

Счёт

Задача 31.1. Найдите предел последовательности: (а) $1 + 0,1^n$; (б) $\frac{5n+4}{6n+15}$; (в) $\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$; (г) $1 + q + q^2 + \dots + q^n$; (д) $\sqrt[n]{2}$.

Задача 31.2. Вычислите пределы (при $n \rightarrow +\infty$) или докажите расходимость последовательностей: (а) $\frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$, (б) $\frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{2n-3}$, (в) $\frac{\sqrt{1+2n}-3}{\sqrt{n}-2}$, (г) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

(д) $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-5n}$, (е) $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$, (ж) $\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}$, (з) $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}$,

Задача 31.3(у). Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Задача 31.4. (а) Верно ли, что последовательность $a_n = \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos 2^n}{2^n}$ монотонна при $n > 1$? (б) Докажите, что данная последовательность имеет предел.

Задача 31.5. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{5}$. (а) Докажите, что данная последовательность имеет предел и (б) найдите этот предел.

Задача 31.6(Итерационная формула Герона). Пусть x_1 — произвольное положительное число, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, где $a > 0$. Докажите, что тогда при $n \geq 2$ последовательность $\{x_n\}$ (а) убывающая, (б) ограниченная снизу числом \sqrt{a} , (в) имеет предел, (г) причём $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$. (д) Для $a = 10$, $x_1 = 1$ найдите такое n , что $|x_n - \sqrt{a}| < 10^{-5}$.

Задача 31.7(Теорема Штольца). Пусть последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей бесконечно большой последовательностью с положительными членами, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = L$. Докажите, что тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$.

Задача 31.8. Пусть $P(n) = a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$ и $Q(n) = b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0$ два многочлена степеней k и l соответственно, причём $\forall n \in \mathbb{N} \quad Q(n) \neq 0$. Докажите, что*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } l > k, \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{если } l = k, \\ +\infty, & \text{если } l < k. \end{cases}$$

Задача 31.9. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

Задача 31.10(Уравнение Кеплера). † Для решения уравнения $x - \alpha \sin x = C$, где $0 < \alpha < 1$, строят последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = C$, $x_{n+1} = C + \alpha \sin x_n$. Докажите, что (а) уравнение Кеплера имеет не более одного корня; (б) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел; (в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ является решением уравнения Кеплера.

Задача 31.11([:|:]). Докажите равенства: (а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$; (б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; (в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k q^n = 0$, $q < 1$, $k \in \mathbb{N}$; (г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$; (д) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; (е) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

*Последнее надо понимать в том смысле, что $\frac{P(n)}{Q(n)}$ — бесконечно большая.

† Данное уравнение появилось в работах И. Кеплера (1571–1630) при изучении движения планет по эллиптическим орбитам (т.н. задача двух тел).

Число Непера

Определение. Введём несколько обозначений:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Задача 31.12. (а) Докажите, что при фиксированном $i > 0$ последовательность $\frac{n-i}{n}$ убывает. (б) Докажите, что a_n возрастает[‡]. (в) Докажите, что b_n убывает[§]. (г) Докажите, что a_n и b_n ограничены. (д) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Определение. Пределом последовательностей a_n и b_n является число $e = 2,7182818284590\dots$, которое называется *числом Непера*.

Задача 31.13. Докажите, что последовательность c_n (а) имеет предел и (б) этот предел равен e .

Задача 31.14*. (а) Докажите, что для последовательности c_n верно неравенство $0 < e - c_n < \frac{1}{n \cdot n!}$. (б) С помощью данного неравенства докажите, что число e является иррациональным.

Задача 31.15. Найдите пределы (а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$; (б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$; (в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Задача 31.16. Докажите неравенства: (а) $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$; (б) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad e^\alpha > 1 + \alpha$.

Простые предельные теоремы

Задача 31.17 (Теорема Бернулли). Пусть $A_{m,n,p}$ — событие, что среди n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p ровно m закончились успешно. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[A_{m,n,p} \mid \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right] = 1.$$

Задача 31.18 (Закон Больших Чисел). Пусть X_1, \dots, X_n, \dots — последовательность попарно независимых случайных величин, для всех i $\mathbb{E} X_i^2$ — конечно, $m = \mathbb{E} X_i$, $\sigma^2 = \mathbb{E} X_i^2 - (\mathbb{E} X_i)^2$. Рассмотрим *выборочное среднее*:

$$\bar{X}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[|\bar{X}^{(n)} - m| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

[‡]«В чём сила, брат?»

[§]Почему летают самолёты?