МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

# Голод Е.С.
# Алгебра

3 семестр, первый поток

7 января 2016 г.

# 1 Линейные представления (действия) групп

## 1.1 Определения

Зафиксируем поле $\mathbb{K}$, над которым будем рассматривать векторное пространство $V(+,\cdot,\cdot)$ (умножение на скаляр и на элементы $G$).

**Определение.** Задано *линейное действие*, если задано умножение элементов из $V$ слева на элементы из $G$, $\forall g \in G, v \in V (g,v) \mapsto gv \in V$, т. ч. $\forall v, v_1, v_2 \in V\ \forall g, h \in G,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

**1°** $(gh)v = g(hv)$

**2°** $ev = v$

**3°** $g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2$

**4°** $g(\lambda v) = \lambda(gv)$

*Линейное представление* $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$, $\rho(g)(v) = gv$ и обратно $gv = \rho(g)(v)$.

**Обозначение.** $(G, V, \rho)$ эквивалентно записи $\rho = (G, V)$.

**Определение.** Подпространство $U \subseteq V$ является *подпредставлением*, если оно инвариантно относительно действий элементов $G$, т. е. $\forall u \in U\ \forall g \in G\ gu \in U$.

**Определение.** Пусть $V$ — представление, и его инвариантное подпространство $U$. Тогда *факторпредставление* $V/U = \{v + U | v \in V\}$. Зададим операцию $g(v + U) = gv + U$. Проверим корректность. Возьмём два разных предстваителя: $v_1 + U = v_2 + U$, т. е. $v_1 - v_2 \in U$. Достаточно, что бы $gv_1 + U = gv_2 + U$. Но, так как $U$ инвариантно, $g(v_1 - v_2) \in U$.

## 1.2 Прямая сумма представлений

**Определение.** Пусть заданы инвариантные подпространства $U_1, \ldots, U_s \subset V$, $V = U_1 \oplus \oplus \ldots \oplus U_s$ — разложение в *(внутреннею) прямую сумму* инвариантных подпространств (подпредставлений). $\rho_1 = (G, U_1)$, $\rho_2 = (G, U_2)$, $\ldots$, $\rho_s = (G, U_s)$

**Определение.** *Внешняя прямая сумма представлений* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s = \{(v_1, \ldots, v_s) | v_i \in V_i\}$, $g(v_1, \ldots, v_s) = (gv_1, \ldots, gv_s)$, далее будем **обозначать** $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_s$.

Пусть задан гомоморфизм $H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V)$. Тогда композиция $f$ и $\rho$ даст представление $H : hv = f(h)v$

## 1.3 Гомоморфизмы представлений

Пусть имеем два представления: $\rho_1 = (G, V_1)$, $\rho_2 = (G, V_2)$.

**Определение.** *Гомоморфизм представлений* $\varphi\colon \rho_1(V_1) \to \rho_2(V_2)$ есть линейное отображение т. ч. $\varphi(gv) = g\varphi(v)$, $\forall g \in G, v \in V$, т. е. $\forall g \in G$ коммутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"] & V_2 \end{tikzcd}$$

**Определение.** *Изоморфизм представлений* — это гомоморфизм, который является биекцией.

## 1.4 Матричные представления

$\rho = (G, V)$, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$. **Всегда** будем считать, что $V$ — конечномерное пространство. $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \Rightarrow \mathbf{GL}(V) \cong \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Рассмотрим сопоставление $\rho(g) \mapsto A_g$ — матрица $\rho(g)$ относительно $e_1 \ scoe_n$.

**Определение.** Гомоморфизм $G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ будем называть матричным представлением. Так же потребуем:

**1°** $A_{gh} = A_g A_h$
**2°** $A_e = E$
**3°** $A_{g^{-1}} = (A_g)^{-1}$

Если задано матричное представление, то можем построить линейный оператор $\Rightarrow$ матричное и линейное представления равносильны (хотя в одном случае неоднозначно).

Пусть $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$ и $C$ — матрица перехода.

$$\begin{aligned} g &\mapsto A_g && (e_1, \dots, e_n) \\ g &\mapsto A'_g && (e_1, \dots, e_n) \\ A'_g &= C^{-1} A_g C && \forall g \in G \end{aligned}$$

**Определение.** Два матричных представления называются *эквивалентными*, если $\exists C\colon A'_g = C^{-}1 A_g C \ \forall g \in G$.

**Утверждение 1.1.** *Два линейных представления изоморфны $\Leftrightarrow$ соответсвущие матричные представления относительно некоторых базисов эквивалентны.*

$\square$ $\Rightarrow$: Имеем представление $\rho = (G, V)$. Пусть имеется $\rho' = (G, V')$ и $\forall g \in G$ коммутативна

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"] & V' \end{tikzcd}$$

Выберем базисы в пространствах $V$ и $V'$, $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $V' = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$, $\rho = \{A_g\}$, $\rho' = \{A'_g\}$.

Пусть $C$ — матрица для $\varphi$ относительно выбранных базисов. Т. к. изоморфизм, то $\det C \neq 0$.

Композиции линейных отображений соответсвует матрица $\Rightarrow A'_g C = C A_g \Rightarrow A'_g = C A_g C^{-1} \Rightarrow$ эквиваленты.

$\Leftarrow$: Пусть матричные представления эквивалентны относительно некотрых базисов $\Rightarrow \exists C\colon A'_g = C A_g C^{-1}$

Но матрица $C$ относительно базисов $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ и $\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle \Rightarrow$ невырождено отображение $A'_g C = C A_g \Rightarrow \rho'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g) \Rightarrow$ линейные представления изоморфны. $\blacksquare$

## 1.5 Приводимые, неприводимые и вполне приводимые линейные представления

**Определение.** Представление $\rho$ — приводимое, если оно имеет подпредставление на инвариантном подпространстве, отличном от тривиальных

**Определение.** Представление $\rho$ — неприводимое, если не существует инвариантных подпространств отличных от тривиальных.

**Определение.** Представление вполне приводимо, если оно разлагается в прямую сумму неприводимых.

На матричном языке:

Пусть $\rho$ приводимо $\Rightarrow 0 \neq U \subsetneq V$ — инвариантное подпространство. Выберем базис так: $V = \langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$,

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} B_g & * \\ 0 & C_g \end{pmatrix} = A_g,$$

где $\rho(g)(e_i) \in U$, $i = 1, \ldots, k$; $\{B_g\}$ соответсвует $\rho\big|_U$.

На $V/U$ также имеется индуцированное представление: $V/U = \langle e_{k+1} + U, \ldots, e_n + U \rangle$, $g(v + U) = gv + U$. Тогда $g(e_i + U) = ge_i + U$ достаточно задать на базисных векторах.

Если базис выбран произвольным образом, $C$: $\det C \neq 0$, то $\left\{C^{-1} A'_g C\right\}$ будут иметь общий угол нулей ($C$ одна для всех $g$).

Пусть $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_s$, $\rho_i = (G, V_i)$, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$, $V_i$ — инвариантные подпространства в $V$.

Выберем базис в $V_i$ и в качестве базиса $V$ берём объединение базисов $V_i$. Тогда

$$\rho(g) = A_g = \begin{pmatrix} A_g^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_g^{(s)} \end{pmatrix}$$

есть прямая сумма диагональных блоков.

Вполне приводимое, если каждая матрица — прямая сумма неприводимых блоков (в блоке нет угла нулей) $\Rightarrow$ при любом выборе базиса будем получать матрицы, эквивалентные неприводимым.

## 1.6 Конечномерное представление циклической группы над $\mathbb{C}$

Пусть $G = \langle a \rangle$. Рассмотрим $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$

**1°** $G = \langle a \rangle_\infty$. Достаточно задать $\rho(a)$. Положим $\rho(a) = A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ — любая матрица. $\rho' \sim \rho \Rightarrow \exists C\colon A' = C^{-1}AC \Rightarrow$ если верно для $A$, $|C| \neq 0$, то верно и для сопряженной.

**Теорема 1.2 (из линала).** *Матрицы сопряженны $\Leftrightarrow$ сопряженны их жордановы формы*

Тогда матрица $\rho(a)$ задаётся жордановой формой $\Rightarrow$ размеры клеток определены однозначно.

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda'_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda'_s & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda'_s \end{pmatrix}$$

Если есть жорданова клетка размерности $\geqslant 2$, то представление не вполне приводимо. Значит, вполне приводимо $\Leftrightarrow$ матрица $A$ диаганализуема.

**2°** $G = \langle a \rangle_n$, $\rho(a) = A$, $a^n = e \Rightarrow A^n = E$. Тогда $t^n - 1$ — аннулирующий для $A$. Но над $\mathbb{C}$ этот многочлен не имеет кратных корней $\Rightarrow$ матрица диаганализуема:

$$\lambda_i{}^n = 1$$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Любое представление конечной циклической группы (вполне) приводимо. Матрицы не эквивалетны $\Leftrightarrow$ имеют разные характеристические многочлены.

## 1.7 Неприводимые представления абелевых групп над $\mathbb{C}$

**Теорема 1.3.** *Над $\mathbb{C}$ представление абелевой группы неприводимо $\Leftrightarrow$ оно одномерное.*
$\square$

**Теорема 1.4.** *Пусть $V$ — конечномерное пространство, $\dim V = n$. $\{\varphi_i\}$ — некоторое семейство попарно коммутирующих линенйных операторов на $V$ над $\mathbb{C}$. Тогда они имеют общий собственный вектор.*

$\square$ Индукция по размерности $n$:

**1°** $n = 1$ — все собственные

**2°** Пусть $n > 1$. Если все $\varphi_i = \lambda_i\varepsilon$, то доказывать нечего. Пусть $\varphi_1$ не скалярный $\Rightarrow \varphi_1$ имеет собственный вектор, т. е. $\varphi_1(e) = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Рассмотрим подпространство $V_\lambda$ всех собственных векторов со значением $\lambda$. $0 \neq V_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi_1 - \lambda\varepsilon) \subsetneq V$, т. к. не $\varphi_1$ не скалярный $\Rightarrow 1 \leqslant \dim V_\lambda < n$.

Покажем, что $V_\lambda$ — инвариатное подпространство, через перестановочность операторов.

Пусть $v \in V_\lambda$, $\varphi_i(v) \in V_\lambda \Leftrightarrow \varphi_1(\varphi_i(v)) = \lambda\varphi_i(v)$. Но $\varphi_1\varphi_i = \varphi_i\varphi_1 \Rightarrow$

$$\varphi_1(\varphi_i(v)) = \varphi_i(\varphi_1(v)) = \varphi_i(\lambda v) = \lambda\varphi_i(v).$$

Рассмотрим $\left\{\varphi_i\Big|_{V_\lambda}\right\}$, $\dim V_\lambda < n \Rightarrow$ можем применить индуктивное предположение $\Rightarrow$ $\varphi_i$ имеют общий собственный вектор в $V_\lambda \Rightarrow$ и в $V$.

$\blacksquare$

Пусть $G$ — абелева, $\rho$ — неприводимое над $\mathbb{C}$. $\{\rho(g) | g \in G\}$ — семейтсво попарно коммутирующих операторов (т. к. абелева группа) $\Rightarrow$ по теореме (1.4) $\exists 0 \neq v \in V \colon \rho(g)(v) = \lambda_g v$, но тогда $V \supset \langle v\rangle$ — инвариантное подпространство в $V \Rightarrow V = \langle v\rangle$ $\blacksquare$

Пусть имеем произвольное поле $\mathbb{K}$, $\rho = (G, V)$, $\dim V = 1$. $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$. Тогда для $\rho'\colon G \to \mathbb{K}^*$ $\{a_g\}$, $\left\{a'_g\right\}$ $\exists C \in \mathbb{K}^*\colon a_g = C^{-1}a_gC = a_g \Rightarrow$ в одномерном случае эквивалентность — совпадение горморфизмов $\Rightarrow$ надо найти все гомоморфизмы $G \to \mathbb{K}^*$.

$|G| = n$ — абелева группа, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Найдём все комплексные представления конечной абелевой группы

$$G = \langle a_1\rangle_{n_1} \oplus \ldots \oplus \langle a_s\rangle_{n_s} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^*$$

Достаточно задать $\rho$ на $a_i$, но $a_i^{n_i} = e \Rightarrow (\rho(a_i))^{n_i} = 1 \Rightarrow \rho(a_i) = \xi_i \in \sqrt[n_i]{1} \Rightarrow$ имеем гомоморфизм каждого слагаемого в $\mathbb{C}^*$.

$G = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_s\rangle$, $\rho(a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s}) = \xi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{k_s}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i = 0, \ldots, n_i - 1$. Проверим, что $\rho$ — гомоморфизм прямого произведения:

$$\rho((a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s})(a_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{l_s})) = \rho((a_1^{k_1}a_1^{l_1}) \cdot \ldots \cdot (a_s^{k_s}a_s^{l_s})) =$$
$$= (\xi_1^{k_1}\xi_1^{l_1}) \cdot \ldots \cdot (\xi_s^{k_s}\xi_s^{l_s}) = (\xi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{k_s})(\xi_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{l_s}) = \rho(a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s})\rho(a_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{l_s})$$

**Утверждение 1.5.** *Если имеется гомоморфизм произведения в абелеву группу, то возможностей выбрать $\xi_i$-ые $n_1 \cdot \ldots \cdot n_s = n$*

**Комментарий.** Доказывалось ранее в более общем виде.

Так, число различных одномерных $\mathbb{C}$-представлений абелевой группы равно её порядку.

## 1.8 Одномерные представления конечной группы

$\rho\colon G \to \mathbb{K}^*$. $\mathbb{K}^*$ — коммутативна $\Rightarrow \operatorname{Im}\rho \cong G/\operatorname{Ker}\rho$ — абелева. Факторгруппа абелева $\Leftrightarrow$ $G' \subseteq \operatorname{Ker}\rho \Rightarrow$ нужны только такие гомоморфизмы.

Пусть $N \lhd G$, $\rho\colon G \to H$, $N \subseteq \operatorname{Ker}\rho$. Такие гомоморфизмы находятся в биективном соответсвии с гомоморфизмами $G/N \to H$.

Одномерные представления $G$ над $\mathbb{K}$ находятся в биективном соответсвии с гомоморфизмами $G/G' \xrightarrow{\overline{\rho}} K^*$, $\rho = \overline{\rho} \circ \pi \Rightarrow$ задача сводится к представлению абелевой группы.

Пусть $\mathbb{K}^* = \mathbb{C}^*$, $|G| = n < \infty \Rightarrow G/G'$ — конечная абелева группа. $|G/G'|$ разных гомоморфизмов абелевого фактора $\Rightarrow$ число одномерных представлений конечной группы $G$ есть порядок $G/G'$