Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для произвольного положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что при любом натуральном $n > N$ будет верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

В задачах ниже при доказательстве надо явно указывать сколемовскую функцию.

Задача 26.1. Запишите в кванторах определение бесконечно малой последовательности и последовательности, не являющейся бесконечно малой. Запишите их так, чтобы кванторы существования шли в начале формулы.

Задача 26.2. Для последовательности $\{\alpha_n\}$ укажите какой-нибудь номер N, начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если

(а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; **(б)** $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^3}$; **(в)** $\alpha_n = 0{,}99^n$; **(г)** $\alpha_n = \dfrac{2^n}{n!}$; **(д)** $\alpha_n = \dfrac{2n+3}{n^2+2n-1}$; **(е)** $\alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Задача 26.3. Верно ли, что **(а)** сумма; **(б)** разность; **(в)** произведение; **(г)** отношение бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.

Задача 26.4. Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются бесконечно малыми, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\alpha_n \leqslant \gamma_n \leqslant \beta_n$. Докажите, что тогда последовательность $\{\gamma_n\}$ также является бесконечно малой.

Задача 26.5. Верно ли, что последовательность $\{\alpha_n\}$ с отличными от нуля членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ является бесконечно большой?

Задача 26.6. **(а)** Верно ли, что последовательность $\{\alpha_n\}$ положительными членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n^2\}$ является бесконечно малой? **(б)** Верно ли аналогичное утверждение для последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\sqrt[3]{\alpha_n}\}$?

Задача 26.7. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\gamma_{2n-1} = \alpha_n$, $\gamma_{2n} = \beta_n$ при любом натуральном n. Является ли последовательность $\{\gamma_n\}$ бесконечно малой?

Задача 26.8. Одна последовательность бесконечно малая, а другая ограниченная. Что можно сказать о **(а)** сумме; **(б)** произведении; **(в)** отношении этих последовательностей?

Задача 26.9. Решите предыдущую задачу в случае, если одна из последовательностей бесконечно малая, а другая бесконечно большая.

Задача 26.10. Докажите, пользуясь предыдущими задачами, что следующие последовательности являются бесконечно малыми:

(а) $\dfrac{n^5+3}{n^{10}}$; **(б)** $\dfrac{3n^6+2n^4-n}{n^9+7n^5-5n^2-2}$; **(в)** $\sqrt{\dfrac{|\sin 3n + \cos 7n|}{2n^2+3n}}$; **(г)** $\dfrac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$;

Задача 26.11. Любую ли последовательность можно представить в виде отношения двух бесконечно малых последовательностей?

Задача 26.12. По последовательности $\{\alpha_n\}$ построили последовательность $\{\beta_n\}$ так, что $\beta_n = \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_n}{2}$ при любом натурального n. Докажите, что если последовательность $\{\beta_n\}$ оказалась бесконечно малой, то и последовательность $\{\alpha_n\}$ также является бесконечно малой.