

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Голод Е.С.
Алгебра

3 семестр, первый поток

8 января 2016 г.

1 Линейные представления (действия) групп

1.1 Определения

Зафиксируем поле \mathbb{K} , над которым будем рассматривать векторное пространство $V(+, \cdot, \cdot)$ (умножение на скаляр и на элементы G).

Определение. Задано *линейное действие*, если задано умножение элементов из V слева на элементы из G , $\forall g \in G, v \in V (g, v) \mapsto gv \in V$, т. ч. $\forall v, v_1, v_2 \in V \forall g, h \in G, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$1^\circ (gh)v = g(hv)$$

$$2^\circ ev = v$$

$$3^\circ g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2$$

$$4^\circ g(\lambda v) = \lambda(gv)$$

Линейное представление $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$, $\rho(g)(v) = gv$ и обратно $gv = \rho(g)(v)$.

Обозначение. (G, V, ρ) эквивалентно записи $\rho = (G, V)$.

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ является *подпредставлением*, если оно инвариантно относительно действий элементов G , т. е. $\forall u \in U \forall g \in G gu \in U$.

Определение. Пусть V — представление, и его инвариантное подпространство U . Тогда *факторпредставление* $V/U = \{v + U | v \in V\}$. Зададим операцию $g(v + U) = gv + U$. Проверим корректность. Возьмём два разных представителя: $v_1 + U = v_2 + U$, т. е. $v_1 - v_2 \in U$. Достаточно, что бы $gv_1 + U = gv_2 + U$. Но, так как U инвариантно, $g(v_1 - v_2) \in U$.

1.2 Прямая сумма представлений

Определение. Пусть заданы инвариантные подпространства $U_1, \dots, U_s \subset V$, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ — разложение в (внутреннюю) *прямую сумму* инвариантных подпространств (подпредставлений). $\rho_1 = (G, U_1)$, $\rho_2 = (G, U_2)$, \dots , $\rho_s = (G, U_s)$

Определение. *Внешняя прямая сумма представлений* $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s = \{(v_1, \dots, v_s) | v_i \in V_i\}$, $g(v_1, \dots, v_s) = (gv_1, \dots, gv_s)$, далее будем **обозначать** $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s$.

Пусть задан гомоморфизм $H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V)$. Тогда композиция f и ρ даст представление $H : hv = f(h)v$

1.3 Гомоморфизмы представлений

Пусть имеем два представления: $\rho_1 = (G, V_1)$, $\rho_2 = (G, V_2)$.

Определение. *Гомоморфизм представлений* $\varphi: \rho_1(V_1) \rightarrow \rho_2(V_2)$ есть линейное отображение т. ч. $\varphi(gv) = g\varphi(v)$, $\forall g \in G, v \in V$, т. е. $\forall g \in G$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \end{array}$$

Определение. *Изоморфизм представлений* — это гомоморфизм, который является биекцией.

1.4 Матричные представления

$\rho = (G, V)$, $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$. **Всегда** будем считать, что V — конечномерное пространство. $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \Rightarrow \mathbf{GL}(V) \cong \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Рассмотрим сопоставление $\rho(g) \mapsto A_g$ — матрица $\rho(g)$ относительно $e_1 \dots e_n$.

Определение. Гомоморфизм $G \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ будем называть *матричным представлением*. Так же потребуем:

- 1° $A_{gh} = A_g A_h$
- 2° $A_e = E$
- 3° $A_{g^{-1}} = (A_g)^{-1}$

Если задано матричное представление, то можем построить линейный оператор \Rightarrow матричное и линейное представления равносильны (хотя в одном случае неоднозначно).

Пусть $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$ и C — матрица перехода.

$$\begin{aligned} g &\mapsto A_g & (e_1, \dots, e_n) \\ g &\mapsto A'_g & (e'_1, \dots, e'_n) \\ A'_g &= C^{-1} A_g C & \forall g \in G \end{aligned}$$

Определение. Два матричных представления называются *эквивалентными*, если $\exists C: A'_g = C^{-1} A_g C \forall g \in G$.

Утверждение 1.1. Два линейных представления изоморфны \Leftrightarrow соответствующие матричные представления относительно некоторых базисов эквивалентны.

□ \Rightarrow : Имеем представление $\rho = (G, V)$. Пусть имеется $\rho' = (G, V')$ и $\forall g \in G$ коммутативна

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V' \end{array}$$

Выберем базисы в пространствах V и V' , $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $V' = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$, $\rho = \{A_g\}$, $\rho' = \{A'_g\}$.

Пусть C — матрица для φ относительно выбранных базисов. Т.к. изоморфизм, то $\det C \neq 0$.

Композиции линейных отображений соответствует матрица $\Rightarrow A'_g C = C A_g \Rightarrow A'_g = C A_g C^{-1} \Rightarrow$ эквиваленты.

\Leftarrow : Пусть матричные представления эквивалентны относительно некоторых базисов $\Rightarrow \exists C: A'_g = C A_g C^{-1}$

Но матрица C относительно базисов $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ и $\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle \Rightarrow$ невырождено отображение $A'_g C = C A_g \Rightarrow \rho'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g) \Rightarrow$ линейные представления изоморфны. ■

1.5 Приводимые, неприводимые и вполне приводимые линейные представления

Определение. Представление ρ — *приводимое*, если оно имеет подпредставление на инвариантном подпространстве, отличном от тривиальных

Определение. Представление ρ — *неприводимое*, если не существует инвариантных подпространств отличных от тривиальных.

Определение. Представление *вполне приводимо*, если оно разлагается в прямую сумму неприводимых.

На матричном языке:

Пусть ρ приводимо $\Rightarrow 0 \neq U \subsetneq V$ — инвариантное подпространство. Выберем базис так: $V = \langle e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$,

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} B_g & * \\ 0 & C_g \end{pmatrix} = A_g,$$

где $\rho(g)(e_i) \in U$, $i = 1, \dots, k$; $\{B_g\}$ соответствует $\rho|_U$.

На V/U также имеется индуцированное представление: $V/U = \langle e_{k+1} + U, \dots, e_n + U \rangle$, $g(v + U) = gv + U$. Тогда $g(e_i + U) = ge_i + U$ достаточно задать на базисных векторах.

Если базис выбран произвольным образом, $C: \det C \neq 0$, то $\{C^{-1}A'_gC\}$ будут иметь общий угол нулей (C одна для всех g).

Пусть $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s$, $\rho_i = (G, V_i)$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$, V_i — инвариантные подпространства в V .

Выберем базис в V_i и в качестве базиса V берём объединение базисов V_i . Тогда

$$\rho(g) = A_g = \begin{pmatrix} A_g^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_g^{(s)} \end{pmatrix}$$

есть прямая сумма диагональных блоков.

Вполне приводимое, если каждая матрица — прямая сумма неприводимых блоков (в блоке нет угла нулей) \Rightarrow при любом выборе базиса будем получать матрицы, эквивалентные неприводимым.

1.6 Конечномерное представление циклической группы над \mathbb{C}

Пусть $G = \langle a \rangle$. Рассмотрим $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$

1° $G = \langle a \rangle_\infty$. Достаточно задать $\rho(a)$. Положим $\rho(a) = A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ — любая матрица. $\rho' \sim \rho \Rightarrow \exists C: A' = C^{-1}AC \Rightarrow$ если верно для A , $|C| \neq 0$, то верно и для сопряженной.

Теорема 1.2 (из линала). Матрицы сопряжены \Leftrightarrow сопряжены их жордановы формы

Тогда матрица $\rho(a)$ задаётся жордановой формой \Rightarrow размеры клеток определены однозначно.

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda'_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda'_s & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda'_s \end{pmatrix}$$

Если есть жорданова клетка размерности ≥ 2 , то представление не вполне приводимо. Значит, вполне приводимо \Leftrightarrow матрица A диагнализуема.

2° $G = \langle a \rangle_n$, $\rho(a) = A$, $a^n = e \Rightarrow A^n = E$. Тогда $t^n - 1$ — аннулирующий для A . Но над \mathbb{C} этот многочлен не имеет кратных корней \Rightarrow матрица диагнализуема:

$$\lambda_i^n = 1$$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Любое представление конечной циклической группы (вполне) приводимо. Матрицы не эквивалентны \Leftrightarrow имеют разные характеристические многочлены.

1.7 Неприводимые представления абелевых групп над \mathbb{C}

Теорема 1.3. Над \mathbb{C} представление абелевой группы неприводимо \Leftrightarrow оно одномерное.

□

Теорема 1.4. Пусть V — конечномерное пространство, $\dim V = n$. $\{\varphi_i\}$ — некоторое семейство попарно коммутирующих линейных операторов на V над \mathbb{C} . Тогда они имеют общий собственный вектор.

□ Индукция по размерности n :

1° $n = 1$ — все собственные

2° Пусть $n > 1$. Если все $\varphi_i = \lambda_i \varepsilon$, то доказывать нечего. Пусть φ_1 не скалярный $\Rightarrow \varphi_1$ имеет собственный вектор, т. е. $\varphi_1(e) = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Рассмотрим подпространство V_λ всех собственных векторов со значением λ . $0 \neq V_\lambda = \text{Ker}(\varphi_1 - \lambda \varepsilon) \subsetneq V$, т. к. не φ_1 не скалярный $\Rightarrow 1 \leq \dim V_\lambda < n$.

Покажем, что V_λ — инвариантное подпространство, через перестановочность операторов.

Пусть $v \in V_\lambda$, $\varphi_i(v) \in V_\lambda \Leftrightarrow \varphi_1(\varphi_i(v)) = \lambda \varphi_i(v)$. Но $\varphi_1 \varphi_i = \varphi_i \varphi_1 \Rightarrow$

$$\varphi_1(\varphi_i(v)) = \varphi_i(\varphi_1(v)) = \varphi_i(\lambda v) = \lambda \varphi_i(v).$$

Рассмотрим $\left\{ \varphi_i \Big|_{V_\lambda} \right\}$, $\dim V_\lambda < n \Rightarrow$ можем применить индуктивное предположение $\Rightarrow \varphi_i$ имеют общий собственный вектор в $V_\lambda \Rightarrow$ и в V .

■

Пусть G — абелева, ρ — неприводимое над \mathbb{C} . $\{\rho(g) | g \in G\}$ — семейство попарно коммутирующих операторов (т. к. абелева группа) \Rightarrow по теореме (1.4) $\exists 0 \neq v \in V: \rho(g)(v) = \lambda_g v$, но тогда $V \supset \langle v \rangle$ — инвариантное подпространство в $V \Rightarrow V = \langle v \rangle$ ■

Пусть имеем произвольное поле \mathbb{K} , $\rho = (G, V)$, $\dim V = 1$. $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$. Тогда для $\rho': G \rightarrow \mathbb{K}^*$ $\{a_g\}$, $\{a'_g\}$ $\exists C \in \mathbb{K}^*: a_g = C^{-1} a'_g C = a'_g \Rightarrow$ в одномерном случае эквивалентность — совпадение гомоморфизмов \Rightarrow надо найти все гомоморфизмы $G \rightarrow \mathbb{K}^*$.

$|G| = n$ — абелева группа, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Найдём все комплексные представления конечной абелевой группы

$$G = \langle a_1 \rangle_{n_1} \oplus \dots \oplus \langle a_s \rangle_{n_s} \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^*$$

Достаточно задать ρ на a_i , но $a_i^{n_i} = e \Rightarrow (\rho(a_i))^{n_i} = 1 \Rightarrow \rho(a_i) = \xi_i \in \sqrt[n_i]{1} \Rightarrow$ имеем гомоморфизм каждого слагаемого в \mathbb{C}^* .

$G = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_s \rangle$, $\rho(a_1^{k_1} \dots a_s^{k_s}) = \xi_1^{k_1} \dots \xi_s^{k_s}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i = 0, \dots, n_i - 1$. Проверим, что ρ — гомоморфизм прямого произведения:

$$\begin{aligned} \rho((a_1^{k_1} \dots a_s^{k_s})(a_1^{l_1} \dots a_s^{l_s})) &= \rho(a_1^{k_1+l_1} \dots a_s^{k_s+l_s}) = \\ &= (\xi_1^{k_1+l_1} \dots \xi_s^{k_s+l_s}) = (\xi_1^{k_1} \dots \xi_s^{k_s})(\xi_1^{l_1} \dots \xi_s^{l_s}) = \rho(a_1^{k_1} \dots a_s^{k_s}) \rho(a_1^{l_1} \dots a_s^{l_s}) \end{aligned}$$

Утверждение 1.5. Если имеется гомоморфизм произведения в абелеву группу, то возможностей выбрать ξ_i -ые $n_1 \dots n_s = n$

Комментарий. Доказывалось ранее в более общем виде.

Так, число различных одномерных \mathbb{C} -представлений абелевой группы равно её порядку.

1.8 Одномерные представления конечной группы

$\rho: G \rightarrow \mathbb{K}^*$. \mathbb{K}^* — коммутативна $\Rightarrow \text{Im } \rho \cong G/\text{Ker } \rho$ — абелева. Факторгруппа абелева $\Leftrightarrow G' \subseteq \text{Ker } \rho \Rightarrow$ нужны только такие гомоморфизмы.

Пусть $N \triangleleft G$, $\rho: G \rightarrow H$, $N \subseteq \text{Ker } \rho$. Такие гомоморфизмы находятся в биективном соответствии с гомоморфизмами $G/N \rightarrow H$.

Одномерные представления G над \mathbb{K} находятся в биективном соответствии с гомоморфизмами $G/G' \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathbb{K}^*$, $\rho = \bar{\rho} \circ \pi \Rightarrow$ задача сводится к представлению абелевой группы.

Пусть $\mathbb{K}^* = \mathbb{C}^*$, $|G| = n < \infty \Rightarrow G/G'$ — конечная абелева группа. $|G/G'|$ разных гомоморфизмов абелевого фактора \Rightarrow число одномерных представлений конечной группы G есть порядок G/G'

1.9 Пространства гомоморфизмов линейных представлений групп

Пусть \mathbb{K} — любое поле, $\rho = (G, V)$, $\rho' = (G, V')$. $\varphi \in \text{Hom}(\rho, \rho')$ — множество гомоморфизмов $\rho \rightarrow \rho'$. $V \xrightarrow{\varphi} V'$ — линейное отображение т.ч. $\forall v \in V, g \in G \quad \varphi(gv) = g\varphi(v)$. $\text{Hom}(\rho, \rho') = \text{Hom}_G(V, V') \subseteq \mathbf{L}(V, V')$.

Если $\dim V = n$, $\dim V' = m$, то $\mathbf{L}(V, V') \cong \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Утверждение 1.6. $\text{Hom}(\rho, \rho')$ — подпространство в $\mathbf{L}(V, V')$.

□ Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}_G(\rho, \rho')$.

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(gv) = \varphi_1(gv) + \varphi_2(gv) = g\varphi_1(v) + g\varphi_2(v) = g(\varphi_1(v) + \varphi_2(v)) = g(\varphi_1 + \varphi_2)(v) \\ (\lambda\varphi_1)(gv) = g(\lambda\varphi_1)(v) — аналогичная проверка$$

■

Рассмотрим $V' = V$. $\text{Hom}_G(V, V) \subseteq \mathbf{L}(V)$ — пространство линейных операторов. Пространство линейных операторов — алгебра $\cong \text{Mat}_n \mathbb{K}$.

Утверждение 1.7. $\text{Hom}_G(V, V')$ — подалгебра в $\mathbf{L}(V)$.

Комментарий. Композиция представлений — представление.

Определение. Эндоморфизм — гомоморфизм на себя.

Автоморфизм — биективный эндоморфизм.

Обозначение. $\text{End}_G(V)$ — алгебра эндоморфизмов представлений в V

Лемма 1.8 (Шур).

- 1° (G, V, ρ) , (G, V', ρ') — неприводимые представления. Тогда $\forall \varphi: \rho \rightarrow \rho'$ — либо нулевой, либо биекция.
- 2° $\text{End}_G(V)$ — алгебра с делением
- 3° $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \forall \varphi \in \text{End}_G(V), \rho$ неприводимое $\varphi = \lambda \varepsilon, \lambda \in \mathbb{C}$

□

- 1° $\text{Ker } \varphi \subseteq V$, $\text{Im } \varphi \subseteq V'$ — инвариантные подпространства. Но т.к. V и V' — неприводимые, то нет нетривиальных подпредставлений. $\text{Im } \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$; $\text{Im } \varphi = V' \Rightarrow \text{Ker } \varphi \neq V \Rightarrow \text{Ker } \varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi$ — биективно.
- 2° Простое следствие пункта 1°.
- 3° Докажем двумя способами:

- (а) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда $\text{End}_G(V)$ — \mathbb{C} -алгебра с делением, $\dim_{\mathbb{C}} \text{End}_G(V) < \infty$ (т.к. подалгебра в алгебре матриц) $\Rightarrow \text{End}_G(V) = \mathbb{C}$.

(b) $\varphi: V \rightarrow V$ — эндоморфизм \Rightarrow линейный оператор над $\mathbb{C} \Rightarrow$ обладает хотя бы одним собственным вектором:

$$\exists x \in V, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}: \varphi(x) = \lambda x \Rightarrow (\varphi - \lambda \varepsilon)(x) = 0.$$

Но любой эндоморфизм либо нулевой, либо биективен. Значит имеет тривиальное ядро $\Rightarrow \varphi - \lambda \varepsilon = 0 \Rightarrow \varphi = \lambda \varepsilon$.

■

1.10 Гомоморфизмы прямой суммы представлений

Пусть $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$, $\rho_i = (G, V_i)$, $\rho' = (G, V')$ — любое.

Рассмотрим $\text{Hom}_G(V_1 \oplus \dots \oplus V_s, V')$. Гомоморфизм прямой суммы определяет гомоморфизм каждого слагаемого $\varphi \in \text{Hom}_G(V_1 \oplus \dots \oplus V_s, V')$, $\varphi_i: V_i \rightarrow V'$,

$$\varphi(v) = \varphi(v_1, \dots, v_s) = \sum_{i=1}^s \varphi_i(v_i),$$

$$\forall v_i \in V_i \quad \varphi_i(v_i) = \varphi(v_i).$$

Но если $\forall i$ задано $\varphi_i: V_i \rightarrow V'$, то

$$\varphi(v) := \varphi(v_1 + \dots + v_s) = \sum_{i=1}^s \varphi_i(v_i)$$

$$\Rightarrow \varphi \in \text{Hom}(\bigoplus V_i, V') \Rightarrow \text{Hom}_G(V_1 \oplus \dots \oplus V_s, V') \cong \text{Hom}_G(V_1, V') \oplus \dots \oplus \text{Hom}_G(V_s, V').$$

Применим это к гомоморфизму прямого произведения.

Следствие 1.1 (из Л.Шура). Пусть V, V' — неприводимые, тогда

$$\dim \text{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 0, & V \not\cong V' \\ \dim & V \cong V' \end{cases}$$

$\rho(G, V)$ — вполне приводимо.

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s = V_1 \oplus \dots \oplus V_k \oplus V_{k+1} \oplus \dots \oplus V_s,$$

$V_i, \rho' = (G, V')$ — неприводимы, $V_i \cong V', 1 \leq i \leq k$, $V_i \not\cong V', k+1 \leq i \leq s$. k — кратность вхождения V' в данное разложение вполне приводимого.

Утверждение 1.9.

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_G(V, V') = k \dim_{\mathbb{K}} \text{End}_G(V')$$

□ Из предыдущего

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(V, V') &= \text{Hom}_G(V_1 \oplus \dots \oplus V_s, V') = \\ &= \underbrace{\text{Hom}_G(V_1, V')}_{\cong \text{End}_G(V')} \oplus \dots \oplus \underbrace{\text{Hom}_G(V_k, V')}_{\cong \text{End}_G(V')} \oplus \underbrace{\text{Hom}_G(V_{k+1}, V')}_{=0} \oplus \dots \oplus \underbrace{\text{Hom}_G(V_{k+1}, V')}_{=0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dim \text{Hom}_G(V, V') = k \dim \text{End}_G(V') \quad \blacksquare$$

Теорема 1.10. Кратность вхождения данного неприводимого представления в разложение вполне приводимого представления в прямую сумму неприводимых не зависит от выбора этого разложения

□

$$k = \frac{\dim \text{Hom}_G(V, V')}{\dim \text{End}_G(V')}$$

Легко видеть, что правая часть не зависит от выбора разложения, значит и левая. ■

Определение. Кратностью $\nu(V', V)$ неприводимого V' в вполне приводимом V называется кратность вхождения V' в любое разложение V в прямую сумму неприводимых.

Следствие 1.2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\text{End}_G(V) = \mathbb{C} \Rightarrow \nu(V', V) = \dim \text{Hom}_G(V, V')$.

1.11 Ортогональные и унитарные представления

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, V — линейное пространство, $\dim V < \infty$. Зададим на V евклидово (в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, эрмитово) скалярное произведение.

Определение. V — евклидово пространство. Тогда $\rho = (G, V)$ называется *ортогональным*, если $\forall g \in G \rho(g)$ — ортогонален.

V — эрмитово пространство. Тогда $\rho = (G, V)$ называется *унитарным*, если $\forall g \in G \rho(g)$ — унитарен.

Матричное представление называется ортогональным (унитарным), если все A_g — ортогональны (унитарны).

Если зададим ортогональные (унитарные) матрицы и ортонормированный (унитарный) базис, то получим ортогональное (унитарное) представление и наоборот.

Теорема 1.11. Любое \mathbb{R} -представление конечной группы изоморфно ортогональному, а над \mathbb{C} — унитарному.

□ Докажем для \mathbb{C} (для \mathbb{R} аналогично). Достаточно доказать, что любое матричное представление эквивалентно унитарному матричному.

Пусть $\rho = (G, V)$ дано. На V есть эрмитово скалярное произведение, относительно которого ρ — унитарно, т. е. все $\rho(g)$ — унитарные операторы.

Пусть $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ — базис, $F(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ — скалярное произведение. Введём новое:

$$(x, y) := \sum_{g \in G} F(gx, gy)$$

Покажем, что

- 1° получилось эрмитово скалярное произведение: $\forall g F(gx, gy)$ — положительно определённая полуторолинейная форма.
- 2° относительно (x, y) все операторы $\rho(g)$ унитарны, т. е. $\forall h \in G \rho(h)$ — унитарный. Но

$$(hx, hy) = \sum_{g \in G} F(ghx, ghy) \quad \text{так же сумма по всей группе}$$

$$\Rightarrow (hx, hy) = (x, y) \Rightarrow h — унитарен.$$

■

Следствие 1.3. Любое представление конечной группы над \mathbb{R} или \mathbb{C} — вполне приводимы.

□ Индукция по размерности представления:

- 1° Любое одномерное представление всегда неприводимо.
- 2° Пусть $\dim V = n$ и для меньших размерностей доказано. Это представление изоморфно унитарному \Rightarrow можем считать, что представление — унитарно. Если неприводимо, то доказывать нечего. Если же существует инвариантное подпространство $0 \neq U \subsetneq V$, то U, U^\perp — инвариантны относительно унитарных $\rho(g)$.

$V = U \oplus U^\perp$, $\dim U, \dim U^\perp < n$, тогда по индуктивному предположению U и U^\perp — прямая сумма неприводимых $\Rightarrow V$ разлагается в прямую сумму неприводимых.

■

1.12 Критерий полной приводимости линейного представления над произвольным полем

Определение. Представление ρ на V обладает свойством *отщепимости*, если $\forall U' \subset V$ — инвариантного $\exists U'' \subset V: V = U' \oplus U''$ — инвариантное и $V = U' \oplus U''$

Утверждение 1.12. Следующие свойства эквивалентны:

- 1° (G, V) — вполне приводимо
- 2° (G, V) обладает свойством отщепимости
- 3° $\forall U \subset V$ инвариантное $\exists \varphi \in \text{End}_G(V)$ — проекция на U

□ Эквивалентность 2° и 3° известна из линейной алгебры.

Проекция φ — гомоморфизм представлений $\Rightarrow U'' = \text{Ker } \varphi$ — инвариантно.

Если U'' — инвариантно, то проекция φ на U' параллельно U'' — гомоморфизм представлений: $\forall v = v' + v'', v' \in U', v'' \in U'' \varphi(v) = v'$.

Докажем эквивалентность 1° и 2°.

1° \Rightarrow 2°: Пусть $U' \subset V$ — инвариантное, $V = \underbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_s}_{\text{неприводимые}}$.

Возьмём в качестве U'' **максимальную** сумму $U'' = V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}$, т. ч. $U'' \cap U' = 0$.

Т. к. пересечение нулевое, то $U' \oplus U''$ — прямая сумма. Покажем, что $V = U' \oplus U''$.

Пусть $U' \oplus U'' \subsetneq V \Rightarrow \exists V_j: V_j \not\subset U' \oplus U''$ Но V_j — неприводимо $\Rightarrow (U' \oplus U'') \cap V_j = 0 \Rightarrow U' \oplus U'' \oplus V_j$ — прямая сумма, что противоречит максимальной $U'' \Rightarrow U' \oplus U'' = V$.

2° \Rightarrow 1°:

Лемма 1.13. Если V обладает свойством отщепимости, то любое его подпредставление обладает этим свойством.

□ $U \subset V, U' \subset U$ — инвариантные, $V = U' \oplus U''$ — инвариантное, тогда $U = U' \oplus (U'' \cap U)$

$$U' \cap (U'' \cap U) = 0, \text{ т. к. } U' \cap U'' = 0$$

$$\forall u \in U \quad u = v' + v'', v' \in U', v'' \in U'' \quad v'' = u - v' \in U \Rightarrow v'' \in U \cap U''$$

■

Индукция по размерности $\dim V = n$

1° $n = 1$ очевидно.

2° если V — неприводимо, то доказывать нечего. Пусть $\exists 0 \neq U' \subsetneq V \Rightarrow V = U' \oplus U''$ — инвариантные и имеют меньшую размерность. По лемме они обладают свойством отщепимости \Rightarrow к ним применимо индуктивное предположение $\Rightarrow V$ — вполне приводимо.

■

Следствие 1.4. Подпредставление и факторпредставление вполне приводимого — вполне приводимы.

□ Для подпредставления свойство наследуется по Лемме (1.13).

Рассмотрим V/U . $V = U \oplus U' \Rightarrow V/U \cong U'$, но U' — подпредставление \Rightarrow вполне приводимо. ■

Теорема 1.14 (Машке). Пусть G — конечная группа и поле \mathbb{K} . \mathbb{K} -представление G вполне приводимо $\Leftrightarrow \text{char } \mathbb{K} \nmid |G|$

Определение. Представление *модулярно*, если $\text{char } \mathbb{K} \mid |G|$.

□ \Leftarrow : Докажем с помощью условия (3) из критерия.

Из линейной алгебры: $\exists \psi: V \rightarrow V$, ψ — проекция на U . Хотим получить проекцию φ , т. ч. $\varphi(hv) = h\varphi(v) \forall v \in V, h \in G$. Пусть $|G| = n$, $0 \neq n \cdot 1 \in \mathbb{K} \Rightarrow \frac{1}{n} = (n \cdot 1)^{-1}$. Определим φ :

$$\varphi(v) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g^{-1} \psi(gv)$$

Докажем, что φ — эндоморфизм.

$$\varphi(hv) = \frac{1}{n} \sum_g g^{-1} \psi(ghv) = \frac{1}{n} \sum_g h(gh)^{-1} \psi((gh)v) = h \cdot \frac{1}{n} \sum_{gh=x \in G} x^{-1} \psi(xv) = h\varphi(v)$$

Проверим, что φ — проекция на U .

$$\psi(gv) \in U \Rightarrow \varphi(v) = \frac{1}{n} \sum g^{-1} \psi(gv) \Rightarrow \text{Im } \varphi \subseteq U$$

$$v \in U \Rightarrow gv \in U (\text{инвариантность}) \Rightarrow \psi(gv) = gv \Rightarrow g^{-1} \psi(gv) = gv \Rightarrow \psi(v) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot v = v$$

■

1.13 Продолжение линейного действия группы на пространстве её представления вдоль действия её групповой алгебры

Пусть G — группа, \mathbb{K} — поле, $|G| = n$. Рассмотрим n -мерное векторное пространство, отождествив элементы G с базисом. $\mathbb{K}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \right\}$, $a_g \in \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h,k: hk=g} a_h b_k \right) g$$

Пусть имеем представление V над \mathbb{K} $\rho = (G, V) \Rightarrow$ задано $gv, g \in G, v \in V$, $\rho: G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ — невырожденные линейные операторы. Но $G \subset \mathbb{K}G \Rightarrow \forall \tau = \sum a_g g, g \in G$,

$$\tau v = \left(\sum_g a_g g \right) (v) := \sum_g a_g (gv)$$

Свойства этой операции:

- 1° $\tau(v_1 + v_2) = \tau v_1 + \tau v_2 \quad \forall \tau \in \mathbb{K}G, \forall v_1, v_2 \in V$
- 2° $\tau(\lambda v) = \lambda(\tau v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- 3° $(\tau_1 + \tau_2)v = \tau_1 v + \tau_2 v$
- 4° $(\tau_1 \tau_2)v = \tau_1(\tau_2 v)$
- 5° $(\lambda e)v = \lambda v \quad e — \text{единица в } \mathbb{K}G, \text{ т. е. в } G, \lambda \in \mathbb{K}$

Свойства 1°, 2° задают линейный оператор. Раньше имели $\varphi(g)v = gv$. А теперь $\varphi: \mathbb{K}G \rightarrow \mathbf{L}(V)$ — алгебра всех линейных операторов.

Свойства 3°, 4° и 5° задают гомоморфизм алгебр (линейное представление задаёт гомоморфизм алгебр $\mathbb{K}G \rightarrow \mathbf{L}(V)$).

Заметим, что имеют место свойства:

- $U \subset V$ — инвариантно относительно $G \Rightarrow \tau v \in U, \forall v \in U, \tau \in \mathbb{K}G$.
- $\varphi: V \rightarrow V$ — гомоморфизм представлений $\Rightarrow \varphi(\tau v) = \tau \varphi(v), \forall v \in V, \tau \in \mathbb{K}G$.

1.14 Регулярные представления группы над полем \mathbb{K}