

Предел

Бесконечность — не предел!

Buzz Lightyear, space ranger

Задача 30.1. Приведите пример последовательности, которая имеет (а) ноль; (б) одну; (в) две; (г) N , для некоторого фиксированного $N \in \mathbb{N}$; (д) счётно предельных точек.

Определение. Последовательность a_n называется *сходящейся*, если она имеет одну предельную точку A , которая называется пределом. Обозначение: $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ или $a_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow +\infty$.

Последовательности, которые не являющиеся сходящимися называют *расходящимися*.

Задача 30.2. Докажите, что $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда существует α_n — бесконечно малая такая, что $a_n = A + \alpha_n$.

Задача 30.3. Докажите, что $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда существует окрестность A такая, что в ней находятся все члены a_n начиная с некоторого.

Задача 30.4. Докажите, что A — предельная точка последовательности a_n тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $a_{n_k} \rightarrow A$ при $n_k \rightarrow +\infty$.

Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Задача 30.5 (Критерий Коши). Докажите, что $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ сходится если и только если является фундаментаальной.

Задача 30.6. Приведите пример фундаментальной расходящейся $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Задача 30.7 (Теорема Больцано–Вейерштрасса). Докажите, что в \mathbb{R} сходится любая ограниченная монотонная последовательность.

Задача 30.8. (а) Докажите, что всякая сходящаяся ограничена. (б) Приведите пример ограниченной расходящейся последовательности.

Задача 30.9. Пусть A — предел последовательности $\{a_n\}$. (а) Верно ли, что если $A > 0$, то начиная с некоторого все члены $\{a_n\}$ положительны? (б) Докажите, что если в $\{a_n\}$ бесконечно много положительных и отрицательных членов, то $A = 0$.

Задача 30.10. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы A и B соответственно. Докажите, что тогда

(а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$;

(б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = AB$;

(в) если $B \neq 0$ и все элементы последовательности $\{b_n\}$ отличны от нуля, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Определение. Говорят, что почти все члены последовательности удовлетворяют некоторому условию, если существует лишь конечное число членов последовательности, не удовлетворяющих этому условию.

Задача 30.11. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся. Докажите, что если почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие (а) $a_n = b_n$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ (б) $a_n \geq b_n$, то

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ (в) Останется ли верным последнее утверждение, если в нем все знаки нестрогого неравенства заменить на знаки строгого неравенства?

Задача 30.12 (Лемма о двух милиционерах). Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ таковы, что почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $a_n \leq b_n \leq c_n$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = A$.

Докажите, что тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = A$.

Задача 30.13. (а) Алиса записала определение последовательности, имеющей предел, следующим образом: « $\exists N \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.» Опишите множество последовательностей, которые задает данное определение. (б) Выполните это же задание для определения Боба: « $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.»