Последовательности

Символом 👻 обозначены задачи, при решении которых могут возникать непреодолимые трудности. Если Вы долго думаете над задачей без каких-то продвижений, стоит обратиться к ближайшему преподавателю математического анализа.

Определение. Пусть имеется некоторое непустое множество U. Любая функция $a\colon \mathbb{N} \to U$ называется *последовательностью элементов множества* U. Элементы последовательности обычно обозначают так: $a_1 = a(1), a_2 = a(2), \ldots, a_n = a(n), \ldots$, а саму последовательность обозначают $\{a_n\}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Определение. *Числовой последовательностью* называют последовательность элементов какого-нибудь фиксированного множества чисел $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Обычно, если иное специально не оговорено, говоря о числовых последовательностях, мы будем иметь в виду $\mathbb{R}$-последовательности, реже $\mathbb{C}$-последовательности.
Пример 24.1. Последовательности полных графов разного размера $\{K_n\}$.
Пример 24.2. Последовательность, в которой значение каждого элемента на единицу больше его номера, можно записать как $\{n+1\}$ или $\{a_n\}$, где $a_n = n + 1$.
Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $a_n < C$.
Задача 24.1. Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.
Задача 24.2. Приведите пример последовательности **(а)** ограниченной сверху, но не ограниченной снизу; **(б)** не ограниченной ни сверху, ни снизу.
Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.
Задача 24.3. **(а)** Дайте определение ограниченной последовательности, корректное для комплексных последовательностей и эквивалентное предыдущему для вещественных. **(б)** Каков геометрический смысл этих определений?[*]
Задача 24.4. Приведите пример ограниченной вещественной последовательности, у которой **(а)** есть и наибольший, и наименьший член; **(б)** есть наибольший, но нет наименьшего члена; **(в)** есть наименьший, но нет наибольшего члена; **(г)** нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.
Задача 24.5👻. Исследуйте на ограниченность следующие последовательности, а также изобразите их на координатной плоскости:

(а) $a_n = \dfrac{200-3n}{101-2n}$; **(в)** $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; **(д)** $a_n = 1,01^n$;
(е) $a_n = \frac{1,01^n}{n}$;
(б) $a_n = \dfrac{10+10n-n^2}{n+1}$; **(г)** $a_n = \dfrac{100^n}{n!}$; **(ж)** $a_n = n\sin n$;
(з) $a_n = (3-2i)^n$;

Определение. Суммой последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n = a_n + b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом определяют разность, произведение, отношение двух последовательностей.
Задача 24.6. Известно, что **(а)** сумма; **(б)** произведение двух последовательностей — ограниченная последовательность. Правда ли, что хотя бы одна из исходных последовательностей ограничена?
Задача 24.7. Верно ли, что **(а)** сумма; **(б)** разность; **(в)** произведение; **(г)** отношение ограниченных последовательностей — ограниченная последовательность?
Задача 24.8👻. Являются ли ограниченными последовательности:

[*]Эту задачу можно сдавать устно.

(а) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$;

(б) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$;

(в) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$;

(г) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$;

(д) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$;

Задача 24.9. Являются ли ограниченными следующие последовательности:

(а) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$;

(б) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$;

(в) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$;

(г) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

Определение. Пусть имеется некоторое множество U (*универсум*) и некоторое утверждение (*предикат*) A про его элементы. То есть для каждого $a \in U$ мы знаем либо, что $A(a)$ верно, либо, что неверно. Для построения стандартных математических суждений принято использовать *кванторы всеобщности и существования* следующим образом

$\forall a \in U \quad A(a)$ читают, как «Для любого $a \in U$ верно $A(a)$»,

$\exists a \in U \quad A(a)$ читают, как «Существует $a \in U$ такой, что верно $A(a)$».

Иногда также выделяют квантор «существует единственный» $\exists!$.

Пример 24.3.

(а) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y = x + 1$.

(б) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant |y|$.

(в) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y$.

(г) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y < x$.

Задача 24.10 *(функция Сколема)*. **(а)** В каких утверждениях из примера можно поменять местами кванторы всеобщности и существования? В каких нельзя? Почему? **(б)** Докажите, что любое утверждение вида $\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad C(a, b)$ можно переделать так, чтобы квантор существования стоял в начале.[†] **(в)** Докажите, что любое утверждение можно переписать так, чтобы сначала шли кванторы существования, затем кванторы всеобщности, а затем некоторый предикат.

Задача 24.11. Запишите с помощью кванторов определения ограниченной снизу, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей последовательностей.

Определение. Последовательность называется *монотонной*, если она является неубывающей либо невозрастающей. Последовательность называется *строго монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей. Очевидно, что строго монотонная последовательность является монотонной.

Задача 24.12. Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая **(а)** не является возрастающей; **(б)** не является ограниченной сверху; **(в)** не является ограниченной; **(г)** не является монотонной. Запишите их с помощью кванторов.

Задача 24.13. Про каждую из последовательностей задачи 24.5 выясните, является ли она монотонной, и найдите, если это возможно, ее наибольший и наименьший члены.

Задача 24.14. Про каждую из последовательностей задачи 24.9 выясните, является ли она монотонной, и найдите, если это возможно, ее наибольший и наименьший члены.

Задача 24.15. Есть ли последовательность, члены которой найдутся в любом интервале числовой оси?

Задача 24.16. **(а)** Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: для любого натурального n пусть a_n равно сумме всех чисел вида $\frac{1}{k}$, где k — натуральное, $1 \leqslant k \leqslant n$. Ограничена ли последовательность $\{a_n\}$? **(б)** Последовательность $\{b_n\}$ зададим так: для любого натурального n пусть b_n равно сумме всех чисел вида $\frac{1}{k}$, где k — натуральное, $1 \leqslant k \leqslant n$ и в десятичной записи числа k нет цифры 9. Ограничена ли последовательность $\{b_n\}$?

[†] Подсказка: внимательно прочитайте первое слово названия задачи.