

## Топология прямой: Начало

**Задача 28.1 (лемма о вложенных отрезках).** Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

**Задача 28.2.** Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

**Задача 28.3.** Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти (а) 5м? (б) 10м? (в) 12м?

**Задача 28.4 (лемма о конечном покрытии).** Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок\*.

**Задача 28.5.** Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?

**Задача 28.6.** Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?

**Задача 28.7.** Всегда ли из покрытия отрезка (а) конечным; (б) любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?

**Определение.** Для любого положительного числа  $\varepsilon$  будем называть  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  интервал  $D_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$  длины  $2\varepsilon$  с центром в  $x_0$ .

**Определение.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется *внутренней точкой* множества  $M \subset \mathbb{R}$ , если у неё есть  $\varepsilon$ -окрестность, целиком содержащаяся в  $M$ .

**Определение.** Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря,  $U \subset \mathbb{R}$  открыто, если  $\forall u \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(u) \subset U$ . Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

**Задача 28.8.** Убедитесь, что промежутки (а)  $(-\infty, a)$ ; (б)  $(a, +\infty)$ ; (в)  $(a, b)$ ; открыты.

**Задача 28.9.** Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

**Задача 28.10.** Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

**Задача 28.11.** (а) Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. (б) Так ли это для пересечений бесконечных наборов?

**Задача 28.12.** Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа  $(-\infty, a)$ ,  $(a, +\infty)$  и  $(-\infty, +\infty)$ .

**Определение.** Точка  $a \in M \subset \mathbb{R}$  называется *изолированной точкой* множества  $M$ , если некоторая её  $\varepsilon$ -окрестность не содержит никаких других точек из  $M$ .

**Определение.** Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

**Задача 28.13.** Может ли бесконечное дискретное множество быть (а) ограниченным? (б) несчётным?

---

\*Подсказка: воспользуйтесь леммой о вложенных отрезках.