МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Голод Е.С.

Алгебра

3 семестр, первый поток

9 января 2016 г.

1 Линейные представления (действия) групп

1.1 Определения

Зафиксируем поле $\mathbb{K}$, над которым будем рассматривать векторное пространство $V(+,\cdot,\cdot)$ (умножение на скаляр и на элементы G).

Определение. Задано *линейное действие*, если задано умножение элементов из V слева на элементы из G, $\forall\, g \in G, v \in V (g,v) \mapsto gv \in V$, т. ч. $\forall\, v, v_1, v_2 \in V\ \forall\, g,h \in G,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

1° $(gh)v = g(hv)$

2° $ev = v$

3° $g(v_1+v_2) = gv_1 + gv_2$

4° $g(\lambda v) = \lambda(gv)$

Линейное представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$, $\rho(g)(v) = gv$ и обратно $gv = \rho(g)(v)$.

Обозначение. (G,V,ρ) эквивалентно записи $\rho = (G,V)$.

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ является *подпредставлением*, если оно инвариантно относительно действий элементов G, т. е. $\forall\, u \in U\ \forall\, g \in G\ gu \in U$.

Определение. Пусть V — представление, и его инвариантное подпространство U. Тогда *факторпредставление* $V/U = \{v+U | v \in V\}$. Зададим операцию $g(v+U) = gv+U$. Проверим корректность. Возьмём два разных предстваителя: $v_1 + U = v_2 + U$, т. е. $v_1 - v_2 \in U$. Достаточно, что бы $gv_1 + U = gv_2 + U$. Но, так как U инвариантно, $g(v_1 - v_2) \in U$.

1.2 Прямая сумма представлений

Определение. Пусть заданы инвариантные подпространства $U_1, \ldots, U_s \subset V$, $V = U_1 \oplus \oplus \ldots \oplus U_s$ — разложение в *(внутреннею) прямую сумму* инвариантных подпространств (подпредставлений). $\rho_1 = (G, U_1)$, $\rho_2 = (G,U_2)$, ...,$\rho_s = (G,U_s)$

Определение. *Внешняя прямая сумма представлений* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s = \{(v_1,\ldots,v_s)\,|v_i \in V_i\}$, $g(v_1,\ldots,v_s) = (gv_1,\ldots,gv_s)$, далее будем **обозначать** $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_s$.

Пусть задан гомоморфизм $H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V)$. Тогда композиция f и ρ даст представление $H : hv = f(h)v$

1.3 Гомоморфизмы представлений

Пусть имеем два представления: $\rho_1 = (G,V_1)$, $\rho_2 = (G,V_2)$.

Определение. *Гомоморфизм представлений* $\varphi\colon \rho_1(V_1) \to \rho_2(V_2)$ есть линейное отображение т. ч. $\varphi(gv) = g\varphi(v)$, $\forall\, g \in G, v \in V$, т. е. $\forall\, g \in G$ коммутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Определение. *Изоморфизм представлений* — это гомоморфизм, который является биекцией.

1.4 Матричные представления

$\rho = (G, V)$, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$. **Всегда** будем считать, что V — конечномерное пространство. $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \Rightarrow \mathbf{GL}(V) \cong \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Рассмотрим сопоставление $\rho(g) \mapsto A_g$ — матрица $\rho(g)$ относительно $e_1\ scoe_n$.

Определение. Гомоморфизм $G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ будем называть *матричным представлением*. Так же потребуем:

1° $A_{gh} = A_g A_h$

2° $A_e = E$

3° $A_{g^{-1}} = (A_g)^{-1}$

Если задано матричное представление, то можем построить линейный оператор $\Rightarrow$ матричное и линейное представления равносильны (хотя в одном случае неоднозначно).

Пусть $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle$ и C — матрица перехода.

$$\begin{aligned} g &\mapsto A_g & &(e_1, \ldots, e_n) \\ g &\mapsto A'_g & &(e_1, \ldots, e_n) \\ A'_g &= C^{-1} A_g C & &\forall\, g \in G \end{aligned}$$

Определение. Два матричных представления называются *эквивалентными*, если $\exists\, C\colon A'_g = C^-1 A_g C\ \forall\, g \in G$.

Утверждение 1.1. *Два линейных представления изоморфны $\Leftrightarrow$ соответсвущие матричные представления относительно некоторых базисов эквивалентны.*

$\square$ $\Rightarrow$: Имеем представление $\rho = (G, V)$. Пусть имеется $\rho' = (G, V')$ и $\forall\, g \in G$ коммутативна

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ {\scriptstyle \rho_1(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'(g)} \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V' \end{array}$$

Выберем базисы в пространствах V и V', $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, $V' = \langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle$, $\rho = \{A_g\}$, $\rho' = \{A'_g\}$.

Пусть C — матрица для φ относительно выбранных базисов. Т. к. изоморфизм, то $\det C \neq 0$.

Композиции линейных отображений соответсвует матрица $\Rightarrow A'_g C = C A_g \Rightarrow A'_g = C A_g C^{-1} \Rightarrow$ эквиваленты.

$\Leftarrow$: Пусть матричные представления эквивалентны относительно некотрых базисов $\Rightarrow$ $\exists\, C\colon A'_g = C A_g C^{-1}$

Но матрица C относительно базисов $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ и $\langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle \Rightarrow$ невырождено отображение $A'_g C = C A_g \Rightarrow \rho'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g) \Rightarrow$ линейные представления изоморфны. ■

1.5 Приводимые, неприводимые и вполне приводимые линейные представления

Определение. Представление ρ — *приводимое*, если оно имеет подпредставление на инвариантном подпространстве, отличном от тривиальных

Определение. Представление ρ — *неприводимое*, если не существует инвариантных подпространств отличных от тривиальных.

Определение. Представление *вполне приводимо*, если оно разлагается в прямую сумму неприводимых.

На матричном языке:

Пусть ρ приводимо $\Rightarrow 0 \neq U \subsetneq V$ — инвариантное подпространство. Выберем базис так: $V = \langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$,

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} B_g & * \\ 0 & C_g \end{pmatrix} = A_g,$$

где $\rho(g)(e_i) \in U$, $i = 1, \ldots, k$; $\{B_g\}$ соответсвует $\rho\Big|_U$.

На V/U также имеется индуцированное представление: $V/U = \langle e_{k+1} + U, \ldots, e_n + U \rangle$, $g(v + U) = gv + U$. Тогда $g(e_i + U) = ge_i + U$ достаточно задать на базисных векторах.

Если базис выбран произвольным образом, C: $\det C \neq 0$, то $\left\{C^{-1} A'_g C\right\}$ будут иметь общий угол нулей (C одна для всех g).

Пусть $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_s$, $\rho_i = (G, V_i)$, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$, V_i — инвариантные подпространства в V.

Выберем базис в V_i и в качестве базиса V берём объединение базисов V_i. Тогда

$$\rho(g) = A_g = \begin{pmatrix} A_g^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_g^{(s)} \end{pmatrix}$$

есть прямая сумма диагональных блоков.

Вполне приводимое, если каждая матрица — прямая сумма неприводимых блоков (в блоке нет угла нулей) $\Rightarrow$ при любом выборе базиса будем получать матрицы, эквивалентные неприводимым.

1.6 Конечномерное представление циклической группы над $\mathbb{C}$

Пусть $G = \langle a \rangle$. Рассмотрим $\rho \colon G \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$

1° $G = \langle a \rangle_\infty$. Достаточно задать $\rho(a)$. Положим $\rho(a) = A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ — любая матрица. $\rho' \sim \rho \Rightarrow \ \exists\, C \colon A' = C^{-1}AC \Rightarrow$ если верно для A, $|C| \neq 0$, то верно и для сопряженной.

Теорема 1.2 (из линала). *Матрицы сопряженны $\Leftrightarrow$ сопряженны их жордановы формы*

Тогда матрица $\rho(a)$ задаётся жордановой формой $\Rightarrow$ размеры клеток определены однозначно.

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda'_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda'_s & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda'_s \end{pmatrix}$$

Если есть жорданова клетка размерности $\geqslant 2$, то представление не вполне приводимо. Значит, вполне приводимо $\Leftrightarrow$ матрица A диаганализуема.

2° $G = \langle a \rangle_n$, $\rho(a) = A$, $a^n = e \Rightarrow A^n = E$. Тогда $t^n - 1$ — аннулирующий для A. Но над $\mathbb{C}$ этот многочлен не имеет кратных корней $\Rightarrow$ матрица диаганализуема:

$$\lambda_i{}^n = 1$$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Любое представление конечной циклической группы (вполне) приводимо. Матрицы не эквивалетны $\Leftrightarrow$ имеют разные характеристические многочлены.

1.7 Неприводимые представления абелевых групп над $\mathbb{C}$

Теорема 1.3. *Над $\mathbb{C}$ представление абелевой группы неприводимо $\Leftrightarrow$ оно одномерное.*
$\square$

Теорема 1.4. *Пусть V — конечномерное пространство, $\dim V = n$. $\{\varphi_i\}$ — некоторое семейство попарно коммутирующих линейных операторов на V над $\mathbb{C}$. Тогда они имеют общий собственный вектор.*

$\square$ Индукция по размерности n:

1° $n = 1$ — все собственные

2° Пусть $n > 1$. Если все $\varphi_i = \lambda_i\varepsilon$, то доказывать нечего. Пусть φ_1 не скалярный $\Rightarrow \varphi_1$ имеет собственный вектор, т. е. $\varphi_1(e) = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Рассмотрим подпространство V_λ всех собственных векторов со значением λ. $0 \neq V_\lambda = \mathrm{Ker}(\varphi_1 - \lambda\varepsilon) \subsetneq V$, т. к. не φ_1 не скалярный $\Rightarrow 1 \leqslant \dim V_\lambda < n$.

Покажем, что V_λ — инвариатное подпространство, через перестановочность операторов.

Пусть $v \in V_\lambda$, $\varphi_i(v) \in V_\lambda \Leftrightarrow \varphi_1(\varphi_i(v)) = \lambda\varphi_i(v)$. Но $\varphi_1\varphi_i = \varphi_i\varphi_1 \Rightarrow$

$$\varphi_1(\varphi_i(v)) = \varphi_i(\varphi_1(v)) = \varphi_i(\lambda v) = \lambda\varphi_i(v).$$

Рассмотрим $\left\{\varphi_i\big|_{V_\lambda}\right\}$, $\dim V_\lambda < n \Rightarrow$ можем применить индуктивное предположение $\Rightarrow$ φ_i имеют общий собственный вектор в $V_\lambda \Rightarrow$ и в V.

$\blacksquare$

Пусть G — абелева, ρ — неприводимое над $\mathbb{C}$. $\{\rho(g) | g \in G\}$ — семейтсво попарно коммутирующих операторов (т. к. абелева группа) $\Rightarrow$ по теореме (1.4) $\exists\, 0 \neq v \in V\colon \rho(g)(v) = \lambda_g v$, но тогда $V \supset \langle v\rangle$ — инвариантное подпространство в $V \Rightarrow V = \langle v\rangle$ $\blacksquare$

Пусть имеем произвольное поле $\mathbb{K}$, $\rho = (G, V)$, $\dim V = 1$. $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$. Тогда для $\rho'\colon G \to \mathbb{K}^*$ $\{a_g\}$, $\left\{a_g'\right\}$ $\exists\ C \in \mathbb{K}^*\colon a_g = C^{-1}a_gC = a_g \Rightarrow$ в одномерном случае эквивалентность — совпадение горморфизмов $\Rightarrow$ надо найти все гомоморфизмы $G \to \mathbb{K}^*$.

$|G| = n$ — абелева группа, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Найдём все комплексные представления конечной абелевой группы

$$G = \langle a_1\rangle_{n_1} \oplus \ldots \oplus \langle a_s\rangle_{n_s} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^*$$

Достаточно задать ρ на a_i, но $a_i^{n_i} = e \Rightarrow (\rho(a_i))^{n_i} = 1 \Rightarrow \rho(a_i) = \xi_i \in \sqrt[n_i]{1} \Rightarrow$ имеем гомоморфизм каждого слагаемого в $\mathbb{C}^*$.

$G = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_s\rangle$, $\rho(a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s}) = \xi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{k_s}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i = 0, \ldots, n_i - 1$. Проверим, что ρ — гомоморфизм прямого произведения:

$$\rho((a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s})(a_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{l_s})) = \rho((a_1^{k_1}a_1^{l_1}) \cdot \ldots \cdot (a_s^{k_s}a_s^{l_s})) =$$
$$= (\xi_1^{k_1}\xi_1^{l_1}) \cdot \ldots \cdot (\xi_s^{k_s}\xi_s^{l_s}) = (\xi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{k_s})(\xi_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{l_s}) = \rho(a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s})\rho(a_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{l_s})$$

Утверждение 1.5. *Если имеется гомоморфизм произведения в абелеву группу, то возможностей выбрать ξ_i-ые $n_1 \cdot \ldots \cdot n_s = n$*

Комментарий. Доказывалось ранее в более общем виде.

Так, число различных одномерных $\mathbb{C}$-представлений абелевой группы равно её порядку.

1.8 Одномерные представления конечной группы

$\rho\colon G \to \mathbb{K}^*$. $\mathbb{K}^*$ — коммутативна $\Rightarrow \operatorname{Im}\rho \cong G/\operatorname{Ker}\rho$ — абелева. Факторгруппа абелева $\Leftrightarrow$ $G' \subseteq \operatorname{Ker}\rho \Rightarrow$ нужны только такие гомоморфизмы.

Пусть $N \lhd G$, $\rho\colon G \to H$, $N \subseteq \operatorname{Ker}\rho$. Такие гомоморфизмы находятся в биективном соответсвии с гомоморфизмами $G/N \to H$.

Одномерные представления G над $\mathbb{K}$ находятся в биективном соответсвии с гомоморфизмами $G/G' \xrightarrow{\overline{\rho}} K^*$, $\rho = \overline{\rho}\circ\pi \Rightarrow$ задача сводится к представлению абелевой группы.

Пусть $\mathbb{K}^* = \mathbb{C}^*$, $|G| = n < \infty \Rightarrow G/G'$ — конечная абелева группа. $|G/G'|$ разных гомоморфизмов абелевого фактора $\Rightarrow$ число одномерных представлений конечной группы G есть порядок G/G'

1.9 Пространсва гомоморфизмов линейных представлений групп

Пусть $\mathbb{K}$ — любое поле, $\rho = (G, V)$, $\rho' = (G, V')$. $\varphi \in \operatorname{Hom}(\rho, \rho')$ — множество гомоморфизмов $\rho \to \rho'$. $V \xrightarrow{\varphi} V'$ — линейное отображение т. ч. $\forall\, v \in V, g \in G \quad \varphi(gv) = g\varphi(v)$. $\operatorname{Hom}(\rho, \rho') = \operatorname{Hom}_G(V, V') \subseteq \mathbf{L}(V, V')$.

Если $\dim V = n$, $\dim V' = m$, то $\mathbf{L}(V, V') \cong \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Утверждение 1.6. $\operatorname{Hom}(\rho, \rho')$ — *подпространство в* $\mathbf{L}(V, V')$.

$\square$ Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{Hom}_G(\rho, \rho')$.

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(gv) = \varphi_1(gv) + \varphi_2(gv) = g\varphi_1(v) + g\varphi_2(v) = g(\varphi_1(v) + \varphi_2(v)) = g(\varphi_1 + \varphi_2)(v)$$
$$(\lambda\varphi_1)(gv) = g(\lambda\varphi_1)(v) \text{ — аналогичная проверка}$$

$\blacksquare$

Рассмотрим $V' = V$. $\operatorname{Hom}_G(V, V) \subseteq \mathbf{L}(V)$ — пространство лнейных операторов. Пространство линейных операторов — алгебра $\cong \operatorname{Mat}_n \mathbb{K}$.

Утверждение 1.7. $\operatorname{Hom}_G(V, V')$ — *подалгебра в* $\mathbf{L}(V)$.

Комментарий. Композиция представлений — представление.

Определение. Эндоморфизм — гомоморфизм на себя.
Автоморфизм — биективный эндоморфизм.

Обозначение. $\operatorname{End}_G(V)$ — алгебра эндоморфизмов представлений в V

Лемма 1.8 (Шур).

1° (G, V, ρ), (G, V', ρ') — *неприводимые представления. Тогда* $\forall\,\varphi\colon \rho \to \rho'$ — *либо нулевой, либо биекция.*

2° $\operatorname{End}_G(V)$ — *алгебра с делением*

3° $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \forall\,\varphi \in \operatorname{End}_G(V), \rho$ *неприводимое* $\varphi = \lambda\varepsilon, \lambda \in \mathbb{C}$

$\square$

1° $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq V$, $\operatorname{Im}\varphi \subseteq V'$ — инвариантные подпространства. Но т. к. V и V' — неприводимые, то нет нетривиальных подпредставлений. $\operatorname{Im}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$; $\operatorname{Im}\varphi = V' \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \neq V \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi$ — биективено.

2° Простое следствие пункта **1°**.

3° Докажем двумя способами:

(a) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда $\operatorname{End}_G(V)$ — $\mathbb{C}$-алгебра с делением, $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{End}_G(V) < \infty$ (т. к. подалгебра в алгебре матриц) $\Rightarrow \operatorname{End}_G(V) = \mathbb{C}$.

(b) $\varphi\colon V\to V$ — эндоморфизм $\Rightarrow$ линейный оператор над $\mathbb{C}\Rightarrow$ обладает хотя бы одним собственным вектором:

$$\exists\, x\in V, x\neq 0, \lambda\in\mathbb{C}\colon \varphi(x)=\lambda x\Rightarrow(\varphi-\lambda\varepsilon)(x)=0.$$

Но любой эндоморфизм либо нулевой, либо биективен. Значит имеет тривиальное ядро $\Rightarrow\varphi-\lambda\varepsilon=0\Rightarrow\varphi=\lambda\varepsilon$.

■

1.10 Гомоморфизмы прямой суммы представлений

Пусть $\rho=\rho_1\oplus\ldots\oplus\rho_s$, $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_s$, $\rho_i=(G,V_i)$, $\rho'=(G,V')$ — любое.

Рассмотрим $\operatorname{Hom}_G(V_1\oplus\ldots\oplus V_s,V')$. Гомоморфизм прямой суммы определяет гомоморфизм каждого слагаемого $\varphi\in\operatorname{Hom}_G(V_1\oplus\ldots\oplus V_s,V')$, $\varphi_i\colon V_i\to V'$,

$$\varphi(v)=\varphi(v_1,\ldots,v_s)=\sum_{i=1}^{s}\varphi_i(v_i),$$

$\forall\, v_i\in V_i\quad\varphi_i(v_i)=\varphi(v_i)$.

Но если $\forall i$ задано $\varphi_i\colon V_i\to V'$, то

$$\varphi(v)\coloneqq\varphi(v_1+\ldots+v_s)=\sum_{i=1}^{s}\varphi_i(v_i)$$

$\Rightarrow\varphi\in\operatorname{Hom}(\bigoplus V_i,V')\Rightarrow\operatorname{Hom}_G(V_1\oplus\ldots\oplus V_s,V')\cong\operatorname{Hom}_G(V_1,V')\oplus\ldots\oplus\operatorname{Hom}_G(V_s,V')$.

Применим это к гомомоморфизму прямого произведения.

Следствие 1.1 (из Л.Шура). *Пусть V, V' — неприводимые, тогда*

$$\dim\operatorname{Hom}_G(V,V')=\begin{cases}0, & V\ncong V'\\ \dim & V\cong V'\end{cases}$$

$\rho(G,V)$ — вполне приводимо.

$$V=V_1\oplus\ldots\oplus V_s=V_1\oplus\ldots\oplus V_k\oplus V_{k+1}\oplus\ldots\oplus V_s,$$

V_i, $\rho'=(G,V')$ — неприводимы, $V_i\cong V'$, $1\leqslant i\leqslant k$, $V_i\ncong V'$, $k+1\leqslant i\leqslant s$. k — кратность вхождения V' в данное разложение вполне приводимого.

Утверждение 1.9. $\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Hom}_G(V,V')=k\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{End}_G(V')$

□ Из предыдущего

$$\begin{aligned}&\operatorname{Hom}_G(V,V')=\operatorname{Hom}_G(V_1\oplus\ldots\oplus V_s,V')=\\&=\underbrace{\operatorname{Hom}_G(V_1,V')}_{\cong\operatorname{End}_G(V')}\oplus\ldots\oplus\underbrace{\operatorname{Hom}_G(V_k,V')}_{\cong\operatorname{End}_G(V')}\oplus\underbrace{\operatorname{Hom}_G(V_{k+1},V')}_{=0}\oplus\ldots\oplus\underbrace{\operatorname{Hom}_G(V_{k+1},V')}_{=0}\end{aligned}$$

$\Rightarrow\dim\operatorname{Hom}_G(V,V')=k\operatorname{End}_G(V')$ ■

Теорема 1.10. *Кратность вхождения данного неприводимого представления в разложение вполне приводимого представления в прямую сумму не приводимых не зависит от выбора этого разложения*

□

$$k=\frac{\dim\operatorname{Hom}_G(V,V')}{\dim\operatorname{End}_G(V')}$$

Легко видеть, что правая часть не зависит от выбора разложения, значит и левая. ■

Определение. *Кратностью $\nu(V',V)$* неприводимого V' в вполне приводимом V называется кратность вхождения V' в любое разложение V в прямую сумму неприводимых.

Следствие 1.2. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\operatorname{End}_G(V)=\mathbb{C}\Rightarrow\nu(V',V)=\dim\operatorname{Hom}_G(V,V')$.

1.11 Ортоганальные и унитарные представления

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, V — линейное пространство, $\dim V < \infty$. Зададаим на V евклидово (в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, эрмитово) скалярное произведение.

Определение. V — евклидово пространство. Тогда $\rho = (G, V)$ называется *ортоганальным*, если $\forall\ g \in G \rho(g)$ — ортоганален.

V — эрмитово пространство. Тогда $\rho = (G, V)$ называется *унитарным*, если $\forall\ g \in G \rho(g)$ — унитарен.

Матричное представление называется ортоганальным (унитарным), если все A_g — ортоганальны (унитарны).

Если зададим ортогональные (унитарные) матрицы и ортонормированный (унитарный) базис, то получим отогональное (унитарное) представление и наоборот.

Теорема 1.11. *Любое $\mathbb{R}$-представление конечной группы изоморфно ортогональному, а над $\mathbb{C}$ — унитраному.*

□ Докажем для $\mathbb{C}$ (для $\mathbb{R}$ аналогично). Достаточно доказать, что любое матричное представление эквивалентно унитарному матричному.

Пусть $\rho = (G, V)$ дано. На V есть эрмитово скалярное произведение, относительно которого ρ — унитарно, т. е. все $\rho(g)$ — унитарные операторы.

Пусть $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ — базис, $F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ — скалярное произведение. Введём новое:

$$(x, y) := \sum_{g \in G} F(gx, gy)$$

Покажем, что

1° получилось эрмитово скалярное произведение: $\forall\ g\ F(gx, gy)$ — положительно определённая полуторолинейная форма.

2° относительно (x, y) все операторы $\rho(g)$ унитарны, т. е. $\forall\ h \in G\ \rho(h)$ — унитарный. Но

$$(hx, hy) = \sum_{g \in G} F(ghx, ghy) \quad \text{так же сумма по всей группе}$$

$\Rightarrow (hx, hy) = (x, y) \Rightarrow h$ — унитарен.

■

Следствие 1.3. *Любое представление конечной группы над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — вполне приводимы.*

□ Индукция по размерности представления:

1° Любое одномерное представление всегда неприводимо.

2° Пусть $\dim V = n$ и для меньших размерностей доказано. Это представление изоморфно унитарному $\Rightarrow$ можем считать, что представление — унитарно. Если неприводимо, то доказывать нечего. Если же существует инвариантное подпространство $0 \neq U \subsetneq V$, то U, $U^{\perp}$ — инвариантны относительно унитарных $\rho(g)$.

$V = U \oplus U^{\perp}$, $\dim U, \dim U^{\perp} < n$, тогда по индуктивному предположению U и $U^{\perp}$ — прямая сумма неприводимых $\Rightarrow V$ разлагается в прямую сумму неприводимых.

■

1.12 Критерий полной приводимости линейного представления над произвольным полем

Определение. Представление ρ на V обладает свойтсвом *отщепимости*, если $\forall\, U' \subset V$ — инвариантного $\exists\, U'' \subset V : V$ — инвариантное и $V = U' \oplus U''$

Утверждение 1.12. *Следующие свойства эквиваленты:*

1° (G, V) — *вполне приводимо*

2° (G, V) *обладает свойством отщепимости*

3° $\forall\, U \subset V$ *инвариантное* $\exists\, \varphi \in \mathrm{End}_G\,(V)$ — *проекция на* U

□ Эквивалентность **2°** и **3°** известна из линейной алгебры.

Проекция φ — гомоморфизм представлений $\Rightarrow U'' = \mathrm{Ker}\,\varphi$ — инвариантно.

Если U'' — инвариантно, то проекция φ на U' паралельно U'' — гомоморфизм представлений: $\forall\, v = v' + v''$, $v' \in U'$, $v'' \in U''$ $\varphi(v) = v'$.

Докажем эквивалентность **1°** и **2°**.

1° $\Rightarrow$ **2°**: Пусть $U' \subset V$ — инвариантное, $V = \underbrace{V_1 \oplus \ldots \oplus V_s}_{\text{неприводимые}}$.

Возьмём в качестве U'' **максимальную** сумму $U'' = V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}$, т. ч. $U'' \cap U' = 0$.

Т. к. пересечение нулевое, то $U' \oplus U''$ — прямая сумма. Покажем, что $V = U' \oplus U''$.

Пусть $U' \oplus U'' \subsetneq V \Rightarrow \exists\, V_j : V_j \not\subset U' \oplus U''$ Но V_j — неприводимо $\Rightarrow (U' \oplus U'') \cap V_j = 0 \Rightarrow U' \oplus U'' \oplus V_j$ — прямая сумма, что противоречит максимальности $U'' \Rightarrow U' \oplus U'' = V$.

2° $\Rightarrow$ **1°**:

Лемма 1.13. *Если V обладает свойством отщепимости, то любое его подредставление обладает этим свойством.*

□ $U \subset V$, $U' \subset U$ — инвариантные, $V = U' \oplus U''$ — инвариантное, тогда $U = U' \oplus (U'' \cap U)$

$$U' \cap (U'' \cap U) = 0, \text{ т. к. } U' \cap U'' = 0$$

$$\forall\, u \in U \quad u = v' + v'',\ v' \in U',\ v'' \in U''\ v'' = u - v' \in U \Rightarrow v'' \in U \cap U''$$

■

Индукция по размерности $\dim V = n$

1° $n = 1$ очевидно.

2° если V — неприводимо, то доказывать нечего. Пусть $\exists\, 0 \neq U' \subsetneq V \Rightarrow V = U' \oplus U''$ — инвариантные и имеют меньшую размерность. По лемме они обладают свойтсвом отщепимости $\Rightarrow$ к ним применимо индуктивное предположение $\Rightarrow V$ — вполне приводимо.

■

Следствие 1.4. *Подпредставление и факторпредставление вполне приводимого — вполне приводимы.*

□ Для подпредставления свойство наследуется по Лемме (1.13).

Рассмотрим V/U. $V = U \oplus U' \Rightarrow V/U \cong U'$, но U' — подпредставление $\Rightarrow$ вполне приводимо. ■

Теорема 1.14 (Машке). *Пусть G — конечная группа и поле $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$-представление G вполне приводимо* $\Leftrightarrow \mathrm{char}\,\mathbb{K} \nmid |G|$

Определение. Представление *модулярно*, если $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \,\big|\, |G|$.

□ $\Leftarrow$: Докажем с помощью условия (3) из критерия.

Из линейной алгебры: $\exists\, \psi\colon V \to V$, ψ — проекция на U. Хотим получить проекцию φ, т. ч. $\varphi(hv) = h\varphi(v)\ \forall\, v \in V,\ h \in G$. Пусть $|G| = n$, $0 \neq n \cdot 1 \in \mathbb{K} \Rightarrow \frac{1}{n} = (n \cdot 1)^{-1}$. Определим φ:

$$\varphi(v) = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} g^{-1}\psi(gv)$$

Докажем, что φ — эндоморфизм.

$$\varphi(hv) = \frac{1}{n}\sum_{g} g^{-1}\psi(ghv) = \frac{1}{n}\sum_{g} h(gh)^{-1}\psi\left((gh)v\right) = h \cdot \frac{1}{n}\sum_{gh = x \in G} x^{-1}\psi(xv) = h\varphi(v)$$

Проверим, что φ — проекция на U.

$$\psi(gv) \in U \Rightarrow \varphi(v) = \frac{1}{n}\sum g^{-1}\psi(gv) \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subseteq U$$

$$v \in U \Rightarrow gv \in U(\text{инвариантность}) \Rightarrow \psi(gv) = gv \Rightarrow g^{-1}\psi(gv) = gv \Rightarrow \psi(v) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot v = v$$

■

1.13 Продолжение линейного действия группы на пространстве её представления вдоль действия её групповой алгебры

Пусть G — группа, $\mathbb{K}$ — поле, $|G| = n$. Рассмотрим n-мерное векторное пространство, отождествив элементы G с базисом. $\mathbb{K}G = \left\{ \sum\limits_{g \in G} a_g g \right\}$, $a_g \in \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)\left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G}\left(\sum_{h,k\colon\, hk = g} a_h b_k\right) g$$

Пусть имеем представление V над $\mathbb{K}$ $\rho = (G, V) \Rightarrow$ задано gv, $g \in G$, $v \in V$, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — невырожденные линейные операторы. Но $G \subset \mathbb{K}G \Rightarrow\ \forall\, \tau = \sum a_g g,\ g \in G$,

$$\tau v = \left(\sum_{g} a_g g\right)(v) \coloneqq \sum_{g} a_g (gv)$$

Свойства этой операции:

1° $\tau(v_1 + v_2) = \tau v_1 + \tau v_2 \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{K}G,\ \forall\, v_1, v_2 \in V$
2° $\tau(\lambda v) = \lambda(\tau v) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$
3° $(\tau_1 + \tau_2)\, v = \tau_1 v + \tau_2 v$
4° $(\tau_1 \tau_2)\, v = \tau_1 (\tau_2 v)$
5° $(\lambda e)\, v = \lambda v \qquad e$ — единица в $\mathbb{K}G$, т. е. в G, $\lambda \in \mathbb{K}$

Свойства **1°**, **2°** задают линейный оператор. Раньше имели $\varphi(g)v = gv$. А теперь $\varphi\colon \mathbb{K}G \to \mathbf{L}(V)$ — алгебра всех линейных операторв.

Свойства **3°**, **4°** и **5°** задают гомоморфизм алгебр (линейное представление задаёт гомоорфизм алгебр $\mathbb{K}G \to \mathbf{L}(V)$).

Заметим, что имеют место свойства:

- $U \subset V$ — инвариантно относительно $G \Rightarrow \tau v \in U,\ \ \forall\, v \in U, \tau \in \mathbb{K}G$.
- $\varphi\colon V \to V$ — гомомморфизм представлений $\Rightarrow \varphi(\tau v) = \tau\varphi(v),\ \forall\, v \in V, \tau \in \mathbb{K}G$.

Определение. $\mathbb{K}$-представление группы G в $\mathbb{K}G$ и с действием, задаваемым умножением в групповой алгебре:

$$g\left(\sum a_h h\right) = \sum a_g g h$$

называется *регулярным*.

1.14 Размерность пространства гомоморфизмов регулярного представления

Пусть $\rho = (G, V)$ — любое представление.

Утверждение 1.15. $\dim \operatorname{Hom}_G(\mathbb{K}G, V) = \dim_{\mathbb{K}} V$

$\square$ $\quad \forall\, \varphi\colon \mathbb{K}G \to V$ задаётся значением $\varphi(e) \in V$, т. к. $\varphi(\tau) = \varphi(\tau e) = \tau\varphi(e)$.

В обратную сторону: задано $\varphi(e) \Rightarrow \ \forall\, \tau \in \mathbb{K}G\ \varphi(\tau) = \varphi(\tau e) \coloneqq \tau\varphi(e)$.

Покажем, что эта биекция $V \leftrightarrow \operatorname{Hom}_G(\mathbb{K}G, V)$ — гомоморфизм векторных пространств.

Пусть $v_0 = \varphi(e)$, $v_o \leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Hom}_G(\mathbb{K}G, V)$. $\varphi(\tau) = \tau v_0$. Возьмём v_0' и v_0'', $v_0 = v_0' + v_0''$, $\varphi'(\tau) = \tau v_0'$, $\varphi''(\tau) = \tau v_0''$.

$$\varphi(\tau) = \tau\left(v_0' + v_0''\right) = \tau v_0' + \tau v_0'' = \varphi'(\tau) + \varphi''(\tau) = \left(\varphi' + \varphi''\right)(\tau)$$
$$\varphi_{\lambda v_0'}(\tau) = \tau\left(\lambda v_0'\right) = \lambda\varphi'(\tau) = \left(\lambda\varphi'\right)(\tau)$$

Значит имеем изоморфизм векторных пространств $\Rightarrow \dim \operatorname{Hom}_G(\mathbb{K}G, V) = \dim_{\mathbb{K}} V$. $\blacksquare$

1.15 Кратность вхождения неприводимого представления в немодулярном случае

В немодулрном случае любое представление G вполне приводимо $\Rightarrow$ регулярное представление вполне приводимо $\Rightarrow$ можно говорить о кратности вхождения неприводимого представления в регулярное. $\rho = (G, V)$ — неприводимое, $k = \nu(V, \mathbb{K}G)$. Применим формулу:

$$k = \frac{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Hom}_G(\mathbb{K}G, V)}{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{End}_G(V)} = \frac{\dim_{\mathbb{K}} V}{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{End}_G(V)}$$

$\Rightarrow\ \forall\, V$ — неприводимого, кратность его вхождения в $\mathbb{K}G$ ненулевая $\Rightarrow$ любое неприврдимое встречается в разложении регулярного.

Т. к. слагаемых в разложении конечное число, то с точностью до изоморфизма имеется конечное число представлений группы G.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{End}_G(V) = 1$.

Утверждение 1.16. *Кратность вхождения неприводимого представления в регулярное над $\mathbb{C}$ равно размерности пространства представления.*

Следствие 1.5. *Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений конечной группы G над $\mathbb{C}$ равна $|G|$.*

$\square$ $\quad (G, V_1), \ldots, (G, V_s)$ — список всех неприводимых представлений (с точночтью до изоморфизма) группы G над $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{K}} V_i = k_i$,

$$\mathbb{K}G = \underbrace{V_{1,1} \oplus \ldots \oplus V_{1,k_1}}_{V_{1,j} \cong V_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{V_{s,1} \oplus \ldots \oplus V_{s,k_s}}_{V_{s,j} \cong V_s}$$

$\Rightarrow$ число слагаемых в каждой группе равно размерности представления

$$|G| = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}G = \sum_{i=1}^{s} k_i^2$$

$\blacksquare$

1.16 Разложение немодулярной групповой алгебры конечной группы в прямую сумму простых алгебр

$\operatorname{char} \mathbb{K} \nmid |G|$. Тогда $(G, V_1), \ldots, (G, V_s)$ — все неприводимые, k_i — кратность вхождения V_i в $\mathbb{K}G$

$$k_i = \frac{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Hom}_G(\mathbb{K}G, V_i)}{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{End}_G(V_i)}$$

Задача 1.1. *Показать, что если* $\operatorname{char} K \bigm| |G|$, *то регулярное представление не является вполне приводимым.*

Указание. Показать, что имеется подпредставление и на него нет проекции.

$$\mathbb{K}G = \overbrace{\underbrace{V_{1,1} \oplus \ldots \oplus V_{1,k_1}}_{V_{1,j} \cong V_1}}^{R_1} \oplus \ldots \oplus \overbrace{\underbrace{V_{s,1} \oplus \ldots \oplus V_{s,k_s}}_{V_{s,j} \cong V_s}}^{R_s} \tag{1}$$

Подпредставление в регулярном представлении — подпространство, инвариантное относительно умножения слева на элементы из $G \Rightarrow$ на любые элементы из алгебры (т. е. это левые идеалы в $\mathbb{K}G$).

$I \subset \mathbb{K}G$, I — неприводим $\Leftrightarrow I \neq 0$ и нет строго меньших ненулевых левых идеалов (минимальный левый идеал).

Теорема 1.17. *Немодулярная групповая алгебра является прямой суммой простых алгебр.*

$\square$ Имеем разложение $\mathbb{K}G = V_{1,1} \oplus \ldots \oplus V_{1,k_1} \oplus \ldots \oplus V_{s,1} \oplus \ldots \oplus V_{s,k_s}$. Докажем, что блоки ($R_i$ из (5.1))— двустороние идеалы. Заметим, что блоки определены однозначно. Докажем, что первый (значит и любой) блок содержит неприводимоё подредстовление $I \cong V_1$.

Пусть $\exists\, \tau_0 \in I$, $\tau_0 \notin R_i$, $\tau_0 = \sum \tau_{i,j}$, $\tau_{i,j} \in V_{i,j}$, $\exists\, \tau_{i,j} \neq 0\; i \neq 1$.

Рассмотрим проекцию на $V_{i,j}$: $\varphi\colon I \to V_{i,j}$, $\varphi(\tau) = \tau_{i,j}$, $\tau \in I$. Но т. к. было разложение в прямую сумму, то получили гомоморфизм представлений. Этот гомоморфизм не нулевой, т. к.

$\varphi(\tau_0) \neq 0$. Значит по Л.Шура $V_{i,j} \cong V_1$, что противоречит $i \neq 1 \Rightarrow I \subseteq R_1 \Rightarrow$ блоки не зависят от разложения.

Докажем, что R_1 — двусторониий идеал. Осталось показать, что правый.

Пусть $\tau \in \mathbb{K}G$, $R_1\tau \subseteq R_1$

1° $V_{1,j} \cdot \tau = 0$

2° $V_{1,j} \cdot \tau \neq 0$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon V_{1,j} \to V_{1,j} \cdot \tau$: $x \in V_{1,j}$, $\varphi(x) = x\tau$. Заметим, что φ — сюръективен.

Покажем, что φ — гомоморфизм представлений:

$$\varphi(gx) = (gx)\tau = g\varphi(x)$$

Но $V_{i,j}$ было неприводимо, однако $\operatorname{Ker}\varphi \subsetneq V_{i,j} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ — изоморфизм представлений. $V_{1,j} \cdot \tau \cong V_{1,j} \cong V_1 \Rightarrow V_{1,j} \cdot \tau \subseteq R_1 \Rightarrow R_i$ — двусторониий идеалы.

Докажем, что R_i — простые. $\mathbb{K}G = R_1 \oplus \ldots \oplus R_s$, $e = e_1 \oplus \ldots \oplus e_s$, $e_i \in R_i$ — единица в R_i

Т. к. R_i — двусторониe идеалы, то произведение элементов из разных подалгебр равно нулю.

$$\tau \in R_i \Rightarrow \tau = \tau e = \underbrace{\tau e_1}_{=0} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\tau e_i}_{=\tau} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\tau e_s}_{=0}$$

Пусть $0 \neq J \subsetneq R_1$ — двусторониий идеал.

$$R_1 = J \oplus J'$$
$$R_1 = \underbrace{I_1 \oplus \ldots \oplus I_k}_{J} \oplus I_{k+1} \oplus \ldots \oplus I_{k_1}, \quad k \neq k_1$$

$\forall\, \tau \in J\; \tau I_{k+1} \subseteq I_{k+1}$, т. к. I_{k+1} — подпредставление, $\tau I_{k+1} \subseteq J$, т. к. $\tau \in J$, J — двусторониий идеал. $J \cap I_{k+1} = 0 \Rightarrow \tau I_{k+1} = 0$. $I_{k+1} \cong V_1 \cong V_{1,j}$, $j = 1, \ldots, k_1$. Оператор действует одинаковым образом на изоморфных представлениях $\Rightarrow \tau V_{1,j} = 0\; \forall\, j \Rightarrow \tau R_1 = 0 \Rightarrow \tau = \tau e_1 = 0$. Противоречие. $\blacksquare$

Рассмотрим $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}G = R_1 \oplus \ldots \oplus R_s$.

Теорема 1.18. *Групповая алгебра конечной группы над $\mathbb{C}$ разлагется в прямую сумму полных матричных алгебр.*

□ Покажем, что R_i изморфен полной матричной алгебре.

$$\mathbb{C}G = V_{1,1} \oplus \ldots \oplus V_{1,r_1} \oplus \ldots \oplus V_{s,1} \oplus \ldots \oplus V_{s,r_s}$$

$r_i = \dim V_i$, т. к. над $\mathbb{C}$ кратность вхождения в регулярное совпадает с размерностью. $\dim R_i = r_i^2$, покажем, что $R_1 \cong \mathrm{Mat}_{r_1}(\mathbb{C})$ ■

Теорема 1.19. *Число неприводимых $\mathbb{C}$-представлений конечной группы G, с точностью до изоморфизма, равно числу её классов сопряжянных элементов.*

□

$$\mathbb{C}G = \mathrm{Mat}_{r_1}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}_{r_s}(\mathbb{C}), \quad s \text{ — число неприводимых представлений.}$$

Посчитаем размерность центра групповой алгебры.

$$Z(\mathbb{C}G) = Z\left(\mathrm{Mat}_{r_1}(\mathbb{C})\right) \oplus \ldots \oplus Z\left(\mathrm{Mat}_{r_s}(\mathbb{C})\right)$$

Но центры — скалярные матрицы $\Rightarrow$ все слагаемые имеют размерность один $\Rightarrow \dim Z(\mathbb{C}G) = s$. С другой стороны, $a \in \mathbb{C}G$, $a = \sum a_g g$, $a \in Z(\mathbb{C}G) \Leftrightarrow ha = ah\ \forall\ h \in G$.

$$hah^{-1} = a\ \forall\ h \in G$$
$$a = \sum_g a_g g \Rightarrow hah^{-1} = \sum_{g \in G} a_g hgh^{-1} \Rightarrow$$
$$a_g = a_{hgh^{-1}} \Leftrightarrow a \in Z(\mathbb{C}G)$$

t — число классов сопряженности в G, $g_1, \ldots, g_t$ — представители классов, $\mathrm{Cl}(g_i)$ — класс сопряженности с g_i.

$$a \in Z(\mathbb{C}G) \Leftrightarrow a = \sum_{g_i} a_{g_i} \sum_{g \in \mathrm{Cl}(g_i)} g$$

Значит, базис $Z(\mathbb{C}G)$ есть $\left\{ \sum\limits_{g \in \mathrm{Cl}(g_i)} g | i = 1, \ldots, t \right\} \Rightarrow$

$$t = \dim Z(\mathbb{C}G) = s$$

■

1.17 Примеры построения всех неприводимых $\mathbb{C}$-представлений

1.18 Неприводимые $\mathbb{C}$-представления группы кватернионов

Тут могла бы быть Ваша реклама.

1.19 Примеры неприводимых $\mathbb{C}$-представлений групп A_n и S_n ($n \geqslant 4$)

1.20 Все неприводимые $\mathbb{C}$-представления групп A_4 и S_4

1.21 Характеры $\mathbb{C}$-представлений конечных групп

Пусть имеем группу G, $|G| < \infty$. Пусть имеем $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$, $g \mapsto \rho(g) \in \mathbf{GL}(V)$, $g \mapsto A_g$, A_g — матрица $\rho(g)$ в фиксированном базисе.

Определение. *Характером* ρ называется функция $\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C}$, $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}\rho(g) = \operatorname{tr} A_g$. Заметим, что след совпадает с коэффициентом при λ^{n-1} в характеристическом многочлене, $\Rightarrow$ определение не зависит от базиса.

Свойтва характера:

1° $\rho' \cong \rho \Rightarrow \chi_{\rho'} = \chi_\rho$, т. к. соответствующие матрицы сопряжены и следы совпадают.

2° g и h сопряжены в G, то $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(h)$, т. к. соответствующие матрицы сопряжены $\Rightarrow$ χ_ρ постоянна на классах сопряжённых элементов.

3° $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$

$g^n = e$, $t^n - 1$ — аннулирующий для $A_g \Rightarrow$ все собственные значения матрицы A_g — корни из 1.

Характеристический многочлен, $m = \dim V$,

$$f_{A_g}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)\,,$$

$\chi_\rho(g) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i$, $A_{g^{-1}} = A_g^{-1}$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — корни с учётом кратности. Т. к. λ_i — корни n-й степени из 1, то $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i} \Rightarrow$

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

4°

$$\rho = \bigoplus_{j=1}^{k} \rho_j \Rightarrow A_g = \begin{pmatrix} A_g^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A_g^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\chi_\rho = \sum_{j=1}^{k} \chi_{\rho_j}$$

1.22 Характеры как линейные функции на групповой алгебре

1.23 Характер регулярного представления группы G

$\rho_{reg}\colon G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C}G)$, $|G| = n$,

$$\rho_{reg}(g)\left(\sum_{h\in G} a_h h\right) = \sum_{h\in G} a_h g h$$

$$A_g = \begin{cases} E, & g = e \\ \sum\limits_{i,j\neq i} E_{i,j}, & g \neq e, \text{ т. к. } \ \forall\, hgh \neq h \end{cases}$$

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} n, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}$$

Пусть $a = \sum_{h\in G} a_h h$, $ag^{-1} = \sum_{h\in G} a_h hg^{-1}$

$$\chi_{reg}(ag^{-1}) = \sum_{h\in G} a_h \chi_{reg}(hg^{-1}) = na_g, \quad \text{т. к. все слагаемые равны, кроме случая, когда } h = g$$

$$\Rightarrow a_g = \frac{1}{n}\chi(ag^{-1}) \Rightarrow a = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi_{reg}(ag^{-1})g$$

Последнее равенство — формула разложения групповой алгебры по базису в терминах характера регулярного представления.

1.24 Характерs неприводимого $\mathbb{C}$-представлений конечной группы