

## Комплексная геометрия

**Задача 23.1.** Найдите геометрическое место точек  $z$  на комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям: (а)  $|z - 1| = 1$ ; (б)  $|z| = |z + 1|$ .

**Задача 23.2.** Докажите, что точки  $0$ ,  $z$  и  $\frac{1}{\bar{z}}$  лежат на одной прямой.

**Задача 23.3.** Докажите, что уравнение  $z + \bar{z} = z\bar{z}$  задаёт окружность. Найдите её центр и радиус.

**Задача 23.4.** Нарисуйте множество точек  $z \in \mathbb{C}$ , таких, что  $|z - 3| \leq 2$  и  $|z + 4i| \leq 3$ .

**Задача 23.5.** Докажите, что произведение диагоналей четырёхугольника не больше суммы произведений его противоположных сторон. Когда это неравенство обращается в равенство?

**Задача 23.6.** Докажите, что для любого числа  $a$  преобразование  $z \mapsto az$  увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

**Задача 23.7.** Что можно сказать про это преобразование, если число  $a$  действительно? Если  $|a| = 1$ ? При каком  $a$  это преобразование будет поворотом на  $30^\circ$  вокруг начала координат?

**Задача 23.8.** (а) Числа  $0$  и  $z$  являются вершинами правильного треугольника. Где может находиться третья его вершина? (б) На сторонах треугольника с вершинами в точках  $u$ ,  $z$ ,  $w$  построены равносторонние треугольники. Найдите формулы для их центров (через комплексные числа  $u$ ,  $z$ ,  $w$ ). Докажите, что эти центры образуют равносторонний треугольник.

**Задача 23.9.** При каких  $a$  и  $b$  преобразование  $z \mapsto az + b$  будет (а) поворотом? (б) переносом? (в) осевой симметрией?

**Задача 23.10.** При каких  $a$  и  $b$  преобразование  $z \mapsto a\bar{z} + b$  является осевой симметрией?

**Задача 23.11.** Докажите, что треугольник с вершинами  $0$ ,  $1$ ,  $z$  подобен треугольнику с вершинами  $0$ ,  $1$ ,  $\frac{1}{\bar{z}}$ .

**Задача 23.12.** Точки  $x$ ,  $y$ ,  $z$  комплексной плоскости лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставьте пропущенную формулу и докажите.

**Задача 23.13.** Найдите геометрическое место точек  $z$ , для которых число  $\frac{z-1}{z-2}$  — чисто мнимое.

**Задача 23.14.** Докажите, что точки  $z$ ,  $w$ ,  $\frac{1}{\bar{z}}$ ,  $\frac{1}{\bar{w}}$  лежат на одной окружности.

**Задача 23.15.** Докажите, что точка  $\frac{1}{\bar{z}}$  пробегает окружность, когда  $z$  движется по прямой  $\operatorname{Re} z = 1$ .

**Задача 23.16.** Точки  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  комплексной плоскости лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставьте пропущенную формулу и докажите.

**Задача 23.17.** Докажите, что уравнение  $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + c = 0$ , где  $a$  — комплексное число, а  $c$  — действительное, задаёт пустое множество, прямую или окружность. Как по  $a$  и  $c$  определить, что именно?

**Задача 23.18 (окружность Аполлония).** Найдите геометрическое место точек таких  $X$ , что  $\frac{|AX|}{|BX|} = \text{const}$ .

**Задача 23.19 (Степень точки относительно окружности).** Докажите, что степень точки  $w$  относительно окружности  $Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0$  равна  $w\bar{w} + \frac{B}{A}w - \frac{\bar{B}}{A}\bar{w} + \frac{C}{A}$ .

**Задача 23.20 (Радикальная ось двух окружностей).** Докажите, что геометрическое место точек  $w$ , степень которых относительно двух неконцентрических окружностей  $S_1$  и  $S_2$  одинакова, является прямой.

**Задача 23.21 (Радикальный центр трех окружностей).** На плоскости даны три окружности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Докажите, что если две радикальных оси этих окружностей пересекаются в точке  $Q$ , то третья радикальная ось также проходит через эту точку.

**Задача 23.22.** Как в комплексных числах записывается образ точки  $z$  при инверсии относительно окружности единичного радиуса? Относительно произвольной окружности? Докажите основные свойства инверсии через комплексные числа.