Бесконечно Большие Последовательности

Определение. Последовательность называется *неограниченной*, если она не является ограниченной.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого числа $C > 0$ найдётся такое число k, что при всех натуральных n, больших k, будет верно неравенство $|a_n| > C$.

Задача 25.1. Сформулируйте, не используя отрицания, определения неограниченной и бесконечно большой последовательностей с помощью кванторов. Верно ли, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной? А наоборот? Рассмотрим множество неограниченных и множество бесконечно больших последовательностей. Пересекаются ли они? Является ли одно из них подмножеством другого?

Задача 25.2. Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая **(а)** не является неограниченной; **(б)** не является бесконечно большой. Запишите их с помощью кванторов.

Задача 25.3. Последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая. Верно ли, что она монотонная? А последовательность $\{|a_n|\}$?

Задача 25.4. Является ли бесконечно большой последовательность, равная **(а)** сумме; **(б)** разности; **(в)** произведению; **(г)** отношению бесконечно больших последовательностей?

Задача 25.5. Изменятся ли ответы на вопросы предыдущей задачи, если везде заменить бесконечно большие последовательности на неограниченные?

Определение. Пусть $\{n_i\}$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_i\}$, где $b_i = a_{n_i}$, называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 25.6. **(а)** Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной последовательности ограничена. Останется ли верным аналогичное утверждение в случае **(б)** монотонной; **(в)** неограниченной; **(г)** бесконечно большой последовательности?

Задача 25.7. Докажите, что **(а)** любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность; **(б)** любая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.

Задача 25.8. **(а)** Докажите, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, в котором находится бесконечно много членов этой последовательности. **(б)** Верно ли, что если для некоторой последовательности такого отрезка длины 1 найти нельзя, то эта последовательность бесконечно большая?

Задача 25.9. Докажите, что для любой ограниченной монотонной последовательности найдётся отрезок длины 1, в котором находятся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера.

Задача 25.10. Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга.

Задача 25.11. **(а)** Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ при любом натуральном n. Может ли эта последовательность быть неограниченной? **(б)** Тот же вопрос, если $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

Задача 25.12. **(а)** Придумайте такую последовательность натуральных чисел, что любая последовательность натуральных чисел является её подпоследовательностью. **(б)** Можно ли решить аналогичную задачу, если натуральные числа всюду заменить на рациональные числа? **(в)** А на действительные?

Задача 25.13. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причём единственным образом?

Задача 25.14. Докажите, что найдётся такое число $a > 0$, при котором дробные части всех чисел последовательности $\{a^n\}$ принадлежат отрезку $[1/3; 2/3]$.

Задача 25.15. **(а)** Докажите, что у всякой последовательности длины n^2+1 существует монотонная подпоследовательность длины $n+1$. **(б)** Останется ли верным утверждение задачи в случае последовательности длины n^2 при больших значениях n?