Предел функции

Определение ***(по Коши).*** Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X. Говорят, что $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к a, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого $x \in X$, лежащего в проколотой δ-окрестности точки a, $f(x)$ лежит в ε-окрестности точки A.

Обозначения: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Задача 32.1. Может ли у функции быть два предела в одной точке?

Задача 32.2. Найдите пределы (с явным отысканием δ по ε): **(а)** $\lim\limits_{x\to 5} 3x$; **(б)** $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x-2}$; **(в)** $\lim\limits_{x\to 1}\{x\}$; **(г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; **(д)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$; **(е)** $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Задача 32.3. Пусть существуют пределы $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $A = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Сформулируйте и докажите теоремы о пределах $x \to a$ функций **(а)** $cf(x)$; **(б)** $f(x) + g(x)$; **(в)** $f(x) \cdot g(x)$; **(г)** $f(x)/g(x)$.

Задача 32.4. Найдите $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$.

Задача 32.5. Сформулируйте и докажите аналог теоремы о двух милиционерах для функции.

Задача 32.6 ***(Предел сложной функции).*** **(а)** Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$. Пусть также $\forall x \quad \neq a$ верно, что $f(x) \neq b$. **(б)** Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$. Зачем нужно второе условие?

Задача 32.7 ***(Первый замечательный предел).*** **(а)** Докажите, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ **(б)** Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 32.8 ***(Второй замечательный предел).*** Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Определение ***(по Гейне).*** Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Пусть — действительное число (принадлежащее M или нет). Говорят, что $f(x)$ имеет предел A при x, стремящемся к a, если для каждой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой отличны от a и принадлежат X, справедливо равенство $\lim n \to \infty f(x_n) = A$.

Задача 32.9. Докажите эквивалентность определений по Коши и по Гейне.

Задача 32.10. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$, не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

Задача 32.11. **(а)** Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{Q}$, имеющей в каждой действительной точке бесконечный предел. **(б)** Существует ли функция, определенная на $\mathbb{R}$, имеющая в каждой действительной точке бесконечный предел?