

## Последовательности

Символом  $\P$  обозначены задачи, при решении которых могут возникать непреодолимые трудности. Если Вы долго думаете над задачей без каких-то продвижений стоит обратиться к ближайшему преподавателю математического анализа.

**Определение.** Пусть имеется некоторое непустое множество  $U$ . Любая функция  $a: \mathbb{N} \rightarrow U$  называется *последовательностью элементов множества  $U$* . Элементы последовательности обычно обозначают так:  $a_1 = a(1), a_2 = a(2), \dots, a_n = a(n), \dots$ , а саму последовательность обозначают  $\{a_n\}$  или  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Определение.** Числовой последовательностью называют последовательность элементов какого-нибудь фиксированного множества чисел  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Обычно, если иное специально не оговорено, говоря о числовых последовательностях, мы будем иметь в виду  $\mathbb{R}$ -последовательности, реже  $\mathbb{C}$ -последовательности.

**Пример 24.1.** Последовательности полных графов разного размера  $\{K_n\}$ .

**Пример 24.2.** Последовательность, в которой значение каждого элемента на единицу больше его номера, можно записать как  $\{n+1\}$  или  $\{a_n\}$ , где  $a_n = n+1$ .

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной сверху, если найдётся такое число  $C$ , что при всех натуральных  $n$  будет выполнено неравенство  $a_n < C$ .

**Задача 24.1.** Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.

**Задача 24.2.** Приведите пример последовательности (а) ограниченной сверху, но не ограниченной снизу; (б) не ограниченной ни сверху, ни снизу.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.

**Задача 24.3.** (а) Дайте определение ограниченной последовательности, корректное для комплексных последовательностей и эквивалентное предыдущему для вещественных. (б) Каков геометрический смысл этих определений?

**Задача 24.4.** Приведите пример ограниченной вещественной последовательности, у которой (а) есть и наибольший, и наименьший член; (б) есть наибольший, но нет наименьшего члена; (в) есть наименьший, но нет наибольшего члена; (г) нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

**Задача 24.5.**  $\P$  Исследуйте на ограниченность следующие последовательности, а также изобразите их на координатной плоскости:

(а) $a_n = \frac{200 - 3n}{101 - 2n};$	(в) $a_n = \frac{n^2}{2n};$	(д) $a_n = 1,01^n;$
(б) $a_n = \frac{10 + 10n - n^2}{n + 1};$	(г) $a_n = \frac{100^n}{n!};$	(е) $a_n = \frac{1,01^n}{n};$
		(ж) $a_n = n \sin n;$
		(з) $a_n = (3 - 2i)^n;$

**Определение.** Суммой последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  называется последовательность  $\{c_n\}$  такая, что  $c_n = a_n + b_n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Аналогичным образом определяют разность, произведение, отношение двух последовательностей.

**Задача 24.6.** Известно, что (а) сумма; (б) произведение двух последовательностей — ограниченная последовательность. Правда ли, что хотя бы одна из исходных последовательностей ограничена?

**Задача 24.7.** Верно ли, что (а) сумма; (б) разность; (в) произведение; (г) отношение ограниченных последовательностей — ограниченная последовательность?

**Задача 24.8.**  $\P$  Являются ли ограниченными последовательности:

$$(a) \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i};$$

$$(b) \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)};$$

$$(d) \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!};$$

$$(б) \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i};$$

$$(г) \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2};$$

**Задача 24.9** ☹. Являются ли ограниченными следующие последовательности:

$$(a) \quad a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}; \quad (b) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(б) \quad a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}; \quad (г) \quad a_n = \sqrt[n]{n};$$

**Определение.** Пусть имеется некоторое множество  $U$  (*универсум*) и некоторое утверждение (*предикат*)  $A$  про его элементы. То есть для каждого  $a \in U$  мы знаем либо, что  $A(a)$  верно, либо, что неверно. Для построения стандартных математических суждений принято использовать *кванторы всеобщности и существования* следующим образом

$\forall a \in U \quad A(a)$  читают, как «Для любого  $a \in U$  верно  $A(a)$ »,

$\exists a \in U \quad A(a)$  читают, как «Существует  $a \in U$  такой, что верно  $A(a)$ ».

Иногда также выделяют квантор «существует единственный»  $\exists!$ .

**Пример 24.3.**

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y = x + 1.$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

$$(б) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leq |y|.$$

$$(г) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y < x.$$

**Задача 24.10 (функция Сколема).** (а) В каких утверждениях из примера можно поменять местами кванторы всеобщности и существования? В каких нельзя? Почему? (б) Докажите, что любое утверждение вида  $\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad C(a, b)$  можно переделать так, чтобы квантор существования стоял в начале.\* (в) Докажите, что любое утверждение можно переписать так, чтобы сначала шли кванторы существования, затем кванторы всеобщности, а затем некоторый предикат.

**Задача 24.11.** Запишите с помощью кванторов определения ограниченной снизу, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей последовательностей.

**Определение.** Последовательность называется *монотонной*, если она является неубывающей либо невозрастающей. Последовательность называется *строго монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей. Очевидно, что строго монотонная последовательность является монотонной.

**Задача 24.12.** Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая (а) не является возрастающей; (б) не является ограниченной сверху; (в) не является ограниченной; (г) не является монотонной. Запишите их с помощью кванторов.

**Задача 24.13.** Про каждую из последовательностей задачи 24.5 выясните, является ли она монотонной, и найдите, если это возможно, ее наибольший и наименьший члены.

**Задача 24.14.** Про каждую из последовательностей задачи 24.9 выясните, является ли она монотонной, и найдите, если это возможно, ее наибольший и наименьший члены.

**Задача 24.15.** Есть ли последовательность, члены которой найдутся в любом интервале числовой оси?

**Задача 24.16.** (а) Определим последовательность  $\{a_n\}$  следующим образом: для любого натурального  $n$  пусть  $a_n$  равно сумме всех чисел вида  $\frac{1}{k}$ , где  $k$  — натуральное,  $1 \leq k \leq n$ . Ограничена ли последовательность  $\{a_n\}$ ? (б) Последовательность  $\{b_n\}$  зададим так: для любого натурального  $n$  пусть  $b_n$  равно сумме всех чисел вида  $\frac{1}{k}$ , где  $k$  — натуральное,  $1 \leq k \leq n$  и в десятичной записи числа  $k$  нет цифры 9. Ограничена ли последовательность  $\{b_n\}$ ?

\*Подсказка: внимательно прочитайте первое слово названия задачи.