

## Счёт

**Задача 31.1.** Найдите предел последовательности: (а)  $1 + 0,1^n$ ; (б)  $\frac{5n+4}{6n+15}$ ; (в)  $\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ ; (г)  $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ ; (д)  $\sqrt[n]{2}$ .

**Задача 31.2.** Вычислите пределы (при  $n \rightarrow +\infty$ ) или докажите расходимость последовательностей: (а)  $\frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$ , (б)  $\frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{2n-3}$ , (в)  $\frac{\sqrt{1+2n}-3}{\sqrt{n}-2}$ , (г)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ,

(д)  $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-5n}$ , (е)  $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2} \dots \sqrt[n]{2}$ , (ж)  $\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}$ , (з)  $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}$ ,

**Задача 31.3(у).** Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

**Задача 31.4.** (а) Верно ли, что последовательность  $a_n = \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos 2^n}{2^n}$  монотонна при  $n > 1$ ? (б) Докажите, что данная последовательность имеет предел.

**Задача 31.5.** Последовательность  $\{a_n\}$  задана рекуррентно:  $a_1 = 4$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{5}$ . (а) Докажите, что данная последовательность имеет предел и (б) найдите этот предел.

**Задача 31.6(Итерационная формула Герона).** Пусть  $x_1$  — произвольное положительное число,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , где  $a > 0$ . Докажите, что тогда при  $n \geq 2$  последовательность  $\{x_n\}$  (а) убывающая, (б) ограниченная снизу числом  $\sqrt{a}$ , (в) имеет предел, (г) причём  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ . (д) Для  $a = 10$ ,  $x_1 = 1$  найдите такое  $n$ , что  $|x_n - \sqrt{a}| < 10^{-5}$ .

**Задача 31.7(Теорема Штольца).** Пусть последовательность  $\{a_n\}$  является возрастающей бесконечно большой последовательностью с положительными членами, а последовательность  $\{b_n\}$  такова, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = L$ . Докажите, что тогда существует предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$ .

**Задача 31.8.** Пусть  $P(n) = a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$  и  $Q(n) = b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0$  два многочлена степеней  $k$  и  $l$  соответственно, причём  $\forall n \in \mathbb{N} \quad Q(n) \neq 0$ . Докажите, что\*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } l > k, \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{если } l = k, \\ +\infty, & \text{если } l < k. \end{cases}$$

**Задача 31.9.** Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ .

**Задача 31.10(Уравнение Кеплера).** † Для решения уравнения  $x - \alpha \sin x = C$ , где  $0 < \alpha < 1$ , строят последовательность  $\{x_n\}$  следующим образом:  $x_1 = C$ ,  $x_{n+1} = C + \alpha \sin x_n$ . Докажите, что (а) уравнение Кеплера имеет не более одного корня; (б) последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел; (в)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  является решением уравнения Кеплера.

**Задача 31.11([:|:]).** Докажите равенства: (а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ ,  $a > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ; (б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ; (в)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k q^n = 0$ ,  $q < 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ; (г)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a > 0$ ; (д)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ; (е)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ ;

\*Последнее надо понимать в том смысле, что  $\frac{P(n)}{Q(n)}$  — бесконечно большая.

† Данное уравнение появилось в работах И. Кеплера (1571–1630) при изучении движения планет по эллиптическим орбитам (т.н. задача двух тел).

## Число Непера

**Определение.** Введём несколько обозначений:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

**Задача 31.12.** (а) Докажите, что при фиксированном  $i > 0$  последовательность  $\frac{n-i}{n}$  возрастает. (б) Докажите, что  $a_n$  возрастает<sup>‡</sup>. (в) Докажите, что  $b_n$  убывает<sup>§</sup>. (г) Докажите, что  $a_n$  и  $b_n$  ограничены. (д) Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

**Определение.** Пределом последовательностей  $a_n$  и  $b_n$  является число  $e = 2,7182818284590\dots$ , которое называется *числом Непера*.

**Задача 31.13.** Докажите, что последовательность  $c_n$  (а) имеет предел и (б) этот предел равен  $e$ .

**Задача 31.14\*.** (а) Докажите, что для последовательности  $c_n$  верно неравенство  $0 < e - c_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ . (б) С помощью данного неравенства докажите, что число  $e$  является иррациональным.

**Задача 31.15.** Найдите пределы (а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ ; (б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ ; (в)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Задача 31.16.** Докажите неравенства: (а)  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n$ ; (б)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad e^\alpha > 1 + \alpha$ .

## Простые предельные теоремы

**Задача 31.17 (Теорема Бернулли).** Пусть  $A_{m,n,p}$  — событие, что среди  $n$  испытаний Бернулли с вероятностью успеха  $p$  ровно  $m$  закончились успешно. Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ A_{m,n,p} \mid \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right] = 1.$$

**Задача 31.18 (Закон Больших Чисел).** Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  — последовательность попарно независимых случайных величин, для всех  $i$   $\mathbb{E} X_i^2$  — конечно,  $m = \mathbb{E} X_i$ ,  $\sigma^2 = \mathbb{E} X_i^2 - (\mathbb{E} X_i)^2$ . Рассмотрим *выборочное среднее*:

$$\bar{X}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ |\bar{X}^{(n)} - m| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

<sup>‡</sup>«В чём сила, брат?»

<sup>§</sup>Почему летают самолёты?