

## Бесконечно малые последовательности

**Определение.** Последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется *бесконечно малой*, если для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое натуральное число  $N$ , что при любом натуральном  $n > N$  будет верно неравенство  $|\alpha_n| < \varepsilon$ .

*В задачах ниже при доказательстве надо явно указывать сколемовскую функцию.*

**Задача 26.1.** Запишите в кванторах определение бесконечно малой последовательности и последовательности, не являющейся бесконечно малой. Запишите их так, чтобы кванторы существования шли в начале формулы.

**Задача 26.2.** Для последовательности  $\{\alpha_n\}$  укажите какой-нибудь номер  $N$ , начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство  $|\alpha_n| < \varepsilon$ , если

$$\begin{array}{lll} \text{(а)} \alpha_n = \frac{1}{n}; & \text{(в)} \alpha_n = 0,99^n; & \text{(д)} \alpha_n = \frac{2n+3}{n^2+2n-1}; \\ \text{(б)} \alpha_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^3}; & \text{(г)} \alpha_n = \frac{2^n}{n!}; & \text{(е)} \alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \end{array}$$

**Задача 26.3.** Верно ли, что (а) сумма; (б) разность; (в) произведение; (г) отношение бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.

**Задача 26.4.** Пусть последовательности  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  являются бесконечно малыми, а последовательность  $\{\gamma_n\}$  такова, что  $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$ . Докажите, что тогда последовательность  $\{\gamma_n\}$  также является бесконечно малой.

**Задача 26.5.** Верно ли, что последовательность  $\{\alpha_n\}$  с отличными от нуля членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность  $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$  является бесконечно большой?

**Задача 26.6.** (а) Верно ли, что последовательность  $\{\alpha_n\}$  положительными членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность  $\{\alpha_n^2\}$  является бесконечно малой? (б) Верно ли аналогичное утверждение для последовательностей  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\sqrt[3]{\alpha_n}\}$ ?

**Задача 26.7.** Последовательности  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  бесконечно малые, а последовательность  $\{\gamma_n\}$  такова, что  $\gamma_{2n-1} = \alpha_n$ ,  $\gamma_{2n} = \beta_n$  при любом натуральном  $n$ . Является ли последовательность  $\{\gamma_n\}$  бесконечно малой?

**Задача 26.8.** Одна последовательность бесконечно малая, а другая ограниченная. Что можно сказать о (а) сумме; (б) произведении; (в) отношении этих последовательностей?

**Задача 26.9.** Решите предыдущую задачу в случае, если одна из последовательностей бесконечно малая, а другая бесконечно большая.

**Задача 26.10.** Докажите, пользуясь предыдущими задачами, что следующие последовательности являются бесконечно малыми:

$$\begin{array}{lll} \text{(а)} \frac{n^5+3}{n^{10}}; & \text{(б)} \frac{3n^6+2n^4-n}{n^9+7n^5-5n^2-2}; & \text{(в)} \sqrt{\frac{|\sin 3n + \cos 7n|}{2n^2+3n}}; \text{(г)} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}; \end{array}$$

**Задача 26.11.** Любую ли последовательность можно представить в виде отношения двух бесконечно малых последовательностей?

**Задача 26.12.** По последовательности  $\{\alpha_n\}$  построили последовательность  $\{\beta_n\}$  так, что  $\beta_n = \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_n}{2}$  при любом натуральном  $n$ . Докажите, что если последовательность  $\{\beta_n\}$  оказалась бесконечно малой, то и последовательность  $\{\alpha_n\}$  также является бесконечно малой.