Speedrun. Последовательности

Символом 👻 обозначены задачи, при решении которых могут возникать непреодолимые трудности. Если Вы долго думаете над задачей без каких-то продвижений, стоит обратиться к ближайшему преподавателю математического анализа.

Определение. Пусть имеется некоторое непустое множество U. Любая функция $a\colon \mathbb{N} \to U$ называется *последовательностью элементов множества* U. Иначе говоря, каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие элемент последовательности $a(n) \in U$, который обычно обозначают через a_n. Саму последовательность обозначают $\{a_n\}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. *Числовой последовательностью* называют последовательность элементов какого-нибудь фиксированного множества чисел $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Обычно, если иное специально не оговорено, говоря о числовых последовательностях, мы будем иметь в виду $\mathbb{R}$-последовательности.

Пример.
1. Последовательность полных графов разного размера $\{K_n\}$.
2. Последовательность $2, 3, 4, 5\ldots$, в которой значение каждого элемента на единицу больше его номера, можно записать как $\{n+1\}$ или $\{a_n\}$, где $a_n = n+1$.
3. Последовательность $1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8\ldots$ можно задать формулой $b_n = \begin{cases} 1, \text{если } n \text{ нечётное;} \\ n, \text{если } n \text{ чётное.} \end{cases}$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $a_n < C$.

Задача 🚗.1. Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.

Задача 🚗.2. Приведите пример последовательности **(а)** ограниченной сверху, но не ограниченной снизу; **(б)** не ограниченной ни сверху, ни снизу.

Определение. Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Задача 🚗.3. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда для некоторого числа $C > 0$ при всех натуральных n выполнено неравенство $|a_n| < C$.

Задача 🚗.4. Приведите пример ограниченной вещественной последовательности, у которой **(а)** есть и наибольший, и наименьший член; **(б)** есть наибольший, но нет наименьшего члена; **(в)** есть наименьший, но нет наибольшего члена; **(г)** нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Пример.
1. Исследуем на ограниченность последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Так как $a_n > 0$, то она ограничена снизу. Докажем теперь, что $a_n \leqslant a_4$ для всех n — из этого будет следовать ограниченность сверху. Сравним a_n и a_{n+1}: $\frac{n^2}{2^n} \vee \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, $2n^2 \vee (n+1)^2$, $n^2 - 2n - 1 \vee 0$. Так как корни квадратного уравнения в левой части равны $1 \pm \sqrt{2}$ и $n \in N$, получим, что $a_n < a_{n+1}$при $n \leqslant 3$ и $a_n \geqslant a_{n+1}$ при $n \geqslant 4$, то есть a_4 больше всех остальных элементов последовательности.
2. Один из способов доказать, что последовательность не ограничена сверху — оценить её снизу чем-то более простым, не ограниченным сверху. Так, докажем, что последовательность $a_n = n + \sin n$ не ограничена сверху. Ясно, что для любого n выполнено $n - 1 \leqslant a_n$. Если бы для всех n было $a_n < C$, то и $n - 1 \leqslant a_n < C$, но это не так, например, для $n = \lceil C \rceil + 2$.

Задача 🚗.5👻. Исследуйте на ограниченность следующие последовательности, а также изобразите их на координатной плоскости: **(а)** $a_n = \frac{100^n}{n!}$; **(б)** $a_n = 1{,}01^n$.

Указание к задаче 🚗.5: **(а)** сравните a_n и a_{n+1}; **(б)** $(1 + 0{,}01)^n = \ldots + \ldots +$ что-то неотрицательное.

Определение. Суммой последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется такая последовательность $\{c_n\}$, что $c_n = a_n + b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом определяют разность, произведение, отношение двух последовательностей.

Задача 🚗.6👻. Приведите пример двух последовательностей, хотя бы одна из которых не ограниченная, но **(а)** сумма; **(б)** произведение которых — ограниченная последовательность.

Пример. Докажем, что сумма ограниченных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ является ограниченной последовательностью. Так как $\{a_n\}$ ограничена, то существует такое число $A > 0$, что для всех натуральных n выполнено $|a_n| < A$, или $-A < a_n < A$. Аналогично существует такое число $B > 0$, что для всех натуральных n выполнено $-B < b_n < B$. Тогда для всех натуральных n, сложив неравенства, получим $a_n + b_n < A + B$ и $a_n + b_n > -A - B$, то есть последовательность $\{a_n + b_n\}$ ограничена.

Задача 🚗.7. Верно ли, что **(а)** разность; **(б)** произведение; **(в)** отношение ограниченных последовательностей — ограниченная последовательность?

Задача 🚗.8👻. Являются ли ограниченными последовательности: **(а)** $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$; **(б)** $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$; **(в)** $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$; **(г)** $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$; **(д)** $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$.

Указание к задаче 🚗.8: **(а)**, **(в)** — найдите формулу; **(б)** оцените слагаемые снизу степенями 2; **(г)**, **(д)** $\Leftarrow$ **(в)**.

Определение. Пусть имеется некоторое множество U (*универсум*) и некоторое утверждение (*предикат*) A про его элементы. То есть для каждого $a \in U$ мы знаем либо, что $A(a)$ верно, либо, что неверно. Для построения стандартных математических суждений принято использовать *кванторы всеобщности и существования* следующим образом

$\forall a \in U \quad A(a)$ читают как «для любого $a \in U$ верно $A(a)$»,

$\exists a \in U \quad A(a)$ читают как «существует такой $a \in U$, что верно $A(a)$».

Иногда также выделяют квантор «существует единственный» $\exists!$.

Пример.

1. Рассмотрим суждение «$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y = x + 1$» = «для любого натурального числа x существует на единицу большее его число y». Оно верно. Заметим, что если поменять в нём местами два квантора, то оно перестанет быть верным: «$\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad y = x + 1$» = «есть число y, на единицу большее любого другого числа x».
2. «$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant |y|$» = «есть число x, не превосходящее модуля любого другого числа $|y|$». Действительно, в качестве такого x можно взять 0, и для любого y будет выполнено $0 \leqslant |y|$.
3. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y$.
4. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y < x$.

Задача 🚗.9. В каких утверждениях 2.–4. из примера можно поменять местами кванторы всеобщности и существования, а в каких нельзя? Почему?

Задача 🚗.10. Запишите с помощью кванторов определения ограниченной снизу, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей последовательностей.

Определение. Последовательность называется *монотонной*, если она является неубывающей либо невозрастающей. Последовательность называется *строго монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей. Очевидно, что строго монотонная последовательность является монотонной.

Задача 🚗.11. Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая **(а)** не является возрастающей; **(б)** не является ограниченной сверху; **(в)** не является монотонной. Запишите их с помощью кванторов.

Задача 🚗.12. Про каждую из последовательностей задачи 🚗.5 выясните, является ли она монотонной, и найдите, если это возможно, ее наибольший и наименьший члены.

Определение. Последовательность называется *неограниченной*, если она не является ограниченной.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого числа $C > 0$ найдётся такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n| > C$.

Задача 🚗.13. Сформулируйте, не используя отрицания, определения неограниченной и бесконечно большой последовательностей с помощью кванторов. Верно ли, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной? А наоборот? Рассмотрим множество неограниченных и множество бесконечно больших последовательностей. Пересекаются ли они? Является ли одно из них подмножеством другого?

Задача 🚗.14. Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая **(а)** не является неограниченной; **(б)** не является бесконечно большой. Запишите их с помощью кванторов.

Задача 🚗.15. Последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая. Верно ли, что она монотонная?

Задача 🚗.16. Верно ли, что **(а)** сумма; **(б)** разность; **(в)** произведение; **(г)** отношение бесконечно больших последовательностей — бесконечно большая последовательность? **(д)** Докажите, что сумма, разность, произведение и отношение неограниченных последовательностей — не обязательно неограниченная последовательность.

Определение. Пусть $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $b_i = a_{n_i}$, называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример. Для $\{a_n\} = 0, 3, 0, 6, 0, 9, 0, \dots$ и $\{n_i\} = \{2i\} = 2, 4, 6, \dots$ получаем подпоследовательность $\{a_{n_i}\} = a_2, a_4, a_6 \dots = 3, 6, 9 \dots = \{3i\}$.

Пример. Докажем, что любая подпоследовательность монотонной последовательности монотонна. Так как для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено $n_i < n_{i+1}$, имеем цепочку последовательных натуральных чисел $n_i, n_i + 1, n_i + 2, \dots, n_{i+1}$. Так как $\{a_n\}$ монотонна, её элементы с соответствующими номерами удовлетворяют неравенству $a_{n_i} \leqslant a_{n_i+1} \leqslant \dots \leqslant a_{n_{i+1}}$ (или тому же с $\geqslant$). Отсюда $a_{n_i} \leqslant a_{n_{i+1}}$ для всех i (или $\geqslant$), то есть подпоследовательность $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ монотонна.

Задача 🚗.17. **(а)** Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной последовательности ограничена. **(б)** Докажите, что для неограниченных это не верно. **(в)** Верно ли для бесконечно больших?

Из предыдущих задачи и примера видно, что некоторые свойства последовательностей не теряются при переходе к подпоследовательностям. Кроме того, перейдя к подпоследовательности, какие-то полезные свойства можно приобрести. Сформулируем без доказательства два соответствующих утверждения.

Факт 1: Любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

Факт 2: Любая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.

Задача 🚗.18. **(а)** Придумайте какую-нибудь последовательность, не монотонную начиная с любого номера, и найдите в ней монотонную подпоследовательность (факт 1). **(б)** Возьмите какую-нибудь неограниченную последовательность, которая не является бесконечно большой, и найдите в ней бесконечно большую подпоследовательность (факт 2).

Задача 🚗.19. **(а)** Докажите, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, в котором находится бесконечно много членов этой последовательности. **(б)** Докажите, что если для некоторой последовательности такого отрезка длины 1 найти нельзя, то эта последовательность бесконечно большая.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N, что при любом натуральном $n > N$ будет верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Задача 🚗.20. Запишите в кванторах определение бесконечно малой последовательности и последовательности, не являющейся бесконечно малой.

Задача 🚗.21. Для последовательности $\{\alpha_n\}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ укажите какой-нибудь номер N, начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если **(а)** $\alpha_n = \frac{1}{n}$; **(б)** $\alpha_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^3}$; **(в)** 👻 $\alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Пример. Докажем, что сумма двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой последовательностью. Возьмём проивольное $\varepsilon > 0$. По определению для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ выполнено $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, то есть $-\frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Для того же ε есть номер $M \in \mathbb{N}$, что для всех $n > M$ выполнено $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, то есть $-\frac{\varepsilon}{2} < \beta_n < \frac{\varepsilon}{2}$ (номер M вообще говоря другой!). Возьмём номер $K = \max(N, M)$. При любом $n > K$ выполнены оба двойных неравенства, и, складывая отдельно правые и левые, получим

$$-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n + \beta_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итого мы для любого $\varepsilon > 0$ нашли номер $K \in \mathbb{N}$, такой что для всех $n > k$ выполнено $|\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, что и означает, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ бесконечно малая.

Задача 🚗.22. Верно ли, что **(а)** разность; **(б)** произведение; **(в)** отношение бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность?

Задача 🚗.23. Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются бесконечно малыми, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\alpha_n \leqslant \gamma_n \leqslant \beta_n$. Докажите, что тогда последовательность $\{\gamma_n\}$ также является бесконечно малой.

Задача 🚗.24. Докажите, что последовательность $\{\alpha_n\}$ с отличными от нуля членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ является бесконечно большой.

Задача 🚗.25. Докажите, что последовательность $\{\alpha_n\}$ положительными членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n^2\}$ является бесконечно малой.

Задача 🚗.26. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\gamma_{2n-1} = \alpha_n$, $\gamma_{2n} = \beta_n$ при любом натуральном n. Является ли последовательность $\{\gamma_n\}$ бесконечно малой?

Задача 🚗.27. Одна последовательность бесконечно малая, а другая ограниченная. Что можно сказать о **(а)** сумме; **(б)** произведении; **(в)** отношении этих последовательностей? (Обязательно ли они бесконечно малые/ограниченные/бесконечно большие?)

Задача 🚗.28. Решите предыдущую задачу в случае, если одна из последовательностей бесконечно малая, а другая бесконечно большая.

Задача 🚗.29👻. Докажите, пользуясь предыдущими задачами, что следующие последовательности являются бесконечно малыми: **(а)** $\frac{n^5+3}{n^{10}}$; **(б)** $\frac{3n^6+2n^4-n}{n^9+7n^5-5n^2-2}$; **(в)** $\sqrt{\frac{|\sin 3n + \cos 7n|}{2n^2+3n}}$; **(г)** $\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$.

Указание к задаче 🚗.29: Что можно сказать про отношение двух бесконечно больших последовательностей? Избавиться от этой ситуации можно, поделив на что-нибудь одновременно и числитель, и знаменатель.