Счёт

Задача 31.1. Найдите предел последовательности: **(а)** $1 + 0{,}1^n$; **(б)** $\frac{5n+4}{6n+15}$; **(в)** $\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$; **(г)** $1+q+q^2+\cdots+q^n$; **(д)** $\sqrt[n]{2}$.

Задача 31.2. Вычислите пределы (при $n \to +\infty$) или докажите расходимость последовательностей: **(а)** $\frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$, **(б)** $\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{2n-3}$, **(в)** $\frac{\sqrt{1+2n}-3}{\sqrt{n}-2}$, **(г)** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$, **(д)** $\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-5n}$, **(е)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$, **(ж)** $\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}$, **(з)** $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}$,

Задача 31.3*(у)*. Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Задача 31.4. **(а)** Верно ли, что последовательность $a_n = \dfrac{\cos 2}{2}+\dfrac{\cos 2^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\cos 2^n}{2^n}$ монотонна при $n>1$? **(б)** Докажите, что данная последовательность имеет предел.

Задача 31.5. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{5}$. **(а)** Докажите, что данная последовательность имеет предел и **(б)** найдите этот предел.

Задача 31.6*(Итерационная формула Герона)*. Пусть x_1 — произвольное положительное число, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0$. Докажите, что тогда при $n \geqslant 2$ последовательность $\{x_n\}$ **(а)** убывающая, **(б)** ограниченная снизу числом $\sqrt{a}$, **(в)** имеет предел, **(г)** причём $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$. **(д)** Для $a = 10$, $x_1 = 1$ найдите такое n, что $|x_n - \sqrt{a}| < 10^{-5}$.

Задача 31.7*(Теорема Штольца)*. Пусть последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей бесконечно большой последовательностью с положительными членами, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = L$. Докажите, что тогда существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = L$.

Задача 31.8. Пусть $P(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ и $Q(n) = b_l n^l + \cdots + b_1 n + b_0$ два многочлена степеней k и l соответственно, причём $\forall n \in \mathbb{N} \quad Q(n) \neq 0$. Докажите, что*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } l > k, \\ \dfrac{a_k}{b_l}, & \text{если } l = k, \\ +\infty, & \text{если } l < k. \end{cases}$$

Задача 31.9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

Задача 31.10*(Уравнение Кеплера)*. † Для решения уравнения $x - \alpha\sin x = C$, где $0<\alpha<1$, строят последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = C$, $x_{n+1} = C + \alpha \sin x_n$. Докажите, что **(а)** уравнение Кеплера имеет не более одного корня; **(б)** последовательность $\{x_n\}$ имеет предел; **(в)** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ является решением уравнения Кеплера.

Задача 31.11*([:|||:])*. Докажите равенства: **(а)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$, $a>1$, $k\in\mathbb{N}$; **(б)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$; **(в)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k q^n = 0$, $q<1$, $k \in \mathbb{N}$; **(г)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, $a>0$; **(д)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$; **(е)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

---

*Последнее надо понимать в том смысле, что $\frac{P(n)}{Q(n)}$ — бесконечно большая.

†Данное уравнение появилось в работах И. Кеплера (1571–1630) при изучении движения планет по эллиптическим орбитам (т.н. задача двух тел).

Число Непера

Определение. Введём несколько обозначений:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Задача 31.12. **(а)** Докажите, что при фиксированном $i > 0$ последовательность $\frac{n-i}{n}$ возрастает. **(б)** Докажите, что a_n возрастает[‡]. **(в)** Докажите, что b_n убывает[§]. **(г)** Докажите, что a_n и b_n ограничены. **(д)** Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Определение. Пределом последовательностей a_n и b_n является число $e = 2{,}7182818284590\dots$, которое называется *числом Непера*.

Задача 31.13. Докажите, что последовательность c_n **(а)** имеет предел и **(б)** этот предел равен e.

Задача 31.14*. **(а)** Докажите, что для последовательности c_n верно неравенство $0 < e - c_n < \frac{1}{n\cdot n!}$. **(б)** С помощью данного неравенства докажите, что число e является иррациональным.

Задача 31.15. Найдите пределы **(а)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$; **(б)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}$; **(в)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Задача 31.16. Докажите неравенства: **(а)** $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$; **(б)** $\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad e^\alpha > 1+\alpha$.

Простые предельные теоремы

Задача 31.17 ***(Теорема Бернулли).*** Пусть $A_{m,n,p}$ — событие, что среди n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p ровно m закончились успешно. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left[A_{m,n,p} \mid |\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\right] = 1.$$

Задача 31.18 ***(Закон Больших Чисел).*** Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность попарно независимых случайных величин, для всех i $\mathbb{E}\,X_i^2$ — конечно, $m = \mathbb{E}\,X_i$, $\sigma^2 = \mathbb{E}\,X_i^2 - (\mathbb{E}\,X_i)^2$. Рассмотрим *выборочное среднее*:

$$\overline{X}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left[|\overline{X}^{(n)} - m| \geqslant 0\right] = 0.$$

[‡] «В чём сила, брат?»

[§] Почему летают самолёты?