07.02.17 Лекция 7

Локально выпуклые пространства и обобщенные функции

Определение Вещественное или комплексное линейное пространство E называется **локально выпуклым**, если оно наделено набором полунорм $\mathcal{P}$, причем для всякого $x \neq 0$ $\exists p \in \mathcal{P}$ такое, что $p(x) > 0$.

Примеры 0) Нормированное пространство

1) $\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, \dots),\ x_i \in \mathbb{R}\}$, $p_n(x) = |x_n|$.

↳ Упражнение На $\mathbb{R}^\infty$ нет нормы такой, что сходимость по ней есть покоординатная сходимость.

Определение Если $(E, \mathcal{P})$ — линейно выпуклое пространство, то $x_n \to x$ в E, если $p(x_n - x) \to 0$ $\forall p \in \mathcal{P}$.

2) Пространство $S(\mathbb{R})$ гладких быстро убывающих функций:
$S = \{f \in C^\infty : p_{k,m}(f) = \sup_x (1+|x|^k)|f^{(m)}(x)| < \infty\}$. ($k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
Аналогично строим пространство $S(\mathbb{R}^d)$, в таком случае

нижний индекс? наверное, d

→ $m = (i_1, \dots, i_?)$, $f^{(m)} = \partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_?}} f$.

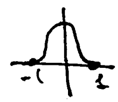
3) Пространство $D(\mathbb{R}) = C_0^\infty$ — пространство гладких функций с компактным носителем.

Определение $f_n \xrightarrow{D} f$, если

1) все f_n и $f = 0$ вне общего отрезка;
2) $f_n^{(m)} \rightrightarrows f^{(m)}$ $\forall m = 0, 1, \dots$.

Аналогично определяется пространство $D(\mathbb{R}^d) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Замечание В отличие от S, в D не все сразу понятно с полунормами (можно придумывать различные наборы полунорм, что сходимость последовательностей та же, но топологии различны; более того, не так просто придумать хоть один такой набор)

↳ Если бы взяли просто $p_m(f) = \sup_x |f^{(m)}(x)|$, то смогли бы обеспечить второе условие, но не обязательно первое: $f_n(x) = \frac{1}{n} f_0(\frac{x}{n})$, f_0:  ; S!
носитель расползается $\Rightarrow$ $f_n \not\xrightarrow{D} f$.

Рассмотрим $p_{\{\alpha_k\},\{m_k\}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \max_{[k,k+1]} |f^{(m_k)}(t)|$, $\alpha_k, m_k \geq 0$, целые. D!

(нам здесь важно, что сумма всегда по сути конечная)

$m_k \equiv 0$: $\sum_k \alpha_k \max_{[k,k+1]} |f(t)|$. Говорят, что сходимость по таким полунормам уже влечет первое условие на общий отрезок.
(произвольность выбора $\{\alpha_k\}$). Дальше переходим к $p_m(f) = \sup_x |f^{(m)}(x)|$

Замечание. Сходимость в $\mathcal{D}$ нельзя задать метрикой, поскольку сходимость в метрике обладает следующим свойством: если

$$\begin{array}{l} f_{1,1},\ f_{1,2},\ f_{1,3}\ \dots \to f \\ f_{2,1},\ f_{2,2},\ f_{2,3}\ \dots \to f \\ \dots\dots\dots \\ f_{k,1},\ f_{k,2},\ f_{k,3}\ \dots \to f \end{array}$$

, то $\exists\, n_k \geq k:\ f_{k,n_k} \to f$ (из первой строки выбираем на расстоянии ≤ 1, из второй — $\leq 1/2$, и так далее)

В $\mathcal{D}$ это не верно: рассмотрим

$$f_{k,n} = \frac{1}{n} f_0\left(\frac{x}{k}\right).$$ Тогда при увеличении k будет расползаться supp.

Замечание. В (линейном) локально выпуклом пространстве $(E, \mathcal{P})$ вводится топология. База окрестностей нуля: базисная окрестность — это

$$U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} = \{x : p_i(x) < \varepsilon_i,\ i = 1,\dots,n\},\quad p_i \in \mathcal{P},\ \varepsilon_i > 0.$$

Открытые множества в E: $\varnothing$ и такие множества, что всякая точка x входит в них с некоторой базисной окрестностью $x + U$, где U — это окрестность вышеуказанного вида. (соответственно, непустые открытые — это в точности сдвиги базисных (и их объединения)).

↳ Задача. Показать, что получена топология.

Эта топология хаусдорфова (T_2): $x \neq y \Rightarrow \exists p \in \mathcal{P}$, что $p(x-y) > 0$ $\Rightarrow$ x и y разделены окрестностями вида $x + U$ и $y + U$, $U = \{x : p(x) < \varepsilon\}$ с $\varepsilon < p(x-y)/3$, например.

Предложение. Введенная на локально выпуклом пространстве $(E, \mathcal{P})$ топология метризуема $\Leftrightarrow$ $\exists$ не более чем счетный набор полунорм $\mathcal{P}_0 = \{p_i\}$ со следующим свойством: всякая полунорма $p \in \mathcal{P}$ оценивается через p_i: $p \leq C(p_1 + \dots + p_n)$ с некоторыми n и C, и наоборот, каждая p_i оценивается через старые. При $\{p_i\}$ можно выбрать в $\mathcal{P}$.

Доказательство ($\Leftarrow$) Пусть есть такой счетный набор $\{p_i\}$. Положим метрику

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(p_n(x-y), 1)$$ (проверка того, что эта вещь является метрикой, остается в качестве упражнения).

не очень понятно, почему это будет метрика (теперь понятно)

Эта метрика задает исходную топологию $(E, \mathcal{P})$: проверим это для окрестностей нуля.

Пусть $r > 0$. Покажем, что в шаре радиуса r с центром в нуле есть базовая окрестность нуля в E. Если $p_i \in \mathcal{P}$, то это очевидно: есть шар $\{x : \sum \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x)) < r\}$.

Шар $\{x : p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}$, n: $\sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} < \frac{r}{2}$, $\varepsilon = \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

14.02.17 Лекция

Рассмотрим теперь случай, когда $p_1 \notin \mathcal{P}$. Тогда переходим к $\mathcal{P} \cup \{p_i\}$ ← этот набор полунорм задает ту же топологию ⇒ возвращаемся к предыдущему случаю.

Пока что есть, что шары в метрике включают окрестности в топологии. Нужно показать, что в окрестности в топологии есть шар по метрике. Действительно, можно брать окрестность, задаваемую $p_1, \dots, p_n$ и ε. Она содержит шар радиуса r. Хотим, чтобы

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x)) < r \Rightarrow p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon.$$

Для того чтобы эта импликация выполнялась, достаточно взять $r = \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Итак, топология задается этой метрикой.

(⇒) Обратно, пусть топология, заданная $\mathcal{P}$, метризуема. В каждом шаре радиуса $1/n$ вокруг нуля возьмем базовую окрестность. В итоге получим (по всем n) счетный набор $\{p_n\} \subset \mathcal{P}$. Тогда этот счетный набор задает исходную топологию.

Замечание Не всегда топологию локально выпуклого пространства можно задать одной нормой: $\mathcal{D}, S, \mathbb{R}^{\infty}$.

В $\mathcal{D}$, как было показано на прошлой лекции, нет даже метрики с таким свойством.

В $\mathbb{R}^{\infty}$ это очевидно: всякая окрестность нуля содержит линейное подпространство $\{x \in \mathbb{R}^{\infty} : |x_1| < \varepsilon, \dots, |x_n| < \varepsilon\}$.

Задача Доказать для S.

Пример Пространство $H(\mathcal{U})$ функций, голоморфных в круге $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ (или в области).

$$p_K(f) = \max_{z \in K} |f(z)|, \quad K \subset \mathcal{U} \text{ — компакт}.$$

Замечание Дальше имеем дело с $\mathcal{D}$ и S.

Пространства обобщенных функций.

Определение S' — пространство линейных функционалов на S, непрерывных относительно сходимости в S, то есть если $\varphi_j \xrightarrow{S} 0$, то $F(\varphi_j) \to 0$, $F \in S'$.

Определение $\mathcal{D}'$ — пространство линейных функционалов на $\mathcal{D}$, непрерывных относительно сходимости в $\mathcal{D}$, то есть если $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, то $F(\varphi_j) \to 0$, $F \in \mathcal{D}'$.

Замечание Элементы S' и $\mathcal{D}'$ называют обобщенными функциями (или распределениями)

Замечание Мотивировка названия "обобщенная функция": всякая обычная локально интегрируемая F задает обобщенную в виде $F(\varphi) \overset{def}{=} \int \varphi(x) F(x)\,dx$.
$\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \int \varphi_j F\,dx \to 0$.

Аналогично с S, если $|F(x)| \leq C + C|x|^k$.

Пример Дельта-функция Дирака δ: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. $\delta \in S'$, $\delta \in \mathcal{D}'$.

↳ Упражнение δ нельзя задать в виде $\delta(\varphi) = \int \varphi(x) F(x)\,dx$.

Определение Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ или $S'(\mathbb{R})$. Положим $F'(\varphi) := -F(\varphi')$.
Аналогично в $\mathbb{R}^n$: $\partial_{x_i} F(\varphi) := -F(\partial_{x_i}\varphi)$. Тогда $F' (\partial_{x_i} F) \in \mathcal{D}'$ или S'.
Действительно, если $\varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} 0$, то $\partial_{x_i} \varphi_j \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} 0$. Аналогично с S.

21.02.17 Лекция

Пример 1 Функция Хевисайда χ = индикатор $[0, +\infty)$
$\chi'(\varphi) = -\chi(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt = \varphi(0) \Rightarrow \chi' = \delta$; $\delta: \varphi \mapsto \varphi(0)$.

2 Пусть $F \in \mathcal{D}'$ и $F' = 0$, то есть $F(\varphi') = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.
Тогда $F(\varphi) = c \int \varphi(t)\,dt$; покажем это. Какие φ' получаем, когда φ пробегает $\mathcal{D}$? Это $\psi \in \mathcal{D}$ такие, что $\int \psi\,dt = 0$: если интеграл не ноль, то не выйдет компактного носителя у $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(s)\,ds$. Разложим $\varphi = \varphi - (\int\varphi)\varphi_0 + (\int\varphi)\varphi_0$, $\int\varphi_0 = 1$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi = \eta' + (\int\varphi)\varphi_0 \Rightarrow F(\varphi) = F(\eta' + (\int\varphi)\varphi_0) = (\int\varphi)F(\varphi_0) = c\int\varphi\,dx$.

Замечание Из этого же обоснования видно, что для всякой $F \in \mathcal{D}'$ есть $\psi \in \mathcal{D}'$, что $\psi' = F$.

Определение Пусть $F \in \mathcal{D}'$, $\psi \in C^\infty$. Тогда $(\psi \cdot F)(\varphi) \overset{def}{=} F(\psi\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$.
Пусть $F \in S'$, $\psi \in C^\infty$, $|\psi^{(m)}(x)| \leq C_m + C_m|x|^{k_m}$. Тогда $\psi \cdot F$ определена на S.

Упражнение $\psi \cdot F \in \mathcal{D}'$, если $F \in \mathcal{D}'$; $\psi \cdot F \in S'$, если $F \in S'$.

Задача На $\mathcal{D}'$ нельзя ввести коммутативное ассоциативное умножение, которое в случае гладкого обычного ψ дает предыдущее определение (обобщенные функции перемножать не получается).

Замечание Аналогично на $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ определяются дифференциальные операторы с гладкими коэффициентами: например, вида

$$\mathcal{L}F = \sum_{\substack{\text{конечная}\\ \text{сумма}}} C_{i_1 \ldots i_k} \partial_{x_{i_1}} \ldots \partial_{x_{i_k}} F, \quad C_{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty$$

↳ можно решать уравнения $\mathcal{L}F = G$ в $\mathcal{D}'$ или S'.

Пример $F'=0$ имеет только классические решения, задаваемые константами. Однако уравнение $x\cdot F=0$ имеет ненулевое решение $F=\delta$:

$x\cdot\delta=0$: $x\delta(\varphi)=\delta(x\varphi)=(x\varphi)(0)=0$.

Предложение (локальная структура обобщенной функции)

Пусть $F\in\mathcal{D}'$. Тогда локально F устроена как производная высокого порядка от непрерывной функции, то есть для всякого отрезка (в случае $\mathbb{R}^1$) найдутся такие непрерывная функция f и $m\in\mathbb{N}$, что

$$F(\varphi)=\int\varphi^{(m)}(t)f(t)\,dt$$

для всех $\varphi\in\mathcal{D}$ с носителем в этом отрезке, то есть

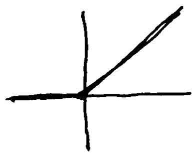
$$F=(-1)^m f^{(m)}$$ на этом отрезке.

f — непрерывная функция, и обычных производных у нее может и не быть; это, таким образом, не делает F обычной функцией!

Замечание Общего m может и не быть на прямой:

$$F(\varphi)=\sum_m \varphi^{(m)}(m).$$

Замечание Про непрерывные функции и их обобщенные производные:

f:  $\Rightarrow$ $f'=\chi$, $f''=\delta$.

Доказательство Рассмотрим пространство $\mathcal{D}_k$ гладких функций, равных нулю вне $[-k,k]$, со сходимостью из $\mathcal{D}$. На $\mathcal{D}_k$ эта сходимость задается счетным набором норм:

$$p_j(\varphi)=\max_{[-k;k]}|\varphi^{(j)}(x)|.$$

Мы знаем, что эта сходимость задается метрикой. Пусть F — непрерывный функционал на $\mathcal{D}_k$. Тогда F ограничен на некоторой базовой окрестности 0

$$U=\{\varphi:\ p_1(\varphi)<\varepsilon,\dots,p_N(\varphi)<\varepsilon\}.$$

Следовательно, $\exists C: |F(\varphi)|\le C(p_1(\varphi)+\dots+p_N(\varphi))\le\tilde{C}p_N(\varphi)$ (полунормы оценивают друг друга).

$p_j(\varphi)\le 2k\,p_{j+1}(\varphi)$, так как $\varphi^{(j)}(x)=\int_{-k}^{x}\varphi^{(j+1)}(s)\,ds$. В итоге получаем, что

$$|F(\varphi)|\le C\max_{|x|\le k}|\varphi^{(N)}(x)|.$$

Пусть $N=0$: $|F(\varphi)|\le C\max_{|x|\le k}|\varphi(x)|$. Тогда по теореме Рисса существует мера μ на $[-k,k]$:

$$F(\varphi)=\int_{[-k,k]}\varphi(x)\mu(dx)$$

м.б. разрывна

$f(x)=\mu([-k,x))$ $\Rightarrow$ $=-\int\varphi'(x)f(x)\,dx=\int\varphi''(x)\psi(x)\,dx$, $\psi(x)=\int_{-k}^{x}f(y)\,dy$

← непрерывна.

Общий случай $N>0$: по индукции. Пусть для $N-1$ верно.

$$|F(\varphi)| \le \max|\varphi^{(N)}(x)|$$

По задаче $\exists \psi$: $\psi' = F$. Тогда $\psi(\varphi') = -\psi'(\varphi) = -F(\varphi)$. Получаем, что

$$|\psi(\varphi')| \le \max|(\varphi')^{(N-1)}(x)|$$ ← эта оценка у нас на функциях с нулевым интегралом; говорит про гладкость что-то там и получаете, что верно для всех уже функций.

? $\hookrightarrow \psi = f^{(m)} \Rightarrow F = f^{(m+1)}$

Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье интегрируемых функций.

Определение $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ - интегрируемая по Лебегу функция (с комплексными значениями)

Ее преобразование Фурье - это
(прямое)

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} f(y)\,dy.$$

Ее обратное преобразование Фурье - это

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} f(x)\,dx.$$

Основные свойства: $\boxed{1}$ $\hat{f}$ непрерывна (по теореме Лебега)

$\boxed{2}$ $|\hat{f}(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int |f|\,dy = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}^n}$

Пример $\hat{f}$ не всегда интегрируема: вычислить $\widehat{I_{[a,b]}}$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{|x|\to\infty} |\hat{f}(x)| = 0.$

Доказательство: Это верно для индикатора отрезка $\Rightarrow$ по теореме Фубини верно для куба $\Rightarrow$ верно для линейной комбинации индикаторов кубов.

Общий случай: при $\varepsilon>0$ берем линейную комбинацию индикаторов g с $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon \Rightarrow |\hat{f}(x) - \hat{g}(x)| \le \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) = 0.$

28.02.17 Лекция

Примеры (явного вычисления)

$\boxed{1.}$ $f(x) = I_{[a,b]}(x)$. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} I_{[a,b]}(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy}\,dy =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ixy}}{-ix}\Big|_a^b{}^{(y)}.$$

Эта функция уже не из $\mathcal{L}^1$!

$\boxed{2.}$ $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ixy + \alpha y^2)} dy =$

$\{\text{замена}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\frac{z}{\sqrt{2\alpha}} - \frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$. (пользуемся тем, что знаем х.ф. нормальной с.в.)

$\boxed{3.}$ В $\mathbb{R}^n$: $e^{-\alpha|x|^2} \to \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}}$. (пользуемся теоремой Фубини).

Упражнение: $\boxed{4.}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Замечание Как по $\hat{f}$ восстановить f? Неформально: формула обращения $f = \check{\hat{f}}$. Вопрос: почему это так? как это понимать? (ведь не всегда $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$).

Теорема Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ограничена и пусть $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда в каждой точке непрерывности f имеем $f(x) = \check{\hat{f}}(x)$.

Доказательство Пусть x — точка непрерывности f. Для простоты $n = 1$.

Тогда $\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \underset{\in L^1}{\hat{f}(y)} dy \overset{\text{(по теореме Лебега)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-\varepsilon y^2} \hat{f}(y) dy \overset{\text{т. Фубини}}{=}$

смысл этого $e^{-\varepsilon y^2}$ в том, что он позволяет добиться интегрируемости по y $\Rightarrow$ можно применить т. Фубини (а без него нельзя)

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint e^{ixy} e^{-\varepsilon y^2} \frac{e^{-iyz}}{\sqrt{2\pi}} f(z) dz dy \overset{\text{т. Фубини}}{=}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint e^{ixy} e^{-\varepsilon y^2} \frac{e^{-iyz}}{\sqrt{2\pi}} f(z) dy dz =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int f(z) dz \left(\int \frac{e^{iy(x-z)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon y^2} dy \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int f(z) e^{-\frac{|x-z|^2}{4\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} dz \overset{u = \frac{z-x}{\sqrt{2\varepsilon}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int f(x + \sqrt{2\varepsilon} u) e^{-u^2} du \underset{\substack{x\text{ — точка непрерывности} \\ f\text{ ограничена}}}{\overset{\text{т. Лебега}}{=}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) \int e^{-u^2} du = f(x)$. ∎

Замечание Далее увидим, что если $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, то f имеет непрерывную ограниченную версию, т.е. равную ей п.в. функцию, и для этой версии $f = \check{\hat{f}}$.

Лемма Если $f \in \underset{\text{(комплекс.)}}{S(\mathbb{R}^n)}$, то $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $f = \check{\hat{f}}$.

Тем самым преобразование Фурье отображает $S(\mathbb{R}^n)$ на $S(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство Это вытекает из более общего свойства преобразования Фурье.

Предложение а) Пусть $f \in L^1 \cap C^1$, причем $\partial_{x_j} f \in L^1$. Тогда
$$\widehat{\partial_{x_j} f(x)} = i x_j \hat{f}(x).$$
б) Если $f \in L^1$ и $y_j f(y)$ интегрируема, то
$$\partial_{x_j} \hat{f}(x) = -i\, \widehat{y_j f(y)}(x).$$
В частности, на прямой: $\widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x)$; $\hat{f}'(x) = -i\widehat{yf(y)}(x)$.

Доказательство Для простоты $n=1$. Тогда

а) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(y) e^{-ixy}\,dy \overset{\text{по частям}}{=} ix \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y)\,dy.$$

б) $$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y)\,dy\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} -iye^{-ixy} f(y)\,dy;$$
пользуемся теоремой о дифференцировании интеграла по параметру:
$$|ye^{-ixy} f(y)| = |yf(y)| \in L^1 \text{ по условию.}$$
■

Если $f \in S$, то $y_j^k f \in S \Rightarrow \exists\, \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n} \hat{f}$. Кроме того,
$$|x_j^k \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n} \hat{f}(x)| = |x_j^k \widehat{y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} f(y)}(x)| = |\widehat{\partial_{y_j}^k (y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} f(y))}(x)|$$
ограничено, так как $\partial_{y_j}^k (y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} f(y))$ — элемент $S(\mathbb{R}^n)$. ■

07. 03. 17 Лекция

Замечание Пусть $\hat{f} \in L^1$, но ничего не известно про f. Как восстановить f по $\hat{f}$? Пусть в точке x_0 функция f (на $\mathbb{R}$, для L^1) удовлетворяет условию Дини:

функция $t \mapsto \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}$ интегрируема по Лебегу в нуле.

Тогда $f(x_0) = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \hat{f}(y) e^{ix_0 y}\,dy$. В частности, это верно, если $|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq C|t|^\alpha$, где $\alpha \in [0,1]$, $|t| \leq 1$. В частности, это верно, если $\exists f'(x_0)$.

Теорема (равенства Парсеваля)

Пусть $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\hat{\psi}\,dx,$$
(равенства имеют смысл, так как $\hat{\varphi}, \hat{\psi}$ ограничены)

(но это не скалярное произведение: для комплексных функций нужно сопряжение)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\overline{\psi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\hat{\psi}}\,dx.$$

Если же $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, то
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}\,dx \quad \text{(а это уже скалярное произведение в } L_2).$$

Доказательство

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}\psi\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\iint e^{-i(x,y)}\underset{\substack{\text{интегрируемо как}\\ \text{произведение инт.}\\ \text{функций разных аргументов}}}{\varphi(y)\psi(x)}\,dy\,dx \underset{\text{т. Фубини}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\iint e^{-i(x,y)}\varphi(y)\psi(x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\hat{\psi}\,dx.$$

Второе равенство – это следствие первого.

Третье равенство ($\varphi,\psi\in S$): пишем второе для новой f:

$$\int\hat{\varphi}\bar{f}\,dx = \int\varphi\bar{\check{f}}\,dx.$$

Берем $f=\hat{\psi}$, тогда $\int\hat{\varphi}\bar{\hat{\psi}}\,dx = \int\varphi\bar{\check{\hat{\psi}}}\,dx = \int\varphi\bar{\psi}\,dx$.

Это можно, так как $\hat{\psi}\in S$; формула обращения $\psi=\check{\hat{\psi}}$ верна в S. ■

Замечание Третье равенство можно представить в виде

$$(\varphi,\psi)_{L^2} = (\hat{\varphi},\hat{\psi})_{L_2}.$$

Следствие Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f}=0$. Тогда $f=0$ почти всюду.

Доказательство Пусть ~~...~~ $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$0=\int\hat{f}\varphi\,dx = \int f\hat{\varphi}\,dx \Rightarrow \int f\psi\,dx = 0\quad \forall\psi\in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f\psi\,dx = 0\quad \forall\psi\in C_0^\infty \Rightarrow f=0 \text{ почти всюду.}$$ ■

Следствие Пусть $f\in L^1$ и $\hat{f}\in L^1$. Тогда f имеет непрерывную ограниченную модификацию $\check{\hat{f}}$, то есть $f=\check{\hat{f}}$ почти всюду.

Доказательство Достаточно проверить, что равны интегралы от $f\varphi$ и $\check{\hat{f}}\varphi$ для всех вещественных $\varphi\in C_0^\infty$. Пишем φ в виде $\varphi=\hat{\psi}$, $\psi\in S$.

Тогда

$$\int\check{\hat{f}}\varphi = \int\hat{f}\check{\varphi} = \int\hat{f}\check{\hat{\psi}} = \int\hat{f}\psi = \int f\hat{\psi} = \int f\varphi.$$ ■

Следствие Функции $x^n e^{-x^2}$, $n=0,1,\dots$ имеют всюду плотную линейную оболочку в $L^2(\mathbb{R})$, то есть функции Эрмита – Чебышева образуют базис в $L^2(\mathbb{R})$. Можно сказать по-другому: многочлены плотны в $L^2(\gamma)$, где γ – стандартная гауссовская мера с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Иначе говоря, если $f\in L^2(\mathbb{R})$ и $\int x^n e^{-x^2}f(x)\,dx = 0$ $\forall n=0,1,\dots$, то $f=0$ почти всюду.

Доказательство Рассмотрим функцию $g(z)=\int_{\mathbb{R}} e^{-izx}f(x)e^{-x^2}dx$, $z\in\mathbb{C}$.

Эта функция аналитична. $g^{(n)}(0) = (-i)^n\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2}f(x)\,dx \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(z)\equiv 0 \Rightarrow e^{-x^2}f(x)=0$ почти всюду по доказанному выше

$\Rightarrow f(x)=0$ почти всюду. ■

Преобразование Фурье в L^2.

<u>Замечание</u> Знаем, что $(\hat\varphi, \hat\psi)_{L_2} = (\varphi, \psi)_{L^2}$, $\varphi, \psi \in S$.
Пространство $S(\mathbb{R}^n)$ (комплексное) всюду плотно в комплексном $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Оператор $\mathcal{F}: \varphi \to \hat\varphi$ на $S(\mathbb{R}^n)$ сохраняет скалярное произведение.

<u>Определение</u> <u>Преобразование Фурье</u> $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ есть результат продолжения преобразования Фурье с S по непрерывности.
Итак: $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, берем $\varphi_j \in S$, $\varphi_j \xrightarrow{L_2} f$. Тогда $\mathcal{F}\varphi_j = \hat\varphi_j$ фундаментальна в L^2; но L^2 банахово $\Rightarrow \exists f = (L^2)\lim \hat\varphi_j = \hat f$.
Из-за изометричности $\mathcal{F}f$ не зависит от выбора $\{\varphi_j\}$.

<u>Лемма</u> $\mathcal{F}$ отображает L^2 на L^2 с сохранением скалярного произведения.

<u>Доказательство</u> Продолжение по непрерывности сохраняет скалярное произведение $\Rightarrow$ образ L^2 замкнут $\Rightarrow$ образ есть все L^2, т.к. S лежит в образе.

<u>19.03.17 Лекция</u>

<u>Лемма</u> Если $f \in L^2 \cap L^1$, то $\mathcal{F}f = \hat f$ – "старое" Фурье.

<u>Доказательство</u> Достаточно доказать, что $\int \mathcal{F}f \cdot \varphi \, dx = \int \hat f \varphi \, dx$ для любой вещественной $\varphi \in C_0^\infty$.

Правая часть по равенству Парсеваля (или по теореме Фубини, $f \in L^1$):
$$\int \hat f \varphi \, dx = \int f \hat\varphi \, dx.$$
Левая часть:
$$(\mathcal{F}f, \varphi)_{L^2} = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^{-1}\varphi)_{L^2} =$$
$$= (f, \check\varphi)_{L^2} = \int f \bar{\check\varphi} \, dx = \int f \hat{\bar\varphi} \, dx = \int f \hat\varphi \, dx.$$
Тогда $\mathcal{F}f = \hat f$ почти всюду. Но $\hat f$ непрерывна $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{F}f$ тоже имеет непрерывную версию.

<u>Замечание</u> Так как $f \in L^1$, то у $\mathcal{F}f$ имеется ограниченность, непрерывность, L^2.

<u>Теорема</u> <u>(Планшереля)</u>
Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $f_R := f \cdot \mathbb{I}_{\{x: \|x\| \le R\}}$. Тогда
$$\hat f_R \xrightarrow{L_2} \mathcal{F}f, \quad R \to \infty, \text{ то есть}$$
$$\mathcal{F}f(x) = (L^2-)\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\|y\| < R} e^{-i(x,y)} f(y) \, dy.$$

Доказательство $f_R \to f$ в $L^2 \Rightarrow \mathcal{F}f_R = \hat{f}_R \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}f$.

Замечание $\exists$ последовательность $R_j \to \infty$, для которой $\hat{f}_{R_j} \to \mathcal{F}f$ почти всюду (следствие из сходимости в L^2). Что для $R_j = j \in \mathbb{N}$?
- для $n=1$ есть сходимость почти всюду;
- $n>1$ — не ясно.

Преобразование Фурье в S'.

Определение Пусть $F \in S'(\mathbb{R}^n)^{(\text{компл.})}$. Тогда
$$\hat{F}(\varphi) \overset{def}{:=} F(\hat{\varphi}), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

$\varphi \mapsto F(\hat{\varphi})$ — линейный функционал на S.
Этот функционал непрерывен, так как если $\varphi_j \xrightarrow{S} 0$, то $\hat{\varphi}_j \xrightarrow{S} 0$.
Действительно, рассмотрим $n=1$. Надо доказать, что
$$p_{k,m}(\hat{\varphi}_j) \to 0, \quad \text{где } p_{k,m}(\psi) = \sup_x (1+|x|^2)^k |\psi^{(m)}(x)|.$$
У нас: $|(1+x^2)^k \hat{\varphi}_j^{(m)}(x)| = |(1+x^2)^k \widehat{y^m \varphi_j}(x)|$.
Для упрощения рассмотрим одно слагаемое из $(1+x^2)^k$:
$$|x^{2k} \cdot \widehat{y^m\varphi_j}(x)| = |\widehat{\partial^{2k}(y^m\varphi_j)}(x)|.$$
Получаем: слагаемое вида $|\widehat{y^l \varphi_j^{(r)}}(x)| \leq$
$$\leq \int |y|^l |\varphi_j^{(r)}(y)|\,dy = \int |y|^l |\varphi_j^{(r)}(y)| (y^2+1) \frac{dy}{y^2+1} \leq$$
$$\leq c \cdot \sup_y |y|^l |1+y^2| \cdot |\varphi_j^{(r)}(y)| \to 0, \quad j \to \infty.$$
Итог: $F \in S' \Rightarrow \hat{F} \in S'$.

Замечание: Если $F \in S'$ задается функцией $F \in L^1$, то $\hat{F}$ обычное и есть Фурье в S'. Аналогично и для L^2. Действительно, пусть $F \in L^1$:
$$\hat{F}(\varphi) = F(\hat{\varphi}) = \int F(x)\hat{\varphi}(x)\,dx \overset{\text{равенство Парсеваля}}{=} \int \hat{F}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Примеры $\boxed{1}$ $1 \in S'$. $\hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = \int \hat{\varphi}(x)\,dx = \int e^{ix\cdot 0}\hat{\varphi}(x)\,dx =$
$\overset{\text{формула обращения}}{=} \sqrt{2\pi}\,\varphi(0)$, то есть $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\,\delta$. (в $\mathbb{R}^n$: $\hat{1} = \sqrt{2\pi}^n \delta$)

$\boxed{2}$ $\delta \in S' \Rightarrow \hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iy\cdot 0}\varphi(y)\,dy =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(y)$, то есть $\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. (в $\mathbb{R}^n$: $\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$).

Определение $F_j \in S' \to F \in S'$ в S', если $F_j(\varphi) \to F(\varphi)$ $\forall \varphi \in S$.

Замечание Таким образом, $F_j \xrightarrow{S'} F \Rightarrow \hat{F}_j \xrightarrow{S'} \hat{F}$.
В частности, если $F_j \in L^1$ и $F_j \xrightarrow{S'} F$, то $\hat{F}_j \xrightarrow{S'} \hat{F}$.
Например, $F_j = \mathbb{I}_{[-j,j]} \to 1$ в S'. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-j}^{j} e^{-ixy}\,dy \to \sqrt{2\pi}\,\delta$.

21.03.17 Лекция

Теорема Для обобщенных функций преобразование Фурье так же связывает дифференцирование и умножение на аргумент, как и для обычных функций.

Доказательство Пусть $F \in S'(\mathbb{R}^n)$. Найдем $\widehat{\partial_{x_j} F}$: по определению

$$\widehat{\partial_{x_j} F}(\varphi) = \partial_{x_j} F(\hat{\varphi}) = -F(\underbrace{\partial_{x_j}\hat{\varphi}}_{\text{это функция!}}) = iF\left(\widehat{y_j\varphi(y)}(\cdot)\right) = i\hat{F}(x_j\varphi) =$$

$$= i(x_j \cdot \hat{F})(\varphi) \Rightarrow \widehat{\partial_{x_j} F} = ix_j \cdot \hat{F}.$$

Определение Пусть L — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то есть

$$LF = \sum_{m \le r} c_{i_1 \dots i_m} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m} F, \quad c_{i_1}, \dots, c_{i_m} \text{ — числа.}$$

Рассмотрим уравнение $LF = G$, где $G \in S'$. Берем Фурье от обеих частей: $\widehat{LF} = \hat{G} \Rightarrow \sum_{m \le r} c_{i_1 \dots i_m}(ix_{i_1})\dots(ix_{i_m})\hat{F} = \hat{G} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{P} \cdot \hat{F} = \hat{G}$, где $\mathcal{P}(x) = \sum_{m \le r} c_{i_1 \dots i_m}(ix_{i_1})\dots(ix_{i_m})$ — многочлен, полученный заменой в операторе L ∂x_j на ix_j. Этот многочлен называется <u>символом</u> дифференциального оператора L. Если $\mathcal{P}(x) \ge c > 0$, то $\frac{1}{\mathcal{P}} \in C^\infty \Rightarrow$ определено $\hat{F} = \frac{1}{\mathcal{P}}\hat{G}. \Rightarrow$

это вообще серьезное предположение $\Rightarrow F = \left(\frac{1}{\mathcal{P}}\hat{G}\right)^\vee$.

Пример Пусть $LF = \Delta F - F$. Тогда $\mathcal{P}(x) = \sum (ix_j)^2 - 1 = -(|x|^2+1)$

$\Rightarrow$ символ от нуля отделен. Если смотреть на $LF = \Delta F$, то $\mathcal{P}(x) = -(|x|^2) \Rightarrow$ от нуля уже не отделен. Уравнение $x^2 F = 0$ имеет в S' ненулевые решения: при $n=1$ $F = c_1\delta + c_2\delta' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственного решения уже нет. Так как быть, если $\mathcal{P}(x)$ имеет нули?

Теорема (Хёрмандера)

Пусть $\mathcal{P} \not\equiv 0$ — многочлен. Тогда для всякой $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ существует $\Phi \in S'(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\mathcal{P} \cdot \Phi = \psi$.

$\Rightarrow$ уравнение $LF = G$ всегда <u>разрешимо</u> в S', если $\mathcal{P} \not\equiv 0$.

<u>Замечание</u> Этот результат равносилен следующему утверждению: образ S при умножении на $\mathcal{P}$ замкнут в S.

Замечание. Рассмотрим $LF = G \in \mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$. Здесь теорема Мальгранжа – Эренпрайса: если $P \neq 0$, то для всякого $G \in \mathcal{D}'$ $\exists F \in \mathcal{D}'$ с $LF = G$. Но решения в S' и $\mathcal{D}'$ могут не совпадать:

$F' - F = 0$ имеет лишь нулевое решение в S' (из Фурье), но в $\mathcal{D}'$ решение есть: $F = ce^x$ (попадает в $S' \Leftrightarrow c = 0$)

Свертка

Определение. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Сверткой $f*g(x)$ называется

$$f*g(x) = \int f(x-y) g(y) dy.$$

Замечание. Интеграл существует не для всякого x: скажем, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ около нуля $\Rightarrow$ в нуле свертка не определена.

Однако $\int |f(x-y)||g(y)| dy < \infty$ для почти всех x.

Более того, $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$.

Действительно, по Фубини функция $(u, v) \mapsto |f(u)||g(v)|$ интегрируема. Сделав линейную замену, получим интегрируемость $|f(x-y)||g(y)|$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. При этом

$$\iint |f(x-y)||g(y)| dy dx = \iint |f(x-y)||g(y)| dx dy = \int |f(x)| dx \int |g(y)| dy.$$

Функция $x \mapsto \int f(x-y) g(y) dy$ измерима тоже по Фубини.

Также по Фубини получаем коммутативность свертки: $f*g = g*f$.

Лемма. Если $f, g \in L^1$, то $\widehat{f*g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Доказательство. $\widehat{f*g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int e^{-ixy} f*g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \iint e^{-ixy} f(y-z) g(z) dz dy$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int g(z) \left(\int e^{-ixy} f(y-z) dy \right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int g(z) \left(\int e^{-ix(u+z)} f(u) du \right) dz =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int e^{-ixz} g(z) dz \cdot (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}(x) = \hat{g}(x) \hat{f}(x) \cdot (2\pi)^{n/2}.$

Пример. Пусть $H, G \in L^1$. Тогда $(\hat{H} \cdot \hat{G})^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} H*G$. Например, если P — такой многочлен, что $\frac{1}{P} = \hat{H}$, $H \in L^1$, то решение $LF = G$ задается как $F = H*G$. При этом бывает, что $\frac{1}{P} = \hat{H}$, $H \in L^1$:

$n = 1$: $LF = F'' - F \Rightarrow \frac{1}{P(x)} = -\frac{1}{1+x^2}$; но $\frac{1}{1+x^2}$ — это Фурье $ce^{-|x|}$.

Поэтому уравнение $F'' - F = G \in L^1(\mathbb{R})$ имеет решение вида

$$F(x) = c \int G(y) e^{-|x-y|} dy.$$

Замечание. Как быть с обобщенными функциями? Для некоторых пар обобщенных функций Φ, Ψ можно определить свертку $\Phi * \Psi$. Самые простые комбинации: $f*F$, $f \in S, F \in S'$; $f \in \mathcal{D}$, $F \in \mathcal{D}'$.

Определение Пусть $f\in S$, $F\in S'$. Положим
$$f*F \overset{def}{=} \sqrt{2\pi}^{\,n}\,(\hat{f}\,\hat{F})^{\vee} \in S'.$$

Замечание Вместо условия $f\in S$ можно требовать меньшее: надо, чтобы $\hat f\in C^\infty$ с производными не более чем полиномиального роста.

Замечание Теперь если решаем $LF=G$ в S' и $\frac{1}{P}=\hat H$, где $H\in S$, то $F=\sqrt{2\pi}^{-n}\,H*G$.

28.03.17 Лекция

Замечание $f*g(x)=\int f(x-y)g(y)\,dy=\langle g, f(x-\cdot)\rangle$.

Упражнение Пусть $f\in S$, $F\in S'$. Тогда $f*F$ задаётся обычной функцией $x\mapsto\langle F, f(x-\cdot)\rangle$ (здесь важно, что $y\mapsto f(x-y)\in S$).

Более того, эта функция лежит в C^∞.

Определение Пусть $f\in\mathcal{D}$, $F\in\mathcal{D}'$. Тогда положим
$$(f*F)(x)\overset{def}{=}\langle F, f(x-\cdot)\rangle.$$

Правая часть имеет смысл, так как $\forall x$ $y\mapsto f(x-y)\in\mathcal{D}$.

Предложение $f*F\in C^\infty$ $\forall f\in\mathcal{D}$, $F\in\mathcal{D}'$.

Доказательство Для упрощения $n=1$ (т.е. все происходит на прямой).

ну вообще доказывать по нему будем

~~По определению производной: имеем (x фиксирован, $h_n\to 0$)~~
$$\cancel{\frac{f*F(x+h_n)-f*F(x)}{h_n}}=\left\langle F, \frac{f(x+h_n-\cdot)-f(x-\cdot)}{h_n}\right\rangle.$$

~~Таким образом, имеем~~ $\langle F, g_n\rangle$, $g_n(y)=\frac{f(x+h_n-y)-f(x-y)}{h_n}$.

~~нам нет~~ сходимость в $\mathcal{D}$ нужна, а не поточечная, это важно

~~Замечаем, что $\{g_n\}$ сходится в $\mathcal{D}$ к $g(y)=f'(x-y)$.~~

Действительно, носители g_n лежат в общем отрезке. Нужно ~~проверить равномерную сходимость:~~ $g_n^{(k)}(y)\rightrightarrows f'(x-y)$:
$$\frac{f(x+h_n-y)-f(x-y)}{h_n}-f'(x-y)=f''(x-y+\Theta_n)\cdot h_n\cdot\frac{1}{2},\quad \Theta_n\in[-|h_n|,|h_n|]$$

$\Rightarrow$ ~~равномерно стремится к нулю.~~ $\Rightarrow g_n^{(k)}(y)\rightrightarrows f^{(k+1)}(x-y)$.

Итак, $\langle F, g_n\rangle\to\langle F, f'(x-\cdot)\rangle$, то есть $\frac{d}{dx}\langle F, f(x-\cdot)\rangle=\langle F, f'(x-\cdot)\rangle$

$\Rightarrow \frac{d^k}{dx^k}\langle F, f(x-\cdot)\rangle=\langle F, f^{(k)}(x-\cdot)\rangle$. ∎

Замечание Аналогично можно рассматривать (тем уравнениям, что рассматривались на прошлой лекции) задачу Коши в обобщённых функциях.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = LF, \quad F(0,\cdot) = F_0, \quad L \text{ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.}$$

Интерпретация такая: ищем $t \mapsto F(t,\cdot) \in S'$ такую, что $\forall \varphi \in S$:

$$\langle F(t), \varphi\rangle - \langle F_0, \varphi\rangle = \int_0^t \langle LF(s), \varphi\rangle\, ds.$$

Берем Фурье от обеих частей:

$$\frac{d}{dt}\widehat{F(t)} = P\cdot \widehat{F(t)}, \quad \widehat{F}(0) = \widehat{F_0}.$$

Если бы $\widehat{F}(t)$ было обычной функцией, то получили бы, что

$$\widehat{F}(t)(x) = \widehat{F}_0(x)e^{tP(x)},$$

то есть

$$F(t)(x) = \widecheck{e^{tP(x)}\widehat{F}_0(\cdot)}(x).$$

Для обобщенных функций так же, если на e^{tP} можно умножать в S'.
Например, $L = \Delta$, тогда $P(x) = -|x|^2$, на $e^{-t|x|^2}$ можно умножать $\Rightarrow$ ответ:

$$\widecheck{e^{-t|x|^2}\widehat{F}_0} \text{ – решение уравнения } \frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F \text{ с н.у. } F_0.$$

Замечание $\widecheck{e^{-t|x|^2}\widehat{F}}$ есть свертка $G * F_0$, где $G \in S$:

$$\widecheck{e^{-t|x|^2}} = c\frac{1}{\sqrt{t}^{(n)}}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$$

оно тут вообще есть?

$\Rightarrow$ Итог: в обычных функциях свертка имеет вид

$$\tilde{c}\int F_0(x-y)\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{\sqrt{t}^{(n)}}\,dy.$$

Классы Соболева

Определение Пусть $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Класс Соболева $W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех таких $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, что обобщенные частные производные $\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m} f$ ($m \le k$) входят в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Аналогично определяется $W^{p,k}(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Таким образом, $f \in W^{p,k} \Leftrightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и существуют $g_{i_1\ldots i_m}$, $m \le k$, из $L^p(\mathbb{R}^n)$, что

$$\int \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}\varphi f\,dx = (-1)^n\int g_{i_1\ldots i_m}\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Пример Если $f(x) = \eta(x)|x|$, где $\eta \in C_0^\infty$, $\eta = 1$ около 0, то

а вот это не поняла совсем

$$f'(x) = \eta'(x)|x| + \eta(x)\cdot \operatorname{sign}(x) \in L^p \ \forall p \Rightarrow f \in W^{p,1}(\mathbb{R}) \ \forall p.$$

Но $f \notin W^{p,2}$, потому что вторая производная уже не обычная функция.

Замечание Если $f \in W^{p,k}$, $\eta \in C_0^\infty$, то $\eta f \in W^{p,k}$,

$$\partial_{x_i}(\eta f) = \partial_{x_i}\eta f + \eta\partial_{x_i} f.$$

Теорема $W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пополнением $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме Соболева:

$$\|f\|_{p,k} \overset{def}{=} \|f\|_{L^p} + \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \\ m\le k}} \|\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f\|_{L^p}.$$

Доказательство. Пусть $\{f_j\}$ – фундаментальная по норме Соболева последовательность $\Rightarrow$ $\{\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f_j\}$ фундаментальные $\Rightarrow$

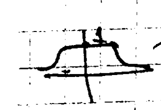
Из-за полноты L^p фундаментальность $\{\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f_j\}$ в L^p. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, g_{i_1\dots i_m}\in L^p:\ \partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f_j \to g_{i_1\dots i_m}$ в L^p. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varphi\in C_0^\infty\ \int \varphi\, g_{i_1\dots i_m}\,dx = \lim \int \varphi\,\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f_j\,dx =$ ← куда делась φ?

$= \lim (-1)^m \int \partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}}\varphi\, f_j\,dx = (-1)^m \int \partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f\,dx$

$\Rightarrow f\in W^{p,k}.$



Обратно, пусть $f\in W^{p,k}$. Берем $\eta\in C^\infty$: $\eta=1$ на единичном шаре, $\eta_j(x)=\eta(\frac{x}{j})$. Замечаем, что $\eta_j f$ сходится к f по норме Соболева (она задана и на $W^{p,k}$). Действительно, $\eta_j f\to f$ в L^p,

$\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}}(\eta_j f) \to \partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f$ в L^p по теореме Лебега.

Например, $\partial_{x_i}(\eta_j f) = \eta_j\partial_{x_i} f + \partial_{x_i}\eta_j\cdot f$, где $\eta_j\partial_{x_i} f\to\partial_{x_i} f$,

$\partial_{x_i}\eta_j\cdot f\to 0$ в L^p ($\partial_{x_i}\eta_j$ равномерно огр., и $\partial_{x_i}\eta_j(x)\to 0$). Итак, можно
огр. носитель

считать, что $f=0$ вне шара, и приближать гладкими. Берем такие приближения: $\int\eta=1$, $\eta\ge 0$, $\eta_j(x)=\eta(jx)\cdot j^{n?}$, $f_j=f*\eta_j \Rightarrow f_j\in C^\infty$:

$f_j(x)=\int\eta_j(x-y)f(y)\,dy$. Надо проверить, что $f_j\to f$ в L^p,

~~и так же для производных до порядка k.~~ Обоснование такое:

если $f\in C_0^\infty$, то это верно (даже $f_j\rightrightarrows f$). В общем случае:

$\|f*\eta_j\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}$ по неравенству Гёльдера: $\int\eta_j=1$, $\eta_j\ge 0$

тут что-то было

$\int\left|\int f(x-y)\eta_j(y)\,dy\right|^p dx \le \iint|f(x-y)|^p\eta_j(y)\,dy\,dx$

Если $f_0\in C_0^\infty$, то $\|f*\eta_j - f_0*\eta_j\|_{L^p}\le\|f-f_0\|_{L^p}$.

Итак, $f*\eta_j\to f$ в L^p $\forall f\in L^p$.

/04.04.17 Лекция/

Теперь проверяем, что $\|\partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f - \partial_{x_{i_1}}\dots\partial_{x_{i_m}} f_j\|_{L^p}\to 0$.

Для этого достаточно проверить, что $\partial_{x_i}(f*\eta_j)=\partial_{x_i}f*\eta_j$. (*)

$\partial_{x_i}f*\eta_j(x)=\int\partial_{x_i}f(x-y)\eta_j(y)\,dy \overset{x-y=u}{=} \int\partial_{x_i}f(u)\eta_j(x-u)\,du =$

определение соболевской производной

$=\int f(u)\,\partial_{u_i}\eta_j(x-u)\,du$ ← это есть левая часть равенства (*), поскольку дифференцирование по x_i можно сводить на гладкую функцию η_j.

Итог: $\|f_\varepsilon - f\|_{W^{p,k}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$.

Теорема (Вложение Соболева)
Пусть $f \in W^{p,1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда
1) если $p>n$, то $f \in C_B(\mathbb{R}^n)$, то есть f имеет непрерывную ограниченную версию;
2) если $p<n$, то $f \in L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$.

Пример Пусть $n=2$, $f(x) = \eta(x)\ln|x|$, $\eta \in C_0^\infty$, $\eta = 1$ около нуля; $f(x)$ разрывна.

$$\int_0^{1/2} \rho|\ln\rho|^r d\rho < \infty \Rightarrow f \in L^r(\mathbb{R}^2)\ \forall r<\infty.$$

$$\partial_{x_i}(\eta(x)\ln|x|) = \partial_{x_i}\eta(x)\ln|x| + \eta(x)\frac{1}{|x|}\cdot\frac{x^i}{|x|} \sim \frac{1}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^2)\ \forall p<2$$

$$\partial_{x_i} f \in L^p\ \forall p<2.$$

Здесь ∂_{x_i} служит обобщенной производной – проверяется непосредственно интегрированием по частям.
Итог: $f \in W^{p,1}(\mathbb{R}^2)$ при всех $p<2$, но не принадлежит при $p \geq 2$.
Теорема о вложении дает улучшенную интегрируемость, но не дает непрерывности.

Задача Рассмотреть
а) $\eta(x)\ln\ln|x|$ на $\mathbb{R}^2$;
б) $\eta(x)\frac{1}{|x|}$ на $\mathbb{R}^n$.

Теорема $W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех таких $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, что для преобразования Фурье $\hat{f}$ в смысле L^2 имеет место включение $|x|^k \hat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство Пусть $f \in W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_m}} f(x) \in L^2$, $m \leq k \Rightarrow$ их преобразование Фурье в $L^2 \Rightarrow |x_{i_1} \dots x_{i_m} \hat{f}(x)| \in L^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x|^k \hat{f}(x) \in L^2$. (достаточно брать $\partial_{x_i}^k f$).
Обратно, пусть $f \in L^2$ и $|x|^k \hat{f} \in L^2$. Тогда $\forall m \leq k$ имеем, что
$x_{i_1} \dots x_{i_m} \hat{f}(x) \in L^2 \Rightarrow \exists g_{i_1 \dots i_m} \in L^2 : (i)^m x_{i_1} \dots x_{i_m} \hat{f}(x) = \widehat{g_{i_1 \dots i_m}}(x)$
$\Rightarrow g_{i_1 \dots i_m}$ есть $\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_m}} f$ в смысле обобщенных функций.
Действительно, их преобразование Фурье (как элементы S') равны, так как $\widehat{\partial_{x_j}\varphi}(x) = i x_j \hat{\varphi}(x)$. Следовательно,

$$g_{i_1 \dots i_m} = \partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_m}} f.$$

∎

Спектральная теория

Определение Пусть X — комплексное банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ — пространство непрерывных линейных операторов в X. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда спектр $\sigma(A)$ оператора A определяется следующим образом:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ не имеет обратного}\}.$$

Это значит, что $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq 0$ или $(A-\lambda I)(X) \neq X$.

Замечание По теореме Банаха при $\lambda \notin \sigma(A)$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ автоматически непрерывен.

Примеры:

1. $A: \ell^2 \to \ell^2$, $A: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$
   $0 \in \sigma(A)$, но A инъективен.
2. $A: \ell^2 \to \ell^2$, $A: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$
   $0 \in \sigma(A)$, но A сюръективен.
3. $A: \ell^2 \to \ell^2$, $A: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$, где $\{\alpha_i\}$ — ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$.
   Задача Доказать, что $\sigma(A)$ — замыкание $\{\alpha_i\}$.
4. Пусть μ — ограниченная (неотрицательная) мера на Ω, φ — ограниченная комплексная измеримая функция на Ω, $A_\varphi x(\omega) = \varphi(\omega)x(\omega)$, $A_\varphi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$.
   Задача $\sigma(A_\varphi) = \operatorname{Ess}\varphi \leftarrow$ множество существенных значений φ.
   ($\lambda \in \operatorname{Ess}\varphi$, если $\forall n \ \mu(\omega : |\varphi(\omega) - \lambda| < \frac{1}{n}) > 0$).

11.04.17 Лекция

Замечание Если B — ограниченный оператор в банаховом пространстве X и $\|B\| < 1$, то оператор $I - B$ обратим и $(I-B)^{-1} = I + B + B^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, где ряд сходится по норме: $\|B^n\| \le \|B\|^n$.

При этом $\left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n\right)(1-B) = I = (1-B)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n\right)$.

Следствие Если $A \in \mathcal{L}(X)$ обратим и $D \in \mathcal{L}(X)$, $\|D\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, то $A + D$ обратим.

Доказательство $A + D = A(1 + A^{-1}D)$; оба сомножителя обратимы, так как $\|A^{-1}D\| \le \|A^{-1}\| \|D\| < 1$.

Замечание Множество обратимых операторов в X открыто по операторной норме.

Определение Рассмотрим $A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $A - \lambda I$ обратим, то $(A - \lambda I)^{-1}$ обозначается через $R(A, \lambda)$ и называется резольвентой в точке λ.

Замечание. Заметим, что при $|\lambda| > \|A\|$ оператор $A-\lambda I$ обратим, при этом $R(A,\lambda) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$. Действительно, $A-\lambda I = -\lambda(I-\lambda^{-1}A)$, $\|\lambda^{-1}A\| < 1$.

Для прочих λ: если λ лежит в круге радиуса меньше $\|R(A,\lambda_0)\|^{-1}$ для некоторого λ_0, для которого $\exists R(A,\lambda_0)$, то

$$R(A,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n R(A,\lambda_0)^{n+1}.$$

Из этих соображений получаем

Теорема. Пусть $X \neq 0$. Спектр оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ есть непустой компакт в круге $\{\lambda : |\lambda| \le \|A\|\}$.

Доказательство. Уже знаем, что $\sigma(A)$ — компакт в круге радиуса $\|A\|$. Если $\exists R(A,\lambda_0)$, то $\exists R(A,\lambda)$ при близких λ.

Предположим, что спектр пуст ($\sigma(A) = \varnothing$). Тогда $\exists R(A,\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in X$ и $f \in X^*$ $\langle f, R(A,\lambda)x\rangle$ — целая функция (видно из формул).

При этом $|\langle f, R(A,\lambda)x\rangle| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. $(A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n=0} \frac{A^n}{\lambda^n}$ вне круга

$\Rightarrow \langle f, R(A,\lambda)x\rangle \equiv 0 \Rightarrow R(A,\lambda) \equiv 0$. ∎

Замечание. Пусть X — гильбертово пространство и $A \in \mathcal{L}(X)$. Сопряженный оператор задан равенством $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $A^* : X \to X$.

При этом $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ ← комплексное сопряжение.

Действительно, $(A-\lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$. Если $A - \lambda I$ имеет обратный оператор B, то B^* — обратный к $A^* - \bar{\lambda} I$ (явная проверка), то есть если $\lambda \notin \sigma(A)$, то $\bar{\lambda} \notin \sigma(A^*)$. Верно и обратное, так как $A^{**} = A$.

Задача. Для банахова сопряженного $A^* : X^* \to X^*$ доказать, что $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.

Теорема (об отображении спектров)

Пусть X банахово, $A \in \mathcal{L}(X)$, P — многочлен от z. Тогда $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$.

Здесь $P(z) = \sum c_n z^n$, $P(A) = \sum c_n A^n$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $P(z) - \lambda = c\prod\limits_{i=1}^{n}(z-\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Пусть $c \neq 0$ (иначе очевидно). Тогда $P(A) - \lambda I = c(A-\lambda_1 I)\ldots(A-\lambda_n I)$.

Так как $A - \lambda_i I$ и $A - \lambda_j I$ коммутируют, то $\lambda \in \sigma(P(A)) \Leftrightarrow$ какие-то $A - \lambda_i I$ необратимы, то есть для некоторого i $\lambda_i \in \sigma(A)$, а это и значит, что $\lambda \in P(\sigma(A))$. ∎

Спектр компактного оператора.

Теорема. Пусть K — компактный оператор в бесконечномерном банаховом пространстве. Тогда $\sigma(K)$ — конечное или счетное множество, содержащее ноль, причем все ненулевые точки $\sigma(K)$ — собственные числа конечной кратности, то есть $\sigma(K) = \{0\} \cup \{k_n\}$, $k_n \neq 0$ — собственные числа, $\dim \operatorname{Ker}(K - k_i I) < \infty$. При этом если $\{k_n\}$ бесконечно, то $k_n \to 0$.

Таким образом, есть три варианта: $\sigma(K) = \{0\}$, $\sigma(K) = \{0, k_1, \ldots, k_n\}$, где k_i — собственные числа, $\sigma(K) = \{0\} \cup \{k_n\}$, где k_i — собственные числа и $k_n \to 0$.

Доказательство

Лемма. Пусть K — компактный оператор. Тогда

1) $\mathrm{Ker}(I-K)$ конечномерно;
2) $(I-K)(X)$ замкнуто.

Доказательство

1) На $\mathrm{Ker}(I-K)$ единичный оператор равен K и потому компактен $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(I-K) < \infty$.

2) Пусть $x_n \in X$ и $x_n - Kx_n \to y$. Надо доказать, что $\exists x: y = x - Kx$.
Сначала предположим, что $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$. Тогда в $\{Kx_n\}$ есть сходящаяся подпоследовательность и соответствующая подпоследовательность в $\{x_n\}$ сходится к некоторому x $\Rightarrow$ $x - Kx = y$.
Теперь рассмотрим общий случай. Положим $Z := \mathrm{Ker}(1-K)$ (это конечномерное подпространство). Пусть $d_n := \mathrm{dist}(x_n, Z) = \inf\limits_{z\in Z} \|x_n - z\|$.
Проверим, что $\sup d_n < \infty$. Найдутся $z_n \in Z$ такие, что $\|x_n - z_n\| \leq 2d_n$.
Предположим, что $d_n \to \infty$. Рассмотрим $v_n := \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}$. Тогда $\|v_n\| = 1$,
$v_n - Kv_n = \frac{(1-K)x_n}{\|x_n - z_n\|} \to 0$, так как $(1-K)x_n \to y$. В $\{Kv_n\}$ берем сходящуюся подпоследовательность $\{Kv_{n_i}\}$ $\Rightarrow$ $v_{n_i} \to v$, где $\|v\| = 1$. При этом $v - Kv = 0$, то есть $v \in Z$. Это дает противоречие: для всех $z \in Z$ имеем, что

$$\|v_n - z\| = \left\| \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} - z \right\| = \frac{\|x_n - z_n - z\|x_n - z_n\|\|}{\|x_n - z_n\|} \geq \frac{d_n}{\|x_n - z_n\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $x_n = \tilde{x}_n + z_n$, где $z_n \in Z$ и $\sup \|\tilde{x}_n\| < \infty$.
Но тогда $(I-K)x_n = (1-K)\tilde{x}_n \to y$, то есть свели к предыдущему случаю. Лемма доказана. ∎

18.04.17 Лекция

Доказательство (продолжение)

1) $0 \in \sigma(K)$: если $\dim X = \infty$, то компактный оператор не имеет обратного; иначе $I = K^{-1}K$ — компактный оператор.

2) Пусть $\lambda \neq 0$ лежит в $\sigma(K)$. Проверим, что λ — собственное значение компактного оператора. Можно считать, что $\lambda = 1$ (перейдем к $\lambda^{-1}K$). Пусть не так, то есть $K-I$ инъективен. Так как $1 \in \sigma(K)$, $X_1 = (K-I)X \neq X$. По лемме X_1 замкнуто. Пусть $X_{n+1} = (K-I)X_n$, $n \geq 1$. Аналогично предыдущему, $X_{n+1} \neq X_n$, X_{n+1} замкнуты, $n \geq 1$. Очевидно, $X_{n+1} \subset X_n$. Найдутся вектора $x_n \in X_n$ такие, что $\|x_n\| = 1$ и $\mathrm{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq 1/2$ (лемма Рисса), то есть $\|x_n - y\| \geq 1/2$ $\forall y \in X_{n+1}$. (важно, что все X_n замкнуты). Тогда (при $n<m$) имеем $Kx_n - Kx_m = x_n - x_m + (K-I)x_n - (K-I)x_m$, откуда

это пока что не нужно

оно вот сюда нужно

Логика такая: берем сферу радиуса 1, берем от нее компактный оператор и показываем, что образ не вполне ограничен (=> противоречие) строим в образе не вполне огр. последовательность

$\|Kx_n - Kx_m\| \geq 1/2$, поскольку $v := x_m - (K-I)x_n + (K-I)x_m \in X_m + X_{n+1} + X_{m+1} \subset X_{n+1}$ и $Kx_n - Kx_m = x_n - v$, то есть $\|x_n - v\| \geq 1/2$. => получаем противоречие с компактностью K.

=> Итог: $(K-I)X = X$ => $1 \notin \sigma(K)$ => противоречие.

Таким образом, доказано, что ненулевые точки спектра — собственные числа.

3) Проверим, что собственные числа не имеют ненулевых предельных точек.
(*) Из этого будет вытекать, что их конечное или счетное число, причем в случае счетного числа это последовательность, сходящаяся к нулю.
Пусть λ_n — различные собственные числа и $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Можно считать, что $|\lambda_n| \geq \delta > 0$. Раз они собственные, то $\exists x_n$: $\|x_n\| = 1$, $Kx_n = \lambda_n x_n$.

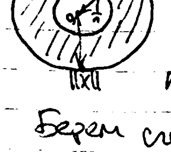
Упражнение: x_n линейно независимы.

новое обозначение старой буквой

Пусть X_n — линейная оболочка $x_1, \dots, x_n$. Ясно, что $K(X_n) \subset X_n$.
Опять берем $y_n \in X_n$ такие, что $\|y_n\| = 1$, $\mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq 1/2$, $n > 1$.
Пусть $y_n = \alpha_n x_n + z_n$, где $z_n \in X_{n-1}$.
При $n>m$ $Ky_n - Ky_m = K(\alpha_n x_n) + Kz_n - Ky_m = \alpha_n \lambda_n x_n + Kz_n - Ky_m =$
$= \lambda_n y_n - \lambda_n z_n + Kz_n - Ky_m = \lambda_n(y_n - z_n + \lambda_n^{-1}Kz_n - \lambda_n^{-1}Ky_m)$, где
$|\lambda_n| \geq \delta$, $z_n - \lambda_n^{-1}Kz_n + \lambda_n^{-1}Ky_m \in X_{n-1}$ => $\|Ky_n - Ky_m\| \geq \frac{\delta}{2}$ => опять противоречие с компактностью K.

Таким образом, доказано, что у собственных чисел нет ненулевых предельных точек. Теорема доказана. ∎

Замечание (про вытекание (*))



Рассмотрим компакты K_n. Поскольку в K_n у множества собственных значений предельных точек нет, то у каждой точки есть окрестность с конечным множеством собственных значений в ней; выбираем конечное подпокрытие и получаем, что $\forall n$ в K_n конечное множество собственных значений. Берем счетное объединение, добавляем 0 и получаем, что их не более чем счетно в сумме.

Следствие (альтернатива Фредгольма)
Пусть K — компактный оператор в банаховом пространстве X, $\lambda \neq 0$. Тогда либо уравнение $Kx - \lambda x = y$ однозначно разрешимо при всех $y \in X$, либо однородное уравнение $Kx - \lambda x = 0$ имеет ненулевые решения
(то есть (более того) $\operatorname{Ker}(K-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow (K - \lambda I)X = X$).

Доказательство Если λ не собственное число, то $\lambda \notin \sigma(K)$, и потому $(K-\lambda I)$ обратим. Пусть $(K-\lambda I)X = X$. Покажем, что тогда λ не собственное число (то есть если уравнение $Kx - \lambda x$ разрешимо для всех $y \in X$, то автоматически однозначно разрешимо).
Можно считать, что $\lambda = 1$.
Итак, дано, что $K - I$ сюръективен, а надо доказать, что инъективен.
Из прошлого семестра знаем, что $K^*: X^* \to X^*$ — компактный оператор
$\Rightarrow$ к нему применима теорема. Замечаем, что $\operatorname{Ker}(K^* - I) = 0$.
Действительно, если $K^* f - f = 0$, то $\forall x$
$$(K^* f - f)(x) = 0,$$
то есть
$$f(Kx - x) = 0,$$
но тогда $f = 0$, так как $K - I$ сюръективен. Значит, $K^* - I$ обратим
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(K - I) = 0$. Действительно, если $Kx - x = 0$ для некоторого x, то $f(Kx - x) = 0$ $\forall f \in X^*$, то есть $(K^* f - f)(x) = 0$ $\forall f \in X^*$.
Но из сюръективности $K^* - I$ и теоремы Хана–Банаха следует, что $x = 0$.
Итак, $(K - I)$ обратим.

Замечание Доказанное можно так сформулировать: либо неоднородное уравнение разрешимо $\forall y$, либо однородное уравнение $Kx - x = 0$ имеет ненулевое решение (то есть из сюръективности $K - I$ вытекает инъективность).

Пример Пусть $\mathcal{K}(x,y) \in L^2([0,1]^2)$. Рассмотрим интегральное уравнение
$$\int_0^1 \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy = g(x).$$
Тогда альтернатива Фредгольма говорит, что либо неоднородное уравнение имеет решение в L^2 $\forall g \in L^2$ (и тогда оно единственно), либо однородное уравнение имеет ненулевое решение.

Самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

Определение Пусть X — комплексное гильбертово пространство. $A \in \mathcal{L}(X)$ самосопряженный, если $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Определение Для всякого $A \in \mathcal{L}(X)$ рассмотрим квадратичную форму
$$Q_A(x) := (Ax, x).$$

Замечание Верна формула:
$$4(Ax,y) = Q_A(x+y) - Q_A(x-y) + iQ_A(x+iy) - iQ_A(x-iy).$$

Следствие Если A и $B \in \mathcal{L}(X)$ таковы, что $Q_A = Q_B$, то $A = B$.
Это неверно в вещественном пространстве: в $\mathbb{R}^2$ поворот на $\pi/2$ дает нулевую форму: $(Ux, x) \equiv 0$.

Следствие Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. A самосопряжен $\Leftrightarrow$ его Q_A вещественна.

Доказательство

1) Если $A = A^*$, то $Q_A = Q_{A^*}$, но $(Ax, x) = (x, A^*x) = \overline{(A^*x, x)}$
$\Rightarrow$ форма вещественна.

2) В обратную сторону так же: если (Ax, x) вещественна, то $(x, Ax) = (Ax, x)$, то есть $Q_A = Q_{A^*}$.

25.04.17 Лекция

Теорема (критерий Вейля)
Точка λ входит в спектр самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда существуют такие векторы $\{x_n\}$ с $\|x_n\| = 1$, что
$$(A - \lambda I)x_n \to 0.$$

Доказательство

$(\Leftarrow)$ Если такие есть, то $(A - \lambda I)^{-1}$ не существует: иначе
$$x_n = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)x_n \to 0,$$
но у всех них единичная норма.

$(\Rightarrow)$ Пусть таких нет. Тогда $\alpha = \inf\limits_{\|x\|=1} \|(A - \lambda I)x\| > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 0$. Кроме того, образ $A - \lambda I$ плотен:
если $((A - \lambda I)x, y) \equiv 0$ $\forall x \in H$, то $(x, (A - \bar\lambda I)y) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Ay = \bar\lambda y \Rightarrow \bar\lambda$ вещественно, так как (Ay, y) вещественно $\Rightarrow$
$\Rightarrow Ay = \lambda y \Rightarrow y = 0$. Наконец, образ замкнут: если $Av_n - \lambda v_n \to u$,
то последовательность $\{(A - \lambda I)v_n\}$ фундаментальна $\Rightarrow \{v_n\}$
тоже фундаментальна $\Rightarrow \exists v = \lim v_n \Rightarrow Av - \lambda v = u$.
Вывод: $A - \lambda I$ обратим (инъекция и сюръекция).

Следствие Если A самосопряжен, то $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

с первого раза не вышло
$$\left\{ \begin{aligned} &\|(A - \lambda I)x\|^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) = (Ax, Ax) - (Ax, \lambda x) - \\ &- (\lambda x, Ax) + (\lambda x, \lambda x) = \|Ax\|^2 - \bar\lambda(Ax, x) - \lambda(Ax, x) + \\ &+ \lambda\bar\lambda\|x\|^2 \end{aligned} \right.$$

$$(((A - \alpha I) - i\beta I)x, ((A - \alpha I) - i\beta I)x) = \|(A - \alpha I)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2 \geq |\beta|^2\|x\|^2$$

$\Rightarrow \alpha + i\beta \notin \sigma(A)$, если $\beta \neq 0$.

Теорема Пусть A — самосопряженный оператор. Тогда
$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} |(Ax, x)|.$$
Кроме того, $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$, где $m_A = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M_A = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$.

Наконец, оба этих числа $m_A, M_A \in \sigma(A)$.

Доказательство $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} \operatorname{Re}(Ax, y) =$
$$= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} \frac{(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)}{4} \le \frac{1}{4} \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} \left(M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2\right),$$
где $M = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |(Ax, x)|$ (тогда $|(Av, v)| \le M\|v\|^2$).
$$\Rightarrow \|A\| \le \frac{1}{4} \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} \left(2M\|x\|^2 + 2M\|y\|^2\right) \le M.$$
С другой стороны, $M \le \|A\|$: $|(Ax, x)| \le \|Ax\| \cdot \|x\|$.

Итог: $\|A\| = M$. Значит, либо $\|A\| = M_A$, либо $\|A\| = -m_A$.

Заметим, что $\sigma(A + \mu I) = \sigma(A) + \mu$, $\sigma(-A) = -\sigma(A)$.

Поэтому достаточно проверить, что $M_A \in \sigma$ в ситуации, когда $M = M_A$.

Итак, считаем, что $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Тогда существуют x_n, $\|x_n\| = 1$, что $(Ax_n, x_n) \to \|A\|$. Покажем, что $(Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) \to 0$.
$$(Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) = (Ax_n, Ax_n) - 2M \cdot (Ax_n, x_n) + M^2 \le$$
$$\le \|A\|^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M^2 = 2M^2 - 2(Ax_n, x_n) \to 0,$$
так как $(Ax_n, x_n) \to \|A\| = M$.

Итог: $M \in \sigma(A)$, если $M = M_A \Rightarrow m_A, M_A \in \sigma(A)$.

Осталось доказать, что $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$.

Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. По критерию Вейля существуют x_n с $\|x_n\| = 1$ и $(A - \lambda I)x_n \to 0$. $\xRightarrow{\text{навешивая скалярное произведение}}$ $(Ax_n, x_n) - \lambda \to 0$, то есть $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} (Ax_n, x_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow m_A \le \lambda \le M_A$.

Следствие Если A самосопряжен, то $\sigma(A)$ содержит хотя бы одну из точек $\|A\|$ и $-\|A\|$.

Теорема (Гильберта — Шмидта)

Пусть K — компактный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда в H существует ортонормированный базис $\{e_n\}$ из собственных векторов K: $Ke_n = k_n e_n$. При этом $k_n \in \mathbb{R}$ и $k_n \to 0$, если $\dim H = \infty$.

Доказательство. Если $K = 0$, то все очевидно.
Если $K \neq 0$, то $\sigma(K)$ содержит $\|K\| \neq 0$ или $-\|K\| \neq 0$ по предыдущей теореме. По теореме о спектре компактного оператора K имеет собственные вектора. Если u и v — собственные вектора с разными собственными числами α и β, то $(u, v) = 0$.
Действительно, $Au = \alpha u$, $Av = \beta v$. Знаем, что $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Пусть $(u,v) \neq 0$.

$$(Au, v) = \alpha(u,v)$$
$$\| \qquad\qquad \# \qquad \Rightarrow (u,v) = 0.$$
$$(u, Av) = \beta(u,v)$$

Пусть $\{k_n\}$ — все собственные числа. Знаем, что $\dim \operatorname{Ker}(K - k_n I) < \infty$, если $k_n \neq 0$. Берем конечные ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker}(K - k_n I)$ при $k_n \neq 0$ и некоторый ортобазис в $\operatorname{Ker} K$ (не более чем счетный, т.к. сепарабельное H). Получаем счетную ортонормированную систему $\{e_n\}$ в H.
Это базис: нет векторов, ортогональных всем e_n. Действительно, пусть H_0 — замкнутая линейная оболочка $\{e_n\}$. Так как все e_n — собственные вектора, то $K(H_0) \subset H_0$ (граница по непрерывности). Если $H_0^\perp \neq 0$, то приходим к противоречию; так как $K(H_0^\perp) \subset H_0^\perp$ (если $h \perp H_0$, то $(Kh, h_0) = (h, Kh_0) = 0$ $\forall h_0 \in H_0$, так как $K(H_0) \subset H_0$, то есть $Kh \perp H_0$). Поэтому в $H_0 \neq 0$ тоже есть собственный вектор; но мы уже взяли все собственные числа и соответствующие подпространства.

Замечание. Если есть кратные собственные числа, то такой базис не единственен ("по-серьезному", а не из-за домножения на (-1), например).

Примеры

$\boxed{1.}$ $A: L^2[0,1] \circlearrowleft$, $Ax(t) = tx(t)$ самосопряженный, но не компактный (нет собственных чисел)
$\sigma(A) = [0,1]$.

$\boxed{2}$ $A: L^2[0,1] \circlearrowleft$, $Vx(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ компактный, но не самосопряженный (тоже нет собственных чисел)
$\sigma(A) = 0$.

$\boxed{3.}$ $A: L^2[0,1] \circlearrowleft$, $Kx(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds$, $\mathcal{K}$ — вещественная функция из $L^2([0,1]\times[0,1])$, $\mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}(s,t)$, самосопряженный и компактный
$\Rightarrow \exists$ ортобазис $\{\varphi_n\}$ в $L^2[0,1]$: $K\varphi_n = k_n\varphi_n$, то есть

$$k\varphi_n(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)\varphi_n(s)\,ds.$$

Задача. Найти φ_n и k_n для $\mathcal{K}(t,s) = \min(t,s)$ — ковариационной функции винеровского процесса.

Функции от самосопряженных операторов.

Для многочлена $P(z) = \sum_n c_n z^n$ по определению полагаем

Определение $P(A) := \sum c_n A^n$.

Лемма Пусть A – самосопряженный оператор, P – многочлен. Тогда
$$\|P(A)\| = \max_{t\in\sigma(A)} |P(t)| \le \max_{t\in[-\|A\|, \|A\|]} |P(t)|.$$

Доказательство $\|P(A)\|^2 = \sup_{\|x\|\le 1} (P(A)x, P(A)x) = \sup_{\|x\|\le 1} (P(A)^* P(A)x, x) =$

$= \|P(A)^* P(A)\|$, так как $P(A)^* P(A)$ – самосопряженный оператор.

Выше доказывали, что $\|P(A)^* P(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(P(A)^* P(A))} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(\bar{P}P(A))} |\lambda|$, где $\bar{P}(t) := \sum \bar{c}_n t^n$.

(1)

По теореме о спектре многочлена от оператора

$\Leftrightarrow \sup_{t\in\sigma(A)} |\bar{P}(t)P(t)| = \sup_{t\in\sigma(A)} |P(t)|^2.$

Так как $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$, то $\sup_{t\in\sigma(A)} |P(t)|^2 \le \sup_{t\in[-\|A\|, \|A\|]} |P(t)|^2.$

Задача Эта оценка не всегда верна для несамосопряженных операторов (можно проверить на матрицах 2×2).

По теореме ... оператора

Т.к. $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$, то $\leq \sup\limits_{t \in [-\|A\|, \|A\|]} |P(t)|^2$

<u>Задача</u> Для несамосопр. не всегда верна эта оценка.

<u>Непр. ф. от самосопр. операторов</u>

16.05.17

<u>Теорема</u> Пусть A — самосопр. опер. в компл. гильб. H.

Тогда $\exists$ отобр. $J: C(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ с такими

гомоморфизм алгебр

пр-во компл. непр. ф. на $\sigma(A)$

св-вами: 1) J линейно, $\|J(f)\| = \sup\limits_{t \in \sigma(A)} |f(t)|$, $J(fg) = J(f)J(g)$

2) Если f — многочлен, то $J(f) = f(A)$

3) $J(f)^* = J(\bar{f})$.

Док-во: Для многочленов положим $T(f) = f(A)$. По доказанному ранее, $\|T(f)\| = \|f\|_{C(\sigma(A))}$. Продолжим T с многочленов на $C(\sigma(A))$ по непрерывности: если f_n - многочлены и $f_n \rightrightarrows f$, то $T(f_n)$ сход. по норме и положим $T(f) = \lim\limits_{n\to\infty} T(f_n)$. От выбора послед. не зависит. Ясно, что 1) и 2) выполнены. 3) тоже верно: для многочленов верно $\Rightarrow$ верно в пределе, т.к. если операторы сход., то сопр. тоже: $T_n \to T \Rightarrow T_n^* \to T^*$ ■

Определение Вектор h-циклический для A, если лин. оболочка $\langle A^k h \rangle_{k=0}^{\infty}$ всюду плотна.
лин. оболочка

Примеры: 1°. Ед. $A = I$ не имеет цикл. вектора ($\dim H > 1$)

2°. $Ax(t) = t x(t)$ в $L^2[0,1]$ имеет цикл. вектор $h(t) \equiv 1$.

Действительно: $A^n h(t) = t^n$, а многочлены плотны в $L^2_{[0,1]}$

Это верно для всех мер μ на отрезке вместо меры Лебега.

Упражнение A в $\mathbb{C}^n$ имеет цикл. вектор $\Leftrightarrow$ нет кратных собств. значений.

Определение Операторы $A_1 : H_1 \to H_1$ и $A_2 : H_2 \to H_2$ в гильб. H_1 и H_2 унитарно эквив., если $\exists$ унитарный изоморфизм $J : H_1 \to H_2$ т.ч. $A_2 = J^{-1} A_1 J$, т.е. диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "J"'] & H_1 \\ H_2 \arrow[r, "A_2"] & H_2 \arrow[u, "J^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

<u>Теорема</u> Пусть A — самосопр. оператор в сепар. гильб. пр-ве $H \neq 0$ с цикл. вектором. Тогда на $\sigma(A)$ $\exists$ борел. мера $\mu \geq 0$, для которой A унитарно эквивалентен оператору $A_1 x(t) = t\,x(t)$ в $L^2(\mu)$.

<u>Док-во</u>: Мера берётся из теоремы Рисса о функционалах на $C(\sigma(A))$. Берём цикл. вектор h с $\|h\|=1$ и рассм. функц. $l(f) := \langle f(A)h, h\rangle$, $f \in C(\sigma(A))$, где $f(A) = J(f)$ из предыд. теоремы. Здесь можно и без теоремы брать многочлены. $|l(f)| \leq \|f(A)\| = \max\limits_{\sigma(A)} |f(t)| \Rightarrow l$ непр.

По теореме Рисса $\exists$ мера μ на $\sigma(A)$: $l(f) = \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\,\mu(dt)$

При этом $\mu \geq 0$: если $f \geq 0$, то $l(f) \geq 0$.

Действительно, $f = \sqrt{f}\sqrt{f} \Rightarrow f(A) = \sqrt{f}(A)\sqrt{f}(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle f(A)h, h\rangle = \langle \sqrt{f}(A)\sqrt{f}(A)h, h\rangle = \langle \sqrt{f}(A)^*\sqrt{f}(A)h, h\rangle =$

$= \langle \sqrt{f}(A)h, \sqrt{f}(A)h\rangle \geq 0$. Итак, $\mu \geq 0$ и $\langle f(A)h, h\rangle =$

$= \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\,\mu(dt)$. Строим $J: L^2(\mu) \to H$, $Jt^n = A^n h \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для многочлена f: $Jf = f(A)h$. J линейно и

задано на всюду плотном мн-ве; образ содержит

лин. оболочку $A^n h$ => плотн. Замечаем, что J – изометрия:
$\langle f(A)h, f(A)h\rangle = \langle f(A)^* f(A)h, h\rangle = (\bar{f} f(A) h, h\rangle =$
$= \int_{\sigma(A)} \bar{f}(t) f(t) \mu(dt) = \|f\|^2_{L^2(\mu)}$
Итог: J продолжается ~~до~~ по непр. до изометрии $J: L^2(\mu) \to H$.
Наконец, $J^{-1} A J f(t) = t f(t)$, т.е. J устанавливает унит. эквив. A_1 и A_2. Дост. для $f(t) = t^n$: т.к. полиномы плотны в $L^2(\mu)$, т.е. хотим: $J^{-1} A J(t^n) = t^{n+1}$ <=> <=> $A J(t^n) = J(t^{n+1})$ <=> $A(A^n h) = A^{n+1} h$ – это верно. ■

<u>Лемма</u> Пусть A – самосопр. в сепараб. H. Тогда H можно разложить в сумму попарно ортог. замкн. подпр-в H_n с такими св-вами: $A(H_n) \subset H_n$, $A|_{H_n}$ имеет цикл. вектор.

<u>Док-во</u>: Имеются инвар. подпр-ва с цикл. вектором: берём $h_1 \neq 0$ и H_1 = замкн. лин. оболочка $h_1, Ah_1, \dots, A^n h_1$.
Из этого разложения $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ можно устроить по лемме Цорна. Можно и так: взять ортобазис $\{e_n\}$ в H и взять H_1 для e_1. Если $H_1 = H$, то всё закончено. Если нет, то берём первый e_{k_2}, не попавший в H_1, и пишем $e_{k_2} = \hat{e}_{k_2} + h$, где $h \in H_1$, $H_1 \perp \hat{e}_{k_2}$.
Берём H_2 для $\hat{e}_{k_2}$ => $H_2 \perp H_1$, поскольку $(v, A^n \hat{e}_{k_2}) =$

$= (A^n v_1, \hat{e}_{k_2}) = 0 \ \forall v \in H_1$ и так далее. Постепенно строим попарно ортог. H_n, инвар. относ. A и с цикл. векторами т., ч. их сумма охватит все e_k. ∎

<u>Теорема</u> Пусть A – самосопр. в сепар. H. Тогда A унитарно эквив. оператору умножения на огран. борел. ф. φ в $L^2(\mu)$ для неком. огран. борел. меры $\mu \geq 0$ на $\mathbb{R}$.

<u>Док-во</u>: По лемме A унитарно эквив. прямой сумме операторов с цикл. векторами $A|_{H_n}$, $H = \bigoplus_n H_n$. По предыд. теореме $A|_{H_n}$ унит. эквив. оператору умножения на t в $L^2(\mu_n)$, где $\mu_n \geq 0$ – борел. мера на $\sigma(A|_{H_n}) \subset [-\|A\|, \|A\|]$. Можно считать, что $\mu_n([-\|A\|, \|A\|]) = 2^{-n}$ (при умножении меры μ_n на число получим унит. эквив. оператор). Далее, можно считать, что $\|A\| < 1$, т.е. $[-\|A\|, \|A\|] \subset (-1, 1) \Rightarrow A|_{H_n}$ унит. эквив. опер. умножения на $t - 2(n-1)$ в $(2n-3, 2n-1)$ со сдвинутой в него мерой μ_n.

Сдвинутая мера ν_n. Итоговая мера μ – сумма мер ν_n ($\mu(\mathbb{R}) \leq 1$).
Ф. φ – период., на $(2n-3, 2n-1)$ есть $t-(2n-1)$, т.е. принимает знач. в $(-1, 1)$. Оператор A есть умножение на φ в $L^2(\mu)$.

23.05.17 <u>Борел. ф. от самосопр. оператора</u>

Пусть f - огран. борел. ф. на $\mathbb{R}$. Как задать $f(A)$ для самосопр. A? Очень просто: приводим A (самосопр. в сепар. H) к виду $A_\varphi x(t) = \varphi(t) x(t)$ в $L^2(\mu)$ с некот. мерой μ на $\mathbb{R}$ и огран. борел. φ. Полагаем $f(A) :=$ умножение на $f(\varphi)$ $\underbrace{t \mapsto f(\varphi(t))}_{\text{борел.}}$

Если f - многочлен $\Rightarrow$ как было

f - непр. $\Rightarrow$ как было ранее

Если $f_n(s) \to f(s)$ $\forall s$, f_n, f - равном. огран. борелевские, то $f_n(A)x \to f(A)x$ $\forall x \in H$.

В терминах диаграмм:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J"'] & H \\ L^2(\mu) \arrow[r, "A_\varphi"'] & L^2(\mu) \arrow[u, "J^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "J"'] & H \\ L^2(\mu) \arrow[r, "A_{f\circ\varphi}"] & L^2(\mu) \arrow[u, "J^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Важный частный случай: $f = I_B$ - индикатор борел. мн-ва $B \subset \mathbb{R}$.

Получаем оператор $I_B(A)$ - унит. эквив. умнож. на $I_B \circ \varphi$.

$I_B \circ \varphi = I_{\varphi^{-1}(B)}$ - индикатор мн-ва $\varphi^{-1}(B)$. Это ортогональный проектор на замкнутое подпр-во в $L^2(\mu)$, состоящее из ф. $= 0$ вне $\varphi^{-1}(B)$.

<u>Замечание</u> Ограниченный оператор P в H есть ортог. проектор на замкн. подпр-во $\Leftrightarrow$ $P = P^*$ и $P^2 = P$.

Действительно, для проектора это верно.

Обратно, если это верно, то P есть проектор на $\mathrm{Ker}(P - I)$

На $\operatorname{Ker}(P-I)$: $P=I$, на ортог. дополн. $P=0$. Конечно, это ясно и из приведения P к виду умножения на вещ. φ: тогда $\varphi^2=\varphi$, т.е. $\varphi(t)\in\{0,1\}$.

Получаем отображение на борел. σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\Pi: B\mapsto I_B(A)$ со значениями в мн-ве $\mathcal{P}(H)$ ортог. проекторов.

Такое отобр. назыв. <u>проекторной мерой</u>, если $\forall a,b\in H$ ф. $\Pi_{a,b}(B):=(\Pi(B)a,b)$ есть счётно аддит. мера.

Интеграл от огран. борел. ф. f на $\mathbb{R}$ по мере Π понимается в смысле матричных элементов: $\underset{\in\mathcal{L}(H)}{T=\int f(\lambda)\,\Pi(d\lambda)} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a,b\in H$: $(Ta,b)=\int f(\lambda)\,\Pi_{a,b}(d\lambda)$.

Наша проекторная мера $\Pi: B\to I_B(A)$ обладает след. свойством: $f(A)=\int f(\lambda)\,\Pi_{a,b}(d\lambda)$ $\forall f$ огран. борел. на $\mathbb{R}$.

В частности, $A=\int\limits_{\sigma(A)}\lambda\,\Pi(d\lambda)$. ~~По нашему определению~~ $(Aa,b)=\int\limits_{\sigma(A)}\lambda\,\Pi_{a,b}(d\lambda)$
~~это означает, что~~

Дост. рассм. A с цикл. вектором (для обоснования), т.е. случай, когда A – умножение на t в $L^2(\mu)$, где μ – мера на $\sigma(A)$. В этом случае $I_B(A)$ – умножение на I_B и $f(A)$ – умножение на $f(t)$ в $L^2(\mu)$.

$$(f(A)a,b)=\int\limits_{\sigma(A)} f(t)\,a(t)\,\overline{b(t)}\,\mu(dt)$$

$$(I_B(A)a,b)=\int\limits_{\sigma(A)} I_B(t)\,a(t)\,\overline{b(t)}\,\mu(dt)=\int\limits_{\sigma(A)\cap B} a(t)\,\overline{b(t)}\,\mu(dt),$$ т.е.

мера $\Pi_{a,b}$ есть мера $(a\bar{b})\mu$ - мера с плотностью $a\bar{b}$ относ. μ.

$\Rightarrow \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\,\Pi_{a,b}(dt) = \int\limits_{\sigma(A)} f(t)\,a(t)\,\overline{b(t)}\,\mu(dt)$ - то же самое.

Замечание Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ назыв. нормальным, если $AA^* = A^*A$. Самосопр. } нормальные. Унитарные }

Теорема Если A - норм. в сепарабельном H, то A - унит. эквив. оператору умножения на огран. компл. ф. φ в $L^2(\mu)$ с неком. борел. мерой μ на $\mathbb{C}$. Если U - унитарный, то U приводится к виду умножения на $e^{i\varphi(t)}$ в $L^2(\mu)$ с вещ. огран. борел. ф. φ.

Пример U - оператор преобр. Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Это унитарный оператор. К какому виду можно привести?

$U^2 f(t) = f(-t) \Rightarrow U^4 = I \Rightarrow \sigma(U^4) = \{1\} \Rightarrow \sigma(U)^4 = \{1\}$

$\Rightarrow \sigma(U) \subset \{1, -1, i, -i\}$.

Собств. значение 1 есть: $H_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ - собств. $UH_0 = H_0$.

Оказывается, что все $\{\pm 1, \pm i\}$ - с. числа счётной кратности, т.е. опер. преобр. Фурье $\mathcal{F}$ имеет собств. ортонорм. базис, в котором

$$\begin{pmatrix} \boxed{I} & & & 0 \\ & \boxed{iI} & & \\ & & \boxed{-I} & \\ 0 & & & \boxed{-iI} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{F} = I \oplus (-iI) \oplus (-I) \oplus (iI)$$

Для этого берем ф. $G_n(t) = \left(t - \frac{d}{dt}\right)^n H_0(t)$ $n = 0, 1, \ldots$

$G_n(t)$ = многочлен степени n $\times$ $H_0(t)$

Применим Фурье $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}h_n(t) = (i\frac{d}{dt} - it)^n \mathcal{F}H_0(t) = \left|\mathcal{F}H_0 = H_0\right| =$

$= (-i)^n (t - \frac{d}{dt})^n H_0(t) = (-i)^n h_n(t)$

Итог: ф. h_n – с. ф. для $\mathcal{F}$ с собств. числом $(-i)^n$

При этом $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортобазис. Для этого заметим, что лин. оболочка $\{h_n\}$ содержит все многочлены, умнож. на H_0.

Кроме того, h_n – попарно ортогональны. Если n и k отлич. не на кратное 4, то $(\overset{a}{h_n}, \overset{b}{h_k}) = 0$, т.к. собств. векторы a и b унит. оператора с собств. числами $\alpha \neq \beta$ ортог.:

$Ua = \alpha a \quad Ub = \beta b \quad (Ua, b) = \alpha(a, b)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{(a, U^{-1}b)} = (a, \beta^{-1}b) = \overline{\beta^{-1}}(a, b) = \beta(a, b)$

Следовательно, $(a, b) = 0$.

Для всех – по индукции: пусть h_n ортог. h_k, $k < n$.

Тогда $\int h_{n+1} h_k \, dt = \int (t - \frac{d}{dt}) h_n(t) h_k(t) dt \overset{\text{интегр. по частям}}{=} \int h_n(t)(t + \frac{d}{dt}) h_k(t)$

Если $k = n$, то 0 (отлич. не на 4). Если $k < n-1$, то по предп.
или $k = n-1$
индукции, т.к. $(t + \frac{d}{dt}) h_k(t) = P(t) H_0(t)$, $\deg P < n$, то 0.

$\Rightarrow \{h_n\}$ – базис, $h_n(t)$ = многочлен Эрмита $\times H_0$ (с точн. до конст.)

$$\boxed{\mathcal{F}f = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (f, h_n)_{L_2} h_n}$$

<u>Пример</u> Спектр оператора свёртки.

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ – интегр. компл. ф.

$S_f x(t) = f * x(t) = \int f(t-s) x(s) ds$, $x \in L^2(\mathbb{R})$

Применим Фурье: $F S_f x(t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} Ff \cdot Fx \Rightarrow S_f$ унитарно эквив. умножению на огран. непр. ф. $(2\pi)^{n/2} Ff \Rightarrow$

$\Rightarrow S_f$ ограничен и его спектр есть спектр умножения на $(2\pi)^{\frac{n}{2}} Ff$, т.е. мн-во сущ. значений $(2\pi)^{\frac{n}{2}} Ff$. Из-за непр. Ff и стремление к 0 на ∞, получаем, что спектр есть замыкание образа $(2\pi)^{\frac{n}{2}} Ff$ (комп. кривая и 0). Если f чётна, то Ff вещественна и спектр S_f - отрезок $\mathbb{R}$. Следовательно, если $f \neq 0$, то S_f некомпактен.