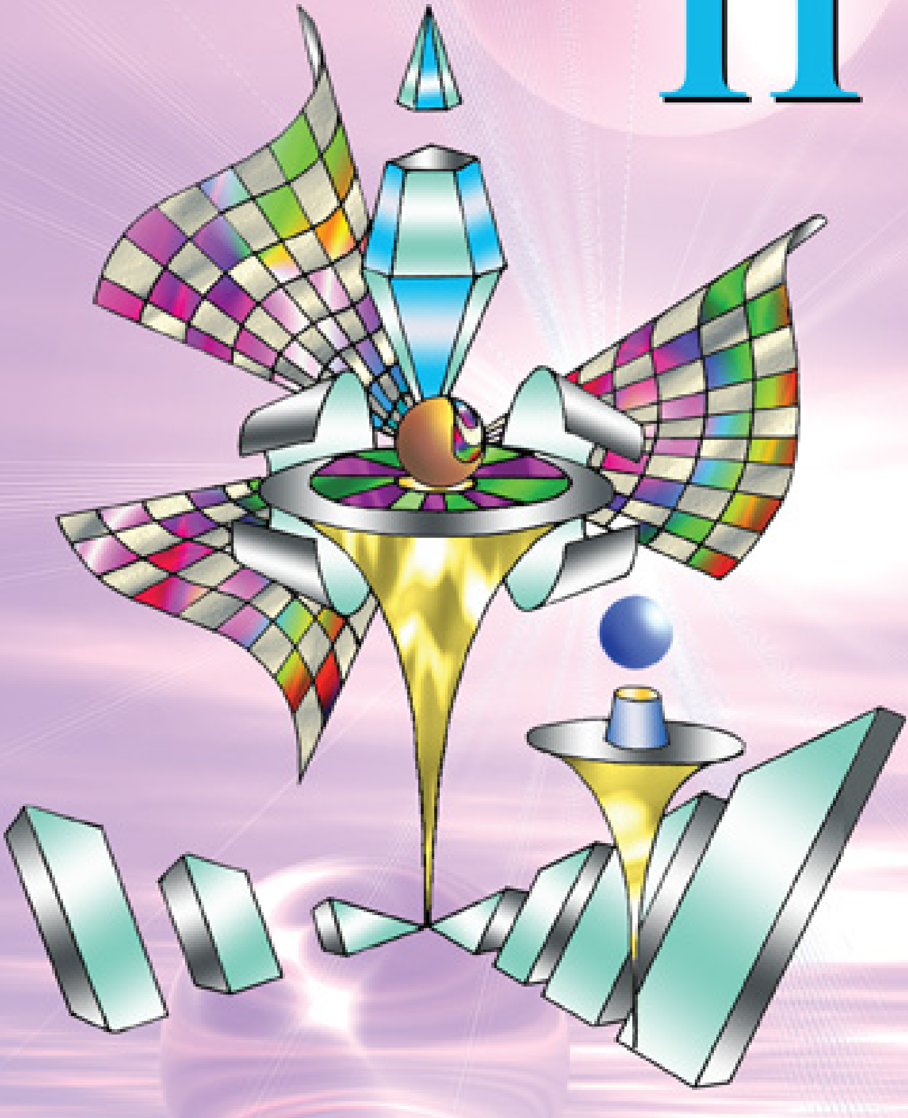
В. В. Шлыков

ГЕОМЕТРИЯ

11



В. В. Шлыков

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

3-е издание, исправленное и дополненное

Минск «Народная асвета» 2013

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Ш69

Р е ц е н з е н т
кафедра высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета (кандидат физико-математических наук доцент *С. В. Тихонов*)

Шлыков, В. В.
Ш69 Геометрия : учеб. пособие для 11-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. — 3-е изд., испр. и доп. — Минск : Нар. асвета, 2013. — 159 с. : ил.
ISBN 978-985-03-1996-8.
Предыдущие издания под названием «Геометрия, 11» вышли в 2005, 2008 гг.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-1996-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1
Многогранники

Глава 2
Объемы многогранников

Глава 3
Тела вращения

Уважаемые друзья!

В данном учебном пособии изложен теоретический и задачный материал, которым завершается изучение школьного курса геометрии. В первой главе систематизируются сведения о многогранниках, изучаются правильные многогранники и некоторые их свойства.

Во второй главе определяется понятие объема многогранника. Доказываются теоремы о нахождении объемов прямого и наклонного параллелепипедов, произвольной призмы и пирамиды. Система задач этой главы позволяет осуществить повторение ранее изученных свойств параллелепипеда, призмы и пирамиды.

Третья глава начинается с изучения сферы, шара и понятий, связанных с ними. Более раннее рассмотрение этих понятий предоставляет возможности для эффективного усвоения учащимися вопросов взаимного расположения сферы, многогранников, конуса и цилиндра. Далее вводятся понятия цилиндра и конуса, доказываются теоремы о нахождении площадей их поверхностей, а также объемов этих тел. В заключительном параграфе излагаются вопросы о вычислении площади сферы и объема шара.

В учебном пособии по-прежнему внимание уделено иллюстративному материалу как средству формирования графической культуры и развития пространственных представлений, навыков чтения графических моделей. С этой целью в качестве иллюстраций приводятся графические модели геометрических фигур, обладающих различным потенциалом воздействия на зрительную и эмоциональную память.

1

МНОГОГРАННИКИ

Глава 1
МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Понятие многогранника

1. Граничные точки фигуры. В курсе планиметрии и в начале изучения стереометрии было дано описание некоторых пространственных геометрических фигур, которые называются *многогранниками*. Теперь уточним понятие многогранника, познакомимся с новыми свойствами многогранников и систематизируем известные сведения о них.

Как уже отмечалось, в стереометрии изучаются не только плоские, но и *пространственные* геометрические фигуры, т. е. фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Примерами пространственных фигур служат *геометрические тела*, в частности *многогранники*.

Наглядно геометрическое тело можно представить себе как часть пространства, занятую физическим телом (рис. 1, *а*, *б*, *в*). Для того чтобы дать определение геометрического тела, прежде определим некоторые вспомогательные понятия.

Точка M называется *граничной точкой* фигуры F, расположенной в пространстве, если на сколь угодно малом расстоянии от точки M найдутся точки как принадлежащие фигуре F, так и не принадлежащие этой фигуре.

Иначе говоря, точка называется *граничной точкой* фигуры в пространстве, если в любом шаре с центром в этой точке есть точки, принадлежащие этой фигуре, и точки, не принадлежащие ей.

а) *б)* *в)*

Рис. 1

Заметим, что граничные точки фигуры F могут не принадлежать этой фигуре.

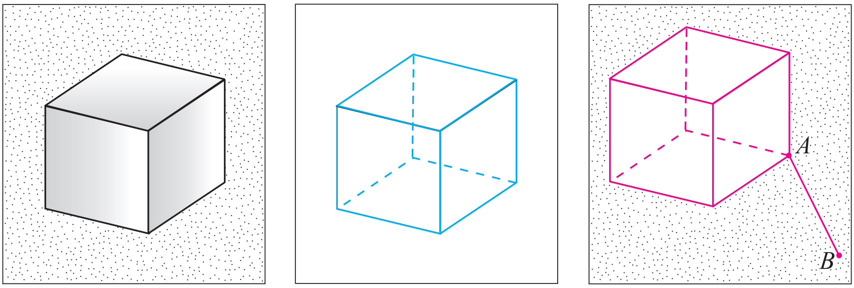
Например, пусть F — фигура, состоящая из точек куба, за исключением точек некоторой его грани F_1. Тогда каждая точка грани F_1 является граничной точкой фигуры F, но не принадлежит F.

Множество всех граничных точек фигуры называется ее *границей*.

Заметим, что граница фигуры не всегда совпадает с самой фигурой.

Например, границей куба является фигура, образованная его гранями, т. е. поверхность куба (рис. 2, *а*, *б*). Границей шара с центром в точке O и радиусом R служит сфера с центром в точке O, имеющая тот же радиус R.

Границей фигуры, представляющей собой объединение куба и отрезка AB, служит фигура, которая является объединением поверхности этого куба и отрезка AB (рис. 2, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 2

2. Внутренние точки фигуры. Определим понятие внутренней точки фигуры, расположенной в пространстве.

Точка M называется *внутренней точкой* фигуры F, расположенной в пространстве, если найдется такое положительное число ε, что любая точка, находящаяся от точки M на расстоянии, меньшем ε, принадлежит фигуре F.

Иначе говоря, точка называется внутренней точкой фигуры, если существует шар с центром в этой точке, каждая точка которого принадлежит фигуре.

Заметим, что внутренняя точка фигуры F всегда принадлежит этой фигуре.

Любая точка куба, не принадлежащая его граням, является внутренней точкой куба.

Фигура может не иметь внутренних точек, например плоскость в пространстве. Действительно, для любой точки плоскости не существует шара с центром в этой точке, все точки которого лежат в этой плоскости.

Множество всех внутренних точек фигуры называется ее *внутренностью.*

Например, внутренность куба есть фигура, образованная точками куба, которые не принадлежат его граням.

Фигура пространства называется *ограниченной*, если существует такое положительное число d, что расстояние между любыми двумя точками этой фигуры меньше этого числа d.

Другими словами, фигура называется ограниченной, если все ее точки принадлежат некоторому шару.

3. Геометрические тела и многогранники. Теперь можем охарактеризовать геометрическое тело.

Геометрическим телом называется ограниченная фигура в пространстве, обладающая следующими свойствами:

1) *у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить ломаной, каждая точка которой является внутренней точкой фигуры;*

2) *фигура содержит свою границу, и ее граница совпадает с границей ее внутренности.*

Например, множество точек пространства, находящихся от точки O на расстоянии, меньшем или равном данному числу R, т. е. шар с центром в точке O и радиусом R, является телом. В то же время множество точек, находящихся от точки O на расстоянии, меньшем R, не является телом, так как не выполняется второе свойство.

Плоскость в пространстве не является телом, так как ни одна из ее точек не является внутренней.

Граница тела называется его *поверхностью.*

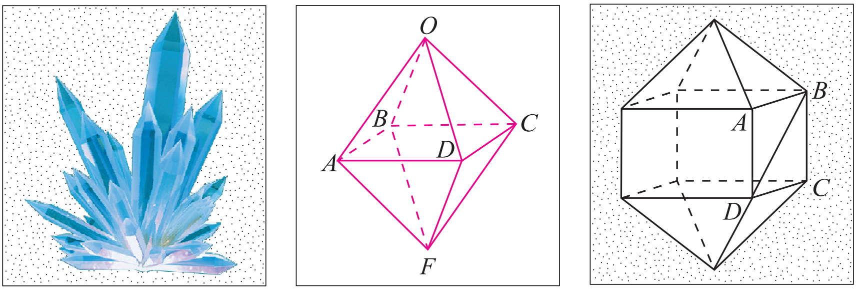
Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости.

Многоугольники, образующие границу многогранника, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами многогранника*.

Представление о многогранниках дают кристаллы природных минералов (рис. 3, *а*).

Плоским углом при вершине O многогранника называется угол грани многогранника с вершиной в точке O.

Например, на рисунке 3, *б* изображен многогранник — октаэдр, у которого восемь граней. Углы OAB, OAD, BAF и DAF — плоские углы при вершине A октаэдра.



а) *б)* *в)*

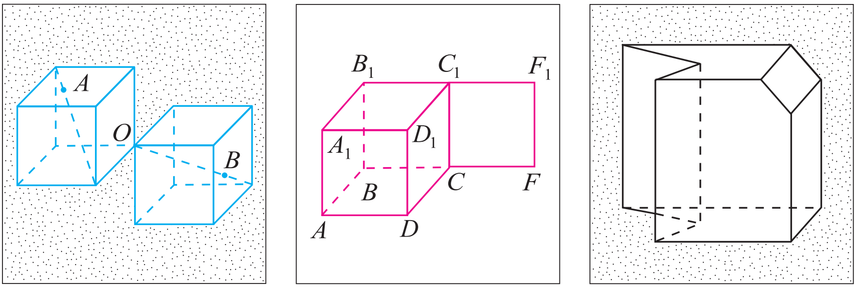
Рис. 3

Многогранник, изображенный на рисунке 3, *в*, имеет двенадцать граней и десять вершин.

Заметим, что треугольники ABD и BCD, имеющие общую сторону BD, не являются гранями многогранника, изображенного на рисунке 3, *в*, так как не лежат в разных плоскостях. Отрезок DB не является ребром этого многогранника, так как не является стороной грани.

Фигура, являющаяся объединением двух кубов, имеющих одну общую вершину O (рис. 4, *а*), не является многогранником, поскольку она не является геометрическим телом, так как, например, внутренние точки A и B этой фигуры нельзя соединить ломаной, каждая точка которой является внутренней точкой фигуры. Действительно, любая ломаная, состоящая из точек фигуры и соединяющая точки A и B, содержит точку O, которая не является внутренней точкой указанной фигуры.

Фигура, состоящая из куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и квадрата CC_1F_1F (рис. 4, *б*), не является геометрическим телом, а сле-

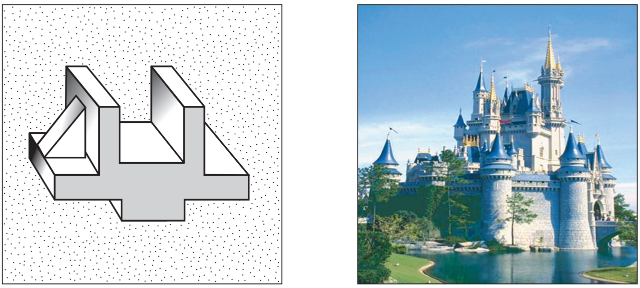


а) б) в)

Рис. 4

довательно, не является многогранником. Действительно, границей внутренности этой фигуры служит поверхность куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а граница всей фигуры состоит из поверхности куба и точек квадрата CC_1F_1F, т. е. граница указанной фигуры не совпадает с границей ее внутренности.

Среди множества многогранников выделяются выпуклые и невыпуклые многогранники.



а) б)

Рис. 5

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от каждой из плоскостей, содержащих его грани.

Многогранник называется *невыпуклым*, если существует такая его грань, что он лежит по разные стороны от плоскости, содержащей эту грань.

Например, *октаэдр* (см. рис. 3, *б*) — выпуклый многогранник, а многогранник, изображенный на рисунке 4, *в*, — невыпуклый.

В дальнейшем, если не оговорено иное, будем рассматривать выпуклые многогранники.

Многие детали, применяемые в машиностроении и других производствах, архитектурные сооружения имеют форму многогранников. Например, на рисунке 5, *а* изображена деталь, имеющая форму невыпуклого многогранника. Различные архитектурные сооружения имеют форму некоторых геометрических тел (рис. 5, *б*).

§ 2. Призма. Параллелепипед

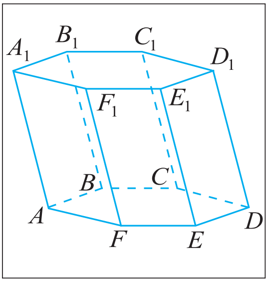
1. Призма. В данном параграфе систематизируем сведения о призме и параллелепипеде.

Определение. **Призмой (n-угольной) называется многогранник, у которого две грани — равные n-угольники $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$ (называемые основаниями) с соответственно параллельными сторонами ($A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, ..., $A_{n-1}A_n \parallel B_{n-1}B_n$), а остальные n граней — параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.**

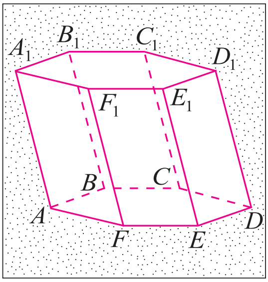
Эти параллелограммы называются *боковыми гранями призмы*, а их стороны, не являющиеся сторонами основания призмы, называются *боковыми ребрами призмы*.

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые призмы.

Призма с основаниями $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$ обозначается $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2B_3...B_n$. Например, на рисунке **6**, *а*, *б*, *в* изображена шестиугольная призма с основаниями $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



а)



б)

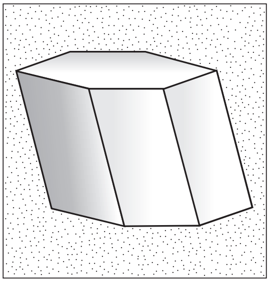

в)

Рис. 6

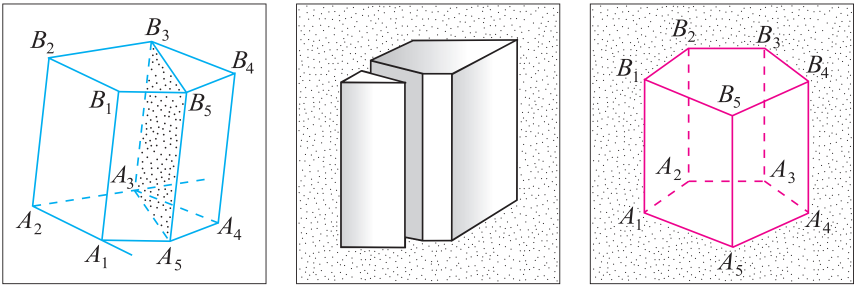
Фигура, образованная всеми гранями призмы, называется *полной поверхностью призмы*, а фигура, образованная боковыми гранями, — *боковой поверхностью призмы*.

Теорема 1 (*о свойстве оснований призмы*). ***Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.***

Доказательство.

Пусть дана призма, основаниями которой являются n-угольники $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$ (на рисунке 7, *а* изображена пятиугольная призма). По определению призмы $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ и $A_2A_3 \parallel B_2B_3$. Таким образом, пересекающиеся прямые A_1A_2 и A_2A_3, лежащие в плоскости одного основания, соответственно параллельны прямым B_1B_2 и B_2B_3, лежащим в плоскости другого основания. Следовательно, по признаку параллельности плоскостей плоскости, содержащие основания $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$, параллельны.

Теорема доказана.



а) *б)* *в)*

Рис. 7

Высотой призмы называется перпендикуляр (или длина этого перпендикуляра), проведенный из какой-нибудь точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

2. Прямая призма. Правильная призма. Среди множества призм выделяют такие, которые называются прямыми призмами.

Призма называется *прямой*, если все ее боковые грани являются прямоугольниками.

Представление о прямой призме дают, например, модели, которые получаются в результате распиливания деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, вдоль ребра, как изображено на рисунке 7, *б*.

Призма, у которой не все боковые грани являются прямоугольниками, называется *наклонной*.

Теорема 2 (*о свойстве боковых ребер прямой призмы*). ***Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны плоскостям, в которых лежат ее основания.***

Доказательство.

Пусть дана прямая призма $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2B_3...B_n$ (на рисунке 7, *в* изображена прямая пятиугольная призма).

Докажем, например, что боковое ребро A_2B_2 перпендикулярно плоскости, в которой лежит основание $A_1A_2A_3...A_n$. Так как по определению прямой призмы все ее боковые грани — прямоугольники, то четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник, а, значит, $A_2B_2 \perp A_1A_2$. Аналогично четырехугольник $A_2B_2B_3A_3$ является прямоугольником, следовательно, $A_2B_2 \perp A_2A_3$. Таким образом, прямая A_2B_2 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, содержащей основание $A_1A_2A_3...A_n$. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая A_2B_2 перпендикулярна этой плоскости. Основания $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$ лежат в параллельных плоскостях, следовательно, ребро A_2B_2 перпендикулярно также плоскости, в которой лежит основание $B_1B_2B_3...B_n$. Для остальных ребер доказательство аналогично.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что *высота прямой призмы равна ее боковому ребру*.

У наклонной призмы боковые ребра не перпендикулярны к плоскостям, в которых лежат основания.

Определение. Призма называется правильной, если она прямая, а ее основаниями служат правильные многоугольники.

Диагональю призмы называется отрезок, концами которого служат вершины призмы, не лежащие в одной грани.

Диагональным сечением призмы называется ее сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, которые не лежат в одной грани.

Диагональное сечение любой наклонной призмы в общем случае — параллелограмм, а сечение прямой призмы — прямоугольник. Например, диагональное сечение $A_3B_3B_5A_5$ призмы $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ есть параллелограмм (см. рис. 7, *а*), так как $A_3B_3 \parallel A_5B_5$ (боковые ребра призмы попарно параллельны), а $A_3A_5 \parallel B_3B_5$ (основания призмы лежат в параллельных плоскостях, следовательно, секущая плоскость пересекает их по параллельным прямым).

Если секущая плоскость пересекает все боковые ребра призмы и перпендикулярна им, то получающееся при этом сечение называется *ортогональным сечением призмы*.

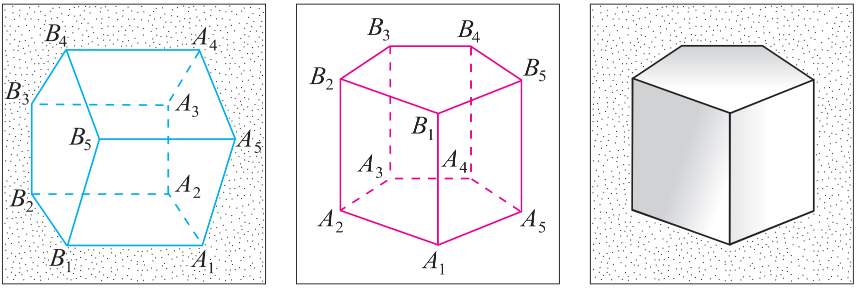
Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней (обозначается $S_{бок}$).

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней (обозначается $S_{\text{полн}}$).

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади ее боковой поверхности и удвоенной площади основания:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Теорема 3 (*о площади боковой поверхности прямой призмы*). ***Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту призмы*** ($S_{\text{бок}} = Ph$).



а) *б)* *в)*

Рис. 8

Доказательство.

Пусть дана прямая призма $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2B_3...B_n$ (на рисунке 8, *а*, *б*, *в* изображена пятиугольная призма), P — периметр ее основания, h — высота этой призмы. Докажем, что площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ прямой призмы находится по формуле $S_{\text{бок}} = Ph$.

Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками, одна из сторон которых равна стороне основания призмы, а другая — высоте h призмы. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, таким образом, $S_{\text{бок}} = A_1A_2 \cdot h + A_2A_3 \cdot h + ... + A_{n-1}A_n \cdot h + A_nA_1 \cdot h = (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_1)h = Ph$.

Теорема доказана.

3. Параллелепипед. Теперь рассмотрим понятие параллелепипеда.

Параллелепипед — это призма, основаниями которой являются параллелограммы.

Все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы.

Две грани параллелепипеда, не имеющие общего ребра, называются *противолежащими*, а имеющие общее ребро — *смежными*.

Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются *противолежащими*. Отрезок, соединяющий противолежащие вершины, называется *диагональю* параллелепипеда.

Параллелепипед называется *прямым*, если все его боковые грани — прямоугольники.

Параллелепипед называется *наклонным*, если не все его боковые грани являются прямоугольниками.

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если все его грани — прямоугольники.

Длины трех ребер, выходящих из одной вершины, называются *измерениями* прямоугольного параллелепипеда.

Напомним свойства параллелепипеда.

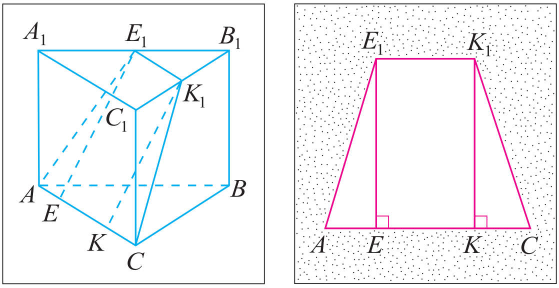
1) *Противолежащие грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях.*

2) *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Свойство *прямого* параллелепипеда: *боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскостям его оснований.*

Свойство *прямоугольного* параллелепипеда: *квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*

Задача 1. В правильной треугольной призме длина каждого ребра равна a. Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, проходящей через сторону одного из оснований и среднюю линию другого основания.



а) *б)*

Рис. 9

Дано:
$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма,
$AA_1 = AB = a$,
$A_1E_1 = E_1B_1$,
$E_1 \in A_1B_1$,
$C_1K_1 = K_1B_1$,
$K_1 \in C_1B_1$.

Найти: $S_{AE_1K_1C}$.

Решение.

1) Пусть точки E_1 и K_1 — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Тогда секущая плоскость пересекает грани AA_1B_1B, CC_1B_1B и $A_1B_1C_1$ по отрезкам AE_1, CK_1 и E_1K_1 соответственно. Четырехугольник AE_1K_1C — сечение призмы плоскостью α.

2) Четырехугольник AE_1K_1C — равнобедренная трапеция ($AC \parallel E_1K_1$, так как $AC \parallel A_1C_1$, $A_1C_1 \parallel E_1K_1$; $AE_1 = CK_1$, поскольку прямоугольные треугольники AA_1E_1 и CC_1K_1 равны по двум катетам) (рис. 9, *а*, *б*).

3) Для нахождения площади трапеции AE_1K_1C достаточно найти ее высоту $\left(\text{длины оснований трапеции: } AC = a,\ E_1K_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{a}{2}\right)$.

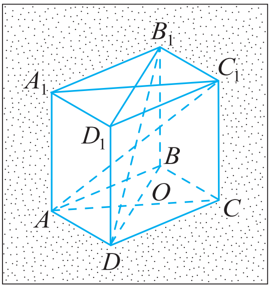
4) Пусть $E \in AC$ и $EE_1 \perp AC$, тогда $S_{\text{сеч}} = \frac{AC + E_1K_1}{2} \cdot EE_1$.

5) В треугольнике AA_1E_1 $\left(\angle AA_1E_1 = 90^\circ,\ AA_1 = a,\ A_1E_1 = \frac{a}{2}\right)$ длина гипотенузы $AE_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1E_1^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

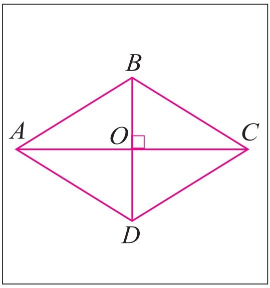
6) Пусть $K \in AC$ и $K_1K \perp AC$. Из треугольника AEE_1 $\left(\angle AEE_1 = 90^\circ,\ AE = \frac{AC - E_1K_1}{2} = \frac{a}{4},\ AE_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}\right)$ найдем $EE_1 = \sqrt{AE_1^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{19}}{4}$. Следовательно, $S_{\text{сеч}} = \frac{AC + E_1K_1}{2} \cdot EE_1 = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{19}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$.

Задача 2. Основание прямого параллелепипеда — ромб, длина стороны которого a. Диагонали параллелепипеда образуют с основанием углы 30° и 45°. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.



а)



б)

Рис. 10

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle C_1AC = 30^\circ$, $\angle B_1DB = 45^\circ$.

Найти: $S_{AA_1C_1C}$, $S_{DD_1B_1B}$.

Решение.

1) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1$, $S_{DD_1B_1B} = DB \cdot DD_1$. Следовательно, для нахождения площадей диагональных сечений необходимо найти длины диагоналей основания и высоту параллелепипеда (рис. 10, *а*).

2) Пусть $CC_1 = x$. В треугольнике ACC_1 ($\angle ACC_1 = 90°$, $\angle C_1AC = 30°$, $CC_1 = x$) длина катета $AC = CC_1 \operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}$.

3) В треугольнике B_1BD ($\angle B_1BD = 90°$, $\angle B_1DB = 45°$, $BB_1 = x$) $BD = BB_1 = x$.

4) В треугольнике BOC $\left(\angle BOC = 90°, BO = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}, OC = \frac{1}{2}AC = \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ $BC^2 = BO^2 + OC^2$, $a^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{4}$, $x^2 = a^2$, $x = a$ (рис. 10, *а*, *б*).

5) Таким образом, $AC = a\sqrt{3}$, $DB = a$. Теперь найдем $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = a^2\sqrt{3}$, $S_{DD_1B_1B} = DB \cdot DD_1 = a^2$.

Ответ: $a^2\sqrt{3}$, a^2.

Задача 3. Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра ортогонального сечения на длину ее бокового ребра.

Доказательство.

Каждая грань призмы является параллелограммом. Площадь каждого параллелограмма равна произведению длины любой его стороны на высоту, проведенную к этой стороне. Следовательно, площадь ее боковой поверхности будет равна произведению длины бокового ребра на периметр ортогонального сечения призмы.

Вопросы и задачи к § 2

1. Верно ли утверждение, что n-угольная призма — это многогранник, у которого две грани — равные n-угольники, а остальные грани — параллелограммы?

2. Охарактеризуйте взаимное расположение плоскостей, в которых лежат основания призмы.

3. Какая призма называется прямой призмой? Охарактеризуйте расположение боковых ребер прямой призмы относительно плоскостей, в которых лежат ее основания.

4. Какая призма называется правильной? Верно ли, что боковые грани правильной призмы — равные между собой прямоугольники?

5. Верно ли утверждение, что правильная четырехугольная призма — это призма, основаниями которой служат квадраты?

6. Верно ли утверждение, что прямой параллелепипед, основаниями которого служат квадраты, является правильной четырехугольной призмой?

7. Охарактеризуйте диагональные сечения прямой призмы. Может ли диагональное сечение прямой призмы быть ромбом?

8. Диагонали оснований прямой четырехугольной призмы перпендикулярны, а каждое диагональное сечение является квадратом. Верно ли, что такая призма является правильной?

9. Основанием прямой треугольной призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 8 см^2, а высота призмы — 5 см. Вычислите площадь меньшей боковой грани призмы.

10. Треугольник ABC с прямым углом при вершине C служит основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Вычислите длину диагонали большей боковой грани призмы, если длины катетов треугольника ABC равны 3 см и 4 см, а высота призмы равна $\sqrt{11}$ см.

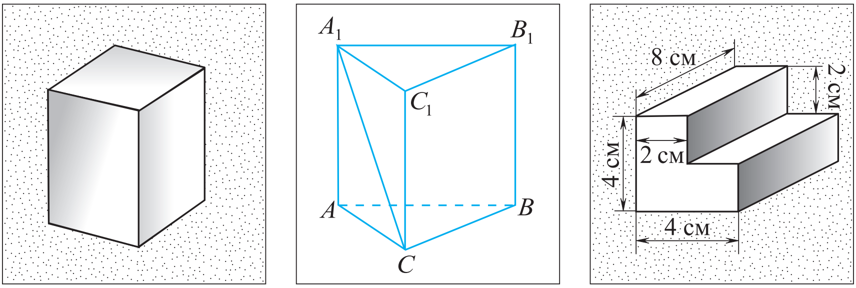
11. Основанием прямой четырехугольной призмы служит прямоугольник, площадь которого равна 48 см^2, а длина одной из сторон — 8 см. Вычислите площадь диагонального сечения призмы, если длина ее бокового ребра равна 10 см.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, основанием которой служит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), один из углов которой равен 60°. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если $AB = BC = 5$ см, а длина бокового ребра призмы равна 2 см.

13. Деревянный брусок имеет форму правильной четырехугольной призмы (рис. 11, *а*). Вычислите площадь боковой грани бруска, если площадь его основания равна 9 см^2, а длина бокового ребра — 4 см.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна 80 см^2. Вычислите радиус окружности, вписанной в основание призмы, если длина ее бокового ребра равна 5 см.

15. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 11, *б*). Вычислите площадь основания призмы, если длина диагонали ее боковой грани равна 10 см, а длина бокового ребра — 6 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 11

16. Площадь основания правильной треугольной призмы равна $\sqrt{3}$ см^2, а длина диагонали боковой грани — $\sqrt{13}$ см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

17. На рисунке 11, *в* изображена деталь, имеющая форму прямой призмы, основания которой — невыпуклые шестиугольники. Вычислите площадь поверхности этой детали с учетом указанных на рисунке размеров.

18. Вычислите длину диагонали правильной четырехугольной призмы, длина стороны основания которой равна 6 см, а длина диагонали боковой грани — 8 см.

19. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна a. Точка T_1 — середина ребра A_1B_1. Четырехугольник CC_1T_1T — сечение призмы плоскостью CC_1T_1, которое разбивает ее на две призмы, основания которой — прямоугольные треугольники. Найдите расстояние от точки B до плоскости CC_1T_1 (рис. 12, *а*, *б*, *в*).

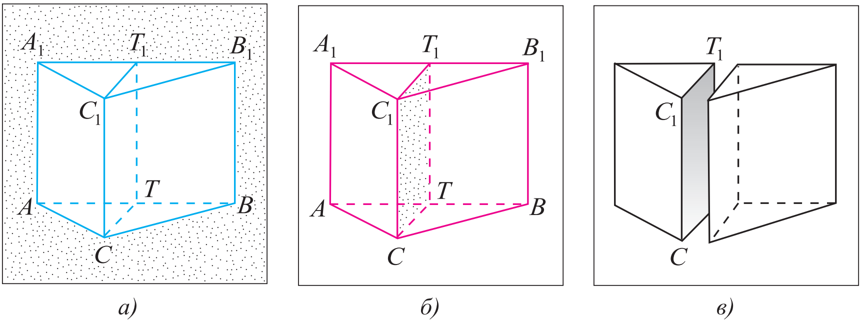


Рис. 12

20. Длина каждого ребра правильной треугольной призмы равна 4 см. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и середину противолежащей стороны основания.

21. Длина стороны основания правильной треугольной призмы равна a, а длина бокового ребра — b. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра.

22. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC. Точка T — середина ребра AC, отрезок BO — высота треугольника TBB_1. Докажите, что $BO \perp (ACB_1)$ (рис. 13, *а*, *б*).

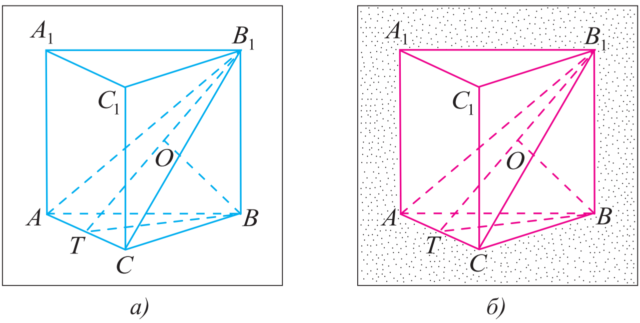


Рис. 13

23. Все ребра правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны между собой. Найдите расстояние от вершины B до плоскости AB_1C, если площадь боковой грани призмы равна S.

24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, основание которой — ромб $ABCD$ (рис. 14, *а*, *б*). а) Найдите расстояние между прямыми B_1D и CC_1, если диагональное сечение AA_1C_1C — квадрат с площадью S. б) Точки T и E — середины сторон AD и DC соответственно. Найдите угол между прямыми TE и B_1D.

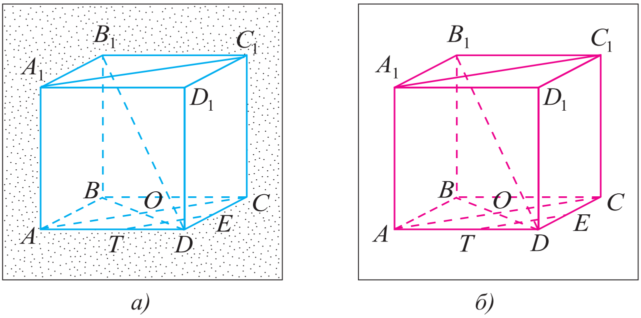


Рис. 14

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма. Длина стороны ромба $ABCD$ равна a, $\angle BAD = 60°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону AD и середину бокового ребра CC_1, если $CC_1 = b$.

26. Через диагональ основания и середину противолежащего ей бокового ребра правильной четырехугольной призмы проведена плоскость под углом $60°$ к плоскости основания. Вычислите площадь сечения и высоту призмы, если длина стороны основания равна $\sqrt{2}$ см.

27. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону одного основания и противолежащую сторону другого основания, если площадь основания призмы равна S.

28. Основание прямой призмы — треугольник, длины сторон которого равны 2 см и 4 см, а угол между этими сторонами — $60°$. Боковая грань, которая содержит сторону, лежащую против угла $60°$, имеет площадь $8\sqrt{3}$ см^2. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

29. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Через ребро BB_1 проведено сечение BB_1O_1O, перпендикулярное плоскости грани AA_1C_1C. Вычислите площадь сечения, если $AA_1 = 4$ см, $AO = 9$ см, $OC = 4$ см.

30. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 4$ см, $CD = 6$ см, $\angle ADC = 120°$. Вычислите площадь поверхности параллелепипеда, если $A_1C = 2\sqrt{23}$ см.

31. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб, длина стороны которого равна 1 см. Через ребра AD и B_1C_1 проведена плоскость, образующая угол $60°$ с плоскостью основания. Вычислите площадь поверхности параллелепипеда, если $\angle BAD = 45°$.

32. В правильной четырехугольной призме площадь диагонального сечения равна S. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

33. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны a и $2a$. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведено сечение. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь сечения равна S.

34. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с углом $30°$. Через катет, противолежащий этому углу, и через противолежащую этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее угол $45°$ с плоскостью основания. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если площадь сечения равна $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ см^2.

35. Основание прямого параллелепипеда — ромб, у которого длина стороны и длина одной из диагоналей равны 2 см. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол $60°$. Вычислите площади диагональных сечений параллелепипеда.

36. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, длина которой равна a, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из сторон основания — угол β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

37. В прямом параллелепипеде длины сторон основания равны 3 см и 6 см, а угол между ними — $60°$. Вычислите длины диагоналей параллелепипеда, зная, что меньшая из них образует с основанием угол $45°$.

38. Высота правильной треугольной призмы равна h. Плоскость α, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол φ. Найдите площадь сечения призмы плоскостью α.

39. Боковое ребро AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образует равные углы со сторонами AB и AD основания. Докажите, что основание высоты этой призмы, проведенной из вершины A_1, лежит на прямой, содержащей биссектрису угла BAD.

40. Основание призмы — равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами AB и AC. Докажите, что $BC \perp AA_1$, CC_1BB_1 — прямоугольник.

41. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Плоскость боковой грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что CC_1B_1B — прямоугольник.

42. Прямоугольник $ABCD$ — основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскости граней AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны плоскости основания. Докажите, что остальные боковые грани — прямоугольники.

43. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ угол между гранями AA_1C_1C и CC_1B_1B — прямой. Вычислите площадь грани CC_1A_1A, если длина бокового ребра равна 10 см, а площади граней AA_1B_1B и CC_1B_1B равны соответственно 130 см^2 и 120 см^2.

44. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC. Найдите площадь боковой грани BCC_1B_1 призмы, если вершина A_1 призмы ортогонально проектируется в центр треугольника ABC, площадь основания призмы равна $4\sqrt{3}$ см^2, $AA_1 = 5$ см.

45. В наклонной треугольной призме угол между двумя боковыми гранями равен $120°$, а площади этих граней равны 5 см^2 и 10 см^2. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра призмы равна 5 см.

46. Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб. Боковое ребро AA_1 составляет равные углы со сторонами AB и AD. Найдите площадь диагонального сечения BB_1D_1D, если $AA_1 = b$, $AD = a$, $\angle BAD = 60°$.

47. Основание наклонного параллелепипеда — ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60°$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$, а плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Найдите площади диагональных сечений, если длина каждого ребра параллелепипеда равна a.

48. Сечением наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна S. Длина бокового ребра призмы равна a. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

49. Вершина одного основания параллелепипеда находится на одинаковом расстоянии от всех вершин другого основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, если основанием параллелепипеда служит квадрат, длина стороны которого равна a, а длина бокового ребра — b.

50. Основание наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — правильный треугольник ABC. Вершина A_1 равноудалена от вершин треугольника ABC. Докажите, что BB_1C_1C — прямоугольник.

51. Основание наклонной треугольной призмы — равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}$ см. Одна из вершин основания одинаково удалена от всех прямых, содержащих стороны другого основания. Боковое ребро призмы составляет с основанием угол $60°$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

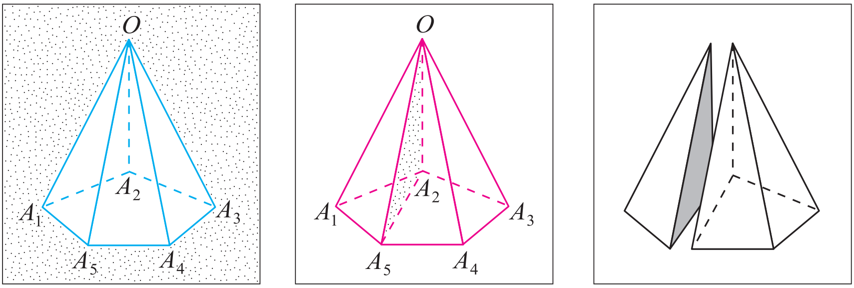
52. В наклонной треугольной призме две боковые грани равны и образуют угол $60°$. Прямая, содержащая общее ребро этих граней, находится на расстоянии a от плоскости, содержащей противолежащую боковую грань. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина ее бокового ребра равна a.

§ 3. Пирамида. Усеченная пирамида

1. Пирамида. В предыдущих классах в процессе решения задач мы познакомились с некоторыми свойствами пирамид. Теперь систематизируем известные вам знания о пирамидах и рассмотрим некоторые другие их свойства.

Определение. **Пирамидой (n-угольной) называется многогранник, у которого одна грань — некоторый n-угольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, а остальные грани — треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 с общей вершиной O. Указанный n-угольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ называется основанием пирамиды, а треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 — боковыми гранями (рис. 15, *а*, *б*).**

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые пирамиды.



а) *б)* *в)*

Рис. 15

Точка O называется *вершиной пирамиды*, точки A_1, A_2, ..., A_n называются *вершинами основания пирамиды*.

Отрезки OA_1, OA_2, ..., OA_n называются *боковыми ребрами пирамиды*.

Пирамида с основанием $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ и вершиной O обозначается $OA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$.

Фигура, образованная всеми гранями пирамиды, называется *полной поверхностью пирамиды*, а фигура, образованная боковыми гранями, — *боковой поверхностью пирамиды*.

Диагональным сечением пирамиды называется сечение ее плоскостью, проходящей через два боковых ребра пирамиды, не лежащих в одной грани. Например, OA_2A_5 — диагональное сечение пирамиды $OA_1A_2A_3A_4A_5$ (см. рис. 15, *б*).

Любое диагональное сечение разбивает выпуклую пирамиду на две пирамиды. Например, диагональное сечение OA_2A_5 разбивает пирамиду $OA_1A_2A_3A_4A_5$ на треугольную и четырехугольную пирамиды $OA_1A_2A_5$ и $OA_2A_3A_4A_5$ (рис. 15, *б*, *в*).

Высотой пирамиды называется перпендикуляр (или длина этого перпендикуляра), проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней (обозначается $S_{\text{бок}}$).

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (обозначается $S_{\text{полн}}$).

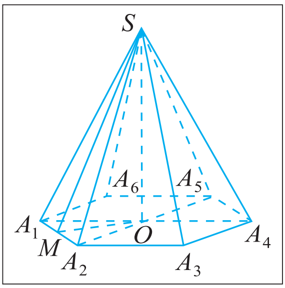
Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковой поверхности и площади основания:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

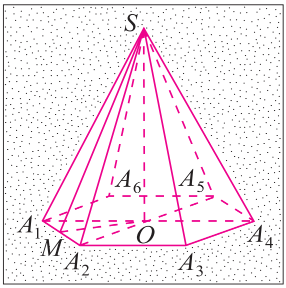
2. Правильная пирамида. Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный n-угольник, а все боковые ребра равны.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная к стороне основания, называется *апофемой правильной пирамиды*.

Теорема 1 (*о высоте правильной пирамиды*). ***В правильной пирамиде отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром ее основания, является высотой пирамиды.***



а)



б)

Рис. 16

Доказательство.

1) Пусть S — вершина правильной прирамиды $SA_1A_2...A_n$, а точка O — центр ее основания (на рисунке 16, *а*, *б* изобра-

жена правильная шестиугольная пирамида). Треугольник SA_1A_2 является равнобедренным, так как пирамида правильная, а, значит, $SA_1 = SA_2$. Треугольник OA_1A_2 является равнобедренным, так как точка O — центр правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$, а, значит, $OA_1 = OA_2$.

2) Пусть точка M — середина отрезка A_1A_2. Тогда $SM \perp A_1A_2$, так как медиана SM равнобедренного треугольника SA_1A_2, проведенная к его основанию A_1A_2, является высотой. Аналогично $OM \perp A_1A_2$, так как OM — медиана равнобедренного треугольника OA_1A_2, проведенная к его основанию A_1A_2.

3) Так как $SM \perp A_1A_2$ и $OM \perp A_1A_2$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая A_1A_2 перпендикулярна плоскости SOM, а, значит, $SO \perp A_1A_2$. Аналогично доказывается, что $SO \perp A_2A_3$.

4) Таким образом, $SO \perp A_1A_2$ и $SO \perp A_2A_3$, следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая SO перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

Теорема доказана.

Теорема 2 (*о площади боковой поверхности правильной пирамиды*). ***Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему*** $\left(S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l\right)$.

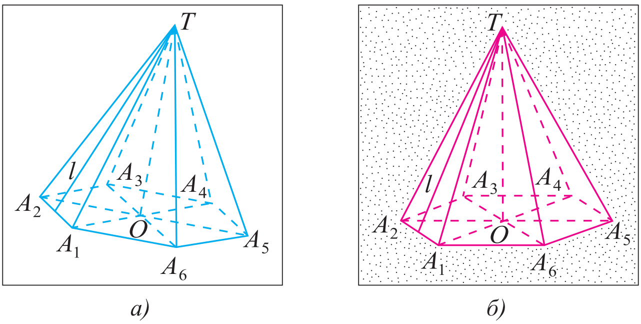


Рис. 17

Доказательство.

Пусть $TA_1A_2...A_n$ — правильная n-угольная пирамида (на рисунке 17, *а*, *б* изображена правильная шестиугольная пирамида), $S_{бок}$ — площадь ее боковой поверхности, $P_{осн}$ — периметр основания и l — ее апофема. Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме l.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей указанных равнобедренных треугольников, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot l + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot l + \ldots + \frac{1}{2}A_{n-2}A_{n-1} \cdot l + \frac{1}{2}A_{n-1}A_n \cdot l +$$

$$+ \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot l = \frac{1}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}A_n + A_nA_1)l =$$

$$= \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot l.$$

Теорема доказана.

Задача 1. Если в пирамиде все боковые ребра равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около многоугольника, служащего основанием пирамиды. Докажите.

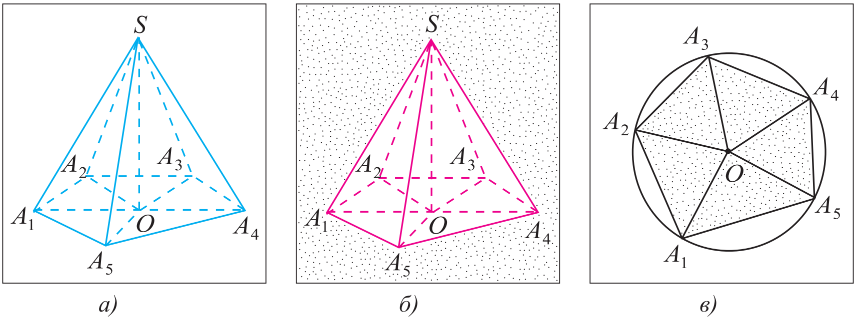


Рис. 18

Доказательство.

Пусть $SA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ — правильная пирамида, у которой $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$. Точка O — основание высоты пирамиды (на рисунке 18, *а*, *б* изображена пятиугольная пирамида). Докажем, что точка O есть центр окружности, описанной около многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ (рис. 18, *в*). Для этого достаточно доказать, что точка O равноудалена от вершин A_1, A_2, A_3, ..., A_n основания пирамиды. Отрезки OA_1, OA_2, OA_3, ..., OA_n равны, так как являются проекциями равных наклонных SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n. Следовательно, точка O является центром окружности, описанной около основания $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ пирамиды.

Задача 2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, длина основания которого равна 6 см и высота 9 см. Вычислите высоту пирамиды, если длина каждого бокового ребра равна 13 см.

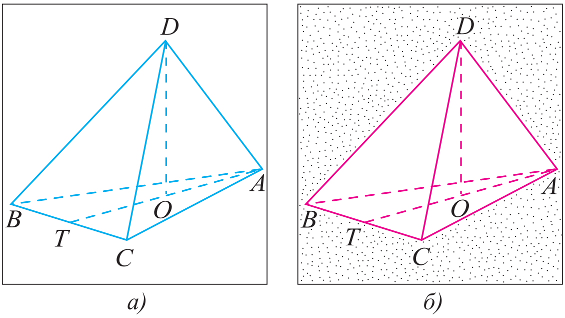


Рис. 19

Дано:
$DABC$ — пирамида,
$DA = DB = DC = 13$ см,
$AT \perp BC$, $AT = 9$ см,
$BC = 6$ см, $AB = AC$
(рис. 19, *а*, *б*).

Найти: DO.

Решение.

1) Так как боковые ребра пирамиды равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. Высоту DO можно найти из прямоугольного треугольника AOD. Для этого достаточно найти AO.

2) В треугольнике ABC имеем: $AO = R_{ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$. Значит, необходимо найти длину стороны AB и площадь S_{ABC}.

3) В треугольнике ATB ($\angle ATB = 90°$, $AT = 9$ см, $BT = 3$ см) длина гипотенузы $AB = \sqrt{AT^2 + BT^2} = 3\sqrt{10}$ (см).

4) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AT = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$ (см^2). Таким образом,

$$AO = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{3\sqrt{10} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{10}}{4 \cdot 27} = 5 \text{ (см)}.$$

5) Из треугольника AOD ($\angle AOD = 90°$, $AD = 13$ см, $AO = 5$ см) найдем длину катета $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

3. Усеченная пирамида. Рассмотрим понятие усеченной пирамиды.

Определение. Пусть плоскость β параллельна плоскости α основания пирамиды $OA_1A_2A_3...A_n$ и пересекает ее боковые ребра OA_1, OA_2, ..., A_n соответственно в точках B_1,

B_2, ..., B_n (рис. 20, *а*). Многогранник, гранями которого являются два *n*-угольника $A_1A_2A_3...A_n$, $B_1B_2B_3...B_n$ и *n* четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$, называется усеченной пирамидой (рис. 20, *б*, *в*).

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются *боковыми ребрами* усеченной пирамиды.

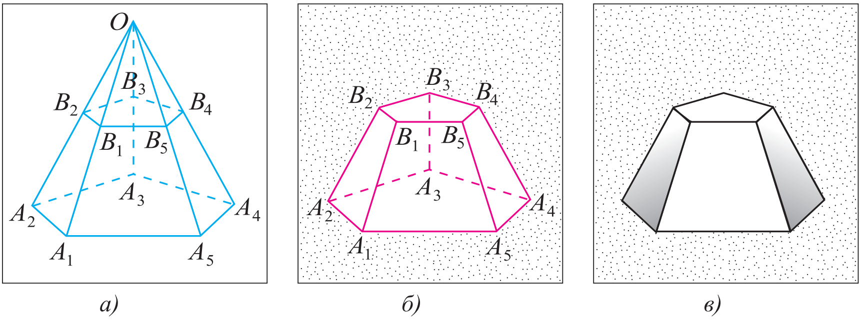


Рис. 20

Два *n*-угольника $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$ называются *основаниями усеченной пирамиды*, а четырехугольники $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — ее *боковыми гранями*.

Усеченная пирамида с основаниями $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$ обозначается $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2B_3...B_n$.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр (или длина этого перпендикуляра), проведенный из какой-нибудь точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями.

Докажем, например, что четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — трапеция. Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, так как лежат на прямых, по которым плоскость OA_1A_2 пересекает параллельные плоскости α и β (см. рис 20, *а*). Прямые, на которых лежат стороны A_1B_1 и A_2B_2, пересекаются в точке O. Следовательно, четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — трапеция. Аналогично можно доказать, что остальные боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является многогранником, который отсекается плоскостью, параллельной основанию правильной пирамиды.

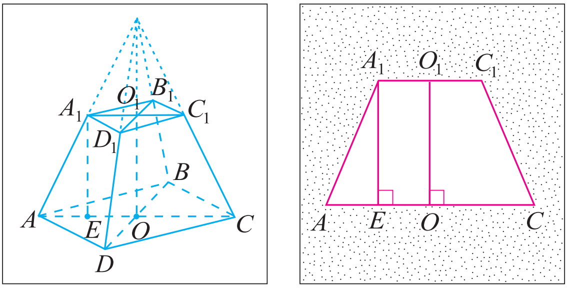
Основания правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равнобедренные трапеции.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота ее боковой грани.

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Задача 3. Длины сторон оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и $2a$, боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите высоту пирамиды.



а) *б)*

Рис. 21

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная пирамида, точки O, O_1 — центры ее оснований, $AB = 2a$, $A_1B_1 = a$, $\angle A_1AO = \varphi$.

Найти: O_1O.

Решение.

1) Отрезок OO_1 лежит на высоте соответствующей неусеченной пирамиды (рис. 21, *а*), следовательно, $OO_1 \perp (ABC)$. Проведем $A_1E \perp AC$, $E \in AC$, тогда $O_1O = A_1E$. Длину отрезка A_1E можно найти из треугольника A_1EA. Для этого достаточно найти AE ($A_1E = AE \operatorname{tg} \varphi$).

2) В треугольнике ADC ($\angle ADC = 90°$, $AD = DC = 2a$) длина гипотенузы $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}$.

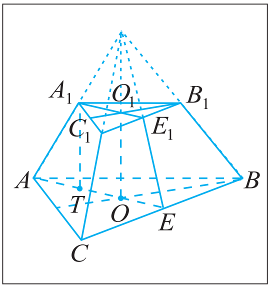
3) Из треугольника $A_1D_1C_1$ ($\angle A_1D_1C_1 = 90°$, $A_1D_1 = D_1C_1 = a$) $A_1C_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1C_1^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

4) $AE = AO - A_1O_1 = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 21, *б*).

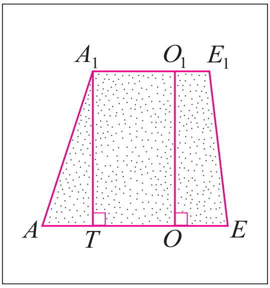
5) В треугольнике A_1EA $\left(\angle A_1EA = 90°,\ \angle A_1AE = \varphi,\ AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ длина катета $A_1E = AE \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

Задача 4. В правильной треугольной усеченной пирамиде длина стороны большего основания равна a, а длина стороны меньшего основания — b, боковое ребро образует с основанием острый угол φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро и центр нижнего основания.



а)



б)

Рис. 22

Дано:
$ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида, $AC = a$,
$A_1C_1 = b$,
$\angle A_1AO = \varphi$.

Найти: $S_{\text{сеч}}$.

Решение.

1) Секущая плоскость, проходящая через ребро AA_1 и центр O основания ABC, пересекает нижнее и верхнее основания по отрезкам AE и A_1E_1 соответственно (точки E и E_1 — середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно). Четырехугольник AA_1EE_1 — искомое сечение (рис. 22, *а*, *б*).

2) Сечение AA_1EE_1 — трапеция ($AE \parallel A_1E_1$, отрезки AA_1 и EE_1 лежат на прямых, которые пересекаются). Проведем $A_1T \perp AE$, $T \in AE$. Тогда $S_{AA_1E_1E} = \dfrac{AE + A_1E_1}{2} A_1T$.

3) В треугольнике AEC $\left(\angle AEC = 90°,\ AC = a,\ CE = \dfrac{a}{2}\right)$ длина катета $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

4) Из треугольника $A_1E_1C_1$ $\left(\angle A_1E_1C_1 = 90°,\ A_1C_1 = b,\ C_1E_1 = \dfrac{b}{2}\right)$ длина катета $A_1E_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - C_1E_1^2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

5) $AT = AO - TO = AO - A_1O_1 = \dfrac{2}{3}AE - \dfrac{2}{3}A_1E_1 = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{3}$ (точки O и O_1 — центры оснований пирамиды) (см. рис. 22, *а*, *б*).

6) В треугольнике A_1TA $\left(\angle A_1TA = 90°,\ AT = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{3},\right.$ $\left.\angle A_1AT = \varphi\right)$ длина катета $A_1T = AT\,\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}\,\varphi$.

7) Теперь найдем площадь сечения $S_{AA_1E_1E} = \frac{AE + A_1E_1}{2} A_1T =$
$$= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3} \text{tg}\varphi = \frac{a^2 - b^2}{4} \text{tg}\varphi.$$

Ответ: $\frac{a^2 - b^2}{4} \text{tg}\varphi$.

Решите самостоятельно следующую задачу.

Задача 5. Докажите, что площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований P_1 и P_2 на апофему l, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Вопросы и задачи к § 3

53. Какой многогранник называется пирамидой? Сколько граней имеет n-угольная пирамида?

54. Верно ли, что пирамида, основанием которой служит правильный треугольник, является правильной?

55. Верно ли, что каждое диагональное сечение пирамиды является равнобедренным треугольником?

56. Диагональное сечение четырехугольной пирамиды является равнобедренным треугольником. Верно ли, что такая пирамида является правильной?

57. Верно ли, что все боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками?

58. Каким свойством обладает отрезок, соединяющий вершину правильной пирамиды с центром ее основания?

59. Отрезок, соединяющий вершину четырехугольной пирамиды с точкой пересечения диагоналей ее основания, является высотой пирамиды. Верно ли, что такая пирамида является правильной?

60. Что называется высотой усеченной пирамиды? Верно ли, что расстояние между плоскостями, в которых лежат основания усеченной пирамиды, равно высоте усеченной пирамиды?

61. Верно ли, что все боковые грани правильной усеченной пирамиды являются равнобедренными трапециями?

62. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат, $AD = 3$ см, $D_1C = 5$ см. Вычислите высоту пирамиды B_1ABD (рис. 23, *а*).

63. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. а) Верно ли, что отрезок D_1A_1 служит высотой пирамиды $D_1ABA_1B_1$? б) Верно ли, что пирамида D_1ABCD является правильной?

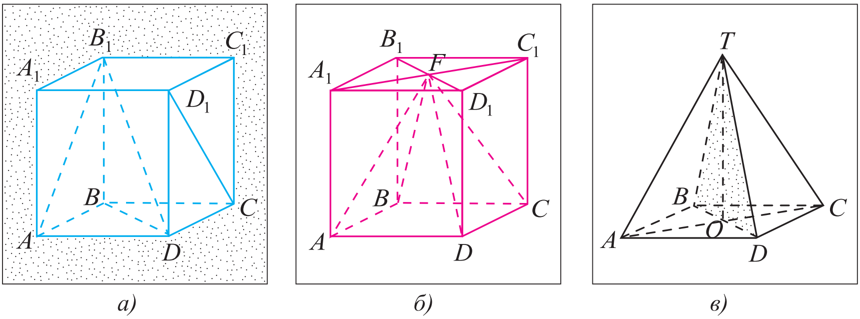


Рис. 23

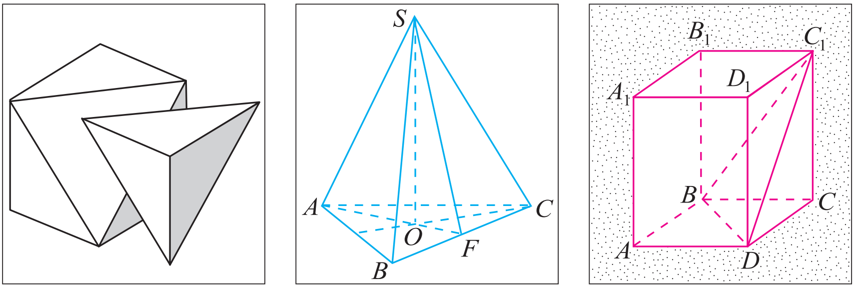
64. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, F — точка пересечения диагоналей основания $A_1B_1C_1D_1$. а) Поясните, почему пирамида $FABCD$ является правильной. б) Вычислите длину бокового ребра этой пирамиды, если длина диагонали основания призмы равна 12 см, а длина бокового ребра призмы — 8 см (рис. 23, *б*).

65. Вычислите площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды $FABCD$, если площадь ее основания равна 144 см^2, а длина бокового ребра — 10 см.

66. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$ равна 5 см, длина диагонали ее основания — 6 см. Вычислите: а) площадь основания пирамиды; б) площадь диагонального сечения пирамиды (рис. 23, *в*).

67. Диагонали основания $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Вычислите высоту пирамиды $OA_1B_1C_1D_1$, если площадь грани куба равна 16 см^2.

68. От модели куба отпилена часть, являющаяся моделью правильной треугольной пирамиды, как показано на рисунке 24, *а*. Вычислите площадь поверхности модели пирамиды, если площадь грани модели куба равна 4 см^2.



а) *б)* *в)*

Рис. 24

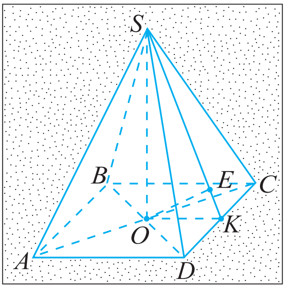
69. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, у которой апофема равна стороне основания. Вычислите площадь боковой грани пирамиды, если площадь ее основания равна $\sqrt{3}$ см^2 (рис. 24, *б*).

70. $DABC$ — правильная треугольная пирамида. Вычислите площадь основания пирамиды, если известно, что $\angle DCB = 60°$ и $DC = 2$ см.

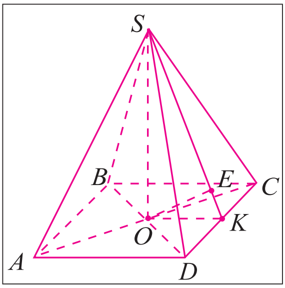
71. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат, длина стороны которого равна 2 см (рис. 24, *в*). Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды $CBDC_1$, если длина бокового ребра призмы равна 4 см.

72. Длина бокового ребра правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4 см. Вычислите периметр основания пирамиды $ABDA_1$, если площадь основания данной призмы равна 9 см^2.

73. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол 30°. Вычислите высоту пирамиды, если площадь диагонального сечения равна $4\sqrt{3}$ см^2.



а)



б)

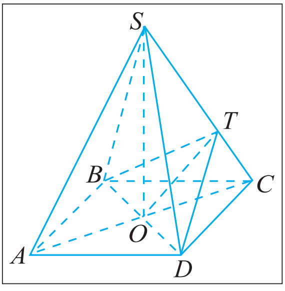
Рис. 25

74. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точка K — середина ребра DC, $OE \perp SK$ ($E \in SK$). Диагонали основания пирамиды пересекаются в точке O (рис. 25, *а*, *б*). а) Верно ли, что боковые ребра SA, SB, SC, SD одинаково наклонены к плоскости основания? б) Докажите, что $OE \perp (SDC)$.

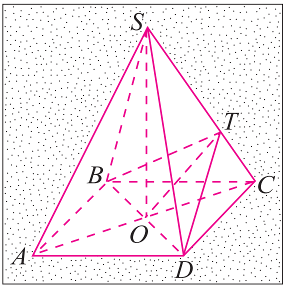
75. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ диагонали основания пирамиды пересекаются в точке O, высота равна 4 см, а ее апофема — 5 см. Вычислите длину высоты пирамиды $CSOD$, проведенной из вершины C.

76. Длина каждого ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна a, диагонали основания пирамиды пересекаются в точке O. Найдите высоту пирамиды $OSCD$, проведенную из вершины O.

77. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, диагонали основания которой пересекаются в точке O, $OT \perp SC$, $T \in SC$ (рис. 26, *а*, *б*). а) Докажите, что $SC \perp (BTD)$. б) Верно ли, что $\angle BTD$ — линейный угол двугранного угла $BSCD$?



а)



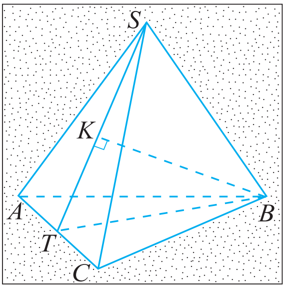
б)

Рис. 26

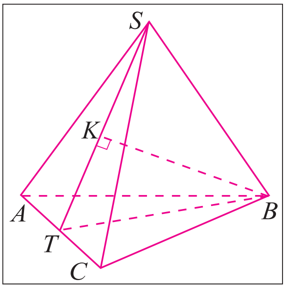
78. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро, длина которого равна b, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и перпендикулярной боковому ребру пирамиды.

79. $SABC$ — правильная треугольная пирамида, точка T — середина ребра AC, $BK \perp ST$ (рис. 27, *а*, *б*). а) Докажите, что $BK \perp (SAC)$. б) Верно ли, что $\angle STB$ является линейным углом двугранного угла $SACB$?

80. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, а высота равна H. Найдите расстояние от центра основания до плоскости, в которой лежит боковая грань пирамиды.



а)



б)

Рис. 27

81. В правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра равна 4 см и оно составляет с основанием пирамиды угол 60°. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и перпендикулярной противолежащему боковому ребру.

82. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, а длина бокового ребра — $2a$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и перпендикулярной противолежащему боковому ребру.

83. Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Боковые ребра пирамиды равны друг другу. Вычислите длину бокового ребра пирамиды, если $AB = 10$ см, а высота пирамиды равна 12 см.

84. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, длина основания которого равна 2 см, а высота, проведенная к основанию, — 3 см. Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 4 см. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

85. Основание пирамиды — треугольник, длина одной из сторон которого равна a, а угол, лежащий против нее, равен φ. Найдите высоту пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна b.

86. Докажите, что если в пирамиде все двугранные углы при ребрах основания равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в многоугольник, служащий основанием.

87. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого 10 см, а угол — $30°$. Каждый двугранный угол при ребре основания пирамиды равен $45°$. Вычислите высоту пирамиды.

88. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого длина основания равна 6 см, а длина боковой стороны — 5 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если каждый двугранный угол при основании пирамиды равен $45°$.

89. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого 3 см и 4 см. Двугранный угол при каждом ребре основания пирамиды равен $60°$. Вычислите высоту пирамиды.

90. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Докажите, что основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около многоугольника, служащего основанием пирамиды.

91. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $30°$, а длина противолежащего ему катета равна a. Боковые ребра пирамиды наклонены к ее основанию под углом $60°$. Найдите высоту пирамиды.

92. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $60°$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна a.

93. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого угол при основании 30° и высота, проведенная к основанию, равна a. Найдите высоту пирамиды, если боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°.

94. Основание пирамиды — ромб, длина стороны которого равна 8 см, а один из углов равен 60°. Вычислите длины боковых ребер пирамиды, если основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей основания пирамиды, а высота пирамиды равна 4 см.

95. Основание пирамиды — ромб, длина стороны которого — 6 см, а один из углов 60°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если основание высоты совпадает с точкой пересечения диагоналей основания пирамиды и высота пирамиды равна 3 см.

96. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна b, а ребро наклонено к основанию под углом φ. Найдите апофему пирамиды.

97. Основание пирамиды — параллелограмм, длины сторон которого равны 10 см и 18 см, а площадь равна 90 см^2. Основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей основания пирамиды, а высота пирамиды равна 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

98. Основание пирамиды — параллелограмм, длины сторон которого 10 см и 8 см, а длина меньшей диагонали — 6 см. Основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей основания пирамиды, а высота пирамиды равна 4 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

99. В правильной четырехугольной пирамиде длина бокового ребра равна b, а высота равна H. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания.

100. В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна a, плоский угол при вершине равен 2φ. Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

101. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, высота равна H. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

102. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна a, высота равна $2a$. Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

103. Докажите, что если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то: а) в сечении получается многоугольник, подобный основанию; б) площади сечения и основания относятся как квадраты расстояний от вершины пирамиды до плоскостей, в которых расположены сечение и основание пирамиды.

104. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 5 см, а длина одного из катетов — 3 см. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты и параллельной ее основанию.

105. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее высоту в отношении $2 : 3$ (считая от вершины). Вычислите площадь сечения, если она меньше площади основания на 42 см^2.

106. На каком расстоянии от вершины пирамиды, высота которой 6 см, надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения этой плоскостью была в 4 раза меньше площади основания?

107. Длины сторон оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 6 см и 12 см, а ее высота — 1 см. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

108. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Длины сторон оснований равны 10 см и 2 см. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

109. Вычислите длины сторон оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если ее высота 7 см, длина бокового ребра — 9 см, а длина диагонали — 11 см.

110. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде площади оснований равны S и Q $(S < Q)$, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол $45°$. Найдите площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

111. Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол $60°$. Вычислите высоту пирамиды.

112. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты, длины сторон которых a и b ($a > b$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите двугранные углы при сторонах большего основания.

113. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде высота равна H, а длина диагонали — a, двугранный угол при нижнем основании равен α. Найдите длины сторон оснований пирамиды.

114. Каждый двугранный угол при основании пирамиды равен φ. Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды $S_{\text{бок}}$ находится по формуле $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды.

115. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, боковая поверхность которой равна S, а боковая грань наклонена к ее основанию под углом $30°$.

116. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Сечение, проведенное через одну из вершин основания, перпендикулярно противолежащему боковому ребру и делит его пополам. Найдите площадь сечения.

117. Площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды равна S. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды и параллельной ее боковой грани.

118. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды, длина стороны которого равна a, проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру и делящая это ребро в отношении $1 : 2$ (считая от вершины). Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

119. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен 2φ. Найдите площадь основания пирамиды.

120. В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен 2φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

121. Основанием пирамиды является трапеция, длины параллельных сторон которой равны a и $2a$, а один из ее углов равен $60°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота $\frac{a}{2}$, а боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания.

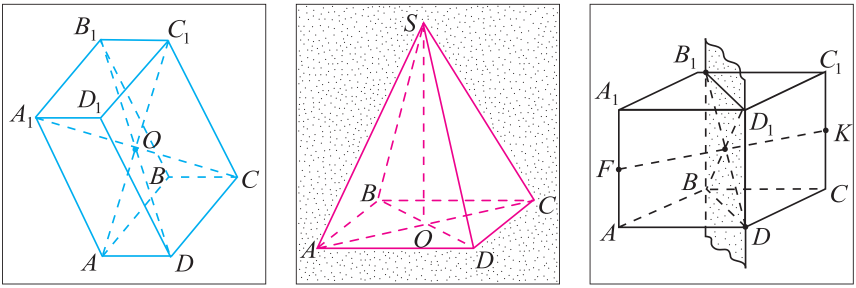
122. Длина бокового ребра правильной треугольной усеченной пирамиды равна 14 см, а длины сторон оснований — 8 см и 12 см. Вычислите площадь сечения плоскостью, проходящей через сторону большего основания и противолежащую ей вершину другого основания.

§ 4. Правильные многогранники

Среди окружающих нас форм живой и неживой природы часто встречаются совершенные, удивляющие своей красотой благодаря присущей им симметрии. К их числу относятся и различные кристаллы, имеющие форму многогранников, в частности правильных многогранников. Прежде чем перейти к изучению вопросов о правильных многогранниках, напомним некоторые понятия.

Определение. **Точки M и M_1 называются симметричными относительно точки O, если O является серединой отрезка MM_1.**

Например, вершины A и C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ симметричны относительно точки O пересечения его диагоналей (рис. 28, *а*). Действительно, $AO = OC_1$, так как диагонали параллелепипеда точкой пересечения делятся пополам.



а) *б)* *в)*

Рис. 28

Определение. **Точки M и M_1 называются симметричными относительно прямой l, если прямая l проходит через середину отрезка MM_1 и перпендикулярна ему.**

Например, вершины B и D правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ симметричны относительно прямой SO, где O — точка пересечения диагоналей основания пирамиды (рис. 28, *б*).

В самом деле, прямая SO перпендикулярна плоскости основания, а следовательно, и отрезку BD. Кроме того, точка O есть точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, а значит, точка O — середина отрезка BD.

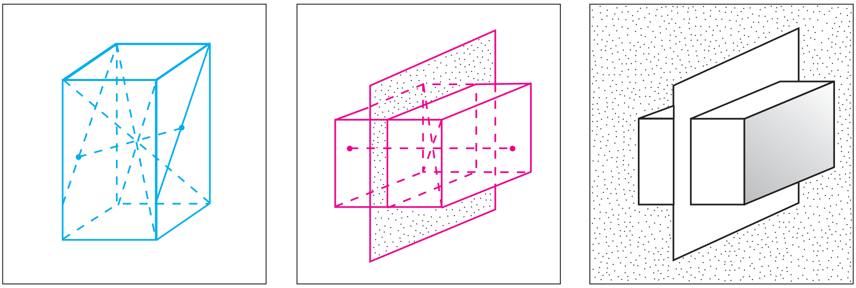
Определение. **Точки M и M_1 называются симметричными относительно плоскости α, если плоскость α проходит через середину отрезка MM_1 и перпендикулярна этому отрезку.**

Например, середины F и K соответственно ребер AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ симметричны относительно плоскости, в которой лежит диагональное сечение BB_1D_1D (рис. 28, *в*).

Определение. **Точка O (прямая l, плоскость α) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно точки O (прямой l, плоскости α) некоторой точке этой же фигуры.**

Например, точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда является его центром симметрии (рис. 29, *а*).

Плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда и параллельная какой-нибудь грани, есть одна из его плоскостей симметрии (рис. 29, *б*, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 29

Определение. **Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — равные между собой правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.**

Например, куб — правильный многогранник. Все грани куба — равные квадраты (правильные четырехугольники), а в каждой его вершине сходится три ребра.

Многогранник $ABCD$, вершинами которого являются концы двух скрещивающихся диагоналей противолежащих граней куба, является правильным (тетраэдр) (рис. 30, *а*, *б*, *в*).

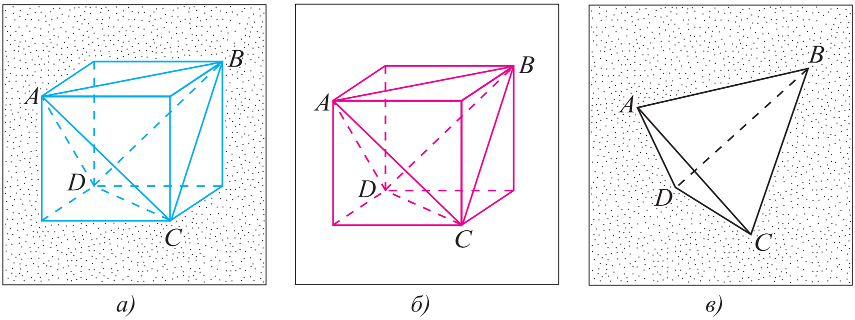


Рис. 30

Каждая его грань — равносторонний треугольник, а в каждой вершине сходится три ребра.

Существует всего пять видов правильных многогранников. Для того чтобы установить это, заметим, что можно доказать следующее свойство: *в выпуклом многограннике сумма градусных мер всех плоских углов при каждой вершине меньше* $360°$.

Можно доказать, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geqslant 6$. Действительно, угол $\frac{180°(n-2)}{n}$ правильного n-угольника при $n \geqslant 6$ не меньше $120°$. Если бы существовал правильный многогранник, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geqslant 6$, то сумма градусных мер всех плоских углов при каждой вершине была бы не меньше $360°$ (при каждой вершине многогранника не меньше трех плоских углов), а это противоречит сформулированному свойству плоских углов при вершине выпуклого многогранника.

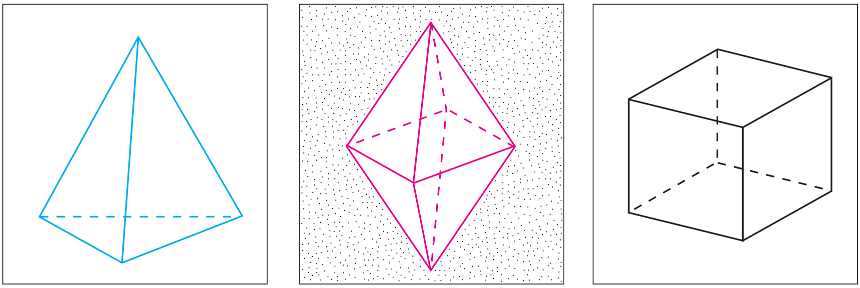
Каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной: а) трех, четырех или пяти равносторонних треугольников; б) трех квадратов; в) трех правильных пятиугольников.

Таким образом, существуют следующие виды правильных многогранников: *тетраэдр*, *куб*, *октаэдр*, *икосаэдр*, *додекаэдр*.

Поверхность *тетраэдра* (рис. 31, *а*) образована четырьмя равносторонними треугольниками, а каждая его вершина является вершиной трех треугольников.

Поверхность *октаэдра* (рис. 31, *б*) состоит из восьми равносторонних треугольников, а каждая его вершина является вершиной четырех треугольников.

Поверхность *куба* (рис. 31, *в*) образована шестью равными квадратами. Каждая вершина *куба* является вершиной трех квадратов.

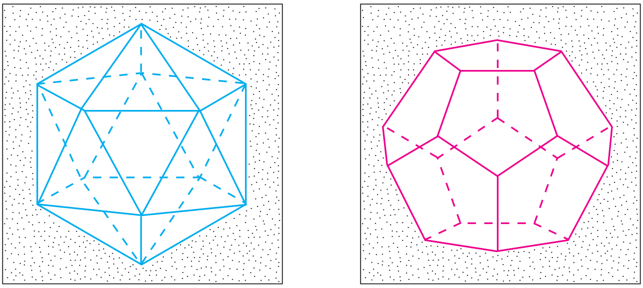


а) *б)* *в)*

Рис. 31

Поверхность *икосаэдра* (рис. 32, *а*) составлена из двадцати равных равносторонних треугольников. Каждая вершина *икосаэдра* является вершиной пяти равносторонних треугольников.

Поверхность *додекаэдра* (рис. 32, *б*) составлена из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников.



а) *б)*

Рис. 32

В переводе с греческого названия *тетраэдр*, *октаэдр*, *додекаэдр*, *икосаэдр* означают соответственно *четырехгранник, восьмигранник, двенадцатигранник, двадцатигранник.*

Факт существования пяти правильных многогранников был установлен еще во времена древних греков. Впервые исследованные пифагорейцами, эти пять правильных многогранников были впоследствии описаны Платоном и стали называться Платоновыми телами.

Каждый правильный многогранник обладает определенными элементами симметрии. Например, прямая, проходящая через середины противолежащих ребер тетраэдра, является его осью симметрии.

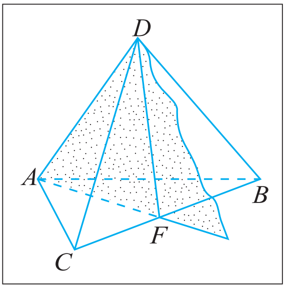
Можно доказать, что тетраэдр имеет три оси симметрии.

Плоскостью симметрии для тетраэдра является плоскость, проходящая через некоторое ребро и перпендикулярная противолежащему ребру. Тетраэдр имеет шесть плоскостей симметрии.

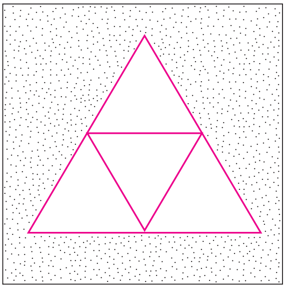
Например, если $DABC$ — тетраэдр, а точка F — середина ребра BC, тогда плоскость ADF есть плоскость симметрии тетраэдра $DABC$. Действительно, при симметрии относительно плоскости ADF образами вершин A и D являются соответственно вершины A и D, так как они лежат в плоскости ADF, а значит, каждая из них отображается сама в себя. Вершины C и B при симметрии относительно плоскости ADF отображаются одна в другую, так как $CB \perp (ADF)$ и $CF = FB$. Следовательно, при симметрии относительно плоскости ADF образом тетраэдра $DABC$ является сам этот тетраэдр, т. е. он симметричен относительно плоскости ADF (рис. 33, *а*).

Можно доказать, что куб имеет центр симметрии, которым является точка пересечения его диагоналей. Осями симметрии куба являются прямые, проходящие через центры противолежащих граней, а также прямые, проходящие через середины противолежащих ребер куба. Таким образом, куб имеет всего девять осей симметрии. Плоскостей симметрии у куба также всего девять.

Форму куба имеют кристаллы поваренной соли, а кристаллы пирита имеют форму правильных додекаэдров. Благодаря элементам симметрии правильные многогранники обладают особенной красотой, а их свойства находят применение в архитектуре и строительстве, используются при изучении структур различных веществ, так как симметрия правильных многогранников проявляется в атомных структурах молекул и кристаллов.



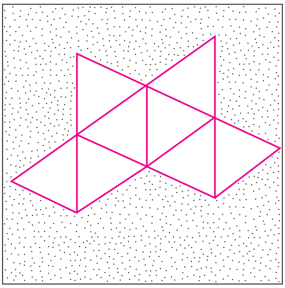
а)



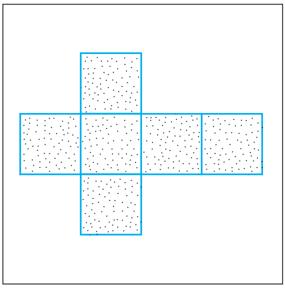
б)

Рис. 33

Модели поверхностей правильных многогранников можно склеить из плотной бумаги или картона, воспользовавшись для этого развертками этих многогранников. На рисунке 33, *б* изображена развертка тетраэдра, а на рисунках 34, *а* и 34, *б* изображены соответственно развертки октаэдра и куба. Перечертив эти развертки на лист плотной бумаги в большем масштабе и сделав необходимые припуски для склеивания, вы можете склеить модели поверхностей соответствующих правильных многогранников.



а)



б)

Рис. 34

Задачи к § 4

123. Длина ребра куба равна a. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются центры трех попарно смежных граней.

124. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Площадь поверхности тетраэдра ACB_1D_1 равна $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите площадь поверхности куба.

125. Длина ребра куба равна a. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины всех ребер куба.

126. Площадь поверхности октаэдра, вершинами которого являются точки пересечения диагоналей граней куба, равна $8\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину ребра куба.

127. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины D проведены диагонали DC_1, DA_1 и DB граней. Найдите отношение площади поверхности куба к поверхности пирамиды DBA_1C_1.

128. Вычислите угол между двумя ребрами октаэдра, которые имеют общую вершину, но не лежат в одной грани.

129. Длина ребра октаэдра равна a. Найдите расстояние между двумя его противолежащими вершинами.

130. Длина ребра октаэдра равна a. Найдите площади сечений этого октаэдра его плоскостями симметрии.

2

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

Глава 2
ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

§ 1. Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда

Из курса планиметрии известно понятие площади многоугольника.

Площадь — это положительная величина, определенная для каждого многоугольника, числовое значение которой обладает свойствами:

а) *равные многоугольники имеют равные площади*;

б) *если многоугольник есть объединение конечного числа многоугольников, каждые два из которых не имеют общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников*;

в) *площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения длины, равна единице.*

Каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы площади, т. е. площади квадрата, стороной которого служит единица измерения длины. Площадь может измеряться в квадратных сантиметрах ($см^2$), в квадратных метрах ($м^2$), в квадратных километрах ($км^2$) и т. д.

Аналогично для многогранников в пространстве вводится понятие объема.

Объем — это положительная величина, определенная для каждого из многогранников, числовое значение которой имеет следующие свойства:

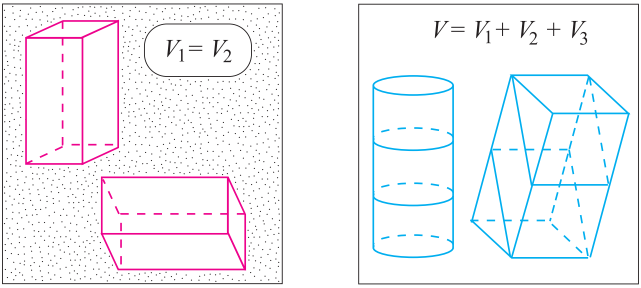
а) *равные многогранники имеют равные объемы* (рис. 35, *а*);

б) *если многогранник есть объединение конечного числа многогранников, каждые два из которых не имеют общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов этих многогранников* (рис. 35, *б*);

в) *объем куба, ребро которого равно единице измерения длины, равен единице.*

Объем многогранников измеряется с помощью выбранной единицы объема, т. е. объема куба, ребром которого служит единица измерения длины.

На практике объем измеряется в различных единицах измерения: в кубических сантиметрах ($см^3$), в кубических метрах ($м^3$), в кубических километрах ($км^3$) и т. д.



а) *б)*

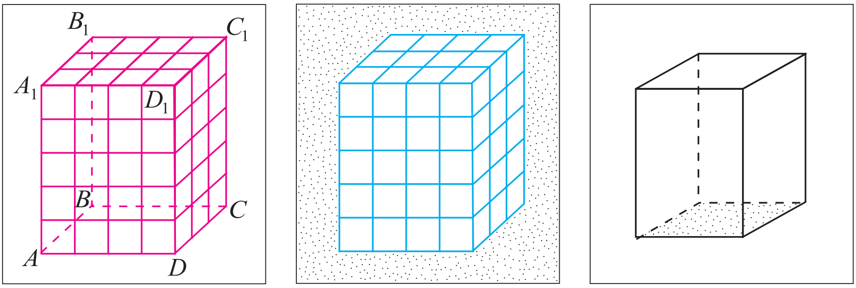
Рис. 35

Заметим, что из определения объема многогранников еще не следует существование объема для каждого многогранника и его единственность. Необходимо доказать, во-первых, что на множестве многогранников существует положительная величина, обладающая указанными свойствами, и, во-вторых, что такая величина единственная. Доказательство существования и единственности функции объема на множестве многогранников здесь не рассматривается по причине его громоздкости в рамках школьного курса. Далее мы изучим вопрос о нахождении объемов некоторых многогранников.

В практической деятельности человек часто встречается с необходимостью вычисления объемов, например при изготовлении каких-либо деталей или при строительстве различных сооружений. Многие строительные объекты и детали конструкций имеют форму геометрических тел: параллелепипедов, призм, пирамид и т. д., поэтому представляет интерес вопрос о том, как вычислять объемы многогранников, выражая их через другие величины, характеризующие эти многогранники.

В дальнейшем мы познакомимся с правилами вычисления объемов призмы и пирамиды, а сейчас рассмотрим вопрос вычисления объема прямоугольного параллелепипеда.

Теорема *(об объеме прямоугольного параллелепипеда).* ***Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. если V — объем прямоугольного параллелепипеда, а a, b, c — его измерения, то $V = abc$.***



а) *б)* *в)*

Рис. 36

Доказательство.

Возможны три случая длин ребер прямоугольного параллелепипеда.

1) Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 36, *а*, *б*) — натуральные числа a, b, c ($AB = a$, $AA_1 = b$, $AD = c$). Разделим ребра AB, AA_1, AD соответственно на a, b, c равных частей. Через точки деления проведем плоскости, параллельные граням AA_1D_1D, $ABCD$ и AA_1B_1B соответственно. Тогда данный параллелепипед разбивается на $a \cdot b \cdot c$ кубиков, у каждого из которых длина ребра равна 1. Значит, данный параллелепипед разбит на $a \cdot b \cdot c$ кубов единичного объема.

По второму свойству объемов объем параллелепипеда равен $a \cdot b \cdot c$.

2) Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда есть рациональные числа. Не нарушая общности, можем считать, что $a = \frac{m}{q}$, $b = \frac{n}{q}$, $c = \frac{p}{q}$, где m, n, p, q есть натуральные числа. Разобьем данный параллелепипед на единичные кубы, длина ребра каждого из которых равна $\frac{1}{q}$. Параллелепипед содержит $m \cdot n \cdot q$ таких кубов, объем каждого из которых равен $\frac{1}{q^3}$. Следовательно, объем параллелепипеда равен $mnp \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{m}{q} \cdot \frac{n}{q} \cdot \frac{p}{q} = abc$.

3) Можно доказать, что эта теорема верна и для случая, когда длина хотя бы одного из ребер есть число иррациональное.

Следствие. **Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту (рис. 36, *в*).**

Вопросы и задачи к § 1

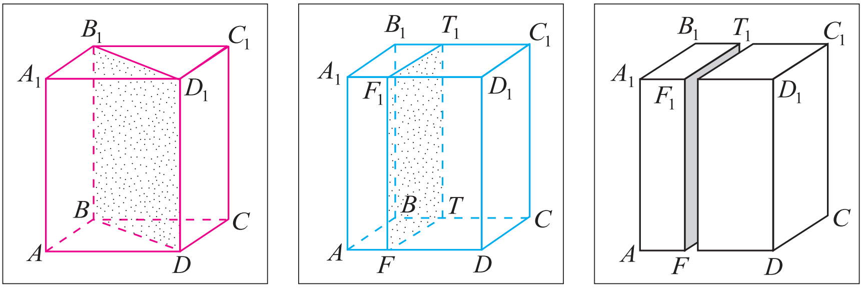
131. Какими свойствами обладает объем геометрического тела?

132. Каким образом вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда?

133. Верно ли, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его грани на длину перпендикулярного ей ребра?

134. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, длина стороны которого равна 3 см. Вычислите объем параллелепипеда, если длина его бокового ребра равна 10 см.

135. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если его основанием служит квадрат $ABCD$, длина ребра CC_1 равна 2 см, а площадь диагонального сечения BB_1D_1D равна 16 см^2 (рис. 37, *а*).



а) *б)* *в)*

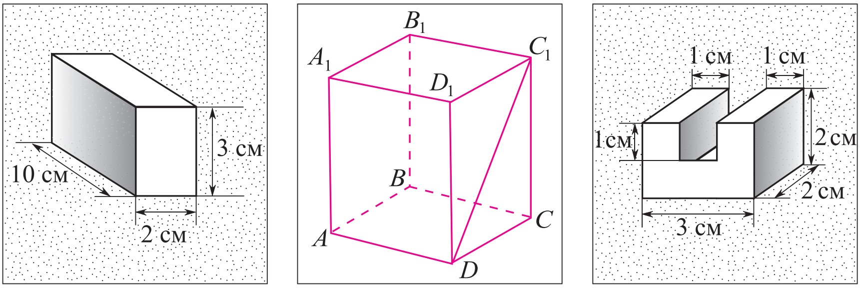
Рис. 37

136. Четырехугольник FF_1T_1T — сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью параллельной грани AA_1B_1B (рис. 37, *б*, *в*). Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда $FTCDF_1T_1C_1D_1$, если объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 18 см^3, а объем параллелепипеда $ABTFA_1B_1T_1F_1$ составляет третью часть объема параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

137. Длина диагонали боковой грани прямого параллелепипеда равна 10 см, а площадь квадрата, который служит основанием параллелепипеда, равна 64 см^2. Вычислите объем параллелепипеда.

138. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$. Вычислите объем параллелепипеда, если диагональ его боковой грани наклонена к плоскости основания под углом 30°, а ее длина равна 10 см.

139. Деревянный брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 38, *а*). Вычислите объем данной модели параллелепипеда, если длины ребер модели прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 3 см и 10 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 38

140. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Вычислите объем параллелепипеда, если радиус окружности, вписанной в его основание, равен 2 см, а длина бокового ребра — 5 см.

141. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 38, *б*). Вычислите его объем, если площадь его основания равна 18 см^2, длина стороны основания — 6 см, а длина диагонали DC_1 его боковой грани равна 5 см.

142. Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основание которого — квадрат, равен 48 см^3. Вычислите длину диагонали боковой грани, если площадь основания параллелепипеда равна 16 см^2.

143. От деревяного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, отпилили брусок такой же формы.

В результате этого получили деталь, изображенную на рисунке 38, *в*. Вычислите объем детали с учетом размеров, указанных на рисунке.

144. Основание прямого параллелепипеда — квадрат, длина диагонали которого равна d. Найдите объем параллелепипеда, если длина его бокового ребра в два раза больше длины диагонали основания.

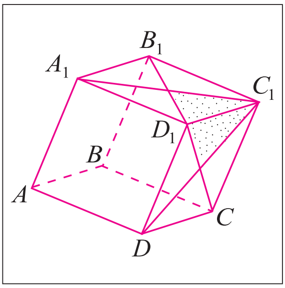
145. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат, длина стороны которого равна 2 см. Вычислите угол наклона диагонали параллелепипеда к плоскости основания, если объем параллелепипеда равен $8\sqrt{6}$ см^3.

146. Высота прямоугольного параллелепипеда, основание которого есть квадрат, равна 6 см. Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 60°. Вычислите объем параллелепипеда.

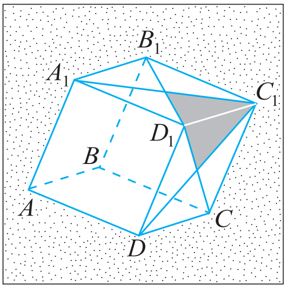
147. Основание прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник, одна из сторон которого в два раза больше другой. Вычислите объем параллелепипеда, если его диагональ наклонена к плоскости основания под углом 30° и ее длина равна 10 см.

148. На рисунке 39, *а*, *б* изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Площадь отмеченной фигуры на поверхности куба равна S. Найдите объем куба.

149. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат $ABCD$. Диагональ DC_1 боковой грани образует угол 60° с плоскостью грани BB_1C_1C, а ее длина равна 8 см. Вычислите объем параллелепипеда.



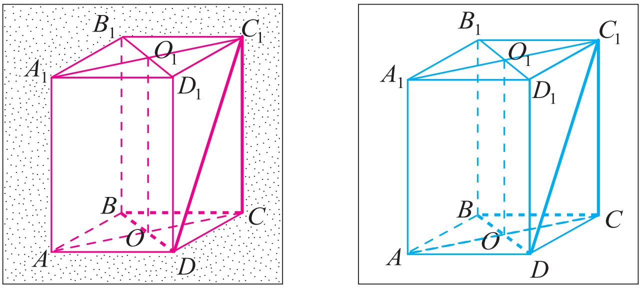
а)



б)

Рис. 39

150. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат, а длина его бокового ребра в четыре раза больше длины стороны основания (рис. 40, *а*, *б*). Объем призмы $OCDO_1C_1D_1$ равен 27 см^3 (O и O_1 — точки пересечения диагоналей оснований). Вычислите длину пространственной ломаной, которая образована отрезками BC, CC_1, C_1D, DB.



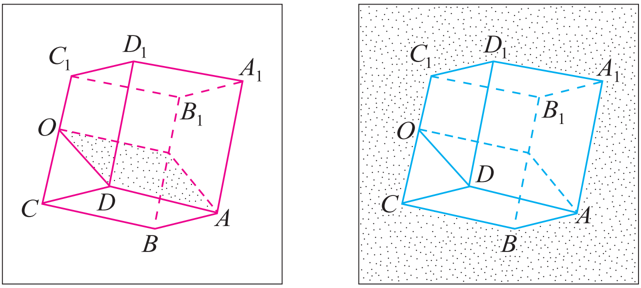
а) *б)*

Рис. 40

151. Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна d. Найдите объем призмы $AA_1B_1DD_1C_1$.

152. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Радиус окружности, описанной около диагонального сечения параллелепипеда, равен 5 см. Вычислите объем параллелепипеда, если его высота равна 5 см.

153. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка O — середина ребра CC_1 (рис. 41, *а*, *б*). Вычислите объем призмы $BCDB_1C_1D_1$, если площадь сечения куба плоскостью ADO равна $2\sqrt{5}$ см^2.

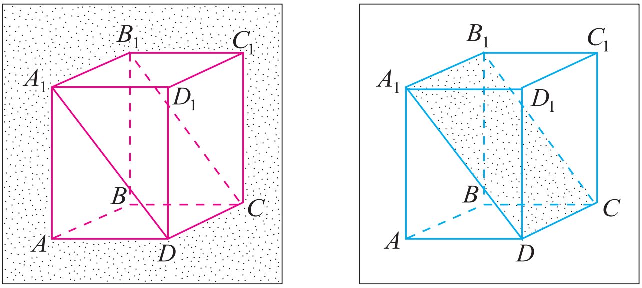


а) *б)*

Рис. 41

154. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат, а длина его бокового ребра в два раза больше длины стороны основания. Вычислите объем параллелепипеда, если площадь диагонального сечения равна $8\sqrt{2}$ см^2.

155. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Радиус окружности, описанной около четырехугольника DCB_1A_1, равен $\sqrt{6}$ см. Вычислите объем параллелепипеда, если его основание есть квадрат, а длина бокового ребра в два раза больше длины стороны основания (рис. 42, *а*, *б*).

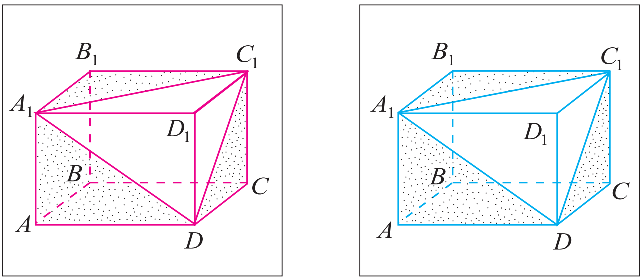


а) *б)*

Рис. 42

156. Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат, площадь которого равна 9 см^2. Вычислите длину диагонали параллелепипеда, если его объем равен 18 см^3.

157. На рисунке 43, *а*, *б* изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей треугольников $A_1B_1C_1$, DCC_1 и A_1AD равна $\frac{5}{2}$ см^2. Вычислите объем параллелепипеда, если грань AA_1B_1B есть квадрат и $AD = 2AA_1$.



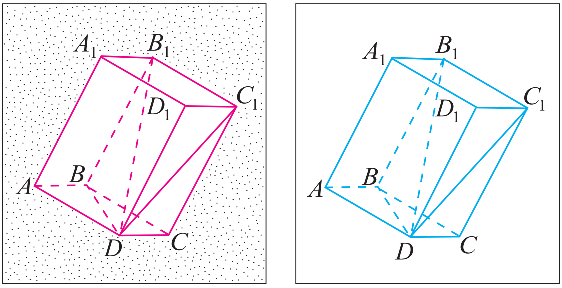
а) *б)*

Рис. 43

158. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат, сторона которого в три раза меньше его бокового ребра. Вычислите объем призмы $ABDA_1B_1D_1$, если площадь поверхности параллелепипеда равна 56 см^2.

159. Длина диагонали DB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 18 см, а диагональ DB_1 составляет с плоскостью боковой грани угол 30° ($\angle B_1DC_1 = 30°$) (рис. 44, *а*, *б*). Вычислите объем параллелепипеда, если диагональ DB_1 составляет с боковым ребром угол 45° ($\angle BB_1D = 45°$).

160. Длины сторон основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 см и 4 см, а его диагональ наклонена к плоскости основания под углом 30°. Вычислите объем параллелепипеда.



а) *б)*

Рис. 44

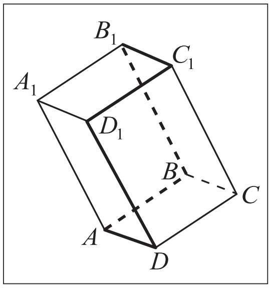


Рис. 45

161. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма (рис. 45). Найдите длину пространственной ломаной, которая образована отрезками DA, AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, если площадь основания призмы равна S, а ее объем равен V.

162. Площадь основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4 см^2. Вычислите объем призмы, если длина пространственной ломаной, которая образована отрезками A_1B_1, B_1B, BC, CD, DD_1, D_1A_1, равна 16 см.

163. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат (рис. 46, *а*, *б*). Вычислите площадь треугольника AB_1C, если площадь основания параллелепипеда равна 9 см^2, а его объем равен 36 см^3.

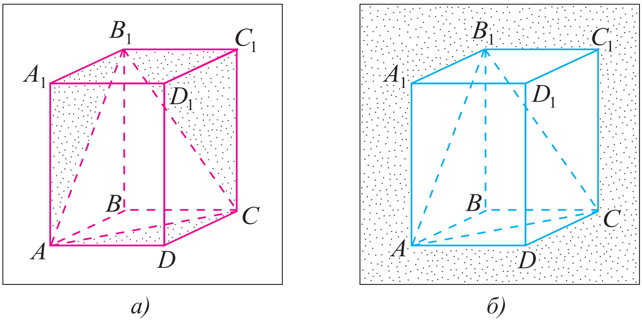


Рис. 46

164. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, площадь основания которой равна 4 см^2. Вычислите объем призмы, если периметр треугольника AB_1C равен $2\left(3+\sqrt{2}\right)$ см.

165. Площадь основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 16 см^2, а двугранный угол C_1BDC равен 45°. Вычислите объем призмы.

166. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна d. Найдите объем параллелепипеда, если диагональ составляет с плоскостью основания угол 30°, а с боковой гранью — угол 45°.

167. Длины сторон основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 см и 1 см. Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью, содержащей меньшую сторону основания, угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

168. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол 30° с плоскостью боковой грани и угол 45° с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда, если его высота равна h.

169. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат, а боковое ребро параллелепипеда в два раза больше стороны основания. Вычислите периметр сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины A_1, C_1 и середину ребра AD, если объем параллелепипеда равен 54 см^3.

170. Площади трех попарно смежных граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2, S_3. Найдите объем этого параллелепипеда.

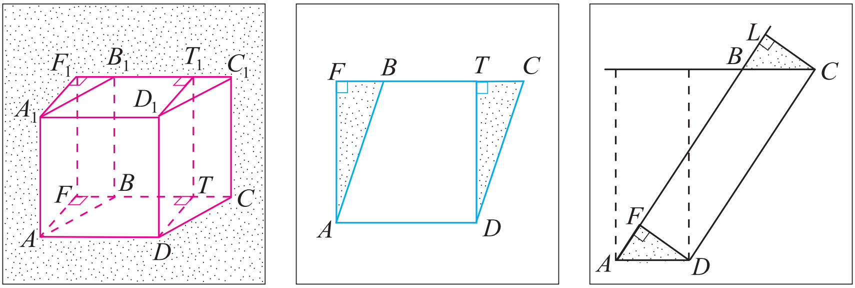
171. Длина диагонали основания прямоугольного параллелепипеда равна 2 см, а угол между диагоналями основания равен $60°$. Плоскость сечения, проведенного через диагональ основания и противолежащую ей вершину верхнего основания, составляет с плоскостью основания угол $60°$. Вычислите объем параллелепипеда.

172. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углом $30°$ и $60°$, а диагональ основания равна $\sqrt{10}$ см. Вычислите объем параллелепипеда.

§ 2. Объем наклонного параллелепипеда

Рассмотрим вопрос о вычислении объема наклонного параллелепипеда, но прежде докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1 *(об объеме прямого параллелепипеда)*. ***Объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту*** $(V = S_{\text{осн}} \cdot h)$.



а) *б)* *в)*

Рис. 47

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, основание которого — параллелограмм $ABCD$ площадью $S_{\text{осн}}$, а высота параллелепипеда $AA_1 = h$. Докажем, что объем параллелепипеда $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Проведем высоты DT и AF параллелограмма $ABCD$ и $FF_1 \parallel AA_1$, $TT_1 \parallel CC_1$, $F_1 \in B_1C_1$, $T_1 \in B_1C_1$, $FF_1 = TT_1 = AA_1 = h$ (рис. 47, *а*, *б*).

2) Прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составлен из прямой четырехугольной призмы $ABTDA_1B_1T_1D_1$ и треугольной призмы $DTCD_1T_1C_1$, а прямоугольный параллелепипед $AFTDA_1F_1T_1D_1$ составлен из той же призмы $ABTDA_1B_1T_1D_1$ и треугольной призмы $AFBA_1F_1B_1$.

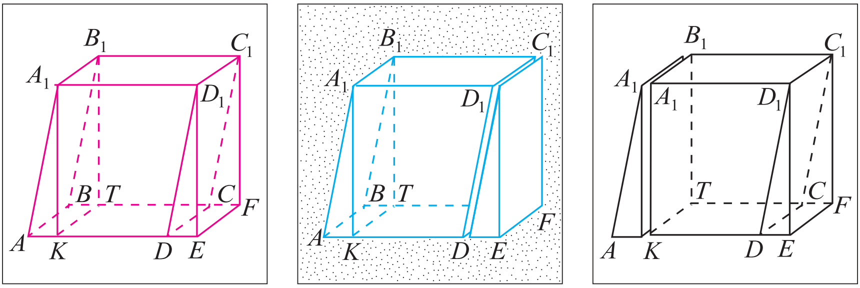
Призмы $AFBA_1F_1B_1$ и $DTCD_1T_1C_1$ равны, так как их можно совместить, а значит, равны объемы этих призм. Таким образом, объем V прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен объему V_1 прямоугольного параллелепипеда $AFTDA_1F_1T_1D_1$ (см. рис. 47, *а*).

3) По теореме предыдущего параграфа объем $V_1 = S_{AFTD} \cdot h$. Следовательно, $V = V_1 = S_{AFTD} \cdot h$, а так как $S_{AFTD} = S_{ABCD} = S_{\text{осн}}$, то $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Замечание. В случае, когда основание параллелепипеда — параллелограмм $ABCD$, показанный на рисунке 47, *в*, проведем высоты DF, CL и $FF_1 \| AA_1$, $LL_1 \| CC_1$, $F_1 \in A_1B_1$, $L_1 \in A_1B_1$. Рассмотрим равные треугольные призмы $AFDA_1F_1D_1$ и $BLCB_1L_1C_1$. В остальном доказательство аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 2 (*об объеме наклонного параллелепипеда*). ***Объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту параллелепипеда ($V = S_{осн}h$).***



а) *б)* *в)*

Рис. 48

Доказательство.

1. *Сначала докажем теорему для параллелепипеда, у которого две противолежащие боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а затем — для произвольного параллелепипеда.*

1) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, у которого боковые грани AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны плоскости основания, объем равен V, площадь основания — $S_{осн}$, а его высота — h. Проведем отрезки A_1K, B_1T, C_1F, D_1E перпендикулярно плоскости основания (рис. 48, *а*). Тогда $KTFEA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед.

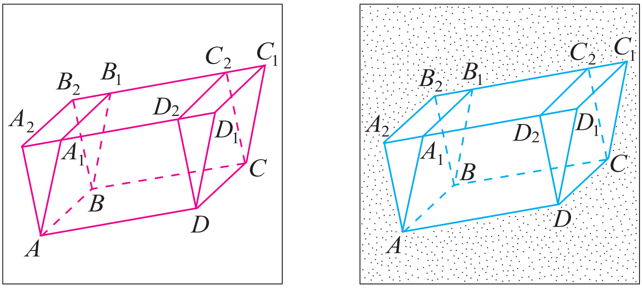
2) Геометрическое тело $ABFEA_1B_1C_1D_1$ составлено из данного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и призмы DD_1ECC_1F (основание призмы — треугольник DD_1E), кроме того, оно составлено из прямого параллелепипеда $KTFEA_1B_1C_1D_1$ и призмы AA_1KBB_1T (основание призмы — треугольник AA_1K) (рис. 48, *б*, *в*).

3) Призмы DD_1ECC_1F и AA_1KBB_1T равны (их можно совместить, если совместить равные основания AA_1K и DD_1E

и равные ребра KT и EF), а значит, равны объемы этих призм.

Таким образом, объем V данного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен объему V_1 прямого параллелепипеда $KTFEA_1B_1C_1D_1$. По предыдущей теореме объем $V_1 = S_{KTEF} \cdot h$, а так как $S_{KTEF} = S_{ABCD}$, то $V = V_1 = S_{KTEF} \cdot h = S_{ABCD} \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot h$.

2. *Докажем теорему для произвольного параллелепипеда.*



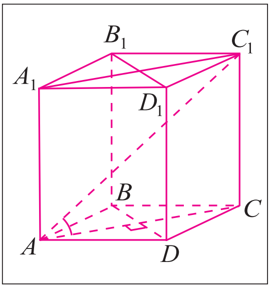
а) *б)*

Рис. 49

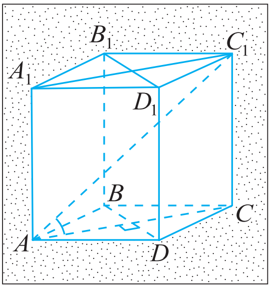
Через ребра AB и DC основания $ABCD$ наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведем плоскости, перпендикулярные плоскости основания. Пусть они пересекают параллельные прямые A_1D_1 и B_1C_1 в точках A_2, D_2 и B_2, C_2 соответственно (рис. 49, *а*, *б*). Тогда противолежащие боковые грани AA_2B_2B и DD_2C_2C полученного параллелепипеда $ABCDA_2B_2C_2D_2$ перпендикулярны плоскости его основания. Объем V данного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен объему V_1 параллелепипеда $ABCDA_2B_2C_2D_2$. По доказанному $V_1 = S_{ABCD} \cdot h$, следовательно, $V = V_1 = S_{ABCD} \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Теорема доказана.

Задача. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$, площадь которого равна 12 см^2, а длина диагонали BD основания равна 4 см. Вычислите объем параллелепипеда, если диагональ AC_1 наклонена к основанию под углом 45°.



а)



б)

Рис. 50

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $S_{ABCD} = 12$ см^2, $BD = 6$ см, $\angle CAC_1 = 45°$ (рис. 50, *а*, *б*).

Найти: V.

Решение.

1) Объем прямого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту $(V = S_{ABCD} \cdot h = S_{ABCD} \cdot CC_1)$. Следовательно, для нахождения объема параллелепипеда достаточно найти длину бокового ребра CC_1.

2) Основание параллелепипеда — ромб, значит, его площадь $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC$. Из равенства $12 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AC$ найдем $AC = 6$ см.

3) Так как данный параллелепипед прямой, а $\angle CAC_1 = 45°$, то $AC = CC_1 = 6$ см.

4) Теперь найдем объем параллелепипеда: $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 12 \cdot 6 = 72$ см^3.

Ответ: 72 см^3.

Вопросы и задачи к § 2

173. Верно ли, что объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту?

174. Основанием прямого параллелепипеда служит квадрат. Верно ли, что объем этого параллелепипеда равен произведению площади боковой грани на длину стороны квадрата, служащего основанием?

175. Чему равен объем наклонного параллелепипеда?

176. Верно ли, что объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади основания на расстояние между плоскостями, в которых лежат основания параллелепипеда?

177. Основанием прямого параллелепипеда служит квадрат, площадь которого равна 4 см^2. Вычислите объем параллелепипеда, если длина его бокового ребра равна 3 см.

178. Вычислите объем прямого параллелепипеда, если его основанием служит квадрат, площадь которого равна 16 см^2, а площадь боковой грани равна 20 см^2.

179. Основанием прямого параллелепипеда служит прямоугольник, длины сторон которого равны 2 см и 3 см. Вычислите объем параллелепипеда, если площадь его большей боковой грани равна 12 см^2.

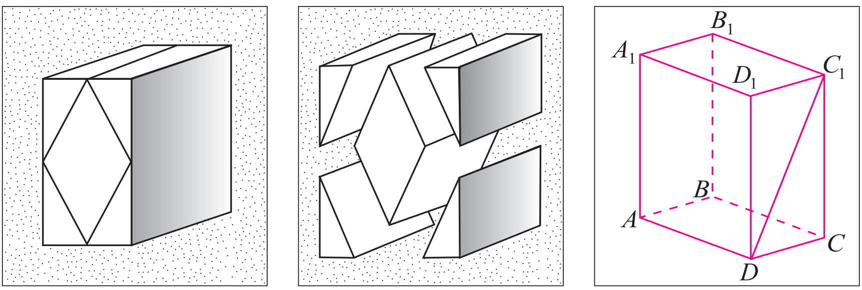
180. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник $ABCD$. Вычислите объем параллелепипеда, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 4$ см, $CC_1 = 5$ см.

181. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 2$ см, $BC = 8$ см. Вычислите объем параллелепипеда, если $\angle AA_1D = 60°$.

182. Ромб $ABCD$ служит основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите объем параллелепипеда, если площадь его основания равна 10 см^2, $C_1D = 4$ см, $\angle C_1DC = 30°$.

183. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб, острый угол которого равен 60°. Вычислите объем параллелепипеда, если длина стороны его основания равна 2 см, а длина бокового ребра — 5 см.

184. Модель прямого параллелепипеда, основание которого — ромб, получена в результате отпиливания от модели прямоугольного параллелепипеда четырех равных частей, имеющих форму прямых треугольных призм, как показано на рисунке 51, *а*, *б*. Чему равен объем полученной модели, если объем исходной модели равен 32 см^3?



а) *б)* *в)*

Рис. 51

185. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит параллелограмм, один из углов которого равен 30°, а длины сторон DC и AD равны 3 см и 4 см соответственно. Вычислите объем параллелепипеда, если длина диагонали DC_1 меньшей боковой грани равна 5 см (рис. 49, *в*).

186. Объем прямого параллелепипеда, основание которого — ромб, один из углов которого 120°, равен $\sqrt{3}$ см^3. Вычислите длину стороны основания, если длина бокового ребра параллелепипеда равна 2 см.

187. Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм, один из углов которого равен 30°. Вычислите объем параллелепипеда, если площади его боковых граней равны 40 см^2 и 60 см^2, а длина бокового ребра — 10 см.

188. Основание прямого параллелепипеда — ромб. Одна из диагоналей наклонена к плоскости основания под углом 30°, а ее длина равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислите объем параллелепипеда, если другая диагональ наклонена к плоскости основания под углом 60°.

189. Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм, длины сторон которого равны a и b, а угол между ними — 30°. Найдите объем параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна S.

190. Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм, площадь которого равна 4 см^2, а один из его углов равен 30°. Вычислите объем параллелепипеда, если площади боковых граней параллелепипеда равны 6 см^2 и 12 см^2.

191. Основание прямого параллелепипеда — ромб, длина стороны которого равна 4 см, один из углов ромба равен 30°. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда, если его объем равен 48 см^3.

192. Основание прямого параллелепипеда — ромб, длины диагоналей которого равны 6 см и 8 см. Объем параллелепипеда равен 144 см^3. Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через большую диагональ основания и середину не пересекающего ее бокового ребра.

193. Основание прямого параллелепипеда — ромб, длина стороны которого равна 6 см, а один из его углов — 60°. Вычислите объем параллелепипеда, если площадь его сечения плоскостью, проходящей через большую диагональ ромба и конец не пересекающего ее ребра, равна $15\sqrt{3}$ см^2.

194. В прямом параллелепипеде длины сторон основания равны $4\sqrt{2}$ см и 10 см, а угол между сторонами равен 45°. Вычислите объем параллелепипеда, если длина его меньшей диагонали равна 14 см.

195. Основание прямого параллелепипеда — ромб, один из углов которого 30°. Вычислите площадь диагонального сечения параллелепипеда плоскостью, содержащей меньшую диагональ основания, если объем параллелепипеда равен 18 см^3, а площадь его боковой поверхности равна 48 см^2.

196. Длина стороны основания прямого параллелепипеда равна 5 см. Через нее и противолежащую ей сторону верхнего основания проведено сечение под углом 15° к плоскости основания. Вычислите объем параллелепипеда, если площадь сечения равна 10 см^2.

197. Основание прямого параллелепипеда — ромб, угол которого 60°. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Вычислите объем параллелепипеда, если площадь сечения равна $18\sqrt{6}$ см^2.

198. Площадь основания наклонного параллелепипеда равна 20 см^2, а его боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°. Вычислите объем параллелепипеда, если длина бокового ребра равна 4 см.

199. Основание наклонного параллелепипеда — ромб, длины диагоналей которого равны 4 см и 2 см. Вычислите объем параллелепипеда, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°, а его длина равна $\sqrt{2}$ см.

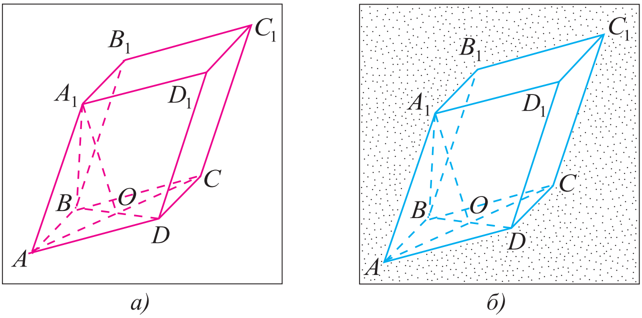


Рис. 52

200. Длины сторон основания параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а один из углов основания — 30°. Длина бокового ребра равна 10 см. Вычислите объем параллелепипеда, если его боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°.

201. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат, длина стороны которого равна 2 см (рис. 52, *а*, *б*). Вычислите длину бокового ребра параллелепипеда, если известно, что его объем равен 8 см^3, а ортогональная проекция вершины A_1 на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания.

202. Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$, а длины его диагоналей BD и AC равны соответственно 4 см и 8 см. Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BA_1D, если объем параллелепипеда равен 160 см^3, а ортогональная проекция вершины A_1 на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей ромба.

203. Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна 2 см. Диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно плоскости основания, а его площадь равна $4\sqrt{2}$ см^2. Вычислите объем параллелепипеда.

204. Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб, длина стороны которого равна 3 см, а $\angle ABD = 60°$. Вычислите площадь диагонального сечения AA_1C_1C, если оно перпендикулярно плоскости основания, а объем параллелепипеда равен 18 см^3.

205. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, длина стороны которого равна 3 см. Одно из боковых ребер образует с каждой из прилежащих сторон угол 60°, а его длина равна 4 см. Вычислите объем параллелепипеда.

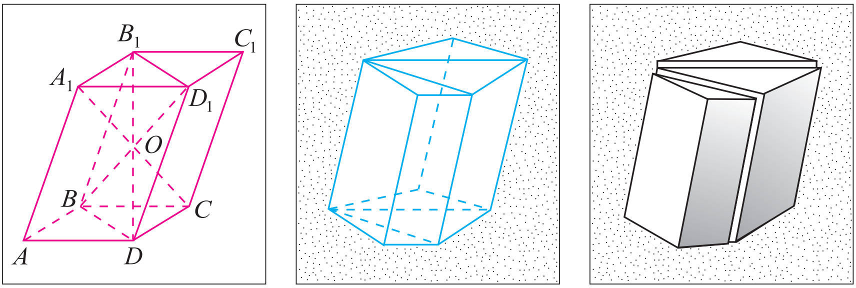
206. Основание наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб $ABCD$, длина стороны которого равна a, а угол — 60°. Ребро AA_1 образует с ребрами AB и AD углы по 45°. Найдите объем параллелепипеда, если $AA_1 = a$.

207. Основание наклонного параллелепипеда — прямоугольник, длины сторон которого равны 2 см и 4 см. Боковое ребро, длина которого равна 4 см, составляет со смежными сторонами основания углы 60°. Вычислите объем параллелепипеда.

§ 3. Объем призмы

В предыдущем параграфе рассматривалась формула, позволяющая находить объем параллелепипеда — многогранника, являющегося частным примером призмы (параллелепипед есть призма, основание которой — параллелограмм). Теперь найдем формулу для вычисления произвольной призмы.

Теорема (*об объеме призмы*). ***Объем призмы равен произведению площади основания на высоту*** $(V = S_{\text{осн}} \cdot h)$.



а) *б)* *в)*

Рис. 53

Доказательство.

1. *Сначала докажем эту теорему для произвольной треугольной призмы* $ABDA_1B_1D_1$.

Рассмотрим в пространстве точки C и C_1 такие, что $ABCD$ — параллелограмм, а $CC_1 = AA_1$ и $CC_1 \parallel AA_1$. Тогда параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональным сечением BB_1D_1D делится на две призмы $ABDA_1B_1D_1$ и $BCDB_1C_1D_1$ (рис. 53, *а*). Эти призмы имеют равные объемы, так как они симметричны относительно точки O пересечения диагоналей параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Таким образом, объем построенного параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы.

Объем V_0 параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания параллелепипеда равна удвоенной площади треугольника ABD, а его высота равна высоте h данной призмы. Следовательно, объем V данной призмы равен произведению площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{2}V_0 = \frac{S_{ABCD} \cdot h}{2} = S_{ABD} \cdot h.$$

2. *Докажем теорему для произвольной призмы.*

Пусть дана произвольная призма, высота которой h, а площадь основания $S_{осн}$. Такую призму можно разбить на треугольные призмы с высотой h (на рисунке 53, *б*, *в* для определенности показано разбиение пятиугольной призмы на три треугольные). В общем случае n-угольную призму можно разбить на $(n-2)$ треугольные призмы. Объем данной призмы равен сумме объемов треугольных призм, составляющих ее. По доказанному объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту. Следовательно, объем данной призмы

$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + \ldots + S_{n-2} \cdot h = (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2})h,$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ — площади треугольников, на которые разбито основание призмы. Сумма площадей треугольников равна площади $S_{осн}$ основания данной призмы, значит, $V = S_{осн} \cdot h$.

Теорема доказана.

Следствие. **Объем прямой призмы равен произведению площади основания на длину бокового ребра.**

Задача 1. Основание прямой призмы — равносторонний треугольник, длина стороны которого равна a. Сечение, проведенное через сторону одного основания и противолежащую вершину другого основания, составляет с основанием призмы угол 30°. Найдите объем призмы.

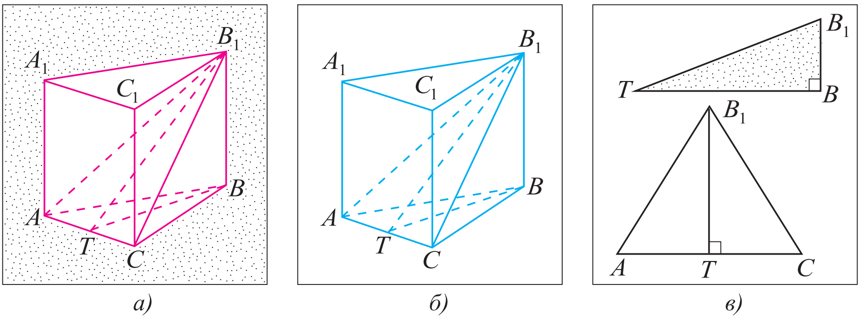


Рис. 54

Решение.

1) Объем V призмы равен произведению площади основания на высоту призмы: $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot BB_1$ (рис. 54, *а*, *б*).

2) Пусть точка T — середина отрезка AC, тогда $\angle B_1TB = 30°$ ($TB \perp AC$ и $B_1T \perp AC$, следовательно, $\angle B_1TB$ — линейный угол двугранного угла B_1ACB). В прямоугольном треугольнике BTC $\left(BC = a,\ TC = \frac{a}{2},\ \angle BTC = 90°\right)$ $TB = \sqrt{BC^2 - TC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (рис. 54, *а*, *б*, *в*).

3) Из прямоугольного треугольника B_1BT $\left(TB = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ \angle B_1BT = 90°,\ \angle B_1TB = 30°\right)$ длина катета $BB_1 = TB\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$ (рис. 54, *а*, *б*, *в*).

4) Таким образом, объем призмы $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Решите самостоятельно следующую задачу.

Задача 2. Докажите, что объем V наклонной призмы можно найти по формуле $V = S_{\text{сеч}} \cdot b$, где $S_{\text{сеч}}$ — площадь ортогонального сечения призмы, b — длина бокового ребра призмы.

Вопросы и задачи к § 3

208. Чему равен объем призмы?

209. Верно ли, что объем призмы равен произведению площади основания на расстояние между плоскостями, в которых лежат основания?

210. Чему равен объем прямой призмы?

211. Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катета которого равна 2 см. Вычислите объем призмы, если длина ее бокового ребра равна 5 см.

212. Длина бокового ребра прямой призмы равна 4 см. Вычислите объем призмы, если ее основанием служит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 32 см.

213. Основанием прямой призмы служит параллелограмм, угол которого равен 30°, а длины сторон равны 2 см и 4 см. Вычислите объем призмы, если длина ее бокового ребра равна 8 см.

214. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, основанием которой является параллелограмм. Вычислите объем призмы, если $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $\angle ABC = 150°$, а площадь большей боковой грани равна 30 см^2.

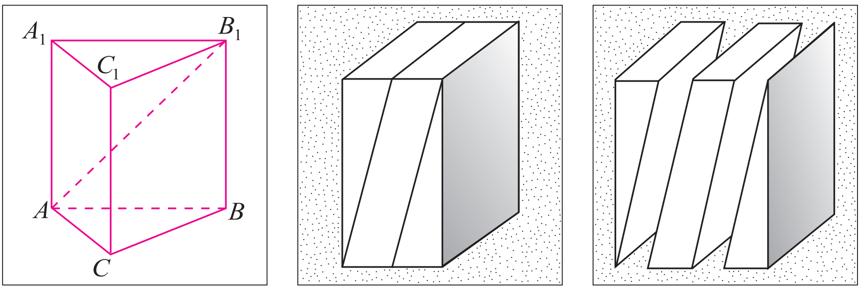
215. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит равнобедренная трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 4$ см и $AD = 8$ см, $\angle BAD = 60°$. Вычислите объем призмы, если $AA_1 = 10$ см.

216. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и CB. Вычислите объем призмы, если $CC_1 = 5$ см, $AB = 3$ см, $\angle BAC = 60°$.

217. Основанием прямой треугольной призмы служит равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 5 см, а длина его основания — 6 см. Вычислите объем призмы, если расстояние между плоскостями, в которых лежат ее основания, равно 10 см.

218. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник. Вычислите объем призмы, если длины катетов AC и BC треугольника ABC равны соответственно 3 см и 4 см, а длина диагонали большей грани призмы равна $5\sqrt{2}$ см (рис. 55, *а*).

219. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный прямоугольный треугольник. Вычислите длины катетов треугольника основания, если объем призмы равен 20 см^3, а длина бокового ребра равна 10 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 55

220. Модель наклонной четырехугольной призмы получена в результате отпиливания от деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, двух равных частей, каждая из которых имеет форму треугольной призмы (рис. 55, *б*, *в*). Вычислите объем модели наклонной призмы, если объем данного деревянного бруска равен 120 см^3.

221. Вычислите объем правильной треугольной призмы, если длина стороны ее основания равна 2 см, а длина бокового ребра — 5 см.

222. Длины всех ребер правильной треугольной призмы равны между собой. Вычислите объем призмы, если площадь ее полной поверхности равна $\left(2\sqrt{3}+12\right)$ см^2.

223. Диагональ грани правильной треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Вычислите длину диагонали боковой грани призмы, если объем призмы равен $\frac{3}{4}$ см^3.

224. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, градусная мера угла при основании которого 75°. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если ее объем равен 16 см^3, а боковое ребро призмы равно боковой стороне треугольника, служащего основанием призмы.

225. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ есть прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$), $AB = 4$ см. Вычислите объем призмы, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{5}{2}$ см, а высота призмы равна 10 см.

226. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен 4 см, а угол при его основании равен 30°. Вычислите объем призмы, если ее боковое ребро равно боковой стороне треугольника, служащего основанием призмы.

227. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник BAC ($\angle BAC = 90°$), длина одного из катетов которого равна 6 см. Вычислите площадь грани BB_1C_1C, если объем призмы равен 120 см^3, а ее высота равна 5 см.

228. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Вычислите объем призмы, если площадь сечения плоскостью, проходящей через сторону одного основания и середину стороны другого основания, равна $3\sqrt{19}$ см^2.

229. Основание прямой призмы — квадрат, а ее боковые ребра в два раза больше стороны основания. Вычислите объем призмы, если радиус окружности, описанной около сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра, равен $2\sqrt{3}$ см.

230. Точки T и F — середины соответственно ребер CC_1 и BB_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Объем треугольной призмы $ABFDCT$ равен 4 см^3. Вычислите радиус окружности, описанной около сечения призмы плоскостью, проходящей через прямую DC и точку B_1, если $DC : DD_1 = 1 : 2$.

231. Основание прямой призмы — ромб, длина стороны которого равна 3 см, а длина бокового ребра призмы — 4 см. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противолежащую сторону другого основания, если объем призмы равен 24 см^3.

232. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб, площадь которого равна 16 см^2, объем призмы — 64 см^3. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через прямую AB_1 и точку C, если $BB_1 = BD$.

233. Основание прямой призмы — ромб, площади диагональных сечений призмы равны 30 см^2 и 40 см^2. Вычислите объем призмы, если известно, что площадь ее основания равна 24 см^2.

234. Основание прямой призмы — ромб, одна из диагоналей которого равна его стороне. Вычислите периметр сечения призмы плоскостью, проходящей через большую диагональ одного основания и середину стороны другого основания, если объем призмы равен $4\sqrt{3}$ см^3, все ее боковые грани — квадраты.

235. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ радиус окружности, описанной около диагонального сечения, равен $\sqrt{6}$ см. Вычислите объем призмы, если известно, что боковое ребро призмы в два раза больше стороны основания.

236. Боковое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Вычислите объем призмы, если площадь сечения плоскостью, проходящей через середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 и параллельной ребру CC_1, равна 16 см^2.

237. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромб. Вычислите радиус окружности, вписанной в основание призмы, если объем призмы равен 72 см^3, ее высота — 3 см, а длина ее меньшей диагонали равна $3\sqrt{5}$ см.

238. Две противолежащие боковые грани четырехугольной призмы — ромбы, а остальные грани — квадраты. Найдите объем призмы, если площадь ромба равна S, а площадь квадрата — Q.

239. Основание прямой призмы — параллелограмм, длины сторон которого равны 8 см и 6 см, а угол между этими сторонами — 30°. Вычислите объем призмы, если площадь ее полной поверхности равна 328 см^2.

240. Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 16 см. Вычислите объем призмы, если меньшая диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом 45°.

241. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, длина одного из катетов которого равна 5 см, а длина диагонали грани, содержащей этот катет, равна 10 см. Вычислите радиус окружности, описанной около основания, если объем призмы равен $125\sqrt{3}$ см^3.

242. Длина диагонали правильной четырехугольной призмы равна 12 см. Эта диагональ образует с прилегающей к ней стороной основания угол, равный 60°. Вычислите объем призмы.

243. Длины двух сторон основания прямой треугольной призмы равны 14 см и 8 см, а угол между ними равен 30°. Вычислите объем призмы, если сумма площадей боковых граней, содержащих данные стороны, равна 220 см^2.

244. Основание призмы — треугольник, длины сторон которого равны 2 см, 3 см, 3 см. Длина бокового ребра призмы равна 12 см, и оно наклонено к плоскости основания под углом 60°. Вычислите объем призмы.

245. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $BC = 10$ см, $AC = AB =$ $= 13$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Вычислите объем призмы, если вершина A_1 ортогонально проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC.

246. Основание призмы — равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 2 см. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и является ромбом с углом 60°. Вычислите объем призмы.

247. Основание призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна 2 см. Вершина A_1 проектируется ортогонально в центр основания ABC, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Вычислите объем призмы.

248. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения S, а длина бокового ребра равна l.

249. Длина стороны основания правильной четырехугольной призмы равна 3 см. Диагональ призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30°. Вычислите объем призмы.

250. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой, точка O — середина ребра BB_1. Вычислите радиус окружности, вписанной в сечение призмы плоскостью AOC, если объем призмы равен $2\sqrt{3}$ см^3.

251. Длина стороны основания правильной треугольной призмы равна 2 см. Площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через две вершины нижнего основания и вершину верхнего основания, равна 2 см^2. Вычислите объем призмы.

252. В правильной четырехугольной призме сумма площадей оснований равна площади ее боковой поверхности.

Вычислите объем призмы, если диаметр окружности, описанной около сечения призмы плоскостью, проходящей через две вершины одного основания и противолежащую вершину другого основания, равен 6 см.

253. Основание прямой призмы — ромб с углом 60°. Длина большей ее диагонали равна 12 см и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Вычислите объем призмы.

254. Основание параллелепипеда — квадрат, длина стороны которого равна 2 см, а все боковые грани — ромбы. Вычислите объем параллелепипеда, если одна из вершин одного основания одинаково удалена от вершин другого основания.

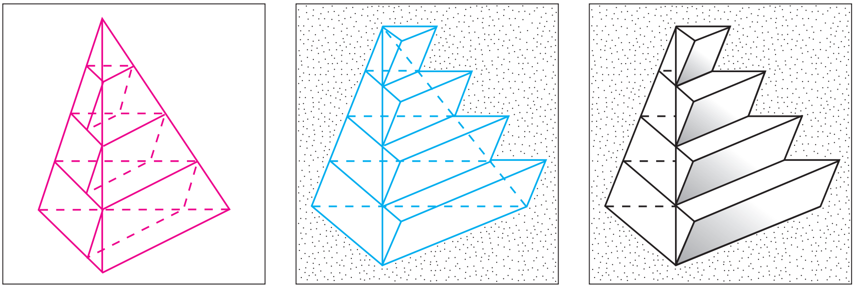
255. Длины сторон основания прямой треугольной призмы равны 8 см, 5 см и 5 см. Вычислите объем призмы, если диагональ меньшей боковой грани наклонена к плоскости большей боковой грани под углом 30°.

256. Основание призмы — равносторонний треугольник. Длина бокового ребра призмы равна 4 см, и оно наклонено к плоскости основания под углом 60°. Вычислите объем призмы, если ортогональная проекция одной из вершин одного основания является центром другого основания.

§ 4. Объем пирамиды

Рассмотрим вопрос о нахождении объема треугольной и произвольной пирамиды. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 1 (*об объеме пирамид, имеющих равные высоты и равные площади оснований*). ***Две треугольные пирамиды, имеющие равные высоты и равные площади оснований, имеют равные объемы.***



а) *б)* *в)*

Рис. 56

Доказательство.

1) Пусть даны две пирамиды, имеющие равные высоты и равные площади оснований. Разделим высоту каждой из пирамид на n равных частей и проведем через точки деления плоскости, параллельные их основаниям. Указанные плоскости разбивают каждую пирамиду на n частей. Для каждой части первой пирамиды построим призму, которая расположена в этой части, как показано на рисунке 56, *а* (основание призмы совпадает с треугольником сечения, а боковое ребро параллельно боковому ребру пирамиды). Для каждой части другой пирамиды построим призму, которая содержит эту часть, как показано на рисунке 56, *б*, *в*.

2) Призма, содержащаяся во 2-й части первой пирамиды (считая от вершины), и призма, которая содержит 1-ю часть второй пирамиды, имеют равные площади оснований $\left(\text{так как их основания подобны основаниям пирамид с коэффициентом подобия } \frac{1}{n}\right)$. Кроме того, эти призмы имеют

равные высоты, следовательно, их объемы равны. Призма, содержащаяся в 3-й части первой пирамиды, и призма, которая содержит 2-ю часть другой пирамиды, имеют равные площади оснований $\left(\text{их основания подобны основаниям пирамиды с коэффициентом подобия } \frac{2}{n}\right)$. Эти призмы также имеют равные высоты, значит, их объемы равны.

Аналогично призма, содержащаяся в k-й части первой пирамиды (считая от вершины), и призма, которая содержит $(k-1)$-ю часть второй пирамиды, имеют равные площади оснований $\left(\text{так как эти основания подобны основаниям пирамид и коэффициент подобия один и тот же } \frac{k}{n}\right)$. Так как эти призмы имеют, кроме того, и равные высоты, то их объемы равны.

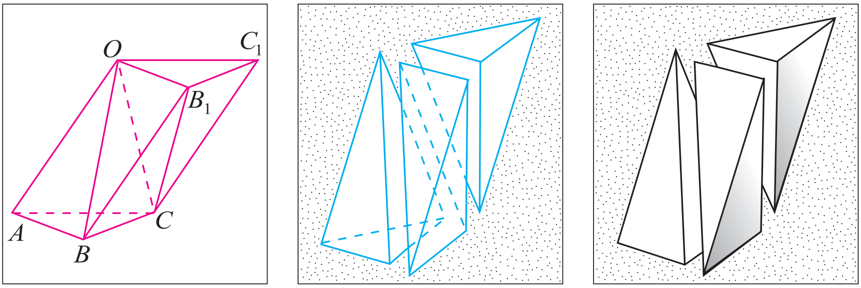
3) Пусть V_1 и V_2 — объемы первой и второй пирамид, а V_1' и V_2' — суммы объемов построенных для них призм. Так как объем призмы в k-й части первой пирамиды равен объему призмы $(k-1)$-й части второй пирамиды, то сумма объемов всех призм первой пирамиды равна сумме объемов призм всех частей второй пирамиды, кроме объема $S\frac{H}{n}$ (S — площадь основания пирамиды, H — ее высота) последней призмы (считая от вершины пирамиды). Следовательно, $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$. Так как $V_1 > V_1'$, то $V_1 > V_2' - S\frac{H}{n}$; так как $V_2' > V_2$, то $V_1 > V_2 - S\frac{H}{n}$, т. е. данное неравенство выполняется при сколь угодно большом n, что возможно только при условии $V_1 \geqslant V_2$. Аналогично рассуждая, поменяв ролями пирамиды, приходим к неравенству $V_2 \geqslant V_1$. Следовательно, $V_1 = V_2$.

Теорема доказана.

Теорема 2 (*об объеме треугольной пирамиды*). ***Объем любой треугольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту*** $\left(V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h\right)$.

Доказательство.

1) Пусть дана треугольная пирамида $OABC$, вершина которой — точка O, а основание — треугольник ABC, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, h — высота пирамиды. Дополним данную пирамиду до призмы с тем же основанием и высотой. Эта



а) б) в)

Рис. 57

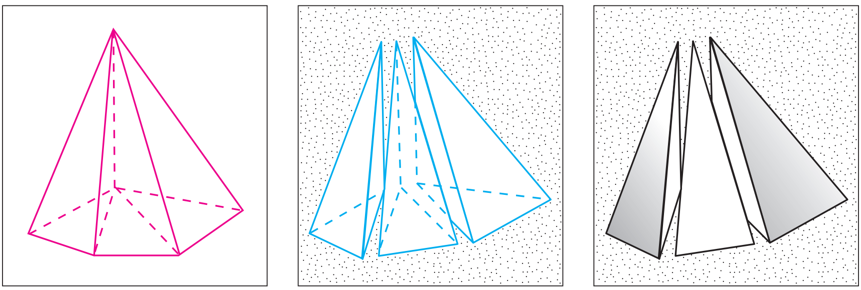
призма состоит из трех пирамид $OABC$, OB_1C_1C и OBB_1C (рис. 57, *а*, *б*, *в*).

2) Пирамиды OB_1C_1C и OBB_1C имеют равные основания B_1C_1C и BB_1C и общую высоту, проведенную из вершины O, следовательно, по теореме **1** они имеют равные объемы.

3) Пирамиды $COAB$ и $COBB_1$ также имеют равные основания OAB и OBB_1 и равные высоты, проведенные из вершины C. Значит, по теореме **1** эти пирамиды также имеют равные объемы. Таким образом, все три пирамиды имеют равные объемы. Так как сумма этих объемов равна объему призмы, то объем V пирамиды равен одной третьей объема призмы, т. е. $V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}$.

Теорема доказана.

Теорема 3 (*об объеме n-угольной пирамиды*). ***Объем n-угольной пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту*** $\left(V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h\right)$.



а) б) в)

Рис. 58

Доказательство.

Пусть дана n-угольная пирамида, площадь основания которой $S_{\text{осн}}$, а высота равна h. Разобьем основание пирамиды на $(n-2)$ треугольника, проведя диагонали, выходящие из одной вершины. Пирамиды, основаниями которых являются эти треугольники, а вершиной является вершина данной пирамиды, составляют эту пирамиду (на рисунке 58, *а*, *б*, *в* показано разбиение для пятиугольной пирамиды). Так как эти пирамиды имеют одну и ту же высоту, то объем исходной пирамиды равен сумме объемов пирамид, на которые она разбита, т. е. ее объем равен:

$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-2} = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_k + \ldots + S_{n-2})h = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$ (S_k — площадь основания k-й пирамиды, на которые разбита данная пирамида).

Теорема доказана.

Задача 1. Докажите, что объем V усеченной пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, где S_1, S_2 — площади оснований, h — высота усеченной пирамиды.

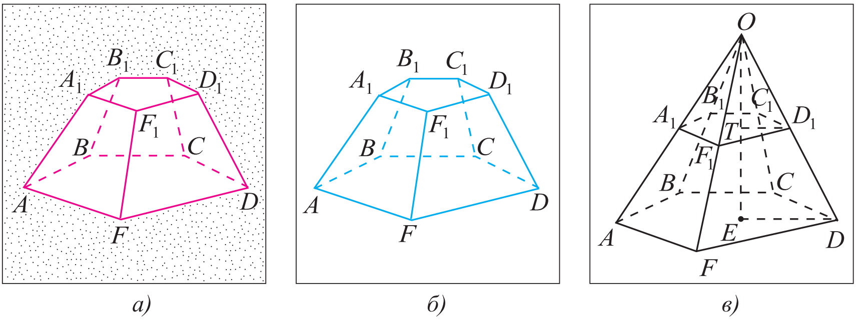


Рис. 59

Доказательство.

Пусть дана усеченная пирамида, например, для определенности, пятиугольная пирамида $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ (рис. 59, *а*, *б*). Рассмотрим пирамиду $OA_1B_1C_1D_1F_1$, которая дополняет данную усеченную пирамиду до пирамиды $OABCDF$ (рис. 59, *в*). Тогда объем V усеченной пирамиды есть разность объемов пирамиды $OABCDF$ и пирамиды $OA_1B_1C_1D_1F_1$.

Пусть $TE = h$ — высота усеченной пирамиды, $TO = x$ — высота пирамиды $OA_1B_1C_1D_1F_1$.

Тогда

$$V = \frac{1}{3}S_2(h + x) - \frac{1}{3}S_1x = \frac{1}{3}(S_2h + (S_2 - S_1)x).$$

Многоугольники оснований усеченной пирамиды подобны (объясните почему), следовательно, их площади относятся как квадраты длин соответствующих сторон, т. е.

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{FD}{F_1D_1}\right)^2 = \left(\frac{OD}{OD_1}\right)^2 = \left(\frac{OE}{OT}\right)^2 = \frac{(h+x)^2}{x^2} \text{ или } \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{h+x}{x}.$$

Из этого уравнения найдем $x = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$. Таким образом, объем усеченной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_2h + \frac{(S_2 - S_1)h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}\right).$$

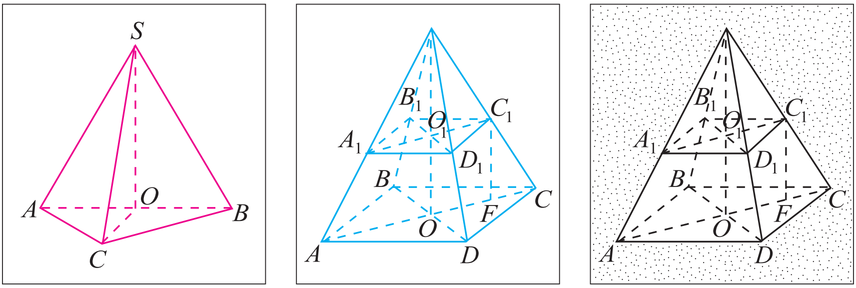
Так как $S_2 - S_1 = \left(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}\right)\left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}\right)$, то

$$V = \frac{1}{3}\left(S_2h + \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}\right)h\sqrt{S_1}\right) = \frac{1}{3}\left(S_1h + \sqrt{S_1S_2}\,h + S_2h\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right).$$

Теорема доказана.

Задача 2. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого 6 см и 8 см. Длина каждого из боковых ребер пирамиды равна 13 см. Вычислите объем пирамиды.



а) б) в)

Рис. 60

Р е ш е н и е.

1) Пусть $SABC$ — данная пирамида, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle ACB = 90°$, $AS = BS = CS = 13$ см (рис. 60, *а*).

2) Пусть точка O — основание высоты пирамиды. Так как по условию $AS = BS = CS$, то $AO = BO = CO$ (проекции равных наклонных, которые проведены из одной точки, равны). Таким образом, точка O есть центр окружности, описанной около треугольника ACB, т. е. точка O — середина гипотенузы AB.

3) Объем пирамиды можем найти по формуле

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO.$$

4) Площадь основания пирамиды равна:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\,(\text{см}^2).$$

5) В треугольнике SOB $\left(\angle SOB = 90°,\ SB = 13 \text{ см},\ OB = \frac{1}{2}AB = 5\,\text{см}\right)$ длина катета $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см).

6) Таким образом, $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96\,(\text{см}^3)$.

Ответ: 96 см^3.

Задача 3. Вычислите объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, длины оснований которой равны 2 см и 4 см, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°.

Решение.

1) Объем усеченной пирамиды можем найти по формуле $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, где S_1 и S_2 — площади оснований пирамиды, h — ее высота.

2) Основания данной пирамиды — квадраты, следовательно, их площади $S_1 = 16$ см^2 и $S_2 = 4$ см^2.

3) Пусть O_1 и O_2 — центры оснований пирамиды. Отрезок O_1O лежит на высоте соответствующей неусеченной пирамиды, а, значит, $O_1O \perp (ABC)$. Пусть $C_1F \parallel O_1O$, $F \in OC$, тогда $C_1F \perp (ABC)$, а, следовательно, $h = C_1F$ (рис. 60, *б*, *в*).

4) Найдем высоту пирамиды. Прямоугольный треугольник C_1FC — равнобедренный, так как $\angle C_1CF = 45°$, следовательно, $h = C_1F = CF$. Заметим, что $CF = OC - OF = OC - O_1C_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (см).

5) Теперь найдем объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(4 + 8 + 16) = \frac{28\sqrt{2}}{3}$ (см^3).

Ответ: $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ см^3.

Вопросы и задачи к § 4

257. Верно ли, что пирамиды, имеющие равные высоты и равные площади оснований, имеют равные объемы?

258. Верно ли, что объем V произвольной пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, где S — площадь основания пирамиды, а h — ее высота?

259. По какой формуле можно найти объем усеченной пирамиды?

260. $TABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Вычислите объем пирамиды, если длина стороны основания равна 4 см, а высота пирамиды — 10 см.

261. Длина диагонали основания правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, а высота пирамиды равна 3 см. Вычислите объем этой пирамиды.

262. Точка O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите объем пирамиды $OABCD$, если площадь грани куба равна 9 см^2.

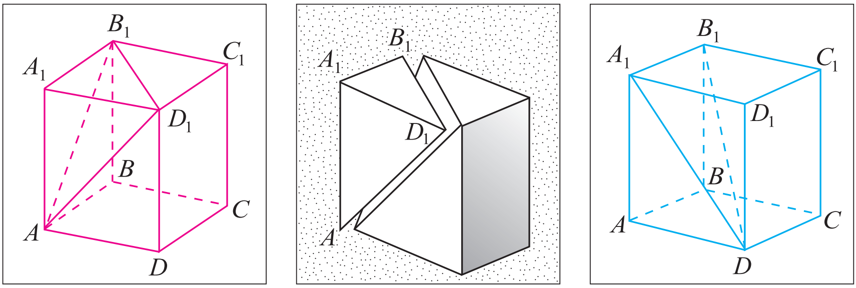
263. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 18 см^3. Вычислите высоту пирамиды, если площадь ее основания равна 9 см^2.

264. Высота правильной треугольной пирамиды равна 10 см. Вычислите объем пирамиды, если длина стороны ее основания равна 2 см.

265. Объем правильной треугольной пирамиды равен $3\sqrt{3}$ см^3. Вычислите длину стороны основания пирамиды, если ее высота равна 9 см.

266. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, длина стороны основания которой равна 2 см, а длина бокового ребра — 6 см. Вычислите объем пирамиды $AA_1B_1D_1$ (рис. 61, *а*, *б*).

267. Площадь грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 9 см^2. Вычислите объем пирамиды DAA_1B_1B (рис. 61, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 61

268. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна 5 см, а радиус окружности, вписанной в основание, равен 2 см.

269. Основание пирамиды — треугольник, длины двух сторон которого 2 см и 6 см, а угол между этими сторонами — $30°$. Вычислите объем пирамиды, если ее высота равна 3 см.

270. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см. Вычислите объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен $\sqrt{3}$ см.

271. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см, а длина диагонали ее основания — $5\sqrt{2}$ см. Вычислите объем пирамиды.

272. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$ см, а ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Вычислите объем пирамиды.

273. Вычислите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, если ее объем равен 9 см^3, а длина стороны основания равна 3 см.

274. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны ее основания равна 4 см, а двугранные углы при ребрах основания равны $60°$.

275. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 12 см^3, а длина стороны ее основания — 3 см. Вычислите радиус окружности, описанной около диагонального сечения пирамиды.

276. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее диагонального сечения, равен 1 см, а длина стороны основания равна $\sqrt{2}$ см.

277. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны основания равна 4 см, а плоский угол при вершине равен 60°.

278. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см. Вычислите объем пирамиды, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

279. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен $27\sqrt{3}$ см^3. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60°.

280. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 108 см^3. Вычислите радиус окружности, вписанной в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S и середины противолежащих сторон основания, если боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 30°.

281. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см. Вычислите объем пирамиды, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°.

282. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, если длина стороны ее основания равна 3 см, а длина бокового ребра — 2 см.

283. Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 60°. Радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите объем пирамиды.

284. Объем правильной треугольной пирамиды равен 144 см^3, а ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

285. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ площадь основания равна 60 см^2, а высота — 10 см. Расстояние от вершины C до плоскости грани DAB равно 12 см. Вычислите площадь грани DAB.

286. $OABC$ — правильная треугольная пирамида, длина стороны основания которой равна $2\sqrt{3}$ см. Вычислите расстояние от вершины A до плоскости OBC, если высота пирамиды равна длине стороны основания.

287. Основание пирамиды — прямоугольник, длины сторон которого равны 4 см и $2\sqrt{5}$ см. Вычислите объем пирамиды, если длина каждого бокового ребра пирамиды — 5 см.

288. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого 6 см и 8 см. Вычислите объем пирамиды, если длина каждого бокового ребра пирамиды равна $5\sqrt{2}$ см.

289. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого 3 см и 4 см. Вычислите объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро образует с плоскостью основания угол $60°$.

290. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого 9 см и 12 см. Вычислите объем пирамиды, если двугранные углы при ребрах основания равны $60°$.

291. Основание пирамиды — ромб, длина стороны которого равна 12 см. Двугранные углы при ребрах основания равны $45°$. Вычислите объем пирамиды, если ее высота равна 3 см.

292. Основание пирамиды — ромб. Вычислите радиус окружности, вписанной в основание, если объем пирамиды равен 9 см^3, длина стороны основания равна 6 см, а каждый из двугранных углов при основании равен $45°$.

293. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник. Объем пирамиды равен 9 см^3, а угол между диагоналями основания — $30°$. Вычислите радиус окружности, описанной около основания, если боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом $45°$.

294. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны между собой. Вычислите радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, если ее объем равен $\frac{9}{\sqrt{2}}$ см^3.

295. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см. Вычислите объем пирамиды, если угол между апофемами смежных боковых граней равен $60°$.

296. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны между собой. Вычислите радиус окружности, описанной около диагонального сечения, если объем пирамиды равен $36\sqrt{2}$ см^3.

297. Основание пирамиды — прямоугольник. Две боковые грани ее перпендикулярны основанию, а две другие образуют с плоскостью основания углы $45°$ и $30°$. Вычислите объем пирамиды, если длина наибольшего бокового ребра равна $3\sqrt{5}$ см.

298. Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна a, а его угол равен $60°$. Найдите объем пирамиды, если ее двугранные углы при ребрах основания равны $45°$.

299. Основание треугольной пирамиды $SABC$ — прямоугольный равнобедренный треугольник ABC $(\angle ACB = 90°)$. Вычислите расстояние от вершины B до плоскости ASC, если $SB = AB = 3$ см и $SB \perp (ABC)$.

300. Основание пирамиды — треугольник, длины сторон которого 7 см, 8 см и 9 см. Двугранные углы при ребрах ее основания равны. Вычислите градусную меру двугранного угла при ребре основания пирамиды, если ее объем равен 20 см^3.

301. Основание пирамиды — треугольник, длины сторон которого равны 10 см, 10 см, 12 см, а высоты боковых граней равны между собой. Вычислите высоту боковой грани, если объем пирамиды равен $48\sqrt{2}$ см^3.

302. Длины сторон оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 6 см. Вычислите объем усеченной пирамиды, если двугранные углы при ребрах большего основания равны 60°.

303. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 см и 5 см, а длина бокового ребра — 2 см. Вычислите объем усеченной пирамиды.

304. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды имеют длины 2 см и 6 см. Вычислите объем пирамиды, если каждый двугранный угол при ребре большего основания равен 60°.

305. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен 60°. Вычислите объем пирамиды, если ее высота равна 10 см.

306. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна 1 см^2. Вычислите объем пирамиды, если две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 30° и 60°.

307. Основание пирамиды — прямоугольник. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а остальные наклонены к основанию под углом 60°. Вычислите объем пирамиды, если ее высота равна 3 см.

308. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, у которой длины параллельных сторон 2 см и 8 см. Вычислите объем пирамиды, если каждый двугранный угол при ребре основания равен 60°.

309. В пирамиде $DABC$ боковые ребра взаимно перпендикулярны ($DA \perp DB$, $DA \perp DC$, $DB \perp DC$), $DA = 6$ см, $DB = 8$ см, $DC = 10$ см. Вычислите объем пирамиды.

3

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Глава 3
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Сфера и шар

1. Сфера и шар. Рассмотрим понятия сферы и шара в пространстве, которые аналогичны понятиям окружности и круга на плоскости. Теннисный шарик и футбольный мяч дают представление о сфере, а шарик в шарикоподшипнике — о шаре. Форму шара и сферы имеют многие украшения и элементы архитектурных сооружений (рис. 62, *а*).

Определение. **Сферой называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек пространства, находящихся на заданном расстоянии от данной точки пространства.**

Данная точка называется *центром сферы*.

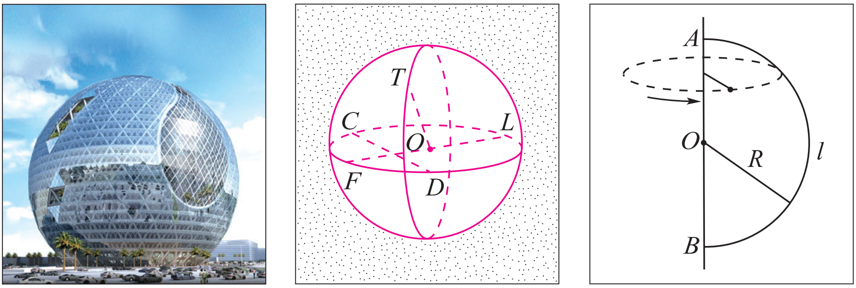
Радиусом сферы называется отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо точкой сферы.

Иногда радиусом сферы называют длину отрезка, соединяющего центр сферы с какой-либо точкой сферы.

Из определения следует, что все радиусы сферы равны.

На рисунке 62, *б* изображены сфера с центром в точке O и радиусы OF и OT этой сферы.

Сфера с центром в точке O и радиусом R обозначается $S(O, R)$ (читают: «Сфера с центром в точке O и радиусом R»).



а) *б)* *в)*

Рис. 62

Хордой сферы называется отрезок, соединяющий две точки сферы.

Диаметром сферы называется *хорда, проходящая через ее центр.*

Центр сферы делит любой его диаметр на два равных отрезка. Любой диаметр сферы радиусом R равен $2R$.

Например, на рисунке 62, *б* изображены хорда CD и диаметр FL сферы с центром в точке O.

Заметим, что сферу радиусом R можно представить как поверхность, которую опишет полуокружность радиусом R при ее повороте на 360° около прямой, содержащей диаметр AB этой полуокружности (рис. 62, *в*).

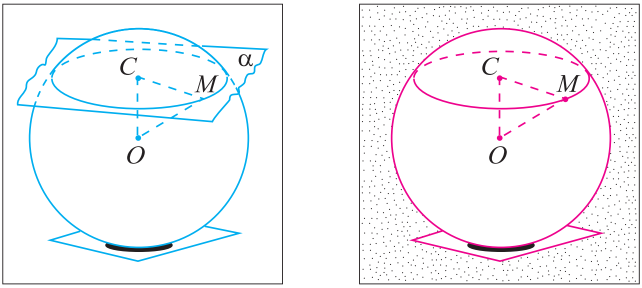
Определение. **Шаром называется геометрическое тело, состоящее из сферы и части пространства, ограниченного этой сферой.**

Другими словами, шар с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическое тело, границей которого является сфера $S(O, R)$.

Радиусом, хордой и диаметром шара называются радиус, хорда и диаметр сферы, которая является границей шара.

Заметим, что шар радиусом R можно представить как тело, которое опишет полукруг радиусом R при повороте этого полукруга на 360° около прямой, содержащей диаметр полукруга.

Теорема 1 (*о сечении сферы плоскостью*). ***Сечение сферы плоскостью есть окружность.***



а) *б)*

Рис. 63

Доказательство.

Пусть плоскость α пересекает сферу $S(O, R)$ и не проходит через ее центр. Из центра O опустим перпендикуляр OC на плоскость α (рис. 63, *а*, *б*). Пусть $OC = d$. Докажем, что пересечение сферы $S(O, R)$ и плоскости α есть окружность с центром в точке C и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Пусть M — произвольная точка линии пересечения сферы $S(O,\ R)$ и плоскости α. Докажем, что точка M принадлежит окружности с центром в точке C и радиусом $r=\sqrt{R^2-d^2}$. Так как $OC\perp\alpha$, то прямая OC перпендикулярна каждой прямой плоскости α, а, значит, $OC\perp CM$. В прямоугольном треугольнике OCM $CM=\sqrt{R^2-d^2}$, т. е. точка M находится на расстоянии $\sqrt{R^2-d^2}$ от точки C. Значит, она принадлежит окружности с центром в точке C и радиусом $\sqrt{R^2-d^2}$.

Пусть теперь точка M принадлежит окружности с центром в точке C и радиусом $\sqrt{R^2-d^2}$, расположенной в плоскости α. Докажем, что точка M — общая точка плоскости α и сферы $S(O,\ R)$. Для этого достаточно доказать, что $OM=R$. В прямоугольном треугольнике $OM=\sqrt{OC^2+CM^2}=$ $=\sqrt{d^2+(R^2-d^2)}=R$. Таким образом, мы доказали, что пересечение плоскости α и сферы $S(O,\ R)$ есть окружность с центром в точке C и радиусом $\sqrt{R^2-d^2}$.

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы остается верным и в случае, если плоскость α проходит через центр сферы. Убедитесь в этом самостоятельно.

Из доказанной теоремы следует, *что сечение шара плоскостью есть круг, а основание перпендикуляра, проведенного из центра шара к плоскости сечения, есть центр круга, полученного в сечении.*

Плоскость, проходящая через центр сферы (шара), называется *диаметральной плоскостью*.

Сечение сферы (шара) диаметральной плоскостью называется *большой окружностью* (*большим кругом*).

Нетрудно понять, что плоскость α и сфера (шар) радиусом R имеют общие точки, если выполняется неравенство $d\leqslant R$ (d — расстояние от центра шара до плоскости α).

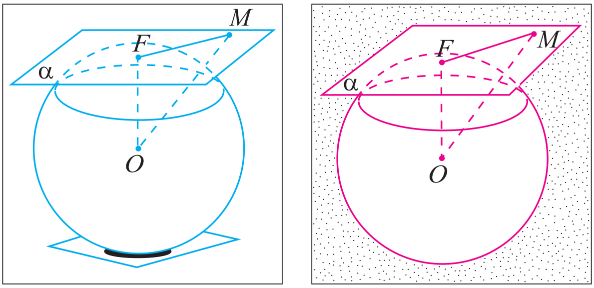
Определение. Касательной плоскостью к сфере называется плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Касательной плоскостью к шару называется касательная плоскость к сфере, которая является границей этого шара.

Прямая, лежащая в касательной плоскости сферы (шара) и проходящая через точку касания, называется *касательной к сфере* (*шару*). По определению касательная плоскость имеет со сферой только одну общую точку, следовательно, касательная прямая также имеет со сферой только одну общую точку — точку касания.

Следующая теорема показывает, что касательная плоскость к сфере существует.

Теорема 2 (*признак касательной плоскости к сфере*). ***Плоскость, перпендикулярная радиусу сферы и проходящая через его конец, лежащий на сфере, касается сферы.***



а) *б)*

Рис. 64

Дано:
OF — радиус сферы, $S(O, R)$,
$F \in \alpha$, $\alpha \perp OF$
(рис. 64, *а*, *б*).

Доказать:
α касается сферы в точке F.

Доказательство.

Пусть M — произвольная точка плоскости α, отличная от точки F. По условию $OF \perp \alpha$, следовательно, OM — наклонная к плоскости α, и поэтому $OM > OF$, т. е. $OM > R$. Отсюда следует, что точка M не лежит на сфере, значит, плоскость α имеет только одну общую точку F со сферой, т. е. касается сферы в точке F.

Теорема доказана.

Теорема 3 (*о свойстве касательной плоскости к сфере*). ***Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.***

Доказательство.

Пусть плоскость α касается сферы $S(O, R)$ в точке F (рис. 64, *а*, *б*). Докажем, что $OF \perp \alpha$. По определению касательной плоскости к сфере точка F является единственной общей точкой плоскости α и сферы $S(O, R)$. Следовательно, любая другая точка M плоскости α лежит вне сферы, и поэтому

$OM \neq OF$, т. е. либо $OM < OF$, либо $OM > OF$. Заметим, что неравенство $OM < OF$ не может выполняться. Действительно, если $OM < OF$, то на прямой FM найдется точка X, отличная от точки F, для которой $CX = OF$. Так как $X \in \alpha$, то сфера и плоскость α имеют две общие точки, а это противоречит определению касательной плоскости к сфере. Таким образом, $OM > OF$. Следовательно, длина отрезка OF — расстояние от центра O сферы до плоскости, т. е. $OF \perp \alpha$. Значит, длина отрезка OF — кратчайшее расстояние среди расстояний от центра O до точек плоскости α, т. е. $OF \perp \alpha$.

Теорема доказана.

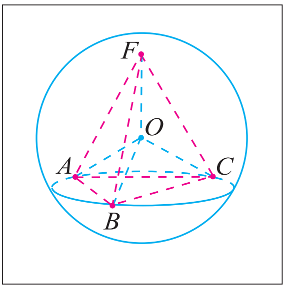
2. Многогранники и сфера. Рассмотрим понятия многогранника, вписанного в сферу, и многогранника, описанного около сферы.

Многогранник (например, пирамида или призма) называется *вписанным в сферу*, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется *описанной* около многогранника (пирамиды, призмы).

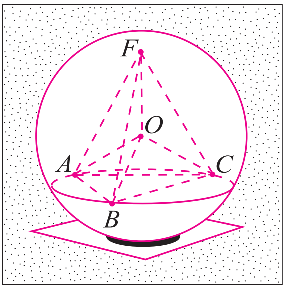
Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на границе этого шара. При этом шар называется *описанным* около многогранника.

Центр O сферы $S(O, R)$, описанной около многогранника, находится на расстоянии, равном радиусу R сферы, от каждой вершины многогранника.

На рисунке 65 *а*, *б* изображена треугольная пирамида $FABC$, вписанная в сферу $S(O, R)$. Вершины основания ABC пирамиды лежат на окружности, по которой плоскость основания пересекает сферу ($OF = OA = OB = OC = R$).



а)



б)

Рис. 65

Многогранник называется *описанным около сферы* (*шара*), если сфера (шар) касается всех граней многогранника. При этом сфера и шар называются *вписанными в многогранник*.

Центр O сферы $S(O, r)$, вписанной в многогранник, находится на расстоянии, равном радиусу r сферы, от каждой из плоскостей, содержащих грани многогранника.

Задача 1. Докажите, что около любой правильной пирамиды можно описать сферу.

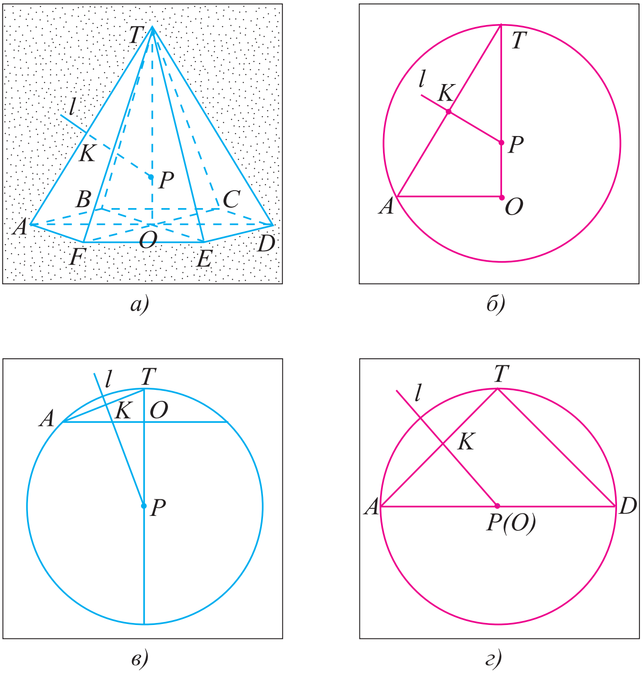


Рис. 66

Доказательство.

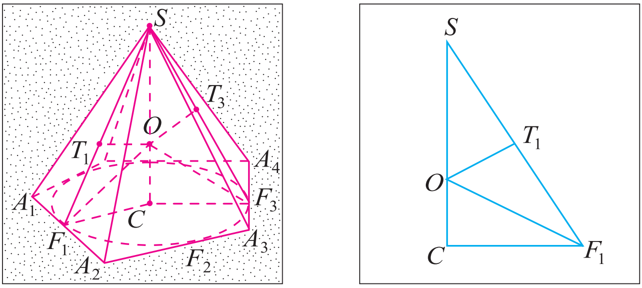
1) Рассмотрим для определенности правильную шестиугольную пирамиду $TABCDEF$ (рис. 66, *а*). Пусть TO — высота этой пирамиды. В плоскости ATO проведем серединный перпендикуляр l к отрезку AT ($K \in AT$, $AK = KT$, $K \in l$, $l \perp AT$). Обозначим буквой P точку пересечения прямых l и TO. Тогда $PT = PA$ (любая точка серединного перпендикуляра к отрезку AT равноудалена от концов этого отрезка).

2) Точка P равноудалена от вершин основания правильной пирамиды, т. е. $PA = PB = PC = PD = PE = PF$ (так как $\triangle AOP = \triangle BOP = \triangle COP = \triangle DOP = \triangle EOP = \triangle FOP$, эти треугольники прямоугольные, OP — их общий катет, $OA = OB = OC = OD = OE = OF$).

3) Таким образом, $PT = PA = PB = PC = PD = PE = PF$, т. е. точка P равноудалена от всех вершин пирамиды. Сфера с центром в точке P и радиусом PT есть сфера, описанная около рассматриваемой правильной пирамиды. Таким образом, *центр P сферы, описанной около правильной пирамиды, есть точка пересечения прямой, на которой лежит высота пирамиды, и серединного перпендикуляра к боковому ребру, проведенного в плоскости, содержащей высоту и боковое ребро пирамиды.*

Центр сферы может лежать на высоте пирамиды (рис. 66, *б*), лежать на продолжении высоты (рис. 66, *в*) или совпадать с основанием высоты пирамиды (рис. 66, *г*).

Задача 2. Докажите, что если в основание пирамиды можно вписать окружность, а основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то в пирамиду можно вписать сферу.



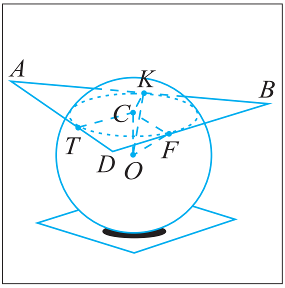
а) *б)*

Рис. 67

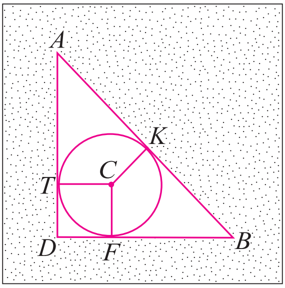
Доказательство.

Рассмотрим для определенности пятиугольную пирамиду $SA_1A_2A_3A_4A_5$. Пусть F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 — точки касания вписанной в основание пирамиды окружности со сторонами основания, C — центр вписанной окружности (рис. 67, *а*, *б*). Прямоугольные треугольники SCF_1, SCF_2, ..., SCF_5 равны и SC — их общий катет. Значит, биссектрисы углов при вершинах F_1, F_2, ..., F_5 пересекают этот катет в одной и той же точке O. Пусть OT_1, OT_2, ..., OT_5 — перпендикуляры, опущенные на гипотенузы SF_1, SF_2, ..., SF_5 соответственно. Плоскость SF_1C перпендикулярна плоскости SA_1A_2, следовательно, $OT_1 \perp (SA_1A_2)$. Аналогично $OT_2 \perp (SA_2A_3)$, $OT_3 \perp (SA_3A_4)$, ..., $OT_5 \perp (SA_1A_5)$. Так как $OC = OT_1 = OT_2 = ... = OT_5$, то точка O находится на одном и том же расстоянии от плоскостей всех граней пирамиды. Значит, сфера с центром O и радиусом $r = OC$ касается всех граней, т. е. вписана в данную пирамиду.

Задача 3. Сфера радиусом $\sqrt{10}$ см касается всех сторон прямоугольного треугольника ABD ($\angle ADB = 90°$), длины сторон которого 3 см, 4 см, 5 см. Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.



а)



б)

Рис. 68

Решение.

1) Пусть T, K, F — точки касания сферы со сторонами треугольника, точка C — основание перпендикуляра, проведенного из центра O сферы к плоскости треугольника (точка C совпадает с центром окружности, полученной в сечении) (рис. 68, *а*).

2) Отрезки OT, OK, OF перпендикулярны сторонам треугольника (радиус, проведенный в точку касания). Отрезок OC перпендикулярен плоскости треугольника, значит, он тоже перпендикулярен сторонам треугольника. Отсюда следует, что отрезки CT, CK, CF перпендикулярны сторонам треугольника.

3) Из равенства прямоугольных треугольников OCT, OCK, OFC ($OT = OK = OF$, OC — общая сторона) следует, что $CT = CK = CF$, т. е. точка C — центр окружности, вписан-

ной в треугольник ADB. Радиус этой окружности $r = p - c = \frac{AD + DB + AB}{2} - AB = 1$ (см) (рис. 68, *б*).

4) В прямоугольном треугольнике OCK ($\angle OCK = 90°$, $OK = \sqrt{10}$ см, $CK = 1$ см) длина катета $CO = \sqrt{OK^2 - CK^2} = \sqrt{10 - 1} = 3$ (см).

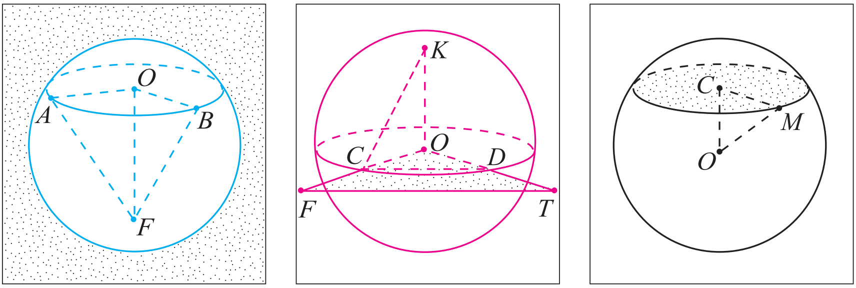
Ответ: 3 см.

Вопросы и задачи к § 1

310. Точки A и B принадлежат окружности с центром O, по которой плоскость пересекает сферу. Точка F принадлежит сфере и расположена так, что отрезок FO перпендикулярен секущей плоскости (рис. 69, *а*). Верно ли, что $FA = FB$?

311. Точки B и C принадлежат сфере с центром в точке O. Какому условию должна удовлетворять хорда BC, чтобы градусная мера угла BOC равнялась 60°?

312. Точка O — центр сферы, а точки A, B и C лежат на сфере так, что отрезки OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?



а) *б)* *в)*

Рис. 69

313. Точки C и D принадлежат большой окружности сферы с центром в точке O, точки F и T лежат на лучах OC и OD соответственно так, что каждый из отрезков OF и OT равен диаметру сферы, точка K принадлежит сфере и $OK \perp (COD)$. Вычислите длины отрезков FT и CK, если радиус сферы равен 1 см, а $\angle COD = 60°$ (рис. 69, *б*).

314. Вычислите радиус шара, если его центр O находится на расстоянии 4 см от центра C круга, полученного в сечении, а радиус этого круга равен 3 см (рис. 69, *в*).

315. Точки A и B сферы симметричны относительно центра O этой сферы. Вычислите длину большой окружности сферы, если расстояние между точками A и B равно 2 см.

316. Отрезок AB — хорда сферы, не проходящая через центр O сферы. Вычислите расстояние от центра сферы до середины хорды AB, если радиус сферы равен 10 см, а длина хорды AB равна 16 см.

317. Точка C — центр окружности, полученной при пересечении сферы с центром в точке O и плоскости, точка F принадлежит указанной окружности. Вычислите радиус сферы, если длина отрезка CO равна 6 см, а площадь треугольника OCF равна 24 см^2 (рис. 70, *а*).

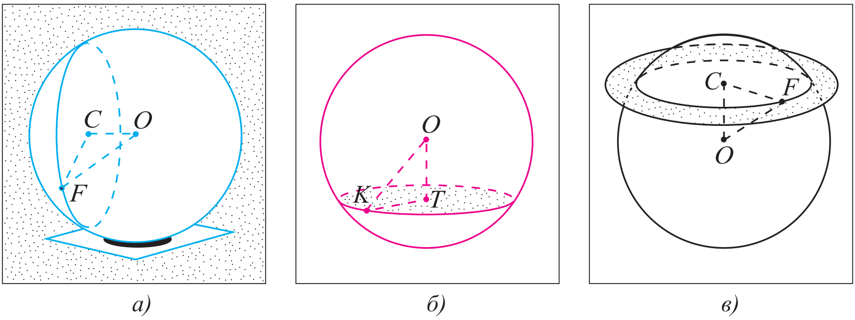


Рис. 70

318. Точка C — центр окружности, полученной при пересечении сферы с центром в точке O и плоскости, точка F принадлежит указанной окружности. Вычислите площадь треугольника OCF, если длина отрезка CO равна 3 см, а радиус сферы равен 5 см.

319. Секущая плоскость пересекает шар по кругу с центром в точке T и радиусом 3 см. Вычислите расстояние от центра O шара до секущей плоскости, если радиус OK шара равен 6 см (рис. 70, *б*).

320. Меньшая из двух концентрических окружностей с центром в точке C лежит на сфере с центром O. Вычислите площадь кольца, ограниченного этими окружностями, если расстояние от центра сферы до некоторой точки F меньшей окружности равно 10 см, расстояние от центра сферы до плоскости, в которой лежат окружности, равно 8 см, а радиус большей окружности на 1 см больше радиуса меньшей окружности (рис. 70, *в*).

321. Сфера с центром в точке O касается плоскости α в точке T, а точка F лежит в плоскости α и находится от точек T и O соответственно на расстоянии 6 см и 10 см. Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости α.

322. Шар радиусом 10 см пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 8 см от его центра. Вычислите площадь сечения шара данной плоскостью.

323. Сфера радиусом 4 см касается плоскости. Точка A лежит в этой плоскости на расстоянии 5 см от центра шара. Вычислите расстояние от этой точки до точки касания.

324. Через точку A, лежащую на сфере, радиус которой 10 см, проведена плоскость. Угол между этой плоскостью и радиусом, проведенным в точку A, равен $60°$. Вычислите длину линии пересечения сферы с плоскостью.

325. Расстояние от центра сферы радиусом 12 см до секущей плоскости равно 8 см. Вычислите высоту равностороннего треугольника, вписанного в сечение сферы.

326. Радиус сферы равен 2 см. На расстоянии $\sqrt{3}$ см от ее центра проведена плоскость. Вычислите длину стороны квадрата, вписанного в сечение сферы плоскостью.

327. Вершины равностороннего треугольника, длина стороны которого 6 см, лежат на сфере радиусом 10 см. Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости, в которой лежит треугольник.

328. Сфера радиусом 13 см пересечена плоскостью, находящейся на расстоянии 5 см от центра сферы. Вычислите объем пирамиды, вершиной которой является центр сферы, а основание есть квадрат, вписанный в сечение.

329. Сфера радиусом 10 см пересечена плоскостью, а в полученное сечение вписан прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 6 см и 8 см. Вычислите объем пирамиды, основанием которой является данный треугольник, а вершина совпадает с центром сферы.

330. В сечение сферы плоскостью вписан прямоугольник, длины сторон которого равны 5 см и 12 см. Вычислите радиус сферы, если объем пирамиды, основание которой есть данный прямоугольник, а вершина совпадает с центром сферы, равен $30\sqrt{3}$ см^3.

331. Основание пирамиды $OABC$ — треугольник ABC, длины сторон которого равны 6 см, 8 см, 10 см. Вычислите объем пирамиды, если сфера с центром в точке O проходит через вершины треугольника ABC, а радиус сферы равен 13 см.

332. Центр сферы радиусом $\frac{15}{2}$ см совпадает с вершиной пирамиды $OABC$. Вычислите высоту пирамиды, если сфера проходит через точки A, B, C, а длины сторон треугольника ABC равны 10 см, 10 см, 12 см.

333. Плоскость, перпендикулярная диаметру сферы, делит его на отрезки, длины которых 4 см и 16 см. Вычислите длину линии пересечения сферы и плоскости.

334. Через точку, делящую радиус шара пополам, проведена секущая плоскость, перпендикулярная этому радиусу. Вычислите площадь получившегося сечения, если радиус шара равен 4 см.

335. Радиус сферы равен 3 см. Точка A, лежащая на плоскости касательной к сфере, удалена от точки касания на $3\sqrt{3}$ см. Вычислите расстояние от точки касания до точки пересечения сферы с прямой, проходящей через центр сферы и точку A.

336. Точка C сферы удалена от концов ее диаметра AB на 5 см и 12 см. Вычислите длину линии пересечения сферы и плоскости, проходящей через точку С и перпендикулярной прямой AB.

337. Диаметр шара равен 25 см. Точка B поверхности шара находится на расстоянии 15 см от одного из концов диаметра шара. Вычислите площадь сечения шара плоскостью, проходящей через точку B и перпендикулярной диаметру.

338. Сфера касается сторон треугольника, длины которых равны 5 см, 5 см и 8 см. Расстояние от центра сферы до вершины большего из углов треугольника равно 13 см. Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

339. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиусом 5 см. Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см и $CA = 15$ см.

340. Сфера касается всех сторон ромба, длины диагоналей которого равны 15 см и 20 см. Вычислите расстояние от центра сферы до плоскости ромба, если радиус сферы 10 см.

341. Шар касается всех сторон прямоугольного треугольника, длины катетов которого равны 6 см и 8 см. Вычислите радиус шара, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 10 см.

342. Шар радиусом R касается всех сторон равностороннего треугольника ABC со стороной a. Найдите объем пирамиды $OABC$, где точка O — центр шара.

343. Сфера касается всех сторон равнобедренной трапеции. Точка касания делит боковую сторону трапеции на части 4 см и 9 см. Вычислите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости трапеции равно 8 см.

344. Сфера касается всех сторон равнобедренной трапеции, основания которой a и b. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции, если радиус сферы R.

345. Точка O поверхности шара удалена от концов его диаметра на 10 см и 24 см. Плоскость, проходящая через точку O и перпендикулярная данному диаметру, разбивает диаметр шара на два отрезка. Вычислите длины этих отрезков.

346. Диаметр шара 52 см, а секущая плоскость удалена от его центра на 10 см. Вычислите площадь круга, полученного при пересечении шара и плоскости.

347. Радиус шара 10 см. Две параллельные плоскости расположены по разные стороны от центра шара. Вычислите расстояние между плоскостями, если площади сечений шара данными плоскостями равны 36π см^2 и 64π см^2.

348. Сечения шара параллельными плоскостями имеют площади 144π см^2 и 25π см^2. Вычислите радиус шара, если расстояние между плоскостями равно 17 см, а центр шара лежит между этими плоскостями.

349. Сечения сферы параллельными плоскостями имеют длины 20π см и 48π см. Вычислите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно 14 см, а центры оснований лежат на одном радиусе.

350. Радиус шара 13 см. Площади сечений шара параллельными плоскостями равны 144π см^2 и 169π см^2. Вычислите расстояние между плоскостями, если они пересекают один радиус.

351. Около правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ описана сфера. Вычислите радиус этой сферы, если длина стороны основания равна 4 см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

352. Около правильной четырехугольной пирамиды описана сфера. Найдите радиус этой сферы, если длина стороны основания равна $2a$, а боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

353. В сферу вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник, длина диагонали которого равна 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол $15°$. Вычислите радиус сферы.

354. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а длина бокового ребра — 5 см. Вычислите радиус сферы, описанной около пирамиды.

355. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см, а радиус сферы, описанной около пирамиды, равен $\frac{25}{4}$ см. Вычислите объем пирамиды.

356. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а длина бокового ребра — 10 см. Вычислите радиус сферы, описанной около пирамиды.

357. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна a и составляет с плоскостью основания угол α.

358. В шар вписана правильная треугольная пирамида, длина стороны основания которой равна a. Найдите радиус шара, если высота пирамиды равна стороне ее основания.

359. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см, а ее высота — 4 см. Вычислите радиус сферы, вписанной в данную пирамиду.

360. Радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, равен 3 см, а длина диагонали ее основания — $12\sqrt{2}$ см. Вычислите объем пирамиды.

361. Радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, равен 2 см, а двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны 60°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

362. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см. Вычислите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

363. В правильную четырехугольную пирамиду, длина стороны основания которой равна 12 см, вписана сфера. Вычислите объем пирамиды, если радиус сферы равен 3 см.

364. В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если расстояние от центра сферы до боковой грани пирамиды равно 3 см, а высота пирамиды — 8 см.

365. Двугранный угол при ребре правильной треугольной пирамиды равен 60°, а длина стороны ее основания равна 6 см. Вычислите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

366. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°, длина стороны ее основания равна 12 см. Вычислите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

367. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, если длина стороны ее основания равна a.

368. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, длина стороны основания которой равна a и высота — h.

369. Докажите, что около правильной призмы можно описать сферу, центр которой есть середина отрезка, соединяющего центры оснований призмы.

370. Вычислите диаметр сферы, описанной около правильной треугольной призмы, если длина бокового ребра призмы равна 4 см, а длина стороны основания — 6 см.

371. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в сферу радиусом R, если высота призмы равна R.

372. В сферу радиусом R вписана правильная четырехугольная призма, все ребра которой равны между собой. Найдите площадь основания призмы.

373. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная призма. Найдите объем призмы, если ее высота H.

374. В сферу радиусом R вписана правильная четырехугольная призма, у которой диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем призмы.

375. Докажите, что около прямой призмы можно описать сферу, если около ее основания можно описать окружность.

376. В сферу вписана прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 6 см и 8 см. Вычислите объем призмы, если радиус сферы равен $\sqrt{41}$ см.

377. В правильной треугольной призме высота равна H, а диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите радиус сферы, описанной около призмы.

378. В шаре проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 8 см и 12 см от центра. Вычислите радиус шара, если длина общей хорды сечений равна 18 см.

379. Площадь большого круга шара равна 50π см^2. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6 см. Вычислите расстояние от центра шара до плоскостей, содержащих сечения, если площадь одного из них равна 25π см^2.

380. Докажите, что если двугранные углы при основании треугольной пирамиды равны, то в пирамиду можно вписать сферу.

381. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна a, а угол при основании треугольника — α. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

382. В правильную треугольную пирамиду вписана сфера, центр которой делит высоту пирамиды в отношении $5 : 4$, считая от вершины. Найдите радиус сферы, если сторона основания пирамиды равна a.

383. Докажите, что объем пирамиды, в которую вписана сфера радиусом r, можно найти по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{полн}}r$, где $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности пирамиды.

384. Основание пирамиды — ромб, длина стороны которого равна a, а один из его углов — α. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, если каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β.

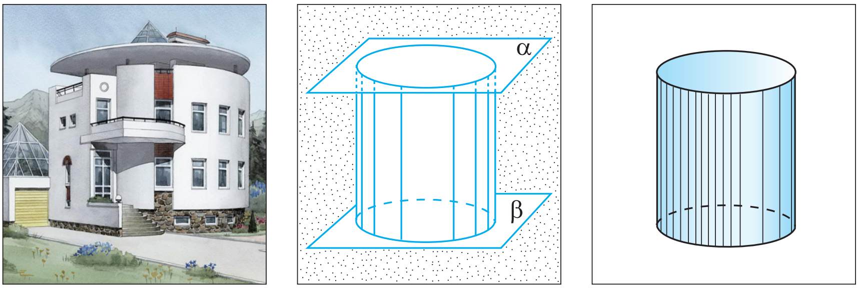
§ 2. Цилиндр

1. Понятие цилиндра. В этом параграфе мы изучим свойства геометрического тела, называемого цилиндром. В окружающей нас природе существует множество объектов, являющихся физическими моделями указанной фигуры. Например, форму цилиндра имеют многие детали машин и элементы многих архитектурных сооружений (рис. 71, *а*).

В некоторой плоскости α рассмотрим окружность $\omega(O, R)$ с центром O и радиусом R. Через каждую точку окружности $\omega(O, R)$ проведем прямую, перпендикулярную плоскости α.

Цилиндрической поверхностью называется фигура, образованная этими прямыми, а сами прямые называются *образующими цилиндрической поверхности.*

Все образующие цилиндрической поверхности параллельны друг другу, так как они перпендикулярны плоскости α.

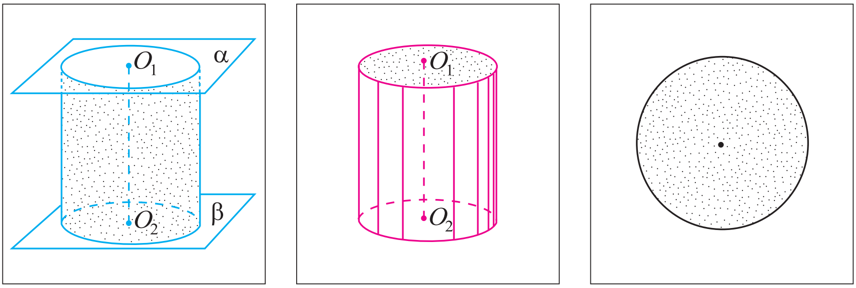


а) *б)* *в)*

Рис. 71

Прямым круговым цилиндром или просто *цилиндром* называется геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями α и β, которые перпендикулярны образующим цилиндрической поверхности (рис. 71, *б*, *в*).

Боковой поверхностью цилиндра называется часть цилиндрической поверхности, расположенная между секущими плоскостями α и β, которые перпендикулярны ее образующим (рис. 72, *а*), а части (круги), отсекаемые цилиндрической



а) *б)* *в)*

Рис. 72

поверхностью на параллельных плоскостях α и β, называются *основаниями цилиндра* (рис. 72, *б*).

Образующей цилиндра называется отрезок (или длина этого отрезка) образующей цилиндрической поверхности, расположенный между параллельными плоскостями, в которых лежат основания цилиндра. Все образующие цилиндра параллельны и равны между собой.

Осью цилиндра называется отрезок O_1O_2, соединяющий центры кругов, являющихся основаниями цилиндра (см. рис. 72, *а*, *б*).

Высотой цилиндра называется перпендикуляр (или длина этого перпендикуляра), проведенный из какой-нибудь точки плоскости одного основания цилиндра к плоскости другого основания.

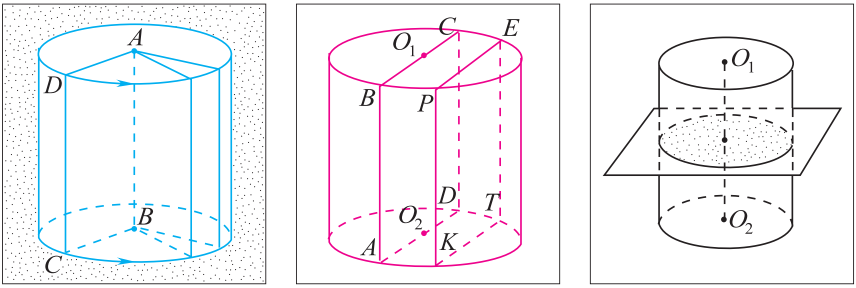
Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Цилиндр называется *равносторонним*, если его высота равна диаметру основания.

Если цилиндр с основанием радиусом R спроектировать на плоскость основания параллельно какой-либо его образующей, то проекцией цилиндра будет круг радиусом R (рис. 72, *в*).

Цилиндр можно получить поворотом прямоугольника вокруг одной из его сторон на 360°. На рисунке 73, *а* изображен цилиндр, полученный поворотом прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB. В этом случае боковая поверхность цилиндра образуется поворотом стороны CD, а основания — поворотом сторон BC и AD.

Если секущая плоскость параллельна оси O_1O_2 цилиндра, то сечением цилиндра служит прямоугольник, две стороны



а) б) в)

Рис. 73

которого — образующие, а две другие — хорды оснований цилиндра. Примером такого сечения служит прямоугольник $KTEP$, изображенный на рисунке 73, *б*.

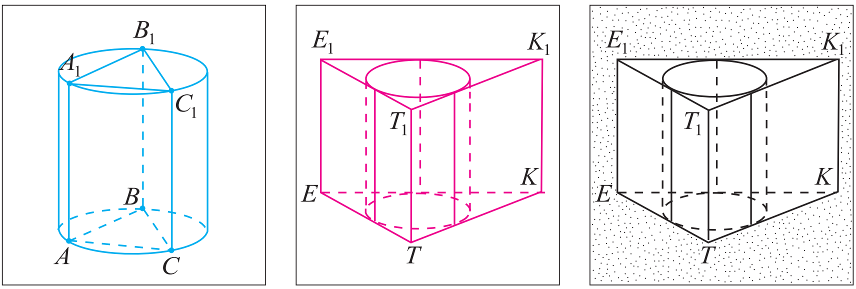
Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось.

Осевое сечение цилиндра — прямоугольник, две стороны которого есть образующие цилиндра, а две другие — диаметры его оснований. На рисунке 73, *б* изображено осевое сечение $ABCD$.

Секущая плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его по кругу (рис. 73, *в*).

Призма называется *вписанной в цилиндр*, если ее основания вписаны в основания цилиндра, и *призма описана около цилиндра*, если ее основания описаны около оснований цилиндра.

Например, на рисунке 74, *а* изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, вписанная в цилиндр, а на рисунке 74, *б, в* — треугольная призма $TKET_1K_1E_1$, описанная около цилиндра.



а) б) в)

Рис. 74

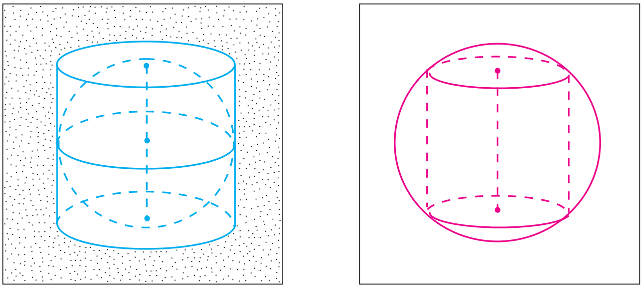
Высота призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте цилиндра.

2. Цилиндр и сфера. *Сфера* называется *вписанной в цилиндр*, если она касается оснований цилиндра и каждой его образующей. При этом *цилиндр* называется *описанным около сферы* (рис. 75, *а*).

Шар называется *вписанным в цилиндр*, если он касается оснований цилиндра и каждой его образующей. При этом *цилиндр* называется *описанным около шара*.

Цилиндр называется *вписанным в сферу*, если окружности оснований цилиндра являются сечениями сферы. При этом сфера называется описанной около цилиндра (рис. 75, *б*).

Цилиндр называется *вписанным в шар*, если основания цилиндра являются сечениями шара. При этом шар называется описанным около цилиндра.



а) *б)*

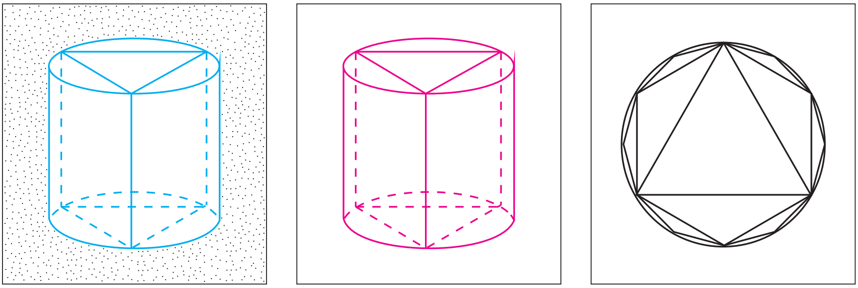
Рис. 75

3. Площадь боковой и полной поверхностей цилиндра. Теперь рассмотрим вопрос о вычислении площади боковой и полной поверхностей цилиндра.

Пусть в цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Если число n сторон основания правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр, неограниченно возрастает, тогда призма все меньше и меньше отличается от цилиндра. Можно доказать, что существует число, к которому стремится площадь боковой поверхности такой призмы при неограниченном возрастании числа сторон ее оснований. *За площадь боковой поверхности цилиндра принимается число, к которому стремится площадь боковой поверхности пра-*

вильной призмы, вписанной в цилиндр, когда число сторон оснований этой призмы неограниченно возрастает.

Теорема 1 (*о площади боковой поверхности цилиндра*). ***Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности его основания на высоту*** (***$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, где R — радиус основания цилиндра, H — его высота***).



а) *б)* *в)*

Рис. 76

Доказательство.

Пусть P_n и H соответственно периметр основания и высота правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр (рис. 76, *а*, *б*). Тогда площадь боковой поверхности этой призмы $S_{\text{бок призмы}} = P_nH$. Предположим, что число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание цилиндра, неограниченно растет (рис. 76, *в*). Тогда периметр P_n стремится к длине окружности $C = 2\pi R$, где R — радиус основания цилиндра, а высота H не изменяется. Таким образом, площадь боковой поверхности призмы стремится к числу $2\pi RH$, т. е. площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$.

Теорема доказана.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Площадь каждого основания цилиндра равна πR^2, следовательно, площадь полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{полн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$.

Если боковую поверхность цилиндра «разрезать» по образующей FT (рис. 77, *а*) и развернуть так, чтобы все образующие оказались в одной плоскости, то в результате мы получим прямоугольник FTT_1F_1, который называется *разверткой*

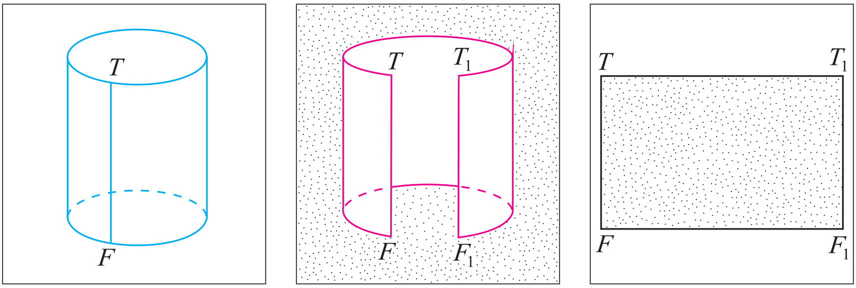


Рис. 77

боковой поверхности цилиндра. Сторона FF_1 прямоугольника есть развертка окружности основания цилиндра, следовательно, $FF_1 = 2\pi R$, а его сторона FT равна образующей цилиндра, т. е. $FT = H$ (рис. 77, *б*, *в*). Таким образом, площадь $FT \cdot FF_1 = 2\pi RH$ развертки боковой поверхности цилиндра равна площади его боковой поверхности.

4. Объем цилиндра. Теперь рассмотрим вопрос о вычислении объема цилиндра.

За объем цилиндра принимается число, к которому стремится объем правильной призмы, вписанной в цилиндр, когда число сторон ее оснований неограниченно возрастает.

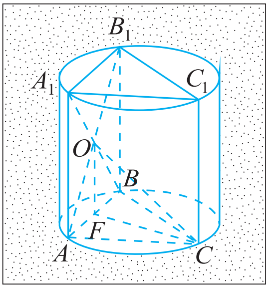
Теорема 2 (*об объеме цилиндра*). ***Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту (*** $V = \pi R^2 H$***, где*** R***,*** H ***— радиус и высота цилиндра соответственно).***

Доказательство.

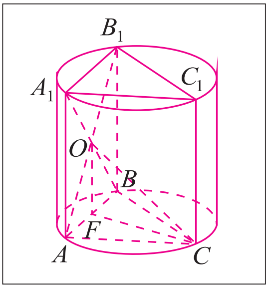
Пусть S_n — площадь основания, H — высота правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр. Тогда объем этой призмы $V_n = S_n H$. Предположим, что число сторон основания вписанной в цилиндр призмы неограниченно возрастает. Тогда S_n будет стремиться к площади πR^2 основания цилиндра, а высота H остается неизменной. Таким образом, объем $S_n H$ призмы будет стремиться к числу $\pi R^2 H$, т. е. объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H$.

Теорема доказана.

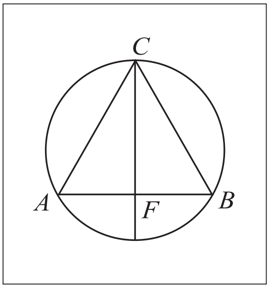
Задача 1. В равносторонний цилиндр радиусом 2 см вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Вычислите объем пирамиды $OACF$, где точка O — центр грани AA_1B_1B, а точка F — середина ребра AB.



а)



б)



в)

Рис. 78

Р е ш е н и е.

1) Объем пирамиды вычислим по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$. Так как $OF \perp (ABC)$ $(OF \parallel AA_1,\ AA_1 \perp (ABC))$, то $V_{OAFC} = \frac{1}{3}S_{AFC} \cdot OF$ (рис. 78, *а*, *б*).

2) Пусть x — длина стороны основания, тогда площадь основания $S_{AFC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{8}$ (рис. 78, *в*).

3) В треугольнике AFC $\left(\angle AFC = 90°,\ AF = \frac{x}{2},\ AC = x\right)$ длина катета $CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Так как треугольник ACB равносторонний, то $CF = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ (см). Из уравнения $\frac{x\sqrt{3}}{2} = 3$ найдем, что $x = 2\sqrt{3}$.

4) Таким образом, $S_{AFC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{8} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см^2), а $V_{OAFC} = \frac{1}{3}S_{AFC} \cdot OF = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ (см^3).

Ответ: $\sqrt{3}$ см^3.

Задача 2. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, основание которой есть прямоугольный треугольник ACB $(\angle ACB = 90°,$ $AC = 8$ см, $AB = 10$ см$)$. Вычислите объем цилиндра, вписанного в призму, если объем пирамиды C_1ACB равен 16 см^3.

Р е ш е н и е.

1) Объем цилиндра вычислим по формуле $V_{\text{цил}} = \pi r^2 H$. Заметим, что высота цилиндра равна длине ребра AA_1 призмы, а радиус r равен радиусу окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC (рис. 79, *а*, *б*, *в*).

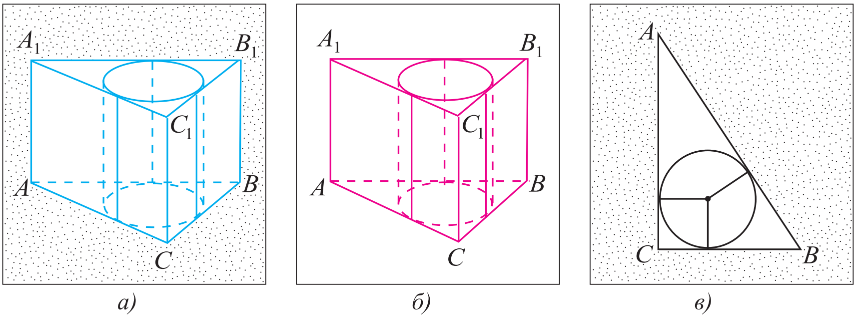


Рис. 79

2) В треугольнике ABC ($\angle ACB = 90°$, $AC = 8$ см, $AB = 10$ см) длина катета $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6$ см.

3) Объем пирамиды C_1ACB $V_{C_1ACB} = \frac{1}{3}S_{ACB} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8H = 8H$. По условию $8H = 16$, следовательно, $H = 2$ см.

4) Радиус вычислим по формуле $r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{24}{12} = 2$ (см).

Таким образом, $V_{\text{цил}} = \pi r^2 H = \pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi$ (см^3).

Ответ: 8π см^3.

Вопросы и задачи к § 2

385. Точка F — середина образующей AB цилиндра, центрами оснований которого являются точки O и T (рис. 80, *а*). Верно ли, что $FO = FT$?

386. Точки A и B принадлежат окружности с центром O основания цилиндра, а точка F — центр другого основания цилиндра. Верно ли, что $AF = BF$?

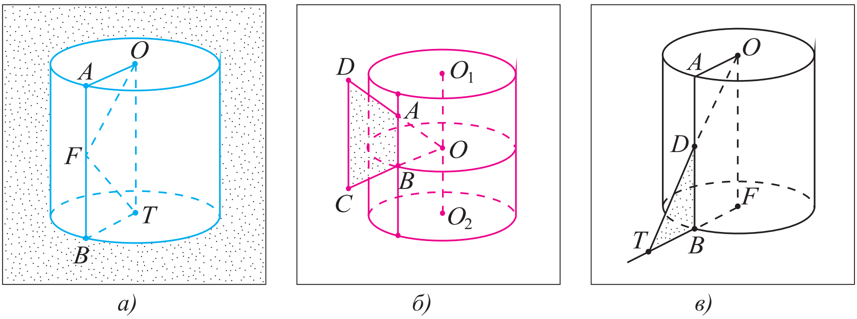


Рис. 80

387. Радиус цилиндра равен 3 см, а его высота равна 10 см. Вычислите площадь осевого сечения цилиндра.

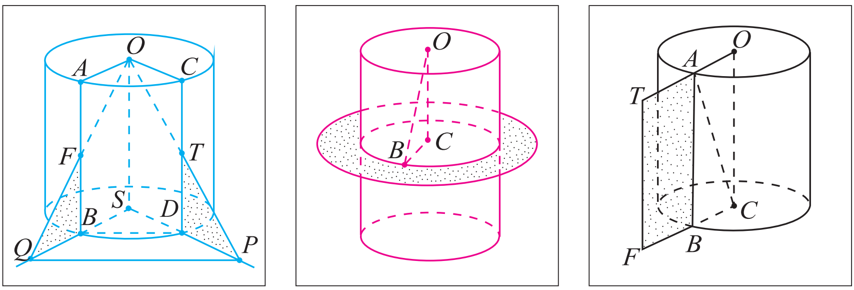
388. Точка O — середина оси O_1O_2 цилиндра, точки A и B лежат на одной его образующей. На лучах OA и OB выбраны соответственно точки D и C так, что точки A и B — середины отрезков OD и OC соответственно (рис. 80, *б*). Чему равна длина отрезка DC, если расстояние между точками A и B равно 2 см?

389. Точки O и F — центры оснований цилиндра. Через точку O и середину D образующей AB цилиндра проведена прямая, пересекающая плоскость основания цилиндра в точке T. Вычислите длину отрезка TB, если радиус цилиндра равен 3 см (рис. 80, *в*).

390. Точка O — центр основания цилиндра, отрезок AB — диаметр другого его основания. Вычислите площадь треугольника AOB, если радиус цилиндра равен 2 см, а его высота равна 6 см.

391. Отрезки AB и CD — образующие цилиндра с осью OS, а радиусы SB и SD перпендикулярны между собой, точки F и T — середины образующих AB и CD соответственно. Прямые OF и OT пересекают плоскость основания цилиндра в точках Q и P соответственно. Вычислите длину отрезка PQ, если радиус цилиндра равен 1 см (рис. 81, *а*).

392. Точка O — центр основания цилиндра, а точка C является центром окружности, полученной при пересечении боковой поверхности цилиндра и плоскости, перпендикулярной его оси, B — точка этой окружности. Вычислите радиус



а) *б)* *в)*

Рис. 81

окружности, концентрической с данной окружностью, если ее радиус в два раза больше радиуса меньшей окружности, $OC = 2$ см, $OB = 4$ см (рис. 81, *б*).

393. Точки O и C — центры оснований цилиндра, AB — его образующая, при этом точки A и B — середины отрезков OT и CF соответственно. Вычислите расстояние между точками A и C, если четырехугольник $OTFC$ — квадрат с площадью 16 см^2 (рис. 81, *в*).

394. Площадь осевого сечения цилиндра равна 60 см^2, а его высота — 10 см. Вычислите радиус основания цилиндра.

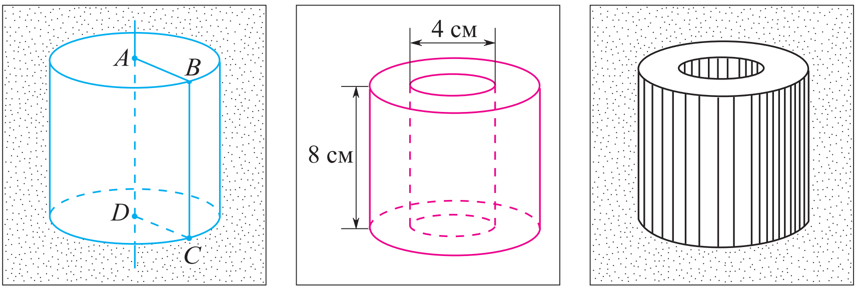
395. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а его высота — 5 см. Вычислите площадь осевого сечения цилиндра.

396. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Вычислите радиус основания цилиндра.

397. Радиус основания цилиндра равен 3 см, а его высота — 8 см. Вычислите радиус окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.

398. Высота цилиндра равна 6 см, а диагональ осевого сечения — 10 см. Вычислите площадь основания цилиндра.

399. Цилиндр получен в результате поворота прямоугольника $ABCD$ около прямой AD (рис. 82, *а*). Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, если длины сторон AD и AB прямоугольника равны соответственно 4 см и 2 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 82

400. В модели цилиндра просверлено отверстие, диаметр которого равен 4 см (рис. 82, *б*, *в*). Вычислите площадь поверхности отверстия, если высота модели цилиндра равна 8 см.

401. Длина диагонали осевого сечения цилиндра равна 12 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен $60°$. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

402. Осевое сечение цилиндра — квадрат, длина диагонали которого равна 10 см. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

403. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $60°$. Длина оси цилиндра равна 20 см. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, если расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости равно 4 см.

404. Высота цилиндра равна 10 см. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и находящейся на расстоянии 6 см от нее, равна 160 см^2. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

405. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу $120°$. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, если высота цилиндра равна 10 см, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно 5 см.

406. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу $60°$. Расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости равно 2 см. Вычислите площадь сечения, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 80π см^2.

407. Диагональ сечения цилиндра, параллельного его оси, наклонена к плоскости основания под углом $60°$, а ее длина равна 3 см. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, если сечение отсекает от окружности основания дугу $120°$.

408. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, удалено от прямой, содержащей ось, на $2\sqrt{3}$ см и отсекает от окружности основания дугу $60°$. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, если площадь сечения равна 4 см^2.

409. Высота цилиндра в два раза больше радиуса. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между прямой, содержащей ось цилиндра, и секущей плоскостью равно половине радиуса R.

410. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Вычислите объем цилиндра, если длина диагонали осевого сечения равна 4 см.

411. Высота цилиндра в два раза больше его радиуса. Вычислите объем цилиндра, если площадь боковой поверхности равна 8π см^2.

412. Плоскость, параллельная оси цилиндра, находится от прямой, содержащей ее, на расстоянии, равном 6 см. Длина диагонали получившегося сечения равна 20 см, а радиус основания цилиндра — 10 см. Вычислите объем цилиндра.

413. Высота цилиндра равна 2 см. Через две его образующие проведено сечение, которое отсекает от окружности основания дугу $60°$. Вычислите объем цилиндра, если угол между диагональю сечения и плоскостью его основания равен $45°$.

414. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π см^2, а длина окружности его основания равна 2π см. Вычислите объем цилиндра.

415. Высота цилиндра 6 см, а радиус основания — 5 см. Отрезок длиной 10 см расположен так, что его концы лежат на окружностях обоих оснований. Вычислите расстояние от прямой, содержащей данный отрезок, до прямой, содержащей ось цилиндра.

416. Пирамида $DABC$ расположена так, что прямоугольный треугольник ACB ($\angle ACB = 90°$), служащий ее основанием, вписан в окружность основания, а боковое ребро DC является образующей цилиндра. Вычислите объем пирамиды, если объем цилиндра равен 36π см^3, площадь его боковой поверхности — 12π см^2, а длина отрезка DA — $\sqrt{37}$ см.

417. Правильная треугольная пирамида $DABC$ расположена так, что треугольник ABC вписан в окружность основания цилиндра, а вершина D совпадает с центром другого основания. Вычислите объем цилиндра, если боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $30°$, а площадь ее основания равна $\sqrt{3}$ см^2.

418. Вершины равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) расположены на окружностях оснований цилиндра. Хорда AB стягивает дугу $60°$, а площадь основания цилиндра равна 4π см^2. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь треугольника ABC равна 4 см^2.

419. Основание правильной четырехугольной пирамиды вписано в окружность основания цилиндра, а ее вершина совпадает с центром другого основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания. Вычислите объем пирамиды, если площадь основания цилиндра равна 16π см^2.

420. Высота цилиндра на 2 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 80π см^2. Вычислите объем правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр.

421. Диагональ сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее, в два раза больше радиуса цилиндра. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой совпадает со стороной сечения, являющейся хордой основания цилиндра, а вершина — центр другого основания.

422. Площадь полной поверхности цилиндра равна 456π см^2, а его высота — 7 см. Вычислите радиус окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.

423. Вычислите объем цилиндра, если площадь его полной поверхности равна 130π см^2, а периметр осевого сечения — 36 см.

424. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна 10 см^2. Вычислите площадь осевого сечения.

425. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, периметры которых равны 18 см и 36 см, а разность их площадей равна 63 $см^2$. Вычислите объем цилиндра.

426. Около равностороннего цилиндра описана треугольная призма, периметр основания которой равен 84 см, а площадь полной поверхности призмы равна 252 $см^2$. Вычислите объем цилиндра.

427. Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Найдите объем цилиндра, если диагональ боковой грани призмы составляет с плоскостью другой боковой грани угол φ, а ее длина равна a.

428. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, площадь которого S, а острый угол φ. Площадь большей боковой грани равна $2S$. Найдите объем цилиндра, описанного около призмы.

429. В цилиндр вписана правильная треугольная призма. Вычислите площадь сечения призмы, проходящего через сторону одного основания и противолежащую вершину другого основания, если площадь боковой поверхности цилиндра в два раза больше площади основания, а площадь его полной поверхности равна 16π $см^2$.

430. Основание прямой призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катета которого a. Диагональ большей боковой грани и диагональ другой боковой грани, которые выходят из одной вершины, образуют угол φ. Найдите объем описанного около призмы цилиндра.

431. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом φ. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данный параллелепипед.

432. Правильная четырехугольная призма вписана в цилиндр. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь основания призмы равна S, а диагональ призмы образует с боковым ребром угол φ.

433. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, длины катетов которого 3 см и 4 см. Высота призмы равна 2 см. Вычислите площадь полной поверхности цилиндра, вписанного в призму.

434. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, длина одного из катетов которого равна 6 см. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через другой катет, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Вычислите объем цилиндра, вписанного в призму, если высота призмы равна 8 см.

435. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат, а диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра, если длина диагонали параллелепипеда равна a.

436. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму, если длина стороны основания равна a, а сечение, проходящее через сторону одного основания и противолежащую ей вершину другого основания, наклонено к плоскости основания под углом 60°.

437. Площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения — S. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра.

438. Площадь осевого сечения цилиндра равна $4\sqrt{3}$ см^2. Вычислите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси и проходящей от прямой, содержащей ось, на расстоянии, равном половине радиуса основания.

439. Высота и радиус цилиндра равны $2R$ и R соответственно. Концы отрезка AB лежат на окружностях верхнего и нижнего основания, $AB = a$. Найдите расстояние между прямой AB и прямой, содержащей ось цилиндра.

440. Высота и радиус основания цилиндра равны соответственно $\sqrt{6}R$ и R. Вершины прямоугольника $ABCD$ лежат на окружностях оснований и различных образующих цилиндра. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $AB : BC = 1 : 3$.

441. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагонали его осевого сечения взаимно перпендикулярны.

442. Диагональ осевого сечения цилиндра равна a. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если она в два раза больше площади его боковой поверхности.

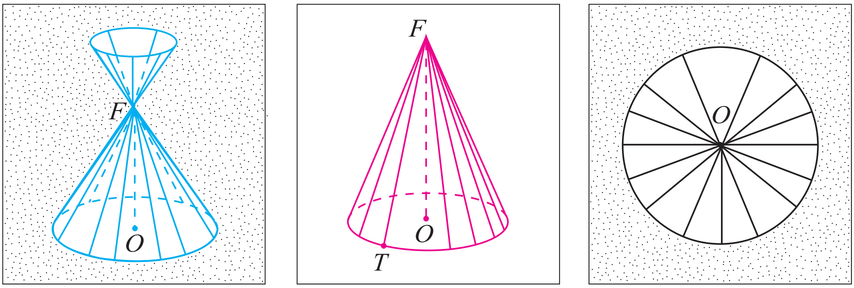
443. Отношение площади полной поверхности цилиндра к площади его осевого сечения равно 2π. Найдите угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра.

444. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр, равна 16 см^2. Диагональ осевого сечения цилиндра составляет с его образующей угол φ. Найдите радиус цилиндра.

445. В цилиндр, радиус основания которого равен R, вписана треугольная призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α. Угол между диагональю боковой грани, содержащей гипотенузу, и гранью, противолежащей углу α, равен φ. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

§ 3. Конус

1. Понятие конуса. Пусть окружность $\omega(O, R)$ лежит в некоторой плоскости β, а прямая FO ($F \notin \beta$) перпендикулярна этой плоскости. Через точку F и каждую точку окружности $\omega(O, R)$ проведем прямую. *Конической поверхностью* называется фигура, образованная этими прямыми, а сами прямые называются *образующими* конической поверхности, точка F называется ее *вершиной,* а прямая FO — *осью* конической поверхности (рис. 83, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 83

Конусом называется геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей $\omega(O, R)$ (рис. 83, *б*).

Основанием конуса называется круг, границей которого служит окружность $\omega(O, R)$. *Вершиной конуса* называется вершина S конической поверхности.

Образующей конуса называется отрезок (или длина этого отрезка) образующей конической поверхности, расположенный между его вершиной и основанием. Например, отрезок FT, $T \in \omega(O, R)$, — образующая конуса (см. рис. 83, *б*). Все образующие конуса равны между собой.

Боковой поверхностью конуса называется фигура, образованная всеми образующими конуса.

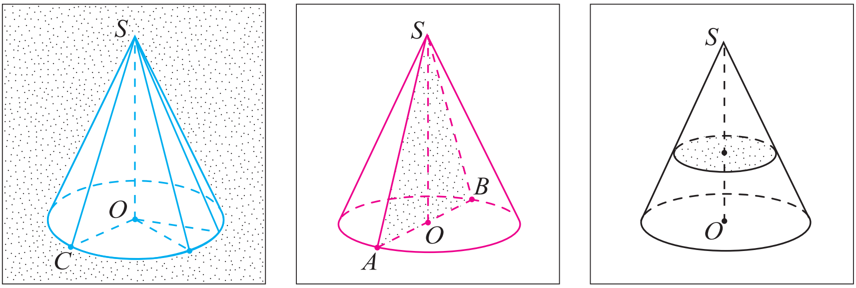
Высотой конуса называется отрезок FO (или его длина), где точка F — вершина конуса, а точка O — центр его основания, прямая FO называется *осью конуса.*

Если конус с вершиной F спроектировать на плоскость основания параллельно его оси FO, то проекцией конуса будет круг с центром O и радиусом R, а радиусы этого круга являются проекциями образующих конуса (рис. 83, *в*).

Конус может быть получен поворотом прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов на 360°. На рисунке 84, *а* изображен конус, полученный поворотом прямоугольного треугольника SOC вокруг катета SO. В этом случае боковая поверхность конуса образуется поворотом гипотенузы SC, а круг, являющийся основанием конуса, — поворотом катета OC.

Если плоскость проходит через высоту SO конуса, то сечение конуса этой плоскостью называется *осевым* и представляет собой равнобедренный треугольник, основанием которого является диаметр основания конуса, а боковыми сторонами — образующие конуса. Например, на рисунке 84, *б* изображено осевое сечение SAB.

Если плоскость проходит через внутреннюю точку высоты SO конуса и перпендикулярна ей, то сечением конуса является круг, центр которого есть точка пересечения высоты и этой плоскости (рис. 84, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 84

2. Усеченный конус. Пусть плоскость α проходит через внутреннюю точку O_1 высоты SO конуса и перпендикулярна ей. *Усеченным конусом* называется геометрическое тело, ограниченное боковой поверхностью конуса, его основанием и секущей плоскостью α, перпендикулярной оси конуса (рис. 85, *а*).

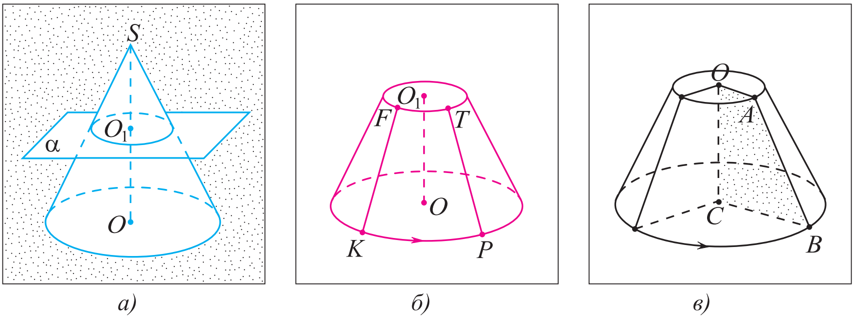


Рис. 85

Основаниями усеченного конуса называются основание данного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью α.

Высотой усеченного конуса называется отрезок O_1O (или его длина), соединяющий центры его оснований, прямая O_1O называется его *осью* (рис. 85, *б*).

Часть боковой поверхности конуса, ограничивающая усеченный конус, называется его *боковой поверхностью*, а отрезки образующих конуса, расположенные между основаниями усеченного конуса, называются его *образующими*.

Все образующие усеченного конуса равны между собой.

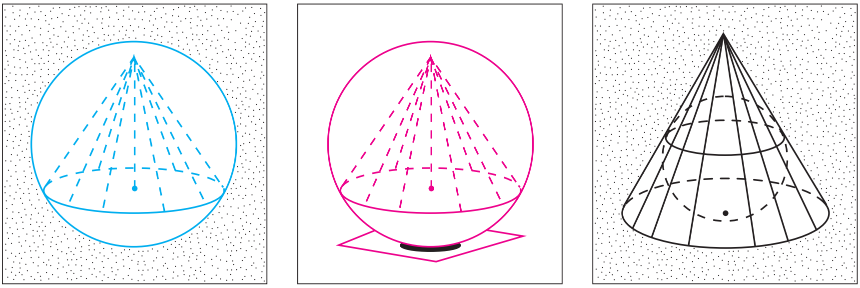
На рисунке 85, *б* изображены образующие FK и TP усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен при повороте на 360° *прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.*

На рисунке 85, *в* изображен усеченный конус, полученный поворотом прямоугольной трапеции $ABCO$ вокруг стороны CO. При этом боковая поверхность образуется поворотом боковой стороны AB, а основания усеченного конуса — поворотом оснований OA и CB трапеции.

3. Конус и сфера. *Конус* называется *вписанным в сферу*, если его вершина принадлежит сфере, а окружность основания является сечением сферы. При этом сфера называется описанной около конуса (рис. 86, *а*, *б*).

Конус называется *вписанным в шар*, если вершина конуса принадлежит границе этого шара, а его основание является сечением шара. При этом шар называется описанным около конуса.



а) б) в)

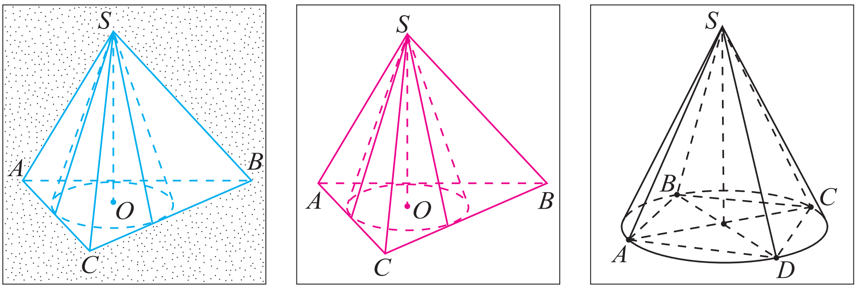
Рис. 86

Сфера называется *вписанной в конус*, если сфера касается основания конуса и каждой его образующей. При этом конус называется описанным около сферы (рис. 86, *в*).

Шар называется *вписанным в конус*, если он касается основания конуса и каждой его образующей. При этом *конус* называется *описанным около шара*.

4. Конус и пирамида. *Конус* называется *вписанным в пирамиду* (пирамида — *описанной около конуса*), если основание конуса вписано в основание пирамиды, а вершины конуса и пирамиды совпадают. На рисунке 87, *а*, *б* изображен конус, вписанный в треугольную пирамиду *SABC*.

Пирамида называется *вписанной в конус* (*конус* — *описанным около пирамиды*), если ее основание вписано в основание конуса, а боковые ребра являются образующими конуса. Например, на рисунке 87, *в* изображена четырехугольная пирамида *SABCD*, вписанная в конус.



а) б) в)

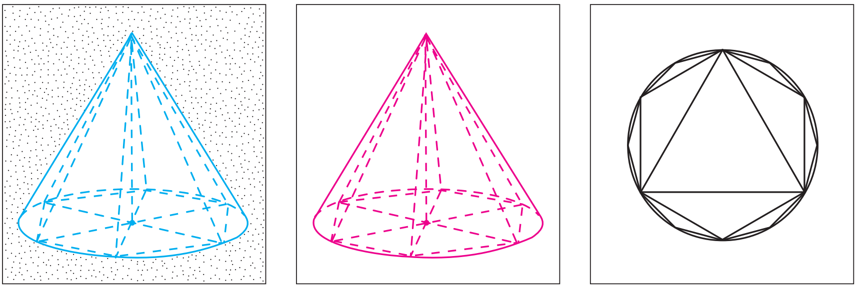
Рис. 87

5. Площади боковой и полной поверхностей конуса. Рассмотрим вопрос о вычислении площади боковой и полной поверхности конуса и усеченного конуса.

Пусть в конус вписана правильная n-угольная пирамида. Если число n сторон основания правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус, неограниченно возрастает, то пирамида все меньше и меньше отличается от конуса. Можно доказать, что существует число, к которому при этом стремится площадь боковой поверхности пирамиды.

За площадь боковой поверхности конуса принимается число, к которому стремится площадь боковой поверхности, вписанной в этот конус правильной n-угольной пирамиды, когда число n сторон основания неограниченно возрастает.

Теорема 1 (*о площади боковой поверхности конуса*). ***Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую (*** $S_{\text{бок}} = \pi R l$***, где R — радиус основания конуса, l — образующая).***



а) *б)* *в)*

Рис. 88

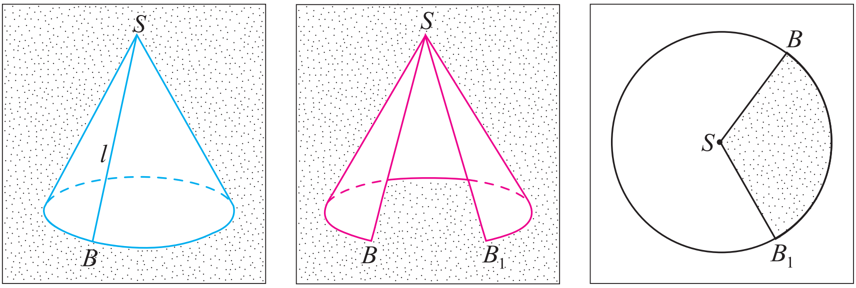
Доказательство.

Пусть P_n и l_n — соответственно периметр основания и длина апофемы правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус (рис. 88, *а*, *б*). Площадь боковой поверхности этой пирамиды вычисляется по формуле $S_{\text{бок пир}} = \frac{1}{2} P_n \cdot l_n$. Предположим, что число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание конуса, неограниченно возрастает (рис. 88, *в*). Тогда периметр P_n стремится к длине $2\pi R$ окружности основания, а длина l_n апофемы — к образующей l конуса.

Таким образом, площадь боковой поверхности вписанной в конус пирамиды стремится к числу $\frac{1}{2} \cdot 2\pi Rl = \pi Rl$, т. е. площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса равна πRl.

Теорема доказана.

Если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость, «разрезав» ее по одной из образующих SB, то в результате мы получим круговой сектор SBB_1, который называется *разверткой боковой поверхности конуса*. Радиус полученного кругового сектора равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса (рис. 89, *а*, *б*, *в*).



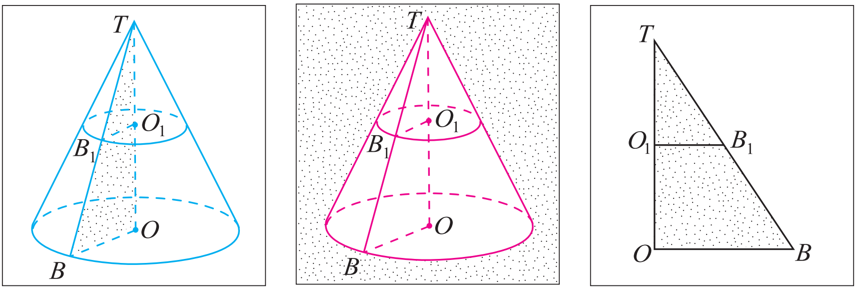
а) *б)* *в)*

Рис. 89

Площадь кругового сектора SBB_1 равна $\frac{\pi l^2}{360^\circ}\alpha$, где α — градусная мера дуги BB_1. Так как длина дуги BB_1 равна $2\pi R$, то $2\pi R = \frac{\pi l}{180^\circ}\alpha$. Отсюда $\alpha = \frac{360^\circ R}{l}$. Следовательно, площадь сектора SBB_1 равна $\frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ R}{l} = \pi Rl$, т. е. площадь боковой поверхности конуса равна площади развертки его боковой поверхности.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площади боковой поверхности и площади основания. Таким образом, площадь полной поверхности конуса вычисляется по формуле $S_{полн} = \pi R(l + R)$.

Задача 1. Докажите, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на длину образующей ($S_{бок} = \pi(R + R_1)l$, где R и R_1 — радиусы оснований, l — образующая).



а) *б)* *в)*

Рис. 90

Доказательство.

1) Пусть точка T — вершина конуса, из которого получен усеченный конус, BB_1 — одна из образующих усеченного конуса, а точки O и O_1 — центры его оснований, $OB = R$, $O_1B_1 = R_1$. Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса равна разности боковых поверхностей двух конусов, т. е. $S_{бок} = \pi R \cdot TB - \pi R_1 \cdot TB_1 = \pi R(TB_1 + BB_1) - \pi R_1 \cdot TB_1$ (рис. 90, *а*, *б*).

2) Так как $BB_1 = l$, то $S_{бок} = \pi Rl + \pi(R - R_1)\ TB_1$. Из подобия прямоугольных треугольников TOB и TO_1B_1 (рис. 90, *а*, *б*, *в*) следует, что $\frac{TB_1}{TB} = \frac{R_1}{R}$ или $\frac{TB_1}{TB_1 + l} = \frac{R_1}{R}$. Отсюда найдем $TB_1 = \frac{lR_1}{R - R_1}$.

Таким образом,

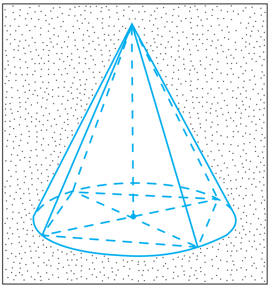
$$S_{бок} = \pi Rl + \pi(R - R_1) \cdot \frac{lR_1}{R - R_1} = \pi(R + R_1)l.$$

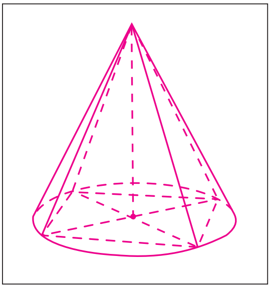
Площадью полной поверхности усеченного конуса называется сумма площадей его боковой поверхности и оснований. Следовательно, площадь полной поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле $S_{полн} = \pi R_1^2 + \pi l(R_1 + R) + \pi R^2$.

6. Объем конуса. Рассмотрим вопрос о вычислении объема конуса.

За объем конуса принимается число, к которому стремится объем правильной пирамиды, вписанной в конус, когда число сторон основания пирамиды неограниченно возрастает.

Теорема 2 (*об объеме конуса*). ***Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту***


а)


б)

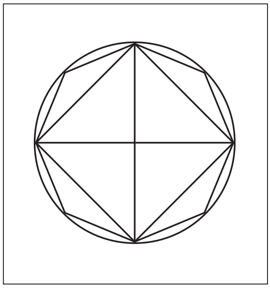

в)

Рис. 91

($V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R — радиус основания конуса, H — его высота).

Доказательство.

Пусть S_n — площадь основания, H — высота правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус (рис. 91, *а*, *б*). Тогда объем этой пирамиды $V_n = \frac{1}{3}S_n H$. Предположим, что число сторон основания вписанной в конус пирамиды неограниченно возрастает (рис. 91, *в*). Тогда площадь S_n основания пирамиды будет стремиться к площади πR^2 основания конуса, а высота H остается неизменной. Таким образом, объем $V_n = \frac{1}{3}S_n H$ пирамиды будет стремиться к числу $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, т. е. объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Теорема доказана.

Решите самостоятельно следующую задачу.

Задача 2. Докажите, что объем V усеченного конуса, высота которого равна H, а радиусы оснований равны R и R_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + RR_1 + R^2).$$

Вопросы и задачи к § 3

446. Точка F лежит на высоте TO конуса, а точки A и B принадлежат границе основания конуса (рис. 92, *а*). Верно ли, что $FA = FB$?

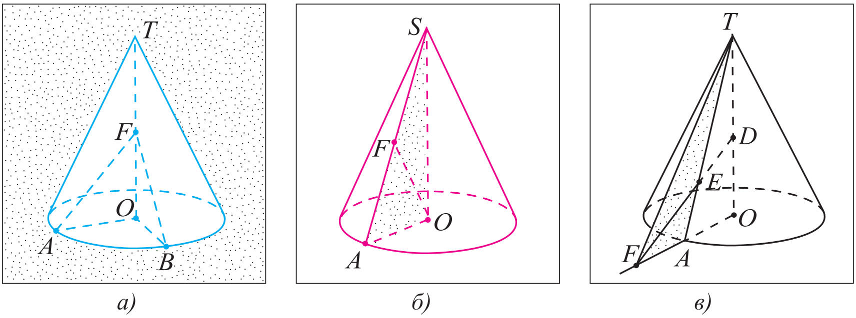


Рис. 92

447. Точки A и B принадлежат окружности, служащей границей основания конуса, SO — высота конуса. Поясните, почему $SA = SB$.

448. Радиус основания конуса равен 2 см, а его высота равна 5 см. Вычислите площадь осевого сечения конуса.

449. SA — образующая конуса, точка O — центр его основания. Вычислите расстояние от точки O до середины F образующей SA конуса, если радиус основания конуса 6 см, а его высота — 8 см (рис. 92, *б*).

450. Отрезки TO и TA — высота и образующая конуса соответственно. Точка F лежит на луче OA так, что точка A есть середина отрезка FO. Через середину D высоты и точку F проведена прямая, которая пересекает конус в точке E. Вычислите длину отрезка AE, если длина образующей конуса равна 9 см (рис. 92, *в*).

451. Отрезок SO — высота конуса, а его образующие SA и SB расположены так, что $OA \perp OB$, точки F и T лежат в плоскости основания конуса так, что точки A и B — середины отрезков OF и OT соответственно. Вычислите расстояние между точками F и T, если длина образующей конуса равна 10 см, а его высота — 8 см (рис. 93, *а*).

452. Две концентрические окружности с центром в середине C высоты конуса лежат в плоскости, перпендикулярной высоте конуса, а меньшая из них лежит на поверхности конуса. Вычислите длину большей окружности, если ее радиус в два раза больше радиуса меньшей окружности.

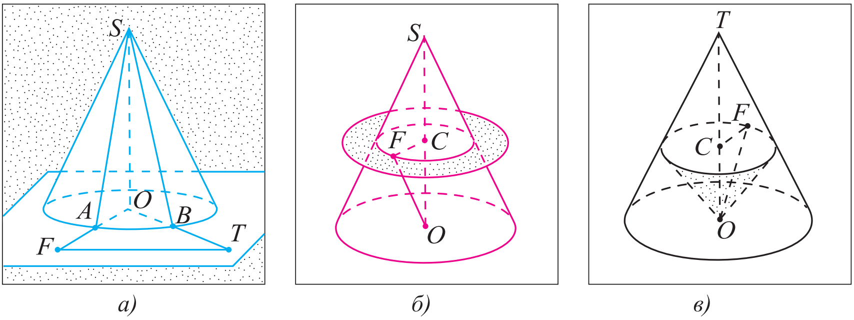


Рис. 93

Высота конуса равна 8 см, а расстояние от центра O основания конуса до точки F на меньшей окружности равно 5 см (рис. 93, *б*).

453. Точка C — середина высоты TO конуса является центром окружности ω, полученной при пересечении поверхности конуса с плоскостью, перпендикулярной его высоте. Вычислите длину образующей конуса, для которого точка O служит вершиной, а ω — граничная окружность основания, если $TO = 8$ см, а радиус CF окружности равен 2 см (рис. 93, *в*).

454. Длина образующей конуса равна 10 см, а высота конуса — 6 см. Вычислите радиус основания конуса.

455. Вычислите высоту конуса, если радиус основания конуса равен 4 см, а угол между высотой и образующей конуса — 30°.

456. Площадь осевого сечения конуса равна 50 см^2, а высота конуса — 10 см. Вычислите радиус основания конуса.

457. Вычислите площадь основания конуса, если осевое сечение конуса — равносторонний треугольник с высотой $\sqrt{3}$ см.

458. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого 18 см^2. Вычислите высоту и радиус основания конуса.

459. Образующая SA конуса равна 5 см, а его высота SO — 4 см (рис. 94, *а*). Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

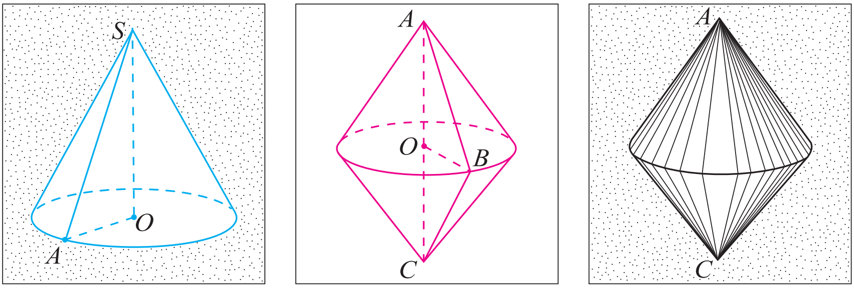


Рис. 94

460. Равнобедренный треугольник ABC вращается около его основания AC. Вычислите площадь поверхности тела, полученного в результате вращения этого треугольника, если $AC = 8$ см, а его высота OB — 3 см (рис. 94, *б*, *в*).

461. Высота конуса равна 8 см, а радиус основания равен 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

462. Длина образующей конуса равна 16 см. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

463. Радиус основания конуса равен 9 дм, а площадь его осевого сечения — 360 дм^2. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

464. Образующая конуса, длина которой равна 9 см, наклонена к плоскости основания под углом 60°. Вычислите площадь осевого сечения конуса.

465. Площадь боковой поверхности конуса равна 72π см^2, а длина образующей — 12 см. Вычислите площадь осевого сечения конуса.

466. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если площадь его осевого сечения равна 12 см^2, а площадь основания — 16π см^2.

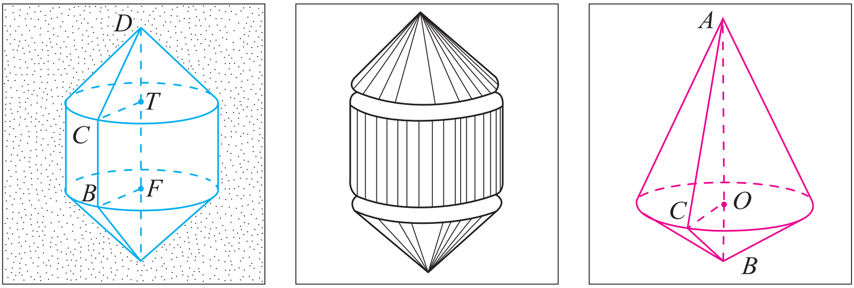
467. Прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 6 см и 8 см, вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площадь полной поверхности конуса, образованного при этом вращении.

468. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна 8 см, а угол при вершине его осевого сечения равен $90°$.

469. Площадь боковой поверхности конуса равна 32π см^2. Вычислите угол при вершине осевого сечения, если длина образующей конуса равна 8 см.

470. Площадь боковой поверхности конуса $72\sqrt{3}\pi$ см^2. Вычислите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если длина образующей равна 12 см.

471. Тело получено при вращении равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD около большего основания AD (рис. 95, *а*, *б*). Вычислите площадь поверхности этого тела, если длина боковой стороны трапеции равна 10 см, а длины ее оснований равны 4 см и 16 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 95

472. Прямоугольный треугольник ABC, длина катета BC которого равна 4 см, а прилежащий к нему угол равен $30°$, вращается около прямой, содержащей гипотенузу AB. Вычислите площадь поверхности полученного тела (рис. 95, *в*).

473. Равнобедренный треугольник, у которого длина боковой стороны равна 8 см, а один из углов равен $120°$, вращается вокруг прямой, содержащей большую сторону. Вычислите площадь поверхности полученного тела.

474. Площадь боковой поверхности конуса равна 180π см^2. Вычислите радиус окружности, вписанной в осевое сечение конуса, если длина его образующей равна 15 см.

475. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен 3 см, а радиус окружности, вписанной в осевое сечение, — $\frac{3}{2}$ см.

476. Площадь боковой поверхности конуса равна 60π см^2. Вычислите радиус окружности, описанной около осевого сечения конуса, если длина его образующей равна 10 см.

477. Через вершину конуса и сторону правильного треугольника, вписанного в его основание, проведено сечение. Длина каждой стороны сечения равна 10 см. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

478. Через вершину конуса и сторону квадрата, вписанного в его основание, проведено сечение. Вычислите площадь сечения, если все его стороны равны между собой, а площадь боковой поверхности конуса равна $8\sqrt{2}\pi$ см^2.

479. Осевое сечение конуса — правильный треугольник, длина стороны которого равна 8 см. Через две образующие, угол между которыми $30°$, проведено сечение. Вычислите высоту этого сечения, проведенную из вершины конуса.

480. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен $30°$. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если расстояние от центра основания до прямой, содержащей образующую конуса, равно 6 см.

481. Площадь боковой поверхности конуса равна $32\sqrt{3}\pi$ см^2. Вычислите расстояние от центра основания конуса до прямой, содержащей образующую, если образующая наклонена к плоскости основания под углом $30°$.

482. Через две образующие конуса проведено сечение, основание которого — хорда, длина которой 16 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса, если радиус его основания равен 10 см, а угол наклона плоскости сечения к плоскости основания равен $60°$.

483. Площадь осевого сечения конуса равна S. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен φ. Найдите площадь полной поверхности конуса.

484. Вычислите центральный угол развертки боковой поверхности конуса, если его высота равна 8 см, а радиус основания равен 6 см.

485. Вычислите высоту конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а градусная мера дуги равна $120°$.

486. Центральный угол развертки боковой поверхности конуса равен $120°$. Вычислите длину окружности основания конуса, если длина его образующей равна 30 см.

487. Радиус основания конуса равен 4 см. Вычислите объем конуса, если угол между его образующей и высотой равен $30°$.

488. Вычислите объем конуса, если площадь его полной поверхности и площадь основания равны соответственно 24π см^2 и 9π см^2.

489. Хорда основания конуса, длина которой равна 12 см, стягивает дугу в $90°$. Через эту хорду и вершину конуса проведено сечение. Вычислите объем конуса, если плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом $60°$.

490. Найдите объем конуса, если угол при основании осевого сечения равен φ, а радиус окружности, описанной около этого сечения, — R.

491. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен $60°$. Вычислите объем конуса, если площадь его боковой поверхности равна 6π см^2.

492. Длина образующей конуса равна 8 см. Центральный угол развертки его боковой поверхности равен $90°$. Вычислите объем конуса.

493. Площадь поверхности конуса равна 28π см^2. Центральный угол развертки его боковой поверхности равен $60°$. Вычислите объем конуса.

494. Высота конуса равна 8 см, а его объем — 96π см^3. Вычислите центральный угол развертки боковой поверхности конуса.

495. Длины радиусов оснований и образующей усеченного конуса равны соответственно 7 см, 15 см и 17 см. Вычислите его высоту.

496. Длины радиусов оснований и образующей усеченного конуса равны соответственно 5 см, 11 см, 10 см. Вычислите площадь осевого сечения усеченного конуса.

497. Длины радиусов оснований усеченного конуса равны 9 см и 4 см. Вычислите площадь боковой поверхности этого конуса, если угол между образующей и плоскостью его основания равен $45°$.

498. Высота и длина меньшего основания прямоугольной трапеции равны по 4 см. Угол между боковой стороной и основанием равен $45°$. Вычислите площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученного при вращении трапеции вокруг меньшей боковой стороны.

499. Высота и длина образующей усеченного конуса равны соответственно 12 см и 13 см, а радиусы оснований относятся как $3 : 4$. Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

500. Длина диагонали осевого сечения усеченного конуса равна 17 см, а его высота — 15 см. Длина проекции образующей на плоскость основания равна 2 см. Вычислите объем усеченного конуса.

501. Объем усеченного конуса равен 584π см^3. Радиусы его оснований равны 10 см и 7 см. Вычислите длину образующей конуса.

502. Объем усеченного конуса равен 268π см^3. Вычислите площадь боковой поверхности конуса, если длина диагонали осевого сечения равна 15 см, а сумма радиусов оснований — 9 см.

503. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найдите объем конуса, если двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны φ, а расстояние от середины высоты пирамиды до плоскости, содержащей боковую грань, равно a.

504. В правильной треугольной пирамиде расстояние от вершины основания до плоскости, в которой лежит боковая грань пирамиды, равно a. Каждый двугранный угол при основании пирамиды равен φ. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

505. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если расстояние от центра основания пирамиды до плоскости, в которой лежит боковая грань, равно a, а каждый двугранный угол при основании пирамиды равен φ.

506. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 5 см и 12 см. Вычислите объем конуса, вписанного в пирамиду, если каждый двугранный угол при основании пирамиды равен 60°.

507. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, длины оснований которой равны 2 см и 8 см. Вычислите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, если объем конуса, вписанного в пирамиду, равен $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3.

508. В конус вписан шар, радиус которого равен 3 см. Вычислите объем конуса, если его высота равна 8 см.

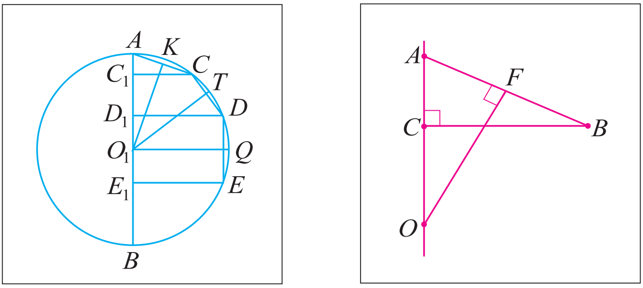
§ 4. Площадь сферы и объем шара

1. Площади сферы. Рассмотрим вопрос о нахождении площади сферы и ее частей. Для нахождения площади сферы можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1 (*о площади сферы*). ***Площадь сферы равна $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$, где R — радиус сферы.***

Прежде чем доказать эту теорему, рассмотрим вопрос о нахождении площадей частей сферы, на которые разбивает сферу секущая плоскость.

За площадь части сферы, образованной при повороте какой-нибудь дуги (AE) *полуокружности вокруг диаметра* AB *на* 360°, *принимается число, к которому стремится площадь поверхности, образуемой при повороте на* 360° *вокруг того же диаметра правильной вписанной ломаной* $ACDE$, *когда ее звенья неограниченно уменьшаются* (рис. 96, *а*).



а) *б)*

Рис. 96

Докажем следующую вспомогательную теорему.

Теорема 2. ***Площадь боковой поверхности конуса, усеченного конуса и цилиндра равна произведению высоты соответствующего тела на длину окружности, радиус которой есть перпендикуляр, проведенный из середины образующей до пересечения с осью тела.***

Доказательство.

1) Проведем доказательство для конуса. Пусть конус образован при повороте треугольника ACB вокруг катета AC, точка F — середина гипотенузы, $OF \perp AB$, $O \in AC$. Докажем, что площадь боковой поверхности конуса $S = 2\pi OF \cdot AC$ (рис. 96, *б*).

2) Площадь боковой поверхности конуса равна: $S = \pi BC \cdot AB$. Так как треугольник AFO подобен треугольнику ACB (прямоугольные и имеют общий угол), то $\frac{BC}{OF} = \frac{AC}{AF}$, отсюда $BC \cdot AF = OF \cdot AC$.

3) Теперь получим, что боковая поверхность конуса $S = \pi BC \cdot AB = \pi BC(2AF) = 2\pi(BC \cdot AF) = 2\pi(OF \cdot AC) = 2\pi OF \cdot AC$.

Что и требовалось доказать.

Доказательство для усеченного конуса и цилиндра проведите самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема 3. ***Пусть секущая плоскость перпендикулярна диаметру сферы радиусом R. Тогда площадь каждой из частей, на которые сфера разбивается секущей плоскостью, равна произведению длины большой окружности данной сферы на длину H соответствующего отрезка диаметра: $S = 2\pi RH$.***

Доказательство.

1) Пусть часть сферы образована поворотом дуги AE вокруг диаметра AB полуокружности, центр которой — точка O_1, а радиус — R. Впишем в эту дугу правильную ломаную линию $ACDE$ (см. рис. 96, *а*). Поверхность, полученная при повороте этой ломаной, состоит из частей, образуемых при повороте ее звеньев AC, CD, DE, ... и т. д. Эти части представляют собой боковые поверхности конуса (образующая AC), усеченного конуса (образующая CD), цилиндра (образующая DE, если $DE \parallel AB$).

2) Заметим, что площадь каждой из указанных боковых поверхностей в силу теоремы **2** равна произведению высоты соответствующего тела (конуса, усеченного конуса, цилиндра) на длину окружности, радиус которой есть отрезок, соединяющий центр O_1 полуокружности и середину соответствующего звена ломаной. Например, площадь боковой поверхности конуса, образованной поворотом звена AC, равна $S_1 = 2\pi O_1K \cdot AC_1$, где точка K — середина отрезка AC, $CC_1 \perp AB$.

3) Для усеченного конуса, образующая которого CD, площадь боковой поверхности $S_2 = (2\pi O_1T) \cdot C_1D_1$, где точка T — середина отрезка CD, $DD_1 \perp AB$.

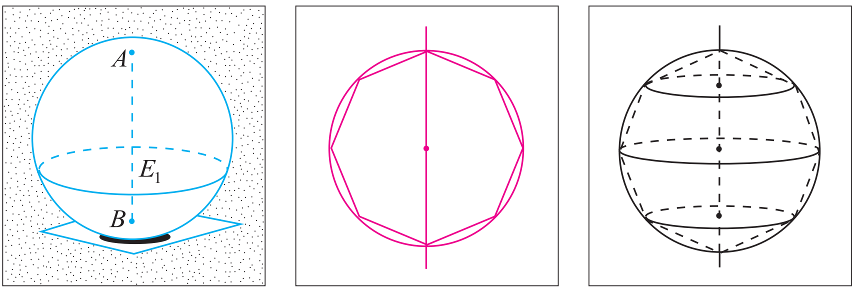
4) Для цилиндра, образующая которого DE, площадь боковой поверхности $S_3 = 2\pi O_1Q \cdot D_1E_1$, где точка Q — середина отрезка DE, $EE_1 \perp AB$. Заметим, что отрезки, соединяющие центр O_1 полуокружности и середины звеньев вписанной ломаной, равны между собой. Обозначим длину этих отрезков через a. Тогда площадь S поверхности, образованной при повороте ломаной $ACDE$ $S = S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi a(AC_1 + C_1D_1 + D_1E_1) = 2\pi aAE_1$. При неограниченном увеличении числа звеньев вписанной ломаной длина a стремится к радиусу R сферы, а отрезок AE_1 остается без изменения.

5) Следовательно, площадь S поверхности, образованной ломаной $ACDE$, стремится к $2\pi R \cdot AE_1$. Это число принимается за площадь соответствующей части сферы. Так как отрезок AE_1 равен H, то площадь этой части сферы $S = 2\pi RH$.

Теорема доказана.

Теперь воспользуемся результатом этой теоремы для доказательства теоремы **1** о площади сферы.

Разделим сферу на две части некоторой секущей плоскостью, перпендикулярной диаметру AB. Пусть $AE_1 = H_1$ и $BE_1 = H_2$ (рис. 97, *а*). Площадь сферы равна сумме площадей этих частей: $S_{\text{сферы}} = 2\pi RH_1 + 2\pi RH_2 = 2\pi R(H_1 + H_2) = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.



а) *б)* *в)*

Рис. 97

2. Объем шара. Рассмотрим вопрос о вычислении объема шара.

За объем шара принимается число, к которому стремится объем тела, полученного при повороте на 360° *правильного многоугольника, вписанного в круг, при повороте* *которого на* 360° *получен данный шар, когда число сторон многоугольника неограниченно возрастает* (рис. 97, *б*, *в*).

Для нахождения объема шара можно воспользоваться следующей теоремой, которую примем без доказательства.

Теорема 5 (*об объеме шара*). ***Объем шара радиусом R вычисляется по формуле*** $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Объемы геометрических тел. В данной главе мы рассмотрели вопрос о вычислении объемов тел вращения, которые представляют собой частный случай геометрических тел. При этом объем для каждого из тел вращения рассматривался как число, к которому стремится объем вписанного в это тело правильного многогранника. Этим мы воспользовались для нахождения формул объемов цилиндра, конуса и шара.

Заметим, что понятие объема в общем случае для геометрических тел, в том числе и для тел вращения, можно определять аналогично понятию объема для многогранников.

Объем — это положительная величина, определенная для каждого из геометрических тел, числовое значение которой имеет следующие свойства:

а) *равные геометрические тела имеют равные объемы*;

б) *если геометрическое тело есть объединение конечного числа геометрических тел, каждые два из которых не имеют общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов этих тел*;

в) *объем куба, ребро которого равно единице измерения длины, равен единице.*

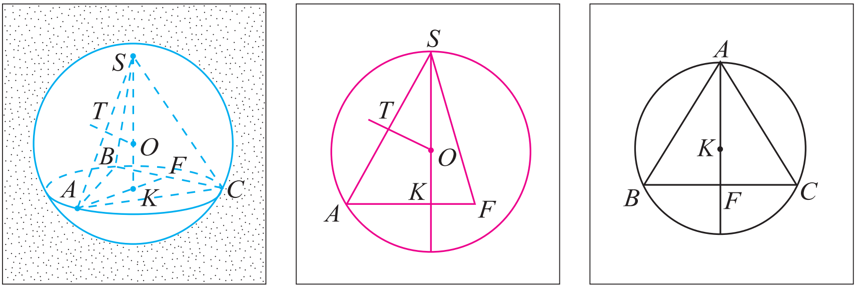
Вопрос о существовании и единственности объема для геометрических тел требует доказательства, но в рамках школьного курса геометрии он не рассматривается. Заметим, что в силу существования и единственности функции объема для тел вращения ее значения для цилиндра, конуса и шара находятся по полученным ранее формулам.

Задача 1. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а бокового ребра — 6 см. Вычислите площадь сферы, описанной около данной пирамиды.

Решение.

1) Площадь сферы вычисляется по формуле

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$



а) б) в)

Рис. 98

2) Центр O данной сферы есть точка пересечения прямой, содержащей высоту SK пирамиды и серединного перпендикуляра, проведенного в плоскости SAK к ребру SA (рис. 98, *а*, *б*).

3) Пусть точка T — середина ребра SA. Треугольник STO подобен треугольнику SKA, следовательно, $\frac{SO}{AS} = \frac{ST}{SK}$, $SO = \frac{ST \cdot AS}{SK} = \frac{18}{SK}$.

4) В треугольнике AFC ($\angle AFC = 90°$, $AC = 4$ см, $FC = 2$ см) $AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ (см) (рис. 98, *в*).

5) Из треугольника $SAK \left(\angle SKA = 90°,\ SA = 6 \text{ см},\ AK = \frac{2}{3}AF = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см} \right)$ найдем длину катета $SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{36 - \frac{16 \cdot 3}{9}} = 2\sqrt{\frac{23}{3}}$ (см) (рис. 98, *б*).

6) Таким образом, $R = SO = \frac{18}{SK} = 9\sqrt{\frac{3}{23}}$, $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 81 \cdot \frac{3}{23} = \frac{972\pi}{23}$ (см^2).

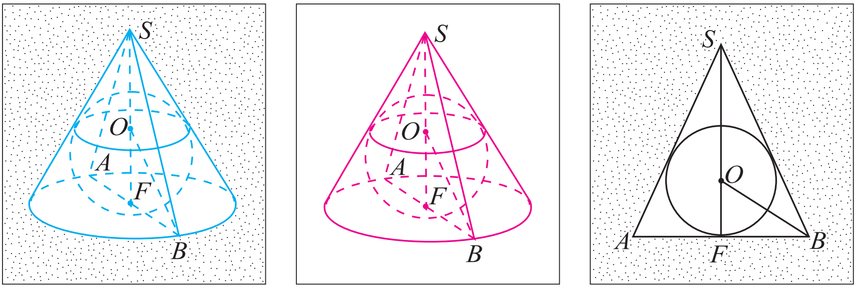
Ответ: $\frac{972\pi}{23}$ см^2.

Задача 2. Длина образующей конуса равна 3 см. Вычислите объем шара, вписанного в конус, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ.

Решение.

1) Объем шара вычисляется по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2) Центр вписанного в конус шара есть точка пересечения высоты SF конуса и биссектрисы угла SBA осевого сечения (рис. 99, *а*, *б*, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 99

3) Из треугольника OFB $\left(\angle OFB = 90°,\ \angle OBF = \frac{\varphi}{2}\right)$ найдем $R = OF = FB\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$ (см. рис. 99, *а*, *б*).

4) В треугольнике SFB ($\angle SFB = 90°$, $SB = 3$ см) длина катета $FB = SB\cos\varphi = 3\cos\varphi$.

5) Таким образом,

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27\cos^3\varphi\,\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2} = 36\pi\cos^3\varphi\,\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}\ (\text{см}^3).$$

Ответ: $36\pi\cos^3\varphi\,\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}$ см^3.

Вопросы и задачи к § 4

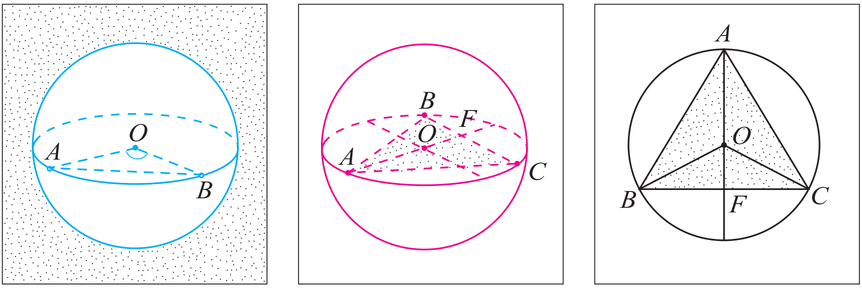
509. Точки A и B сферы расположены симметрично относительно ее центра O. Вычислите площадь сферы, если расстояние между точками A и B равно 8 см.

510. Плоскость пересекает сферу по окружности радиусом 3 см. Вычислите площадь сферы, если расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 см.

511. Площадь сферы равна 16π. Вычислите: а) радиус сферы; б) длину диагонали квадрата, вписанного в большую окружность сферы.

512. Как изменится площадь сферы, если ее радиус: а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 4 раза?

513. Точки A и B расположены на сфере с центром в точке O так, что $OA \perp OB$. Вычислите площадь сферы, если расстояние между точками A и B равно 4 см (рис. 100, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 100

514. Точки A, B и C лежат на большой окружности так, что треугольник ABC — равносторонний. Вычислите площадь сферы, если длина стороны треугольника ABC равна 2 см (рис. 100, *б*, *в*).

515. Площадь квадрата, вписанного в большую окружность сферы, равна 16 см^2. Вычислите площадь данной сферы.

516. Точки A и B лежат на большой окружности сферы симметрично относительно ее центра O, а точка C расположена на сфере так, что отрезок CO перпендикулярен плоскости, в которой лежит большая окружность. Вычислите площадь сферы, если площадь треугольника ACB равна 16 см^2.

517. В большую окружность сферы вписана равнобедренная трапеция $ABCD$, основание которой AD является диаметром большой окружности. Вычислите площадь сферы, если $\angle BAD = 60°$, $AB = 2$ см.

518. Площадь сечения шара некоторой плоскостью равна 4π см^2, а расстояние от центра шара до этой плоскости равно 4 см. Вычислите площадь сферы, которая служит границей данного шара.

519. Длина окружности, полученной при пересечении сферы плоскостью, равна 8π см, а расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 3 см. Вычислите площадь сферы.

520. Отрезки OA, OB и OC — перпендикулярные друг другу радиусы сферы. Верно ли, что треугольник ABC является равносторонним?

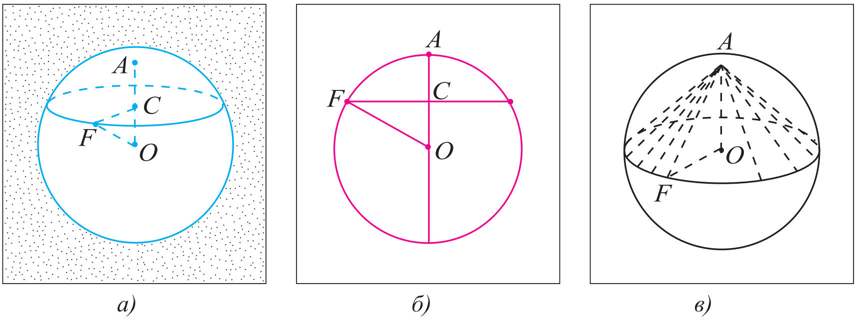


Рис. 101

521. Через точку C, делящую радиус OA шара пополам, проведена секущая плоскость, перпендикулярная этому радиусу. Вычислите площадь сферы, которая служит границей данного шара, если площадь сечения шара равна 12π см^2 (рис. 101, *а*, *б*).

522. Основанием конуса служит большой круг шара, а его высотой является радиус AO, перпендикулярный плоскости большого круга. Вычислите площадь сферы, которая служит границей шара, если площадь боковой поверхности конуса равна 2π см^2 (рис. 101, *в*).

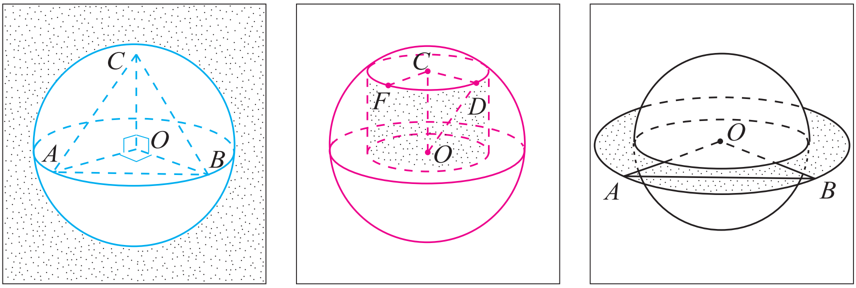
523. Вершиной конуса служит центр O шара, а его основанием — сечение шара плоскостью. Вычислите плошадь боковой поверхности конуса, если площадь граничной сферы равна 16π см^2, а радиус сечения равен 1 см.

524. Точки A и B — концы диаметра сферы с центром в точке O, CO — радиус сферы, перпендикулярный плоскости, в которой лежит большая окружность. Вычислите площадь сферы, если площадь треугольника ABC равна 4 см^2.

525. Прямоугольник $ABCD$ вписан в большой круг шара. Вычислите объем шара, если диагональ AC прямоугольника образует со стороной AB угол $30°$, сторона CB равна 4 см.

526. Объем шара равен 36π см^3. Вычислите длину диагонали квадрата, вписанного в большой круг шара.

527. Точки A, B и C расположены на поверхности шара с центром в точке O так, что радиусы OA, OB и OC перпен-



а) б) в)

Рис. 102

дикулярны друг другу. Вычислите объем шара, если объем пирамиды $OABC$ равен 36 см^3 (рис. 102, *а*).

528. Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое лежит в большом круге данного шара. Вычислите объем шара, если высота цилиндра равна 8 см, а расстояние от центра C основания цилиндра до точки F окружности этого основания равно 6 см (рис. 102, *б*).

529. Центром двух концентрических кругов является центр O шара, при этом граничная окружность меньшего круга лежит на поверхности шара, а радиусы кругов относятся как $2 : 1$. Вычислите объем шара, если радиусы OA и OB большего круга перпендикулярны между собой, а расстояние между точками A и B равно $4\sqrt{3}$ см (рис. 102, *в*).

530. Площадь квадрата, вписанного в сечение шара, равна 8 см^2, а расстояние от центра шара до плоскости сечения — 3 см. Вычислите объем шара.

531. Вычислите площадь меньшей части сферы, которая отсекается от сферы радиусом 2 см плоскостью, проходящей через середину радиуса сферы и перпендикулярной ему.

532. Плоскость, перпендикулярная диаметру сферы радиусом 6 см, разбивает её на две части, площадь одной из которых равна 36π см^2. Вычислите длины отрезков, на которые эта плоскость делит диаметр сферы.

533. Плоскость, находящаяся на расстоянии 3 см от центра шара, пересекает его по кругу радиусом 4 см. Вычислите объем данного шара.

534. Вычислите объем шара, вписанного в куб, длина ребра которого равна 6 см.

535. Плоскость, перпендикулярная диаметру сферы, делит его на отрезки, длины которых 1 см и 3 см. Вычислите отношение площадей частей сферы, на которые плоскость разбивает сферу.

536. Сечение шара плоскостью, находящейся от его центра на расстоянии 12 см, имеет площадь 25π см^2. Вычислите площади частей сферы, на которые плоскость разбивает поверхность шара.

537. Линия пересечения сферы с плоскостью, удаленной от центра сферы на 8 см, имеет длину 12π см. Вычислите площади частей сферы, на которые плоскость разбивает сферу.

538. Площадь сферы, вписанной в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равна 16π см^2. Вычислите площадь сечения куба плоскостью ADB_1.

539. Вычислите площадь сферы, вписанной в цилиндр, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π см^2.

540. В сферу вписан равносторонний цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 16π см^2. Вычислите площадь сферы.

541. В шар радиусом 2 см вписан цилиндр, в котором диагональ осевого сечения составляет с его основанием угол $30°$. Вычислите объем цилиндра.

542. В шар вписан цилиндр. Угол между диагоналями осевого сечения равен φ. Найдите объем шара, если образующая цилиндра равна l.

543. В сферу вписана прямая призма, основание которой — равнобедренный прямоугольный треугольник. Вычислите площадь сферы, если высота призмы равна 12 см, а длина диагонали меньшей грани призмы равна 13 см.

544. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник. Длины катетов основания и бокового ребра относятся как $1 : 2 : 3$ соответственно. Вычислите объем шара, описанного около призмы, если объем призмы равен 24 см^3.

545. Основание прямой призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны по

3 см. Площадь сечения, проведенного через один из катетов основания и противолежащую вершину другого основания, равна 7,5 см^2. Вычислите площадь сферы, описанной около призмы.

546. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, длина одного из катетов которого 4 см. Вычислите площадь сечения призмы, проведенного через другой катет и противолежащую вершину другого основания, если длина бокового ребра призмы равна 3 см, а площадь описанной около нее сферы — 61π см^2.

547. Длина каждого ребра правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см. Вычислите объем шара, описанного около этой пирамиды.

548. В правильной четырехугольной пирамиде радиус описанной около основания окружности равен 6 см. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Вычислите площадь сферы, описанной около пирамиды.

549. Вычислите площадь сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны основания равна 2 см, а двугранные углы при ребрах основания равны $60°$.

550. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите площадь сферы, описанной около пирамиды.

551. Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, равен 2 см. Вычислите объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $30°$.

552. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна стороне основания. Вычислите радиус шара, вписанного в пирамиду, если ее объем равен 9 см^3.

553. Вычислите площадь сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, если длина стороны ее основания равна 4 см, а двугранные углы при сторонах основания равны α.

554. Высота правильной четырехугольной пирамиды в три раза больше радиуса вписанной в нее сферы. Найдите площадь сферы, если длина стороны основания равна a.

555. Вычислите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, если двугранные углы при ребрах ее основания равны $30°$, а середина апофемы пирамиды удалена от плоскости основания на расстояние, равное 2 см.

556. В правильной треугольной пирамиде радиус описанной около ее основания окружности равен 4 см, а двугранные углы при ребрах основания равны $60°$. Вычислите площадь сферы, вписанной в пирамиду.

ОТВЕТЫ

Глава 1

§ 2

18. 10 см. **19.** $\frac{a}{2}$. **20.** $8\sqrt{3}$ см^2. **21.** $\frac{a\sqrt{3a^2+b^2}}{4}$. **23.** $\frac{\sqrt{3S}}{3}$.
24. а) $\frac{\sqrt{S}}{2}$. **25.** $\frac{a\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$. **26.** 2 см^2, $2\sqrt{3}$ см. **27.** $\sqrt{7}\,S$.
28. $8(3+\sqrt{3})$ см^2. **29.** 24 см^2. **30.** $8(10+3\sqrt{3})$ см^2.
31. $\sqrt{2}(2\sqrt{3}+1)$ см^2. **32.** $2\sqrt{2}\,S$. **33.** $\frac{4S(3+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$. **34.** $9(1+\sqrt{3})$ см^2.
35. $4\sqrt{3}$ см^2, 12 см^2. **36.** $2a^2\left(\cos\beta+\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2\beta}\right)\sin\varphi$.
37. $3\sqrt{6}$ см, $3\sqrt{10}$ см. **38.** $\frac{\sqrt{3}\,h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **43.** 50 см^2.
45. $5(3+\sqrt{7})$ см^2. **46.** ab. **47.** a^2, $\frac{3a^2}{2}$. **48.** $2a\sqrt{S}\left(1+\sqrt{2}\right)$.
49. $2a\left(a+\sqrt{4b^2-a^2}\right)$. **51.** $\sqrt{3}\left(2+\sqrt{13}\right)$ см^2. **52.** $2a^2\sqrt{3}$.

§ 3

62. 4 см. **64.** б) 10 см. **66.** а) 18 см^2. **68.** $2(3+\sqrt{3})$ см^2.
70. $\sqrt{3}$ см^2. **72.** $(10+3\sqrt{2})$ см. **73.** 2 см. **75.** $3\sqrt{2}$ см. **76.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
78. $\frac{1}{2}b^2\cos\varphi\sin 2\varphi$. **80.** $\frac{aH}{\sqrt{12H^2+a^2}}$. **81.** $\frac{9}{2}$ см^2. **82.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{8}$.
83. 13 см. **84.** $\frac{13}{3}$ см. **85.** $\frac{\sqrt{4b^2\sin^2\varphi-a^2}}{2\sin\varphi}$. **87.** $\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ см.
88. $12\sqrt{2}$ см^2. **89.** $\sqrt{3}$ см. **91.** $a\sqrt{3}$. **92.** $\frac{a^2(4+\sqrt{7}+\sqrt{15})}{4}$.
93. $2a\sqrt{3}$. **94.** 8 см, 8 см, $4\sqrt{2}$ см, $4\sqrt{2}$ см. **95.** $18\sqrt{7}$ см^2.
96. $b\sqrt{\frac{2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{2}}$. **97.** 192 см^2. **98.** $8(11+\sqrt{34})$ см^2.
99. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,H}{\sqrt{b^2-H^2}}$. **100.** $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\cos\varphi}$. **101.** $2\arcsin\frac{3a}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}$.
104. $\frac{3}{2}$ см^2. **105.** 8 см^2. **106.** 3 см. **107.** 54 см^2. **108.** 9 см.
109. 2 см, 10 см. **110.** $\frac{1}{2}(Q-S)$. **111.** 2 см. **112.** $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha)$.

115. $\frac{\sqrt{2S}}{6}$. **117.** $\frac{25}{36}S$. **118.** $\frac{3\sqrt{2}\,a^2}{4}$. **119.** $\frac{3\sqrt{3}\,h^2(4\sin^2\varphi-1)}{4\cos^2\varphi}$.
120. $\frac{a^2}{\sqrt{2\sin^2\varphi-1}}$. **121.** $2a^2$. **122.** 96 см^2.

§ 4

123. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **124.** 48 см^2. **125.** $a^2\left(\sqrt{3}+3\right)$. **126.** $2\sqrt{2}$ см. **127.** $\sqrt{3}$.
128. 90°. **129.** $a\sqrt{2}$. **130.** a^2, $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Глава 2

§ 1

137. 384 см^3. **139.** 60 см^3. **140.** 80 см^3. **142.** 5 см. **144.** d^3.
148. $2S\sqrt{2S}$. **150.** $3\left(5+\sqrt{2}+\sqrt{17}\right)$ см. **151.** $\frac{d^3\sqrt{3}}{18}$. **153.** 4 см^3.
154. 16 см^3. **155.** 16 см^3. **156.** $\sqrt{22}$ см. **157.** 2 см^3. **158.** 12 см^3.
159. $729\sqrt{2}$ см^3. **160.** $20\sqrt{3}$ см^3. **161.** $4\sqrt{S}+2\frac{V}{S}$. **162.** 16 см^3.
163. $\frac{3}{2}\sqrt{41}$ см^2. **164.** $4\sqrt{5}$ см^3. **165.** $32\sqrt{2}$ см^3. **166.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$.
167. $3\sqrt{26}$ см^3. **168.** $\frac{h^3}{2}$. **169.** $\frac{6\sqrt{17}+9\sqrt{2}}{2}$ см. **170.** $\sqrt{S_1S_2S_3}$.
171. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ см^3. **172.** $3\sqrt{3}$ см^3.

§ 2

188. $12\sqrt{3}$ см^3. **189.** $\frac{Sab}{4(a+b)}$. **190.** 12 см^3. **191.** 112 см^2.
192. $12\sqrt{2}$ см^2. **193.** $72\sqrt{3}$ см^2. **194.** 480 см^3. **195.** $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см^2.
196. 5 см^3. **197.** 324 см^3. **198.** 40 см^3. **199.** 4 см^3. **200.** 120 см^3.
201. $\sqrt{6}$ см. **202.** 20 см^2. **203.** 8 см^3. **204.** 12 см^2. **205.** $18\sqrt{2}$ см^3.
206. $\frac{a^3}{2}$ **207.** $16\sqrt{2}$ см^3.

§ 3

221. $5\sqrt{3}$ см^3. **222.** $2\sqrt{3}$ см^3. **223.** 2 см. **224.** $16\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$ см^2.
225. 60 см^3. **226.** $16\sqrt{3}$ см^3. **227.** 50 см^2. **228.** $16\sqrt{3}$ см^3.
229. 128 см^3. **230.** $\sqrt{6}$ см. **231.** $6\sqrt{5}$ см^2. **232.** $8\sqrt{5}$ см^2.
233. 120 см^3. **234.** $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)$ см. **235.** 16 см^3. **236.** $32\sqrt{3}$ см^3.

237. $\frac{12}{5}$ см. **238.** $S\sqrt{Q}$. **239.** 240 см^3. **240.** 480 см^3. **241.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ см.
242. $216\sqrt{2}$ см^3. **243.** 280 см^3. **244.** $12\sqrt{6}$ см^3. **245.** 480 см^3.
246. 3 см^3. **247.** 2 см^3. **249.** $27\sqrt{2}$ см^3. **250.** $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ см. **251.** $\sqrt{3}$ см^3.
252. 32 см^3. **253.** $72\sqrt{6}$ см^3. **254.** $4\sqrt{2}$ см^3. **255.** $12\sqrt{11}$ см^3.
256. 18 см^3.

§ 4

260. $\frac{160}{3}$ см^3. **262.** 9 см^3. **264.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см^3. **266.** 4 см^3.
268. $\frac{80}{3}$ см^3. **269.** 3 см^3. **270.** 20 см^3. **271.** 50 см^3. **272.** $12\sqrt{2}$ см^3.
273. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ см^2. **274.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см^3. **275.** $\frac{41}{16}$ см. **276.** $\frac{2}{3}$ см^3.
277. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ см^3. **278.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см^3. **279.** $18\sqrt[3]{36}$ см^2.
280. $3\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ см. **281.** 18 см^3. **282.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см^3. **283.** $18\sqrt{3}$ см^3.
284. $36\sqrt{15}$ см^2. **286.** $\frac{6\sqrt{39}}{13}$ см. **287.** $\frac{32\sqrt{5}}{3}$см^3. **288.** 40 см^3.
289. $5\sqrt{3}$ см^3. **290.** $54\sqrt{3}$ см^3. **291.** 72 см^3. **292.** $\frac{3}{2}$ см. **293.** 3 см.
294. $\frac{3}{2}$ см. **295.** 36 см^3. **296.** $3\sqrt{2}$ см. **297.** $9\sqrt{3}$ см^3. **298.** $\frac{a^3}{8}$.
299. $\sqrt{3}$ см. **300.** 45°. **303.** $\frac{49\sqrt{2}}{3}$ см^3. **304.** $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ см^3.
305. $\frac{2000}{3}$ см^3. **306.** $\frac{1}{3}$ см^3. **307.** 6 см^3. **308.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ см^3.

Глава 3

§ 1

313. $FT = 2$ см, $CK = \sqrt{2}$ см. **314.** 5 см. **315.** 2π см. **317.** 10 см.
319. $3\sqrt{3}$ см. **320.** 13π см^2. **322.** 36π см^2. **323.** 3 см. **324.** 10π см.
325. $6\sqrt{5}$ см. **326.** $\sqrt{2}$ см. **327.** $2\sqrt{22}$ см. **328.** 480 см^3.
329. $40\sqrt{3}$ см^3. **330.** 7 см. **331.** 96 см^3. **332.** $\frac{5\sqrt{11}}{4}$ см.
333. 16π см. **334.** 12π см^2. **335.** 3 см. **336.** $\frac{120}{13}\pi$ см.
337. 144π см^2. **338.** $\frac{2}{3}\sqrt{374}$ см. **339.** 3 см. **340.** 8 см.
341. $2\sqrt{26}$ см. **342.** $\frac{a^2\sqrt{12R^2-a^2}}{24}$. **343.** 10 см. **344.** $\frac{\sqrt{4R^2-ab}}{2}$.

345. $\frac{288}{13}$ см, $\frac{50}{13}$ см. **346.** 576π см^2. **347.** 14 см. **348.** 13 см. **349.** 26 см. **350.** 5 см. **351.** $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ см. **352.** $\frac{5\sqrt{3}\,a}{6}$. **353.** 8 см. **354.** $\frac{25}{8}$ см. **355.** 192 см^3. **356.** $\frac{25}{4}$ см. **357.** $\frac{a(4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$. **358.** $\frac{2a}{3}$. **359.** $\frac{3}{2}$ см. **360.** 384 см^3. **361.** 96 см^2. **362.** $\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{7}-1\right)$ см. **363.** 384 см^3. **364.** 240 см^2. **365.** 1 см. **366.** $\left(\sqrt{13}-1\right)$ см. **367.** $\frac{a\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)}$. **368.** $\frac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$. **370.** 8 см. **371.** $\frac{9R^2}{2}$. **372.** $\frac{4R^2}{3}$. **373.** $\frac{3\sqrt{3}\,H(4R^2-H^2)}{16}$. **374.** $\frac{8R^3\operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha+2)^{\frac{3}{2}}}$. **376.** 192 см^3. **377.** $\frac{H}{6}\sqrt{12\operatorname{ctg}^2\alpha+9}$. **378.** 17 см. **379.** 4 см, 5 см. **381.** $a\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **382.** $\frac{a\sqrt{3}}{18}$ см. **384.** $\frac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

§ 2

387. 60 см^2. **388.** 4 см. **389.** 3 см. **391.** $2\sqrt{2}$ см. **393.** $2\sqrt{5}$ см. **395.** 40 см^2. **397.** 5 см. **399.** 16π см^2. **401.** $36\sqrt{3}\pi$ см^2. **402.** 50π см^2. **403.** $\frac{320\sqrt{3}\,\pi}{3}$ см^2. **404.** 400π см^2. **405.** 400π см^2. **406.** 40 см^2. **407.** 6π см^2. **408.** 40π см^2. **409.** $2R^2\sqrt{3}$. **410.** $2\pi\sqrt{3}$ см^3. **411.** $4\sqrt{2}\,\pi$ см^3. **412.** 1200π см^3. **413.** 8π см^3. **414.** 8π см^3. **415.** 3 см. **416.** $6\sqrt{3}$ см^3. **417.** $\frac{8}{9}\pi$ см^3. **418.** $4\pi\sqrt{9-4\sqrt{3}}$ см^2. **419.** $\frac{64}{3}$ см^3. **420.** 192 см^3. **421.** $128\sqrt{3}$ см^3. **422.** $\frac{25}{2}$ см. **423.** 200π см^3. **424.** $10\sqrt{2}$ см^2. **425.** $\frac{875}{4}\pi$ см^3. **426.** 2π см^3. **428.** $\frac{\pi S\sqrt{S\sin 2\varphi}}{\sin 2\varphi}$. **429.** $\sqrt{39}$ см^2. **430.** $\frac{a^3\pi\sqrt{\cos 2\varphi}}{2\sin\varphi}$. **431.** $2\pi a^2\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\beta$. **432.** $2\pi S\operatorname{ctg}\varphi$. **433.** 6π см^2. **434.** 32π см^3. **435.** $\frac{\pi a^3}{8}\sin 2\varphi\cos\varphi$. **436.** $\frac{\pi a^3}{8}$. **437.** $\frac{3S}{2}\sqrt{\frac{3Q}{\pi}}$. **438.** 6 см^2. **440.** $3R^2$. **441.** $\frac{3}{2}S$. **442.** $\frac{4\pi a^2}{5}$. **443.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **444.** $\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi}$. **445.** $4\pi R^2\sqrt{\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\varphi-\sin^2\alpha}$.

§ 3

448. 10 см^2. **449.** 5 см. **450.** 3 см. **451.** $12\sqrt{2}$ см. **452.** 12π см. **454.** 8 см. **455.** $4\sqrt{3}$ см. **456.** 5 см. **461.** 60π см^2. **462.** $64\pi(2\sqrt{3}+3)$ см^2. **463.** 369π дм^2. **464.** $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ см^2. **465.** $36\sqrt{3}$ см^2. **466.** 20π см^2. **467.** 144π см^2. **468.** $64\sqrt{2}\pi$ см^2. **469.** 60°. **470.** 30°. **474.** 4 см. **475.** 15π см^2. **476.** $\frac{25}{4}$ см. **477.** $\frac{100\sqrt{3}}{3}\pi$ см^2. **478.** $4\sqrt{3}$ см^2. **479.** $\frac{4}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ см. **480.** $96\sqrt{3}\pi$ см^2. **481.** $2\sqrt{3}$ см. **482.** $20\pi(5+2\sqrt{13})$ см^2. **483.** $\pi S \operatorname{ctg}\varphi\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$. **484.** 216°. **485.** $6\sqrt{2}$ см. **486.** 20π см. **487.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3. **488.** 12π см^3. **489.** $144\sqrt{3}\pi$ см^3. **490.** $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi$. **491.** 3π см^3. **492.** $\frac{8}{3}\sqrt{15}\,\pi$ см^3. **493.** $\frac{8\sqrt{35}}{3}\pi$ см^3. **494.** 216°. **495.** 15 см. **496.** 128 см^2. **497.** $65\sqrt{2}\,\pi$ см^2. **498.** $48\sqrt{2}\,\pi$ см^2. **499.** 455π см^2. **500.** 245π см^3. **501.** $\sqrt{73}$ см. **502.** 117π см^2. **503.** $\frac{8\pi a^3}{3\sin^2\varphi\cos\varphi}$. **504.** $\frac{a^3\pi}{81\sin^2\varphi\cos\varphi}$. **505.** $\frac{\pi a^2}{\sin^2\varphi\cos\varphi}$. **506.** $\frac{8}{3}\sqrt{3}\,\pi$ см^3. **507.** 60°. **508.** 96π см^3.

§ 4

509. 64π см^2. **510.** 100π см^2. **513.** 32π см^2. **514.** $\frac{16}{3}\pi$ см^2. **516.** 64π см^2. **518.** 80π см^2. **521.** 64π см^2. **523.** 2π см^2. **525.** $\frac{256}{3}\pi$ см^3. **527.** 288π см^3. **530.** $\frac{52}{3}\sqrt{13}$ см^3. **535.** 3 : 1 или 1 : 3. **536.** 26π см^2, 650π см^2. **537.** 40π см^2, 360π см^2. **538.** $16\sqrt{2}$ см^2. **539.** 36π см^2. **540.** 32π см^2. **541.** 6π см^3. **542.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\varphi}{2}}$. **543.** 194π см^2. **544.** $\frac{56\sqrt{14}}{3}\pi$ см^3. **545.** 34π см^2. **546.** 15π см^2. **547.** $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3. **548.** 150π см^2. **549.** $\frac{25}{3}\pi$ см^2. **550.** $\frac{8\pi a^2}{3}$. **551.** 2 см^3. **552.** $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$ см. **553.** $16\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ см^2. **554.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **555.** $4\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ см. **556.** $\frac{16}{3}\pi$ см^2.

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Шлыков Владимир Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

3-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник обложки *Е. В. Шлыков*. Художественный редактор *Л. В. Павленко*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *И. И. Дроздовой*. Корректоры *В. С. Бабеня, Д. Р. Лосик, А. В. Алешко, Е. И. Даниленко, О. С. Козицкая.*

Подписано в печать 28.03.2013. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 7,68 + 0,32 форз. Тираж 104 900 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.