Топология прямой

Задача 27.1 ***(лемма о вложенных отрезках).*** Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?
Задача 27.2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?
Задача 27.3. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти **(а)** 5м? **(б)** 10м? **(в)** 12м?
Задача 27.4 ***(лемма о конечном покрытии).*** Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок*.
Задача 27.5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?
Задача 27.6. Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?
Задача 27.7. Всегда ли из покрытия отрезка **(а)** конечным; **(б)** любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?
Определение. Для любого положительного числа ε будем называть *ε-окрестностью* точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал $D_\varepsilon(x_0) \coloneqq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ длины 2ε с центром в x_0.
Определение. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M.
Определение. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall u \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(u) \subset U$. Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.
Задача 27.8. Убедитесь, что промежутки **(а)** $(-\infty, a)$; **(б)** $(a, +\infty)$; **(в)** (a, b); открыты.
Задача 27.9. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?
Задача 27.10. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.
Задача 27.11. **(а)** Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. **(б)** Так ли это для пересечений бесконечных наборов?
Задача 27.12. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.
Определение. Точка $a \in M \subset \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M.
Определение. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным.*
Задача 27.13. Может ли бесконечное дискретное множество быть **(а)** ограниченным? **(б)** несчётным?
Определение. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если любая её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.
Задача 27.14. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **(а)** пусто; **(б)** состоит из одной точки; **(в)** состоит из двух точек; **(г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

*Подсказка: воспользуйтесь леммой о вложенных отрезках.

Задача 27.15. Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$?
Задача 27.16. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?
Определение. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет).
Определение. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами.*
Задача 27.17. Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и луч — нет.
Задача 27.18. **(а)** Бывают ли дискретные незамкнутые множества? **(б)** А бесконечные дискретные компакты?
Задача 27.19. **(а)** Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? **(б)** Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.
Задача 27.20. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \backslash Z$ открыто.
Задача 27.21. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.
Задача 27.22. **(а)** Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. **(б)** Так ли это для бесконечных наборов?
Задача 27.23 ***(лемма о вложенных компактах).*** Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_n \neq \varnothing$.
Задача 27.24 ***(лемма о конечном покрытии).*** Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие†.

Канторово множество

Определение. Определим по индукции последовательность компактов $K_n \subset [0,1]$ следующим образом. Каждый K_n является объединением 2^n отрезков: K_{n+1} получается из K_n выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в K_n, а $K_0 = [0,1]$. Пересечение $\mathfrak{K} \coloneqq \bigcap_n K_n$ называется *канторовым множеством*‡. Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно определить как множество всех чисел $x \in [0,1]$, которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).
Задача 27.25. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.
Задача 27.26. Содержит ли канторово множество: **(а)** интервалы? **(б)** изолированные точки?

Конденсация несчётных множеств

Определение. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его точкой *конденсации*, если при всех $\varepsilon > 0$ $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно.
Задача 27.27*. Докажите, что множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.
Задача 27.28*. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?
Задача 27.29*. Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.
Задача 27.30*. Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.

†Подсказка: Сравните эти две задачи с задачами 27.1 и 27.4.
‡в честь Георга Кантора