_l}$ определенный t-местный предикат.

Формула в интерпретации определяется аналогично описанию выше.

Определение 3.39. Говорят, что формула A выполнима в данной интерпретации, если существует набор $< a_1, \ldots, a_n >, a_i \in M$, значений свободных переменных $x_1, \ldots, x_n$ формулы A такой, что $A|_{<a_1,\ldots,a_n>} =$ И.

Определение 3.40. Говорят, что формула A общезначима в логике предикатов, если она истина в каждой интерпретации.

3.7 Алгебраические структуры: полугруппы, моноиды, группы, кольца, поля.

3.7.1 Полугруппы, моноиды

Определение 3.41. Множество П с заданной на нем бинарной ассоциативной операцией называется полугруппой.

Определение 3.42. Моноидом называется полугруппа с единицей.

3.7.2 Группа

Определение 3.43. Непустое множество G с одной бинарной алгебраической операцией называется группой если выполняются следующие условия:

1. операция ассоциативна,

2. существует единичный элемент: $\forall a \in G : ea = ae = a$,

3. у каждого элемента существует обратный: $\forall a \in G, \exists a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Другими словами группой называется моноид, все элементы которого обратимы.

Если операция в G коммутативна, то группа называется коммутативной, или абелевой.

3.7.3 Кольцо

Определение 3.44. Непустое множество K, на котором заданы две бинарные операции — сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$, удовлетворяющее условиям:

1. Относительно операции сложения K — коммутативная группа.
2. Относительно операции умножения K — полугруппа.
3. Операции сложения и умножения связаны законом дистрибутивности: $(a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in K$.

Если относительно операции умножения существует единичный элемент, который принято обозначать 1, то говорят, что K — кольцо с единицей.

3.7.4 Поле

Пусть K — кольцо с единицей. Элемент a — называется обратимым, если существует такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Определение 3.45. Коммутативное кольцо P с единицей $1 \neq 0$, в котором каждый ненулевой элемент обратим называется полем.

3.8 Комбинаторика. Правила суммы, произведения. Сочетания и размещения. Бином Ньютона, полиномиальная формула.

3.8.1 Правила суммы, произведения

Пусть X — конечное множество из n элементов. Тогда говорят, что объект x из X может быть выбран n способами, и пишут $|X| = n$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — попарно непересекающиеся множества, т.е. $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j$. Тогда выполняется равенство:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} X_i| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

— правило суммы.

Для $k = 2$ формулируется следующим образом: если объект x может быть выбран n способами, а объект y m способами, то выбор «либо x, либо y» может быть осуществлен $n + m$ способами.

Правило произведение: если объект x может быть выбран n способами, а объект y m способами, то выбор упорядоченной пары $< x, y >$ может быть осуществлен nm способами.

3.8.2 Сочетания и размещения

Набор элементов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ из множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называется выборкой объема r из n элементов, или, иначе, (n, r)-выборкой.

Выборка называется упорядоченной, если порядок следования элементов в ней задан.

Определение 3.46. Если элементы упорядоченной (n, r) выборки могут повторятся, то она называется (n, r)-размещением с повторениями. Обозначается: $\overline{A_n^r}$.

Определение 3.47. Если элементы упорядоченной (n, r) выборки попарно различны, то она называется (n, r)-размещением. Обозначается: A_n^r.

Определение 3.48. Если элементы неупорядоченной (n, r)-выборки повторяются, то она называется (n, r)-сочетанием с повторениями. Обозначается: $\overline{C_n^r}$

Определение 3.49. Если элементы неупорядоченной (n, r)-выборки не повторяются, то она называется (n, r)-сочетанием. Обозначается: C_n^k

Утверждение 3.50.

$$\overline{A_n^r} = n^r.$$

Утверждение 3.51.

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Утверждение 3.52.

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

Утверждение 3.53.

$$\overline{C_n^r} = C_{n+r+1}^r.$$

3.8.3 Бином Ньютона. Полиномиальная формула

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Полиномиальная формула:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\alpha_i > 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k},$$

где суммирование производится по всем решениям уравнения $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$ в целых числах.

3.9 Основные понятия теории графов: смежность, инцидентность, маршруты, циклы, связность. Задачи поиска маршрута в графе. Алгоритм Тэрри, алгоритм фронта волны, алгоритм Форда-Беллмана. Транспортные сети. Поток в транспортной сети. Алгоритм построение полного потока.

В это запросе многое описано тезисно.

Определение 3.54. Граф — упорядоченная пара $G = (V, E)$.

Если граф ориентированный, E — множество упорядоченных пар.

Определение 3.55. Если вершина v является концом (началом или концом) ребра (дуги) x, то говорят, что v и x инцидентны.

Определение 3.56. Вершины графа называются смежными, если они имеют общее ребро. Ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Определение 3.57. Последовательность $v_1x_1v_2x_2v_4 \dots v_n$ — называется маршрутом, соединяющим вершины v_1 и v_k.

Определение 3.58. Циклом называется замкнутый маршрут (путь) в котором все ребра попарно различны.

Определение 3.59. Говорят, что вершина w графа G достижима из вершины v, если либо $w = v$, либо существует путь из v в w.

Определение 3.60. Граф называется связными, если для любых двух его вершин u, v существует путь из u в v.

Алгоритм Тэрри — «ручной» аналог DFS'а. Возвращаемся из рекурсии, когда обошли все доступные вершины.

Алгоритм фронта волны — BFS'а.

Алгоритм Беллмана-Форда: поддерживаем $d[k]$ — расстояние до k-ой вершины. Делаем $i-1$ итерацию, перебираем все ребра, релаксируем.

3.9.1 Транспортные сети. Поток в транспортной сети. Алгоритм построение полного потока

Определение 3.61. Транспортной сетью называется орграф $D = (V, X)$, с множеством вершин $V = \{v_1, \dots\ v_n\}$ для которого выполняются условия:

1. Существует только одна вершина v_1 — исток, в нее не входят ребра.
2. Существует только одна вершина v_1 — сток, из нее не выходят ребра.
3. Каждому ребру поставлено в соответствие число $c_i \geq 0$ — пропускная способность дуги.

Определение 3.62. Функция $\varphi(x)$ определенная на множестве дуг X транспортной сети D и принимающая целочисленные значения, называется потоком в транспортной сети D, если:

1. для любой дуги $x \in X : 0 \leq \varphi(x) \leq c(x)$,
2. для любой промежуточной вершины v, сумма потоков по дугам, заходящим в v, равно сумме потоков по дугам, исходящим из v.

Определение 3.63. Дуга $x \in X$ называется насыщенной, если поток по ней равен ее пропускной способности.

Определение 3.64. Поток называется полным, если любой путь из v_1 в v_n в D содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

Определение 3.65. Поток называется максимальный, если его величина принимает максимальное значение по сравнению с другими допустимыми полными потоками.

Алгоритм поиска максимального потока (Форда-Фалкерсона): Основная идея. На каждой итерации ищем путь из источника в сток, находим минимум пропускных способностей по всем ребрам, пускаем по пути поток равной этой величине, обновляем остаточную сеть.

4. Теория вероятностей и математическая статистика

4.1 Основные понятие теории классической теории вероятностей. Определение вероятностного пространства, понятие случайного события, частоты, аксиоматическое определение вероятности случайного события.

Определение 4.1. Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, где

1. Ω — произвольное множество элементарных событий (исходов).
2. $\mathcal{A}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, называемых случайными событиями.
3. P — вероятностная мера, или вероятность, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 4.2. Случайное событие — подмножество множества исходов случайного эксперимента.

Определение 4.3. Пусть при n кратном повторении опыта G, событие A произошло m_A раз. Частотой $W_n(A)$ события A называется отношение $W_n(A) = m_A/n$.

Определение 4.4. Класс $\mathcal{F}$ подмножеств пространства G, включающий в себя результаты сложения и умножения счетного числа своих элементов называется σ-алгеброй. Элементы σ-алгебры называются случайными событиями.

Определение 4.5. Вероятностью события A называется числовая функция $\mathsf{P}(A)$, определенная на σ-алгебре F и удовлетворяющая четырем аксиомам:

1. Неотрицательность вероятности. Каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставится в соответствие неотрицательное число $\mathsf{P}(A)$, т.е. $\mathsf{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$.
2. Нормировка вероятности. Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $\mathsf{P}(G) = 1$.
3. Конечная аддитивность вероятности. Для любых несовместных событий A и B справедливо $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$.
4. Непрерывность вероятности. Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \in F$, такой, что $A_1 A_2 A_3 \dots A_n \dots = \varnothing$, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

4.2 Основные формулы вычисления вероятности случайного события.

4.2.1 Формула умножения вероятностей

Теорема 4.6. Вероятность одновременного появления событий $A_1, \dots, A_n$ выражается формулой умножения вероятностей:

$$\mathsf{P}(A_1 \dots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2|A_1) \dots \mathsf{P}(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

4.2.2 Формула сложения вероятностей

Теорема 4.7. Вероятность появления в опыте хотя бы одного из событий $A_1, \dots A_n$ выражается формулой сложения вероятностей:

$$\mathsf{P}(A_1 + \dots + A_n) = p_1 - p_2 + \dots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} p_i,$$

где $p_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i), p_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A_i A_j), \dots, p_n = \mathsf{P}(A_1 \dots A_n)$.

4.2.3 Формула полной вероятности

Теорема 4.8. Пусть с опытом G связаны гипотезы $H_1, \dots, H_n$. Тогда вероятность появления произвольного события в опыте G выражается формулой полной вероятности:

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\, \mathsf{P}(A|H_i).$$

4.2.4 Формула Байеса

Теорема 4.9. Пусть с опытом G связаны гипотезы $H_1, \dots, H_n$. Предположим, что при проведении опыта произошло событие A, $\mathsf{P}(A) > 0$. Пусть до опыта G были известны лишь априорные вероятности гипотез $\mathsf{P}(H_i), i = 1, \dots, n$ и соответствующие им условные вероятности: $\mathsf{P}(A|H_i), i = 1, \dots, n$. В этому случае условная (апостериорная) вероятность $\mathsf{P}(H_i|A)$ гипотезы H_i при условии, что событие A произошло вычисляется по формуле:

$$P(H_i) = \frac{\mathsf{P}(H_i)\, \mathsf{P}(A|H_i)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H_i)\, \mathsf{P}(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(H_k)\, \mathsf{P}(A|H_k)}.$$

4.2.5 Формула Бернулли

Рассмотрим последовательность из n независимых испытаний (опытов) с двумя исходами (событиями) A и $\overline{A}$, которые называются соответственно «успехом» и «неуспехом», причем $\mathsf{P}(A) \in (0,1)$, $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$. Построенная схема испытаний называется схемой Бернулли, а сам опыт — опытом Бернулли.

Теорема 4.10. Пусть опыт G производится по схеме Бернулли. Тогда вероятность $\mathsf{P}_n(m)$, события $A_n(m)$, состоящего в том, что при n повторениях опыта событие A произойдет ровно m раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$\mathsf{P}(A_n(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

4.3 Случайные величины. Законы распределения случайных величин их числовые характеристики.

Пусть на пространстве элементарных событий Ω определена σ-алгебра F.

Определение 4.11. Случайной величиной (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений $\mathbb{R}^1$, такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \le x\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}^1$.

Значение x функции $X(\omega)$ называют реализациями случайной величины.

Определение 4.12. Законом распределения случайной величины называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных с СВ.

Определение 4.13. Функцией распределения СВ $X(\omega)$ называется функция

$$F_X(x) = \mathsf{P}\{\omega : X(\omega) \le x\},$$

определенная для всех $x \in \mathbb{R}^1$.

4.3.1 Числовые характеристики случайных величин

Определение 4.14. Плотностью распределения СВ называется такая кусочно-непрерывная функция $f_X(x)$ для которой при любом $x \in \mathbb{R}^1$ выполняется соотношение:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Если $F_X(x)$ — непрерывна, то СВ называется непрерывной.

Если у СВ существует плотность вероятности, то ее называют абсолютно непрерывной.

Пусть плотность вероятности СВ такая, что сходится интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)dx.$$

Определение 4.15. Число $m_X = M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ называется математическим ожиданием (МО) СВ непрерывной СВ X.

Определение 4.16. Начальными ν_r и центральными μ_r моментами порядка r непрерывной случайно величины X называются числа:

$$\nu_r = M[X^r] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, r = 1, 2\ldots,$$

$$\mu_r = M[(X - m_X)^r] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^r f(x)dx, r = 2, 3\ldots.$$

Определение 4.17. Центральный момент второго порядка μ_2 называется дисперсией СВ X и обозначается $d_X = D[X] = \mu_2$.

Дисперсия характеризует степень рассеивания реализаций СВ около ее МО.

Определение 4.18. Средним квадратичным отклонением (СКО) СВ X называют величину $\sigma_X = \sqrt{d_X} \ge 0$.

4.4 Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа.

Определение 4.19. Бесконечная последовательность СВ $X_n, n = 1, 2, \dots$ определенная на одном пространстве элементарных событий Ω называется случайной последовательностью (СП) и обозначается $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$.

Определение 4.20. Случайная последовательность $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$, сходится к почти наверное к X при $n \to \infty$, если

$$\mathsf{P}\{w : \lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1.$$

Определение 4.21. Случайная последовательность $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$, сходится по вероятности к X при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1.$$

4.4.1 Закон больших чисел

В двух словах, закон больших чисел говорит о том, что эмпирическое среднее (среднее арифметическое) достаточно большой конечной выборки из фиксированного распределения близко к теоретическому среднему (мат. ожиданию) этого распределения.

Теорема 4.22. Если для последовательности X_n независимых случайных величин выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} D[Y_n] = 0,$$

где Y_n — выборочное среднее, то к этой последовательности применим закон больших чисел. ($|Y_n - M[X_n]| \to 0$ сходится по вероятности.)

Теорема 4.23. К последовательности X_n независимых, одинаково распределенных СВ у которых m_X конечно, применим усиленный закон больших чисел. ($|Y_n - M[X_n]| \to 0$ сходится почти наверное.)

4.4.2 Центральная предельная теорема

Определение 4.24. Пусть $F_n(x)$ — функция распределения СВ $X_n, n = 1, 2, \dots$, $F(x)$ — функция распределения СВ X. Случайная последовательность (СП) X_n сходится по распределению к X если функция распределения $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ в каждой точке непрерывности функции $F_n(x)$, т.е. $F_n(x) \to F(x)$.

Теорема 4.25 (Классическая центральная предельная теорема)**.** Пусть $X_n, n = 1, 2 \dots$ — бесконечная последовательность независимо одинаково распределенный СВ с конечным мат. ожидание μ и конечной дисперсией σ^2. Пусть также $S_i = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. тогда

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to N(0, 1), \quad n \to \infty.$$

(сходится по распределению к нормальному).

4.4.3 Теорема Муавра-Лапласса

Рассмотрим частоту «успехов» $W_n = M/n$ в серии из n последовательных независимых испытаний по схеме Бернулли.

Теорема 4.26 (Муавра-Лапласса)**.** Последовательность нормированных частот успехов $W_n^* = \dfrac{W_n - M[W_n]}{\sqrt{D(W_n)}}$ сходится по распределению СВ с распределением $N(0, 1)$.

4.5 Основные понятие математической статистики. Выборочная функция распределения. Гистограмма.

4.5.1 Основные понятие математической статистики

Определение 4.27. Однородной выборкой объема $n \geq 1$ называется случайный вектор $Z_n = col(X_1, \ldots, X_n)$ — компоненты которого называемые элементами выборки являются независимыми СВ с одной и той же функцией распределения $F_X(x)$. Будем говорить, что выборка соответствует функции распределения $F_X(x)$.

Определение 4.28. Реализацией выборки называется неслучайный вектор $z_n = col(x_1, \ldots, x_n)$, компонентами которого являются реализации соответствующих элементов выборки X_i.

Определение 4.29. Если компоненты вектора Z_n независимы, но их распределения $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ различны, то такую выборку называют неоднородной.

Определение 4.30. Множество S всех реализаций выборки называется выборочным пространством.

Определение 4.31. Упорядочим элементы реализации выборки $x_1, \ldots, x_n$ по возрастанию: $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, где верхний индекс соответствует номеру элемента в упорядоченной последовательности. Обозначим через $X^{(k)}, k = 1, \ldots, n$ случайные величины, которые при каждой реализации z_n выборки Z_n принимают k-ое по верхнему номеру значение $x^{(k)}$. Упорядоченную последовательность СВ $X_1, \ldots, X_n$ называют вариационным рядом выборки.

4.5.2 Выборочная функция распределения

Пусть серия из n испытаний проводится по схеме Бернулли, т.е. испытания проводятся независимо и друг от друга и некоторое событие A при каждом испытании появляется с одной и той же вероятностью $p = \mathsf{P}(A)$.

Пусть $M_n(A)$ — случайное число появлений события A в этой серии, а $W_n(A) = M_n(A)/n$ — частота события A в серии из n испытаний.

Рассмотрим выборку Z_n порожденную СВ X с функцией распределения $F_X(x)$. Определим для каждого $x \in \mathbb{R}$ событие $A_n = \{X \leq x\}$, для которого $\mathsf{P}(A_x) = F_X(x)$. Тогда $M_n(A_x)$ — случайное число элементов выборки Z_n не превосходящих x.

Определение 4.32. Частота $W_n(A_x)$ события A_x, как функция $x \in \mathbb{R}^1$, называется выборочной (эмпирической) функцией распределения СВ X и обозначается:

$$\hat{F}_n(x) = W_n(A_x).$$

4.5.3 Гистограмма

Действительную ось $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$ разделим точками $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}$ на $l+1$ непересекающийся полуинтервал (разряд) $\Delta_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1})$. Используя реализацию вариационного ряда $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ для каждого k разряда Δ_k вычислим частоту попадания элементов реализации выборки в этот разряд. Получаем $\overline{p_k} = n_k/n$, где n_k — число элементов реализации выборки z_n попавших в k-ый разряд.

Определение 4.33. На оси Ox отложим разряды и на них, как на основании, построим прямоугольники с высотой $\overline{p_k}/h_k$, где $h_k = const, \forall k$ — длина разряда. Тогда площадь каждого прямоугольника будет $\overline{p_k}$. Полученная фигура называется столбцовой диаграммой, а кусочно-постоянная функция $\overline{f_n(x)}$, образованная верхними гранями полученных прямоугольников — гистограмма.

4.6 Теория оценивания. Точечные оценки и методы их построения. Метод максимального правдоподобия. Метод моментов.

Определение 4.34. Статистика — произвольная функция, определенная на выборочном пространстве S (пространстве всех реализаций выборки).

Определение 4.35. Параметром распределения $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ СВ X называется любая числовая характеристика этой случайной величины или любая константа, явно входящая в выражение для функции распределения.

Определение 4.36. Точечной (выборочной) оценкой неизвестного параметра θ называется произвольная статистика $\hat{\theta}(Z_n)$, построенная по выборке Z_n и принимающая значения во множестве Θ.

Определение 4.37. Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется несмещенной, если $M[\hat{\theta}(Z_n)] = \theta$.

Определение 4.38. Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется состоятельной, если она сходится по вероятности к θ.

Определение 4.39. Оценка $\hat{\theta}(Z_n)$ называется сильно состоятельной, если она сходится к θ почти наверное.

Определение 4.40. Оценка называется эффективной, если если ее дисперсия минимальна по сравнению с дисперсиями других оценок.

Определение 4.41. Функцией правдоподобия для неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$ называется

$$L(z_n, \theta_1, \ldots, \theta_s) = f_{Z_n}(z_n, \theta_1, \ldots, \theta_s) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i, \theta_1, \ldots, \theta_s).$$

4.6.1 Метод максимального правдоподобия

Определение 4.42. Оценкой максимального правдоподобия (МП-оценкой) параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(Z_n)$, максимизирующая для каждой реализации z_n функцию правдоподобия:

$$\hat{\theta}(Z_n) = argmax_{\theta \in \Theta} L(z_n, \theta).$$

4.6.2 Метод моментов

Пусть $\hat{\nu}_i, i = 1, \dots s$ — выборочные начальные моменты. Рассмотрим систему уравнений:

$$\nu_i(\theta) = \hat{\nu}_i, i = 1, \dots s,$$

и предположим, что ее можно решить относительно параметров $\theta_1, \dots, \theta_s$.

Определение 4.43. Решение полученной системы уравнений называется оценкой параметра θ по методу моментов.

4.7 Интервальные оценки и методы их построения. Метод центральной статистики.

Определение 4.44. Интервал $[\theta_1(Z_n), \theta_2(Z_n)]$ со случайными концами, «накрывающий» с вероятностью $1-\alpha, 0 < alpha < 1$ неизвестный параметр θ, т.е. $\mathsf{P}\{\theta_1(Z_n) < \theta < \theta_2(Z_n)\} = 1-\alpha$, называется доверительным интервалом (или интервальной оценкой) уровня надежности $1-\alpha$ параметра θ.

Определение 4.45. Число $\delta = 1-\alpha$ называется доверительной вероятностью или уровнем доверия.

4.7.1 Использование центральной статистики

Определение 4.46. Функция $Y = G(Z_n, \theta)$ случайной выборки Z_n, такая, что ее распределение $F_Y(y)$ не зависит от параметра θ и при любом значении z_n функция $G(Z_n, \theta)$ является непрерывной и монотонной по θ, называется центральной статистикой.

Зная распределение $F_Y(y)$ центральной статистики $Y = G(Z_n, \theta)$, можно найти числа g_1, g_2, удовлетворяющие условию:

$$\mathsf{P}\{g_1 \le G(Z_n, \theta) \le g_2\} < 1-\alpha.$$

Границы $[\theta_1(Z_n), \theta_2(Z_n)]$ доверительного интервала могут быть найдены, если разрешить, учитывая свойства функции $G(Z_n, \theta)$ неравенства:

$$g_1 \le G(Z_n, \theta) \le g_2.$$

4.8 Методы проверки статистических гипотез. Критерий Пирсона.

Определение 4.47. Статистической гипотезой H называется любое предположение относительно параметров или закона распределения СВ X, проверяемое по выборке Z_n.

Определение 4.48. Проверяемая гипотеза называется основной (или нулевой) и обозначается H_0. Гипотеза, конкурирующая с H_0 называется альтернативной и обозначается H_1.

Определение 4.49. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет параметр или распределение СВ X. В противном случае гипотеза называется сложной.

Определение 4.50. Статистическим критерием (или критерием согласия) проверки гипотезы H_0 называется правило, в соответствии с которым по реализации $z = \varphi(z_n)$ статистики Z_n гипотеза H_0 принимается или отвергается.

Определение 4.51. Ошибкой первого рода (1 рода) называется событие, когда гипотеза H_0 отвергается, когда она на самом деле верна.

Определение 4.52. Ошибкой второго рода (2 рода) называется событие, когда гипотеза H_0 принимается, когда верна гипотеза H_1.

Уровень значимости α — вероятность ошибки первого рода.
Этапы проверки статистических гипотез:

1. Сформулировать проверяемую гипотезу H_0 и альтернативу H_1.

2. Выбрать уровень значимости α.

3. Выбрать статистику Z для проверки гипотезы H_0.

4. Найти распределение $F(z|H_)$ статистики при условии, что H_0 верна.

5. Построить в зависимости от формулировки H_1 критическую область $\overline{G}$.

6. Получить выборку наблюдений и вычислить выборочное значение $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ статистики Z.

7. Принять статистическое решение на уровне доверия $1 - \lambda$.

4.8.1 Критерий Пирсона

Проверка гипотезы о виде закона распределения.

1. Формулируется гипотеза H_0, состоящая в том, что СВ X имеет заданный закон распределения $\overline{F}(x, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ с s неизвестными параметрами.

2. Методом максимального правдоподобия находятся оценки $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n$.

3. Действительная ось разбивается на $l + 1$ непересекающихся полуинтервалов и подсчитывается число n_k элементов выборки, попавших в каждый k-ый разряд.

4. Вычисляется гипотетическая вероятность попадания в разряд:

$$p_k = f(\overline{x_k}, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)(\alpha_k - \alpha_{k-1}),$$

   где x_k — середина разряда, а α_k, α_{k-1} — точки на его границах.

5. Вычисляется реализация статистики хи-квадрат:

$$z = \phi(z_n) = n_0 p_0 + \sum_{k=2}^{l-1} \frac{(n_k - n_k p_k)^2}{n_k p_k} + n_l p_l$$

6. Используя распределение $\chi^2(s - l)$ проверить попадание $\phi(z_n)$ в доверительную область. Принять H_0 или принять альтернативу.

4.9 Основы регрессионного анализа. Метод наименьших квадратов.

Пусть Y и X — зависимые СВ и требуется по результатам наблюдений $(x_1, \dots, x_n)$ за вектором X и $(y_1, \dots, y_n)$ за вектором Y сделать обоснованное заключение о характере зависимости Y от X.

Определение 4.53. Зависимость $Y = \varphi^*(X) = M[Y|X]$ обеспечивающая наилучшее (в средне квадратическом смысле) приближение СВ Y:

$$M[(Y - \varphi^*(X))^2] \leq M[(Y - \varphi(X))^2],$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, называется функцией теоретической регрессии. При этом X называют регрессором, а Y — откликом.

Определение 4.54. Класс линейных по θ функций: $\varphi(x, \theta) = \theta_1\varphi_1(x) + \cdots + \theta_n\varphi_n(x)$, где $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ известные функции, называется регрессионной моделью.

Определение 4.55. Оценкой вектора неизвестным параметров θ, найденной по методу наименьших квадратов (или МНК-оценкой) называют вектор:

$$\hat{\theta} = argmin_{\theta \in \Theta}(Y - A\theta)^T(Y - A\theta),$$

где $A = \{a_{kj}\}$ — матрица, составленная из элементов $a_{kj} = \varphi_j(x_k)$.

Альтернативный вариант формул, которые мне нравятся больше:

$$\sum_{i=1}^{M}(Y_k - \hat{Y_k})^2 \to \min,$$

где M — объем выборки.

5. Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания

5.1 Законы распределения случайных процессов. Теорема Колмогорова. Моментные характеристики случайных процессов.

Определение 5.1. Случайный процесс есть семейство действительный или комплексных случайных величин $\{\xi(t,\omega), t \in T\}$ определенный на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$.

Определение 5.2. Пусть $\{\xi(t), t \in T\}$ — действительный случайный процесс и задано некоторое произвольное множество моментов времени $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$. Соответствующий набор случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ имеет n-мерную функцию распределения:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{P}(\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n),$$

которая в дальнейшем будет называться n-мерной функцией распределения случайного процесса ξ.

Функции распределения процесса $\xi(t)$ обладают следующими свойствами:

1. $0 \le F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \le 1$ (условие нормировки).
2. Функция $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ непрерывная справа по переменным x_i.
3. Если хотя бы одна и переменных $x_i \to -\infty$, то $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \to 0$, если все переменные $x_i \to \infty$, то $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \to 1$.
4. Функции $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ монотонны в следующем смысле:
$$\Delta_1, \ldots, \Delta_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \ge 0,$$
где Δ_i — оператор конечной разности.
5. Для любой перестановки $\{k_1, \ldots, k_n\}$ индексов $\{1, \ldots, n\}$
$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_1, \ldots, t_n)$$
6. Для любых $1 \le k \le n$ и $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^1$:
$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_k, +\infty, \ldots, +\infty; t_1, \ldots, t_n).$$

5.1.1 Теорема Колмогорова

Теорема 5.3 (Колмогорова)**.** Пусть задано некоторое семейство конечномерных функций распределения:

$$F = \{F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), x_i \in \mathbb{R}^1, t_i \in T, \quad i = 1, \ldots, n, n \ge 1\}$$

удовлетворяющие условиям 1-6. Тогда существует вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ и случайный процесс $\{\xi(t), t \in T\}$ такие что семейство конечномерных распределений F_ξ случайного процесса $\xi(t)$ совпадает с F.

5.1.2 Моментные характеристики случайных процессов

Определение 5.4. Неслучайная функция $m_{\xi(t), t\in T}$ определяемая отношением:

$$m_{\xi(t)} = M[\xi(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x;t),$$

называется математическим ожиданием процесса $\xi(t)$ или его средним значением.

Определение 5.5. Неслучайная функция $D_{\xi}(t), t \in T$, определяемая соотношением

$$D_{\xi}(t) = D[\xi(t)] = M[(\xi(t) - m_{\xi}(t))^2] = M[\xi(t)^2] - m_{\xi}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\xi}(x;t) - m_{\xi}^2(t),$$

называется дисперсией процесса $\xi(t)$.

5.2 Свойства траекторий случайных процессов

Кажется, что по этому вопросу не хватает информации.

Определение 5.6. При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ неслучайная функция $\xi_{\omega_0}(t) = \xi(t, \omega_0)$ называется траекторией, соответствующей элементарному исходу $\omega_0 \in \Omega$.

Траектории называются так же реализациями или выборочными функциями случайного процесса.

Определение 5.7. Случайная функция $\xi(t)$ называется регулярной, если ее траектории в каждой точке $t \in T$ непрерывна справа и имеют конечные пределы слева.

5.3 Непрерывные, дифференцируемые в СК случайные процессы. СК интеграл.

Определение 5.8. Случайная величина η называется среднеквадратическим (с.к.) пределом СФ $\eta(t)$ в точке $t_0 \in T$, если

$$M[|\xi(t) - \eta|^2] \to 0, t \to t_0.$$

Определение 5.9. Случайная функция $\{\xi(t), t \in T\}$ называется непрерывной в среднеквадратическом смысле (с.к. непрерывной), если

$$\xi(t) \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi(t_0), t \to 0.$$

Определение 5.10. Случайная величина $\dot{\xi(t)}$ называется с.к.-производной случайной функции $\xi(t)$ в точке $t_0 \in T$, если

$$\frac{\xi(t_0 + h) - \xi(t_0)}{h} \xrightarrow{\text{с.к.}} \dot{\xi(t)},$$

при $h \to 0$.

Если указанный предел существует, то СФ $\xi(t)$ называется с.к.-дифференцируемой в точке t_0.

Пусть СФ $\xi(t)$ определена на $T \subseteq \mathbb{R}^1$. На отрезке $[a, b]$ построим некоторое разбиение:

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b,$$

а на каждом из промежутков разбиения выберем произвольную точку $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \ldots, n$.

Определение 5.11. Если при $n \to \infty$ и $\max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$, существует предел в среднеквадратическом:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{\text{с.к.}} \eta,$$

не зависящий от способа разбиения на отрезки и выбора точек, то СФ называется с.к.-интегрируемой на $[a, b]$, а случайная величина η ее с.к.-интегралом и обозначается:

$$\eta = \int_a^b \xi(t) dt.$$

5.4 Стационарные случайные процессы. Стохастическая мера. Спектральное представление. Линейное стационарное преобразование.

Определение 5.12. Случайный процесс $\{\xi(t), t \in T\}$ называется стационарным в узком смысле, если для любого набора $t_1, \ldots, t_n \in T$ совместное распределение случайных величин $\xi(t_1 + \tau), \ldots, \xi(t_n + \tau)$ одно и тоже для всех τ, таких, что $t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau \in T$.

Определение 5.13. Случайная функция $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ называется стационарной в широком смысле, если для любых $t, \tau \in \mathbb{R}^1$:

$$M[\xi(t)] = M[\xi(0)], cov(\xi(t + \tau), \tau) = cov(\xi(t), \xi(0)).$$

5.4.1 Спектральное разложение

Теорема 5.14 (Бохнер, Хинчин)**.** Пусть $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ — ССФ, с непрерывной ковариационной функцией $R_\xi(t)$. Тогда найдется однозначно определенная вещественная ограниченная, монотонно неубывающая функция $F_\xi(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}^1$, непрерывная справа на $\mathbb{R}^1$ и $F_\xi(-\infty) = 0$, такая что

$$R_x i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF_\xi(\lambda), t \in \mathbb{R}^1$$

— спектральное разложение ковариационной функции.

5.4.2 Стохастическая мера

Теорема 5.15. Пусть $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ — ССФ с ковариационной функцией $R_\xi(t)$, допускающей спектральное разложение. Тогда существует такая ортогональная стохастическая мера $Z_\xi(d\lambda)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, что имеет место представление:

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda), t \in \mathbb{R}^1,$$

при этом для любого барелевского множества $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$$M[|Z_\xi(\Delta)|] = \int\limits_{\Delta} dF_\xi(\lambda).$$

5.4.3 Линейное стационарное преобразование

Пусть задана некоторая комплексная функция $\Phi(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^1$, такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|\Phi(\lambda) dF_\xi(\lambda)\Big| < \infty.$$

Определение 5.16. Если случайная функция $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}^1\}$ допускает представление

$$\zeta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \Phi(\lambda) Z_\xi(d\lambda),$$

то говорят, что $\zeta(t)$ получена с помощью стационарного линейного преобразования. Функция $\Phi(\lambda)$ называется частотной характеристикой этого преобразования.

5.5 Марковские случайные процессы. Цепи Маркова. Эргодическая теория.

Марковские случайные процессы обладают важным свойством независимости будущего поведения от всего прошлого. Это свойство называется отсутствием последствия.

Определение 5.17. Вещественный случайный процесс $\{\xi(t), t \in T\}$ называется марковским процессом или процессом Маркова, если для любых $t_l \in T : t_1 < \cdots < t_l$ произвольного целого $k > 1$ и любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ выполнено равенство:

$$\mathsf{P}(\xi(t_k) \in B | \xi(t_1), \ldots \xi(t_{k-1})) = \mathsf{P}(\xi(t_k) \in B | \xi(t_{k-1})$$

(марковское свойство).

Определение 5.18. Цепью Маркова называется последовательность вещественных случайных величин, обладающих марковским свойством.

5.5.1 Эргодическая теория

Определение 5.19. Вероятностью i-го состояния $\xi(t)$ в момент времени $t \geq 0$ называется величина

$$\pi_i(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = i\}, i \in E.$$

Определение 5.20. Марковский процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$ называется эргодическим, если для любого начального распределения вероятностей состояний $\{\pi_k(0), k \in E\}$ существуют предельные вероятности

$$\widetilde{\pi_k} = \lim_{t\to\infty} \pi_k(t), k \in E,$$

причем $\{\widetilde{\pi_k}, k \in E\}$ не зависят от $\{\pi_k(0), k \in E\}$ и удовлетворяют условиям:

$$\widetilde{\pi_k} \geq 0, \sum_{k\in E} \widetilde{\pi_k} = 1.$$

Теорема 5.21. Если существует состояние $j_0 \in E$ и конечное время t, такие, что одновременно для всех $i \in E, i \neq j_0$ выполнено условие $p_{ij_0} \geq \delta$, для некоторой $\delta > 0$, то процесс $\xi(t)$ — эргодический.

5.6 Основы теории массового обслуживания.

Теория массового обслуживания (теория очередей) — раздел теории вероятностей, целью исследований которого является рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания на основе изучения потока требований на обслуживание, поступающий в систему и выходящих из нее, длительности ожидания и длины очередей.

Однородный поток. Поток заявок однороден, если

1. все заявки равноправны,

2. рассматриваются только моменты времени поступления заявок, т.е. факты заявок без уточнения деталей каждой конкретной заявки.

Поток без последствия. Поток без последствия, если число событий любого интервала $(t, t+x)$ не зависит от числа событий на любом другом непересекающемся с нашим интервале времени.

Стационарный поток. Поток заявок стационарен, если вероятность появления n событий на интервале времени $(t, t+x)$ не зависит от времени t, а зависит только от длины этого участка.

Простейший поток. Однородный стационарный поток без последствий является простейшим, потоком Пуассона. Число n событий такого потока, выпадающих на интервал длины x, распределено по закону Пуассона:

$$P(n, x) = \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!}.$$

Пуассоновский поток удобен при решении задач теории массового обслуживания. Простейшие потоки редко встречаются на практике, однако многие моделируемые потоки допустимо рассматривать как простейшие.

6. Методы оптимизации и основы теории управления

6.1 Необходимые и достаточные условия безусловного и условного экстремума.

Определение 6.1. Градиентом $\nabla f(x)$ непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x называется вектор-столбец, элементами которого являются частные производные первого порядка, вычисленные в данной точке.

Определение 6.2. Матрицей Гессе $H(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ называется матрица частных производный второго порядка, вычисленных в данной точке:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

6.1.1 Безусловный экстремум

Утверждение 6.3 (Необходимые условия экстремума первого порядка)**.** Пусть $x^* \in \mathbb{R}$ есть точка локального минимума функции $f(x)$ на множестве $\mathbb{R}^n$ и $f(x)$ — дифференцируема в точке x^*. Тогда градиент функции $\nabla f(x)$ в точке x^* равен нулю, т.е.

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Утверждение 6.4 (Необходимые условия экстремума второго порядка)**.** Пусть точка x^* есть точка локального минимума функции $f(x)$ на множестве $\mathbb{R}^n$ и функция $f(x)$ дважды дифференцируема в этой точке, тогда матрица Гессе, вычисленная в точке x^*, положительно полуопределенной.

Утверждение 6.5 (Необходимые условия экстремума второго порядка)**.** Пусть функция $f(x)$ в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ дважды дифференцируема, ее градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной, т.е.

$$\nabla f(x^*) = 0, H(x^*) > 0.$$

Тогда точка x^* есть точка локального минимума функции $f(x)$ на множестве R^n.

6.1.2 Условный экстремум

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

$$X = \begin{cases} g_j(x) = 0, j = 1, \ldots, m, \\ g_j(x) \le 0, j = m+1, \ldots p, \end{cases}$$

где $g_j(x)$ — функции задающие ограничения (условия).

Будем считать функции $f(x), g_j(x), j = 1, \ldots, p$ дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве $\mathbb{R}^n$.

Определение 6.6. Функция

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x)$$

называется обобщенной функцией Лагранжа, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — множителями Лагранжа.

Утверждение 6.7 (Необходимые условия экстремума первого порядка)**.** Пусть x^* точка локального экстремума, тогда найдутся числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ не равные нулю одновременно и такие, что выполняются следующие условия:

1. Частные производные обобщенной функции Лагранжа по x равны нулю:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2. Условия допустимости решения:

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Утверждение 6.8 (Необходимые условия экстремума второго порядка)**.** Пусть x^* — регулярная ($\lambda_0^* \neq 0$) точка минимума и имеется решение системы (x^*, λ^*) из условий экстремума первого порядка. Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке (x^*, λ^*) неотрицателен

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \ge 0$$

для всех $dx \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Утверждение 6.9 (Достаточное условие экстремума)**.** Аналогично предыдущему. Второй дифференциал функции Лагранжа положителен в точке x^*.

6.2 Элементы выпуклого анализа

Определение 6.10. Множество $X \in \mathbb{R}$ называется выпуклым, если оно содержит всякий отрезок, концы которого принадлежат X, т.е. если для любых $x^1, x^2 \in X, \quad , 0 < \lambda < 1$, справедливо $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$.

Определение 6.11. Функция $f(x)$ определенная на выпуклом множестве называется строго выпуклой, если

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2), \quad \forall x^1, x^2 \in X, 0 < \lambda < 1.$$

Функцию называют выпуклой, если она целиком лежит **не** выше отрезка, соединяющего две ее произвольные точки.

Выпуклость функции можно определить по матрице Гессе, если $H(x) > 0$ — то функция строго выпуклая.

Определение 6.12.

1. Если $f(x)$ выпуклая функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума является точкой глобального минимума на X.
2. Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух разных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти две точки.
3. Если $f(x)$ строго выпуклая функция на выпуклом множестве X, то она может достигать своего глобального минимума на X не более, чем в одной точке.

Определение 6.13. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, если существует такое число $L > 0$, что

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|,$$

для всех $x', x'' \in [a, b]$.

6.3 Численные методы поиска безусловного экстремума (методы нулевого, первого и второго порядков).

1. Методы нулевого порядка, использующие только информацию о значении функции $f(x)$.
2. Методы первого порядка, использующие информацию о первых производных функции $f(x)$.
3. Методы второго порядка, требующие для своей реализации знания вторых производных функции $f(x)$.

6.3.1 Методы нулевого порядка

На отрезке $[a_0, b_0]$ должен быть один минимум (т.е. функция должна быть унимодальной).

Если точки, в которых должна быть вычислена функция задаются заранее, до начала вычислений, то стратегия пассивная.

Если точки выбираются последовательно, в процессе поиска, с учетом результатов предыдущих вычислений, то стратегия последовательная.

1. Метод равномерного поиска. Метод относится к пассивным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности $L = [a_0, b_0]$ и количество вычислений функции N. Вычисления производятся в N равноотстаящих друг от друга точках. Путем сравнения величин $f(x_i)$ находится точка, в которой значение функции наименьшее, считается, что искомая точка минимума заключена между $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

2. Метод деления интервала пополам. Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал. Вычисляется середина интервала, в каждой из частей вычисляется середина каждой части, таким образом, получается три точки, которые делят отрезок на четыре части. В зависимости от значения функций в точках, отбрасывается правый или левый интервал.

Один из методов многомерной оптимизации (самый простой) — метод конфигураций. Поиск начинается в некоторой точке x_0 (старый базис) и делаются пробные шаги в направлении осей координат. В зависимости от успешности шага производится поиск по образцу: движение от старого базиса к новому, на величину, равную ускоряющему шагу.

6.3.2 Методы первого порядка

1. Метод градиентного спуска с постоянным шагом. Точки последовательности вычисляются $\{x^k\}$ вычисляются по правилу $x^{k+1} = x^k - \nabla f(x^k) k = 0, 1, \ldots$. Величина шага остается постоянной t_k остается неизменной.

2. Метод наискорейшего градиентного спуска. Аналогично методу градиентного спуска, только t_k вычисляется как

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t_k \nabla f(x_k)) \to \min_{t_k}.$$

6.3.3 Методы второго порядка

1. Метод Ньютона.

$$x^k = x^k + d^k, d^k = -H^-1(x^k)\nabla f(x^k),$$

при условии, что $H(x^k) > 0$.

2. Метод Ньютона-Равсона.

$$x^k = x^k + t^k d^k, d^k = -H^-1(x^k)\nabla f(x^k),$$

где t^k вычисляется по формуле

$$\varphi(t^k) = f(x^k - t^k H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k)) \to \min_{t_k}.$$

6.3.4 Численные методы поиска условного экстремума.

6.3.5 Метод штрафов

Идея метода заключается в сведении задачи поиска условного минимума к решению последовательности задач поиска безусловного минимума вспомогательной функции:

$$F(x, r^k) = f(x) + P(x, r^k) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n},$$

где $P(x, r^k)$ — штрафная функция, r^k — параметр штрафа, задаваемый на каждой итерации.

Штрафные функции конструируются исходя из условия:

$$P(x, r^k) = \begin{cases} 0, & \text{при выполнении ограничений} \\ > 0, & \text{при невополнении ограничений} \end{cases}$$

Как правило используется квадратичный штраф:

$$P(x, r^k) = \frac{r^k}{2}\Big[\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) + \sum_{im+1}^{p} \max(0, g_j^2(x))\Big].$$

6.3.6 Метод барьерных функций

Применяется для ограничений типа неравенств $g_j(x) \leq 0$. Идея похожая на метод штрафов, только используются другие штрафные функции

1. Обратная штрафная функция

$$P(x, r^k) = -r^k \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{g_i(x)}.$$

2. Логарифмическая штрафная функция

$$P(x, r^k) = -r^k \sum_{i=1}^{p} \ln(-g_i(x)).$$

6.4 Линейное программирование. Симплекс-метод. Методы решения целочисленных задач линейного программирования.

Найти максимум функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, i = 1, \ldots, m, m < n, x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n.$$

Стратегия поиска решений основана на особенностях постановки задачи. Множество допустимых решений задачи, определяемое ограничениями, есть выпуклое множество, геометрически представляет собой выпуклый политоп, имеющий конечное число крайних точек.

Утверждение 6.14. Если функция $f(x)$ в задаче достигает максимума на политопе X, определяемом ограничениями, то она достигает его по крайней мере в одной крайней точке этого политопа. Если она достигает его в нескольких крайних точках, то то она достигает его на любой выпуклой комбинации этих точек.

Симплекс-метод — направленный перебор базисных решений, определяющий крайние точки политопа.

Стадии перебора:

1. Нахождение начального базисного решения.

2. Переход от одного базисного решения к другому, таким образом, чтобы обеспечить возрастание $f(x)$.

Начальное базисное решение определяется по следующему правилу: за начальные базисные переменные берутся те m переменных, при которых коэффициенты в ограничениях образуют единичную матрицу.

Переход о одного базисного решения к другому в направлении возрастания функции $f(x)$. Расчеты производятся с использованием симплекс-таблиц.

6.4.1 Методы решения целочисленных задач линейного программирования.

Задача решается симплекс-методом, без учета ограничений на целочисленность переменных.

Если найденное решение является целочисленным, то задача решена. Иначе значение $f(x_0^*)$ (x_0^* — решение задачи без ограничения на целочисленность) является верхней границей возможных оптимальных значений $f(x)$ на целочисленных решениях.

При нецелочисленном решении задача ветвится на две. Целью ветвления является разбиение множества допустимых значений, определяемых ограничениями на на два подмножества, путем построения дополнительных ограничений таким образом, чтобы исключить нецелочисленную точку x_0^* и сделать решение по крайней мере одной задачи целочисленным по выбранной координате x_k.

6.5 Вариационное исчисление. Задачи Больца, Лагранжа, Майера. Задачи поиска условного экстремума.

Определение 6.15. Вариационными задачами называют задачи о поиске экстремума функционалов, т.е. величин, численное значение которых определяется выбором одной или нескольких функций.

6.5.1 Задача Больца

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0,$$
$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(t_0), x(T)) \to \infty.$$

6.5.2 Задача поиска условного экстремума

Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Функции $x_i(t)$ — определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$.

2. Функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:
$$x_i(t_0) = x_{i0}, x_i(T) = x_{iT}, i = 1, \ldots, n.$$

3. Функции
$$\varphi_j(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0, j = 1, \ldots, m.$$

На множестве M задан функционал
$$I(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \int\limits_{t_0}^{T} F(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t))dt,$$
где функция F имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $x(t) \in X$, требуется найти допустимую вектор-функцию $x^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))^T$ на которой функционал достигает экстремума.

Поставленная задача относится к задаче поиска условного экстремума функционалов.

6.6 Антогонистические игры. Понятие оптимальных стратегий игроков. Основные теоремы матричных игр.

Определение 6.16. Антагонистическая игра (игра с нулевой суммой) — некооперативная игра, в которой участвуют два игрока, выигрыши которых противоположны.

Определение 6.17. Стратегия игрока называется оптимальной, если при многократном повторении игры она обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш).

Матричная игра задается матрицей $m \times n : A = a_{ij}$, где a_{ij} — выигрыш первого игрока и одновременно проигрыш второго. У первого игрока m стратегий, у второго игрока n стратегий. Если первый игрок использует стратегию i, а второй игрок стратегию j, то результат игры — a_{ij}.

Определение 6.18. Нижняя цена игры
$$v_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$$
гарантированный результат первого игрока.

Определение 6.19. Верхняя цена игры
$$v_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$
гарантированный результат второго игрока.

Если $v_1 = v_2$ то в матрице есть седловая точка.

Теорема 6.20 (Фундаментальная теорема)**.** Если платежная функция $F(x, y)$ — непрерывна и выпукла вниз по одной переменной, и выпукла вверх по другой переменной, на ограниченном замкнутом выпуклом множестве $X \times Y \Rightarrow F(x, y)$ имеет седловую точку.

Теорема 6.21 (Теорема фон Неймана)**.** Матричная игра в смешанных стратегиях имеет седловую точку.

6.7 Понятие равновесия по Нэшу, оптимальности по Парето, равновесия по Штакельбергу.

6.7.1 Равновесие по Нэшу

Определение 6.22. Пусть A — матрица стратегий первого игрока, B — матрица стратегий второго игрока. (P^*, Q^*) — оптимальны по Нэшу, если

$$PAQ^* \le P^*AQ^*,$$
$$P^*BQ \le P^*BQ^*.$$

Т.е. изменение стратегий не выгодно обоим игрокам: т.к. при отступлении от оптимальной стратегии они получат выигрыш меньше текущего.

6.7.2 Оптимальность по Парето

Определение 6.23. Оптимальность по Парето — состояние некоторой системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Более строгая формулировка:

Определение 6.24.

$$x^0 \in P \Leftrightarrow \nexists x : \exists i \in \{1, \dots n\} \Rightarrow \begin{cases} f_i(x) < f_i(x^0), \\ f_j(x) \le f_j(x^0), j = 1, \dots, n, j \ne i. \end{cases}$$

6.7.3 Модель Штакельберга

Первым свое решение объявляет первый игрок, после этого стратегию выбирает второй игрок. Первый игрок называется лидером, второй — ведомым. Равновесием по Штакельбергу в игре называется набор стратегий, (x^*, y^*), где $y^* = R(x^*)$ есть наилучший ответ второго игрока на стратегию x^*, которая находится, как решение задачи

$$H(x^*, y^*) = \max_x (x, R(x)).$$

6.8 Метод динамического программирования Беллмана

Определение 6.25. Динамическое программирование — способ решения сложных задач путем разбиение их на более простые подзадачи. Применим к задачам с оптимальной подструктурой.

Можно рассказать, про алгоритм Флойда-Уоршелла, про поиск кратчайших путей в графе, вычисление чисел Фибоначчи, упомянуть про «запоминание» вычислений.

6.9 Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим задачу оптимального управления как задачу Лагранжа вариационного исчисления. Для нахождения необходимых условий экстремума применим теорему Эйлера-Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Lambda = \int\limits_{t_0}^{t_1} (F(x(t), \dot{x(t)}, t) + \lambda_1^T(t)(\dot{x(t)} - a[x(t), u(t), t])dt + l,$$

где $l = \lambda_2^T(x_0(t) - x_0^*) + \lambda_3^T(x(t_1) - x_1^*)$ — граничные условия. Лагранжиан L имеет вид:

$$L[x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t] = F[x(t), \dot{x}(t), t] + \lambda_1^T(t)(\dot{x}(t) - a[x(t), u(t), t]),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — n-мерные вектора множителей Лагранжа.

Необходимые условия экстремума, согласно теореме имеют вид:

1. Стационарность по u: $\hat{L}(u) = 0$,

2. Стационарность по x уравнения Эйлера:

$$\hat{L_x} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} = 0.$$

3. Трансверсальность по x:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = \hat{l}_{x(t_1)}.$$

Необходимость в принципе максимума Понтрягина возникает, когда нигде в допустимом диапазоне управляющей переменной невозможно удовлетворить условию $\hat{L}(u) = 0$. В этом случае условием заменяется на другое:

$$\min_{u \in U} L(t, x(t), \dot{x}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{x}(t), \hat{u}) \Leftrightarrow \min_{u \in U}(F(t, x(t), u) - \lambda(t)a(t, x(t), u)) = f(t) - \lambda(t)a(t).$$

В этом случае согласно принципу максимума Понтрягина величина оптимального управления равна величине управления на одном из концов допустимого диапазона.

7. Математическое моделирование

7.1 Основные принципы математического моделирования. Методы построения и исследования математических моделей, их адекватность и устойчивость.

7.1.1 Основные принципы математического моделирования

1. Принцип информационной достаточности. При полном отсутствии информации об исследуемом объекте построить его модель невозможно. Если информация полная, то моделирование лишено смысла.

2. Принцип осуществимости. Модель должна обеспечивать достижение поставленной цели с вероятностью отличной от нуля и за конечное время.

3. Принцип множественности модели. Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства моделируемой системы, которые влияют на выбранный показатель эффективности.

4. Принцип агрегирования. Сложную систему можно представить, состоящей из подсистем, для математического описания которого используются стандартные математические схемы.

5. Принцип параметризации. В ряде случаев моделируемая система может иметь относительно изолированные подсистемы, которые характеризуются определенным параметром.

7.1.2 Методы построения и исследования математических моделей

1. Аналитическое моделирование. Модель описывается функциональными соотношениями (уравнениями) с последующей попыткой их решить.

2. Имитационное моделирование. При этом подходе реализующий модель алгоритм воспроизводит поведение системы во времени.

3. Комбинированное. Предварительно производят декомпозицию процесса на составляющие подпроцессы, и для тех из них, где это возможно используют аналитические модели, для остальных — имитационные.

7.1.3 Адекватность математической модели

Определение 7.1. Адекватность модели — совпадение свойств модели (функций/параметров/характеристик) и соответствующих свойств моделируемого объекта.

Адекватностью модели называется совпадение модели моделируемой системы в отношении цели моделирования.

7.1.4 Устойчивость модели

Определение 7.2. Устойчивость модели — ее способность сохранять адекватность при исследовании эффективности системы на всем возможном диапазоне рабочей нагрузки, а так же при внесении изменений в конфигурацию системы.

7.2 Учет неконтролируемых параметров при построении математических моделей

Пусть эффективность выбора того или иного решения определяется некоторым критерием F. В общем случае все факторы от которых зависит эффективность выбора можно разбить на две группы:

1. Контролируемые (управляемые) факторы.
2. Неконтролируемые (неуправляемые) факторы. Неконтролируемые факторы, в зависимости от информатированности о них подразделяют на три группы:
   (a) Детерминированные неконтролируемые факторы — неслучайные фиксированные величины, значения которых полностью известны.
   (b) Стохастические неконтролируемые факторы — случайные величины и процессы с известными законами распределения.
   (c) Неопределенные неконтролируемые факторы, для каждого их которых известна только область, внутри которой находится закон распределения.

7.3 Модели и методы стохастического программирования

Определение 7.3. Стохастическое программирование — подход в математическом программировании, позволяющий учитывать неопределенность в оптимизационных моделях.

Это означает, что либо параметры ограничений (условий) задачи, либо параметры целевой функции, либо и те и другие являются случайными величинами (содержат случайные компоненты).

Модели стохастического программирования ставят перед собой задачу нахождения некоторого решения, которое является допустимым для всех (или почти всех) возможных значений данных и максимизирует математическое ожидание некоторой функции решений и случайных переменных.

7.4 Математические модели производства. Производственная функция.

Определение 7.4. Производственная функция — экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска (количество продукции) и факторами производства, такими, как затраты ресурсов, уровень технологий.

В зависимости от анализа влияния факторов производства на объем выпуска в определенный момент времени или в разные промежутки времени производственные функции делятся на статические $P = f(x_1, \ldots, x_n)$ и динамические $P = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. По внутреннему устройству выделяются линейные $P = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ и мултипликативно-степенные $P = \prod\limits_{i=0}^{N} x_i^{\alpha_i}$.

K — капитал, L — труд.

Примеры производственных функций:

1. Линейная производственная функция: $Y = aK + bL$.

2. Производственная функция Леонтьева: $Y = min(K/a, L/b)$.

7.5 Основы макроэкономической теории. Модель межотраслевого баланса Леонтьева.

Определение 7.5. Макроэкономика — наука, изучающая функционирование экономики в целом, экономической системы как единого целого, совокупность экономических явлений.

Основные проблемы макроэкономики:

Определение 7.6.

Экономический рост, экономические циклы.

Безработица.

Общий уровень цен.

Денежное обращение, уровень ставки процента.

Государственный бюджет.

Торговый баланс.

7.5.1 Модель межотраслевого баланса

Определение 7.7. Межотраслевой баланс — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимых для обеспечения выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

7.6 Основы финансовой математики.

Определение 7.8. Финансовая математика — раздел прикладной математики, имеющий дело с математическими задачами, связанными с финансовыми расчетами.

В финансовой математике любой финансовый инструмент рассматривается с точки зрения генерируемого этим инструментом некоторого (возможно случайного) денежного потока.

Основные направления:

1. Классическая финансовая математика или математика кредита.
2. Стохастическая финансовая математика.
3. Проведение актуарных расчетов (составляющих математическую основу страхования).
4. Эконометрические расчеты, связанные с прогнозированием поведения финансовых рынков.

8. Механика

9. Численные методы

9.1 Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Определение 9.1. Трансцендентное уравнение — уравнение, не являющееся алгебраическим. Обычно это уравнения, содержащие показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

Пусть имеется нелинейное уравнения $f(x) = 0$. Требуется найти корни этого уравнения, т.е. те значения x, которые обращают уравнение в тождество.

9.1.1 Метод половинного деления

Пусть действительный корень уравнения $f(x)$ отделен и функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ отделения корня.

Найдем середину отрезка $x^{(1)} = (a+b)/2$ и вычислим $f(x^{(1)}$. Составим произведение $f(a)f(x^{(1)}$ и $f(x^{(1)})f(b)$ из двух половин отрезков выберем тот, где произведение отрицательно и обозначим новые границы $a^{(1)}, b^{(1)}$.

9.1.2 Метод Ньютона, метод касательных

Полагая, что погрешность $\varepsilon^{(k)} = x^* - x^{(k)}$ имеет малую величину, а функция $f(x)$ — непрерывную вторую производную, разложим $f(x^*)$ в ряд Тейлора:

$$f(x^*) = f(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = f(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)} f'(x^{(k)} + \frac{(\varepsilon^{(k)})^2}{2} f''(\xi).$$

Уравнение для погрешности:

$$\varepsilon^{(k)} = -f(x^{(k)})/f'(x^{(k)}).$$

, подставим его в соотношение

$$x^* = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}$$

и получим основное соотношение метода Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{-f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Геометрически процесс означает замену на каждой итерации кривой $y = f(x)$ касательной к ней в точке $(x^{(k)}, f((x^{(k)}))$, и определения значения $x^{(k+1)}$ как координаты точки пересечения касательной и оси абсцисс.

9.1.3 Метод секущих (метод хорд)

Значение производной аппроксимируется соотношением:

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}.$$

9.2 Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

9.2.1 Метод Гаусса

Рассказать про LUP-разложение. Не забыть у L — на диагонали единицы. $LUx = b$, $Ly = b$, $Ux = y$.

9.2.2 Метод прогонки для решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей.

Трехдиагональная матрица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

Основная идея — приведение трехдиагональной матрицы к верхней треугольной, в каждом уравнении нужно избавиться от x_{i-1}.

9.2.3 Метод простой итерации

В методе простой итерации СЛАУ $Ax = b$ приводится к эквивалентной системе вида $x = \alpha x + \beta$.

Решение системы ищется в виде:

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta.$$

Простейшим способом приведения системы $Ax = b$ к виду удобному для итераций является выделение диагональных элементов:

$$a_{ii} x_i^{(k)} = b_i - \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}.$$

Если условие сходимости ($||\alpha|| < 1$) выполняется, то метод сходится при любом начальном приближении.

9.2.4 Интерполирование функций

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано дискретное множество несовпадающих точек x_i, которые будем называть узлами и в которых известны значения функции $f_i = f(x_i), i = 1, \dots, n$. Потребуем, чтобы приближающая функция совпадала с приближаемой $f(x)$ в $n+1$ узле таблицы.

9.2.5 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}.$$

9.2.6 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Введем понятие раздельной разности. Раздельные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Раздельные разности первого порядка обозначаются $f(x_i, x_j)$ и определяются через раздельные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j},$$

раздельные разности второго порядка, определяются через раздельные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}.$$

Раздельные разности порядка n определяются соотношениями:

$$f(x_i, x_j, x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_i, x_j, \ldots, x_{n-1}) - f(x_j, x_k, \ldots, x_n)}{x_i - x_n}.$$

Раздельная разность $n+1$ порядка от многочлена n-го порядка равна нулю.

Тогда интерполяционный многочлен в форме Ньютона будет выглядеть следующим образом:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \cdots +$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)f(x_0, \ldots, x_n).$$

9.2.7 Методы приближенного решения систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений с n неизвестными можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

9.2.8 Метод Ньютона

В векторо-матричной форме расчетные формулы имеют вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

где вектор приращений $\Delta x^{(k)}$ находится из решения уравнения:

$$f(x^{(k)} + J[f(x^{(k)})]\Delta x^{(k)} = 0.$$

9.2.9 Метод простой итерации

При использовании метода простой итерации система уравнений приводится к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

или в векторной форме $x = \varphi(x)$.

Если выбрано некоторое начальное приближение $x^{(0)}$, то последующие приближения находятся о формуле (в векторной форме):

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}).$$

9.3 Численное дифференцирование и интегрирование

9.3.1 Численное дифференцирование

Формулы численного дифференцирования обычно используются при нахождении производных функции $y = f(x)$, заданной таблично.

При решении практических задач, как правило, используются аппроксимации первых и вторых производных.

В первом приближении таблично заданная функция может быть аппроксимирована отрезками прямой

$$y(x) \approx y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), x \in [x_i, x_{i+1}].$$

В этому случае:

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = const, x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Для вычисления второй производной, необходимо использовать многочлен, как минимум второй степени. После дифференцирования многочлена получаем:

$$y''(x) \approx \varphi''(x) = 2\frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i}.$$

9.3.2 Численное интегрирование

Формулы численного интегрирования используются в тех случаях, когда вычислить аналитически определенный интеграл

$$F = \int\limits_a^b f(x)dx$$

не удается.

Отрезок $[a, b]$ разбивается точками $x_0, \ldots, x_n$ с достаточно малым шагом $h = x_{i+1} - x_i$ и на одном или нескольких отрезках h_i подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют такой приближающей $\varphi(x)$, так что она, во-первых, близка к $f(x)$, а, во-вторых, интеграл от $\varphi(x)$ легко вычисляется.

Заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Лагранжа нулевой степени, проходящим через середину отрезка — точку $\overline{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, получим формулу прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x) = \sum_{i=1}^{N} h_i f(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}).$$

9.4 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается задача Коши для одного дифференциального уравнения вида:

$$y' = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Требуется найти решение на отрезке $[a, b]$, где $x_0 = a$. Введем разностную сетку на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = (b - a)/N$.

9.4.1 Метод Эйлера (явный)

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

9.4.2 Неявный метод Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

В общем случае нелинейное относительно y_{k+1} уравнение решается численно.

9.4.3 Метод Эйлера-Коши

В данном методе на каждом интервале расчет производится в два этапа. На первом, этапе прогноза, определяется приближенное решение на правом конце интервала по методу Эйлера, на втором, этап коррекции, уточняется значение решения на правом конце с использованием полусуммы тангенсов наклона:

$$\widetilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, x_{k+1}),$$
$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \widetilde{y}_{k+1})}{2}.$$

9.4.4 Первый улучшенный метод Эйлера

Метод использует расчет приближенного значения производной от решения в точке на середине расчетного интервала.

$$
\begin{gathered}
y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + hf(x_k, y_k),\\
y_k = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})
\end{gathered}
$$

9.5 Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

Для уравнения теплопроводности

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x}, 0 < x < l, t > 0,\\
u(0,t) = \varphi_0(t),\\
u(l,t) = \varphi_l(t),\\
u(x,0) = \psi(x).
\end{cases}
$$

Нанесем на пространственно-временную область конечно-разностную сетку $w_{h\tau}$.

Определение 9.2. Сеточной функцией u_j^k назовем однозначное отображение целых аргументов j, k в значение функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$.

Заменим дифференциальные операторы отношением конечных разностей:

$$
\begin{gathered}
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau},\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k - u_{j-1}^k}{h^2}.
\end{gathered}
$$

После подстановки их в задачу получим явную конечно-разностную схему:

$$
\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}.
$$

Если дифференциальный оператор по пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое

$$
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{h^2},
$$

то получим неявную конечно-разностную схему.

Тогда сеточную функцию на верхнем временном слое можно получить из решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

10. Программирование для ЭВМ

11. Программные и аппаратные средства информатики

12. Операционные системы и сети ЭВМ

13. Базы данных

13.1 Организация баз данных.

Не совсем понятно, что подразумевается под организацией баз данных в этом вопросе. По технологии обработки данных:

1. Централизованная БД.

2. Распределенная БД.

Подходы к организации баз данных:

1. Иерархические БД.

2. Сетевые БД.

3. Реляционные БД.

13.2 Модели данных.

Определение 13.1. Модель данных — совокупность методов и средств определения логического представления физических данных, относящихся к предметной области.

Модель данных — ни что иное, как формализация данных прикладной области для возможности их обработки. Она характеризуется тремя компонентами:

1. Правила структуирования данных для предоставления точки зрения пользователя на базу данных.

2. Множество допустимых операций, применимых к базе данных, которая находится в допустимом состоянии.

3. Ограничения целостности, определяющие множество допустимых состояний БД.

Процесс проектирования начинается с установления концептуальных требований, формируется концептуальная модель, которая представляет объекты и их связи, без указания способов физического хранения.

Затем она переводится в модель данных, совместимую с выбранной СУБД, которая называется логической моделью.

Наконец, логическая модель отображается на физическую память: определяется расположение данных и метод доступа к ним. Это внутренняя физическая модель.

Модель сущность-связь

Объекты, которыми оперирует концептуальная модель представляют собой сущности, которые могут быть в некотором отношении к друг другу. Отношение сущностей показывает их связь. Модели, представляющие собой совокупность сущностей и связей, называются моделями «сущность-связь».

13.3 Основные функции системы управления базами данных.

Определение 13.2. Система управления базами данных (СУБД) — комплекс программно-аппаратных средств, обеспечивающих доступ к БД и управление данными.

Основные функции СУБД:

1. Управление данными во внешней памяти (на дисках).
2. Управление данными в оперативной памяти с использованием дискового кэша.
3. Журнализация изменений, резервное копирование, восстановление БД после сбоев.
4. Поддержка языков БД (язык определения данных, язык манипулирования данными).

13.4 Технологии хранения и поиска данных, языки запросов.

1. Иерархическая модель.
2. Сетевая модель.
3. Реляционная модель.

Наверное, здесь уместно рассказать про какие-нибудь key-value хранилища, а заодно и про хэшмапы и деревья поиска.

13.4.1 Язык запросов

Определение 13.3. Язык запросов — это искусственный язык, на котором делаются запросы к базам данных и другим информационным системам.

Определение 13.4. SQL — structured query language, язык структуированных запросов, формальный, непроцедурный язык программирования, применяемый для создания, модификации и управления данными в произвольной реляционной базе данных.

13.5 Технологии и программное обеспечение для проектирования баз данных.

Определение 13.5. Проектирование баз данных — процесс создания схемы базы данных и определение необходимых ограничений целостности.

Основные задачи проектирования баз данных:

1. Обеспечение хранения в БД всей необходимой информации.

2. Обеспечение возможности получения данных по всем необходимым запросам.

3. Сокращение избыточности и дублирования данных.

4. Обеспечение целостности данных.

По технологиями скорее всего тут подразумеваются какие-нибудь ER-диаграммы, а под программным обеспечением Erwin.

13.6 Математическая модель реляционной алгебры.

Определение 13.6. Реляционная алгебра — замкнутая система операций над отношениями в реляционной модели данных. Операции реляционной алгебры так же называют реляционными операциями.

Реляционная алгебра представляет собой набор таких операций над отношениями, что результат каждой из операций тоже является отношением.

13.6.1 Операции реляционной алгебры

1. Переименование. $R\ RENAME\ A_1, \ldots, A_n\ AS\ B_1, \ldots, B_n$.

2. Объединение. *A UNION B*.

3. Пересечение. *A INTERSECT B*.

4. Вычитание. *A MINUS B*.

5. Декартово произведение. *A TIMES B*.

6. Выборка. *A WHERE c*.

7. Проекция. Простыми словами выборка специфических атрибутов. *PROJECT A{x, y, ..., z}*.

13.7 Синтаксис и семантика языка SQL.

Язык SQL представляет собой совокупность

- Операторов.

- Инструкций.

- И вычисляемых функций.

Операторы SQL делятся на:

1. Операторы определения данных.

   (a) CREATE — создает объект БД (сам базу, таблицу, пользователя).

    (b) ALTER — изменяет объект.
    (c) DROP — удаляет объект.

2. Операции манипуляции данными.
    (a) SELECT — считывает данные, удовлетворяющие заданным условиям.
    (b) INSERT — добавляет новые данные.
    (c) UPDATE — обновляет существующие данные.
    (d) DELETE — удаляет данные.

3. Операторы управления транзакциями.
    (a) COMMIT — применяет транзакцию.
    (b) ROLLBACK — откатывает все изменения, сделанные в контексте текущей транзакции.

13.8 Архитектура СУБД. Уровни абстракции данных.

Уровни архитектуры СУБД (снизу вверх):

1. Физический уровень (физическое хранилище БД).

2. Внутренний уровень (логический?).

3. Концептуальный уровень.

4. Пользовательский уровень.

13.9 Концептуальное и логическое проектирование базы данных.

13.9.1 Концептуальное проектирование

Определение 13.7. Концептуальное проектирование — построение модели предметной области. Модель является образом реальности.

Чаще всего концептуальная модель базы включает в себя:

Определение 13.8.

Описание информационных объектов или понятий предметной области и связей между ними.

Описание ограничений целостности, т.е. требований к допустимым значениям и к связям между ними.

13.9.2 Логическое проектирование

Определение 13.9. Логическое проектирование — создание схемы базы данных на основе конкретной модели, например, реляционной модели данных. Для реляционной модели данных логическая модель — набор схем отношений, обычно, с указанием первичных ключей, а так же связей между отношениями, представляющих между собой внешние ключи.

На этапе логического проектирования учитывается специфика конкретной модели данных, но может не учитываться специфика конкретной СУБД.

13.10 Реляционная модель данных.

Реляционная модель была предложена Коддом как альтернатива наиболее распространенной в то время сетевой модели. В основу модели Кодд положит три базовых принципа:

1. Независимость данных на логическом и физическом уровнях. (Стремление к независимости).

2. Создание структурно простой модели. (Стремление к коммуникабельности).

3. Использование концепции языков высокого уровня для описания операция над порциями информации. (Стремление к обработке множеств).

Структурная часть реляционной модели:

1. Отношения неопределенного порядка представленные таблицами.

2. Атрибуты — атомарные данные, характеризующие отношения и представленные столбцами таблицы.

3. Домены — множества допустимых значений атрибутов.

4. Кортежи — совокупности значений для всех атрибутов отношения, взятых по одному для каждого атрибута, представленные строками таблицы.

5. Возможные ключи — множество атрибутов однозначно определяющее кортеж в отношении.

6. Первичные ключи — для каждого отношения это один из возможных ключей.

Обрабатывающая часть состоит из операторов выбора, проекции, соединения и.т.п., которые преобразуют отношения в отношения.

Кодд приводит критерии, по которым СУБД можно отнести к реляционным:

1. СУБД должна поддерживать таблицы без видимых пользователю навигационных связей.

2. Язык манипулирования данными должен обеспечивать минимальную возможность реляционной обработки, то есть включать операторы выбора, проекции и соединения.