

## Предел

Бесконечность — не предел!

Buzz Lightyear, space ranger

**Задача 30.1.** Привидите пример последовательности, которая имеет (а) ноль; (б) одну; (в) две; (г)  $N$ , для некоторого фиксированного  $N \in \mathbb{N}$ ; (д) счётно предельных точек.

**Определение.** Последовательность  $a_n$  называется *сходящейся*, если она имеет одну предельную точку  $A$ , которая называется пределом. Обозначение:  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  или  $a_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Последовательности, которые не являющиеся сходящимися называют *расходящимися*.

**Задача 30.2.** Докажите, что  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  тогда и только тогда, когда существует  $\alpha_n$  — бесконечно малая такая, что  $a_n = A + \alpha_n$ .

**Задача 30.3.** Докажите, что  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  тогда и только тогда, когда существует окрестность  $A$  такая, что в ней находятся все члены  $a_n$  начиная с некоторого.

**Задача 30.4.** Докажите, что  $A$  — предельная точка последовательности  $a_n$  тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность  $a_{n_k} \rightarrow A$  при  $n_k \rightarrow +\infty$ .

**Определение.** Последовательность  $a_n$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$ .

**Задача 30.5 (Критерий Коши).** Докажите, что  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  сходится если и только если является фундамаентальной.

**Задача 30.6.** Привидите пример фундаментальной расходящейся  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

**Задача 30.7 (Теорема Больцано–Вейерштрасса).** Докажите, что в  $\mathbb{R}$  сходится любая ограниченная монотонная последовательность.

**Задача 30.8.** (а) Докажите, что всякая сходящаяся ограничена. (б) Привидите пример ограниченной расходящейся последовательности.

**Задача 30.9.** Пусть  $A$  — предел последовательности  $\{a_n\}$ . (а) Верно ли, что если  $A > 0$ , то начиная с некоторого все члены  $\{a_n\}$  положительны? (б) Докажите, что если в  $\{a_n\}$  бесконечно много положительных и отрицательных членов, то  $A = 0$ .

**Задача 30.10.** Последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют пределы  $A$  и  $B$  соответственно. Докажите, что тогда

(а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$ ;

(б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = AB$ ;

(в) если  $B \neq 0$  и все элементы последовательности  $\{b_n\}$  отличны от нуля, то  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ .

**Определение.** Говорят, что почти все члены последовательности удовлетворяют некоторому условию, если существует лишь конечное число членов последовательности, не удовлетворяющих этому условию.

**Задача 30.11.** Пусть последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся. Докажите, что если почти для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется условие (а)  $a_n = b_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  (б)  $a_n \geq b_n$ , то

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  (в) Останется ли верным последнее утверждение, если в нем все знаки нестрогого неравенства заменить на знаки строгого неравенства?

**Задача 30.12 (Лемма о двух милиционерах).** Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  таковы, что почти для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $a_n \leq b_n \leq c_n$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = A$ .

Докажите, что тогда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = A$ .

**Задача 30.13.** (а) Алиса записала определение последовательности, имеющей предел, следующим образом: « $\exists N \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$ .» Опишите множество последовательностей, которые задает данное определение. (б) Выполните это же задание для определения Боба: « $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$ .»