

## Комплексная арифметика

**Определение.** *Комплéксными\** числами будем называть формальные записи  $z = a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ . Множество таких чисел будем обозначать  $\mathbb{C}$ . Символ  $i$  называется *мнимой единицей*, число  $a$  — *действительной частью* комплексного числа  $z$  и обозначается  $\operatorname{Re} z$ , число  $b$  — *мнимой частью* комплексного числа  $z$  и обозначается  $\operatorname{Im} z$ . Комплексные числа складываются, вычитаются и перемножаются по тем же законам, по которым производятся операции с многочленами, при этом полагается, что  $i^2 = -1$ .

**Определение.** *Сопряжённым* к комплексному числу  $z$  называют комплексное число  $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ .

Везде далее под числом будем понимать комплексное число, если не оговорено иное.

**Задача 21.1.** Даны числа  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 4 - 3i$ . Найдите

- |                               |                   |                 |                   |                    |
|-------------------------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| (а) $\operatorname{Re} z_2$ ; | (в) $z_1 + z_2$ ; | (д) $z_1 z_2$ ; | (ж) $z_1 / z_2$ ; | (и) $z_1^{2017}$ . |
| (б) $\operatorname{Im} z_2$ ; | (г) $z_1 - z_2$ ; | (е) $1/z_1$ ;   | (з) $z_1^3$ ;     |                    |

**Задача 21.2.** Найдите два комплексных числа, сумма которых равна 4, а произведение 5.

**Задача 21.3.** (а) Найдите какое-нибудь число  $z$ , такое, что  $\operatorname{Im} z \neq 0$ ,  $\operatorname{Im} z^3 = 0$ . (б) Найдите все корни уравнения  $z^3 = 1$ .

**Задача 21.4.** Докажите, что

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (а) $\bar{\bar{z}} = z$ ;                  | (в) $\operatorname{Im}(\bar{z}z) = 0$ ;          | (д) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ ;   |
| (б) $\operatorname{Im}(\bar{z} + z) = 0$ ; | (г) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ ; | (е) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ . |

**Задача 21.5.** Для числа  $z = a + bi$  напишите формулы, по которым можно найти противоположное  $-z$  и обратное  $z^{-1}$  ему числа.

**Задача 21.6.** Найдите общую формулу для частного  $(a + bi)/(c + di)^\dagger$ .

**Задача 21.7.** Докажите, что два числа с отличной от нуля мнимой частью являются сопряженными тогда и только тогда, когда их сумма и произведение являются действительными числами.

**Определение.** *Модулем* комплексного числа  $z$  называют неотрицательное действительное число  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ .

**Задача 21.8.** Верно ли, что в случае действительного числа введенное выше определение модуля не отличается от известного ранее?

**Задача 21.9.** Докажите, что

- |                          |                          |                                |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| (а) $ \bar{z}  =  z $ ;  | (в) $ zw  =  z  w $ ;    | (д) $ z/w  =  z / w $ ;        |
| (б) $\bar{z}z =  z ^2$ ; | (г) $ z^{-1}  = 1/ z $ ; | (е) $z^{-1} = \bar{z}/ z ^2$ . |

**Определение.** Комплексное число  $z = a + bi$  можно рассматривать как точку координатной плоскости  $(a; b)$ . В этом случае ось абсцисс называется действительной осью, поскольку на ней оказываются действительные числа. Множество всех комплексных чисел с нулевой действительной частью (такие числа называются чисто мнимыми) оказывается лежащим на оси ординат, которая называется мнимой осью. Также любому комплексному числу  $z = a + bi$  можно поставить в соответствие вектор  $(a; b)$  на координатной плоскости. В случае, если на координатной плоскости отмечаются комплексные числа, ее обычно называют комплексной плоскостью.

\*В отличие от обеда, который комплексный.

†Для получения формулы удобно воспользоваться сопряженными числами.

**Задача 21.10.** (а) Отметьте на комплексной плоскости число  $z = 2 - 3i$ . Где тогда находится число  $\bar{z}$ , как его можно получить для произвольного числа  $z$ ? (б) Что с геометрической точки зрения представляет собой  $|z|$ ? (в) На комплексной плоскости отмечены числа  $z$  и  $w$ . Как отметить на ней числа  $-\frac{3}{2}z, z + w, z - 2w$ ?

**Задача 21.11.** Верно ли утверждение: «Операции, совершаемые над комплексными числами, эквивалентны таким же операциям, совершаемым над соответствующими векторами»?

**Задача 21.12.** Докажите с помощью комплексной плоскости следующие неравенства:

(а)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;

(б)  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ .

**Определение.** Аргументом комплексного числа  $z$  называется угол на комплексной плоскости, отсчитанный против часовой стрелки от положительного направления оси абсцисс до вектора, соответствующего числу  $z$  и обозначается  $\arg z$ .

**Задача 21.13.** (а) Найдите число  $z$ , если  $|z| = 2, \arg z = \frac{2\pi}{3}$ . (б) Найдите модуль и аргумент числа  $z = 2 - 3i$ .

**Задача 21.14 (Тригонометрическая форма записи комплексного числа).** Докажите, что любое комплексное число  $z$  может быть записано в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где  $r = |z|, \varphi = \arg z$ .

**Задача 21.15.** (а) Как выражаются модуль и аргумент произведения двух комплексных чисел через их модули и аргументы? (б) Тот же вопрос для частного.

**Задача 21.16 (Формула Муавра).** Пусть  $r = |z|, \varphi = \arg z$ . Докажите, что тогда

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

**Задача 21.17.** Вычислите  $\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^{33}$ .

**Задача 21.18.** (а) Выведите с помощью формулы Муавра формулы для синуса и косинуса тройного и четверного угла. (б) Выразите  $\sin nx$  и  $\cos nx$  в виде многочленов от  $\sin x$  и  $\cos x$ .

**Задача 21.19.** Вычислите суммы  $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$  и  $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha$ .