

Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для произвольного положительного числа ε найдётся такое натуральное число N , что при любом натуральном $n > N$ будет верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

В задачах ниже при доказательстве надо явно указывать сколемовскую функцию.

Задача 26.1. Запишите в кванторах определение бесконечно малой последовательности и последовательности, не являющейся бесконечно малой. Запишите их так, чтобы кванторы существования шли в начале формулы.

Задача 26.2. Для последовательности $\{\alpha_n\}$ укажите какой-нибудь номер N , начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если

$$\begin{array}{lll} \text{(а)} \alpha_n = \frac{1}{n}; & \text{(в)} \alpha_n = 0,99^n; & \text{(д)} \alpha_n = \frac{2n+3}{n^2+2n-1}; \\ \text{(б)} \alpha_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^3}; & \text{(г)} \alpha_n = \frac{2^n}{n!}; & \text{(е)} \alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \end{array}$$

Задача 26.3. Верно ли, что (а) сумма; (б) разность; (в) произведение; (г) отношение бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.

Задача 26.4. Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются бесконечно малыми, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$. Докажите, что тогда последовательность $\{\gamma_n\}$ также является бесконечно малой.

Задача 26.5. Верно ли, что последовательность $\{\alpha_n\}$ с отличными от нуля членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ является бесконечно большой?

Задача 26.6. (а) Верно ли, что последовательность $\{\alpha_n\}$ положительными членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n^2\}$ является бесконечно малой? (б) Верно ли аналогичное утверждение для последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\sqrt[3]{\alpha_n}\}$?

Задача 26.7. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\gamma_{2n-1} = \alpha_n$, $\gamma_{2n} = \beta_n$ при любом натуральном n . Является ли последовательность $\{\gamma_n\}$ бесконечно малой?

Задача 26.8. Одна последовательность бесконечно малая, а другая ограниченная. Что можно сказать о (а) сумме; (б) произведении; (в) отношении этих последовательностей?

Задача 26.9. Решите предыдущую задачу в случае, если одна из последовательностей бесконечно малая, а другая бесконечно большая.

Задача 26.10. Докажите, пользуясь предыдущими задачами, что следующие последовательности являются бесконечно малыми:

$$\begin{array}{lll} \text{(а)} \frac{n^5+3}{n^{10}}; & \text{(б)} \frac{3n^6+2n^4-n}{n^9+7n^5-5n^2-2}; & \text{(в)} \sqrt{\frac{|\sin 3n + \cos 7n|}{2n^2+3n}}; \text{(г)} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}; \end{array}$$

Задача 26.11. Любую ли последовательность можно представить в виде отношения двух бесконечно малых последовательностей?

Задача 26.12. По последовательности $\{\alpha_n\}$ построили последовательность $\{\beta_n\}$ так, что $\beta_n = \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_n}{2}$ при любом натуральном n . Докажите, что если последовательность $\{\beta_n\}$ оказалась бесконечно малой, то и последовательность $\{\alpha_n\}$ также является бесконечно малой.