

## Топология прямой: Возрождение легенды

**Определение.** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется *предельной* точкой множества  $M \subset \mathbb{R}$ , если любая её  $\varepsilon$ -окрестность  $D_\varepsilon(x_0)$  содержит какую-нибудь точку  $x \in M$ , отличную от  $x_0$ .

**Задача 29.1.** Постройте бесконечное множество  $M \subset \mathbb{R}$ , множество предельных точек которого: (а) пусто; (б) состоит из одной точки; (в) состоит из двух точек; (г) совпадает с  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ .

**Задача 29.2.** Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида  $1/k$  с  $k \in \mathbb{N}$ ?

**Задача 29.3.** Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

**Определение.** Множество  $Z \subset \mathbb{R}$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет).

**Определение.** Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

**Задача 29.4.** Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и луч — нет.

**Задача 29.5.** (а) Бывают ли дискретные незамкнутые множества? (б) А бесконечные дискретные компакты?

**Задача 29.6.** (а) Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? (б) Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в  $\mathbb{R}$ .

**Задача 29.7.** Докажите, что множество  $Z \subset \mathbb{R}$  замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение  $\mathbb{R} \setminus Z$  открыто.

**Задача 29.8.** Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

**Задача 29.9.** (а) Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. (б) Так ли это для бесконечных наборов?

**Задача 29.10 (лемма о вложенных компактах).** Докажите, что любая последовательность вложенных компактов  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$  имеет непустое пересечение:  $\bigcap K_n \neq \emptyset$ .

**Задача 29.11 (лемма о конечном покрытии).** Докажите, что  $K \subset \mathbb{R}$  компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие\*.

### Канторово множество

**Определение.** Определим по индукции последовательность компактов  $K_n \subset [0, 1]$  следующим образом. Каждый  $K_n$  является объединением  $2^n$  отрезков:  $K_{n+1}$  получается из  $K_n$  выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в  $K_n$ , а  $K_0 = [0, 1]$ . Пересечение  $\mathfrak{K} := \bigcap_n K_n$  называется *канторовым множеством*<sup>†</sup>. Иначе  $\mathfrak{K} \subset [0, 1]$  можно определить как множество всех чисел  $x \in [0, 1]$ , которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).

**Задача 29.12.** Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

**Задача 29.13.** Содержит ли канторово множество: (а) интервалы? (б) изолированные точки?

### Конденсация несчётных множеств

**Определение.** Элемент  $a \in M$  произвольного несчётного множества  $M \subset \mathbb{R}$  называется его точкой *конденсации*, если при всех  $\varepsilon > 0$   $D_\varepsilon(a) \cap M$  несчётно.

**Задача 29.14\*.** Докажите, что множество точек  $b \in M$ , не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.

\*Подсказка: Сравните эти две задачи с задачами ?? и ??.

<sup>†</sup> в честь Георга Кантора

**Задача 29.15\*.** Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

**Задача 29.16\*.** Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.

**Задача 29.17\*.** Докажите, что любое замкнутое подмножество в  $\mathbb{R}$  или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.