Действительные числа

Определение. *Бесконечная десятичная дробь (БДД)* — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида $\pm\overline{b_{-n}\dots b_{-1}b_0{,}b_1b_2\dots b_m\dots}$. Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, их обычно не пишут.

Определение. *Множество действительных чисел* $\mathbb{R}$ получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер $i \in \mathbb{Z}$, такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее i-того совпадают, в i-том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей i-той цифрой имеет справа от i-того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки.

Иными словами, $\overline{b_\beta\dots b_{i-1}b_i9999\dots} = \overline{b_\beta\dots b_{i-1}(b_i+1)0000\dots}$ как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

Задача 27.1. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Определение. Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$.

Определение. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in M \quad b \geqslant x$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

Задача 27.2. Не употребляя отрицаний, дайте определения **(а)** числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$; **(б)** множества, неограниченного сверху; **(в)** неограниченного множества. Запишите их с помощью кванторов.

Определение. Число $m \in M$, такое что $\forall x \in M \quad m \geqslant x$, называется *максимальным элементом* множества $\subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: тнг) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

Задача 27.3. Дайте определение минимального элемента и точной верхней грани (сокращённо: твг) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

Задача 27.4. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

Задача 27.5. Вычислите твг множеств:

(а) $\{0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; 0{,}3333; 0{,}33333; \dots\}$;

(б) сумм $1 + q + q^2 + \dots + q^m$ с фиксированным $0 < q < 1$ и любым $m \in \mathbb{N}$.

Задача 27.6. Верно ли, что любая БДД $b \in \mathbb{R}$ есть твг множества:

(а) всех БДД, меньших b;

(б) всех конечных БДД, меньших b;

(в) всех конечных БДД, являющихся начальными кусками b.

Задача 27.7. **(а)** Докажите, что $b = \sup M$, ограниченной снизу $M \subset \mathbb{R}$, обладает свойством *предельности*: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x \in M$ такое, что $b - \varepsilon \leqslant x \leqslant b$. **(б)** Докажите, что это свойство является достаточным. То есть, что любая верхняя грань обладающая этим свойством будет точной.

Задача 27.8 ***(теорема о полноте).*** Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу — точную нижнюю.
Задача 27.9 ***(сложение и умножение).*** Суммой БДД $a, b \in \mathbb{R}$ называется твг чисел вида $\alpha + \beta$, где $\alpha < a$ и $\beta < b$ — всевозможные *конечные* БДД. Аналогично, произведение $a \cdot b$ двух *положительных* БДД — это твг чисел вида $\alpha \cdot \beta$ с *конечными положительными* $\alpha < a$ и $\beta < b$ (на неположительные БДД произведение распространяется по стандартному правилу «$-$» на «$-$» даёт «$+$»). Докажите, что **(а)** эти определения корректны (т. е. нужные твг существуют), **(б)** дают для конечных a и b то же, что и раньше. **(в)** Проверьте, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ верно, что $a(b + c) = ab + ac$.
Задача 27.10 ***(корни).*** Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть твг конечных БДД β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2.
Определение. БДД с нулевой дробной частью называются *целыми*. На координатной прямой множество целых БДД $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ получается откладыванием от 0 всевозможных целых кратных единичного отрезка. БДД $r \in \mathbb{R}$ называется рациональной, если $\exists k, m \in \mathbb{Z} \quad kr = m$ в $\mathbb{R}$. Подмножество рациональных БДД $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ на числовой прямой изображается откладыванием от 0 всевозможных отрезков, соизмеримых* с единичным.
Задача 27.11. Докажите, что конечные БДД рациональны.
Задача 27.12. Верно ли, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad \alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$?
Определение. Разбиение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ в объединение двух непересекающихся подмножеств, таких что $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, называется *сечением* множества $\mathbb{Q}$.
Задача 27.13. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ имеет место равенство $\sup A_1 = \inf A_2$.
Задача 27.14. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в A_1 есть максимальный элемент, либо в A_2 есть минимальный элемент, либо действительное число $\sup A_1 = \inf A_2$ иррационально.

Забудем на время про БДД, будем понимать $\mathbb{Q}$ как множество обыкновенных дробей $p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, и назовём действительным числом Дедекинда любое сечение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$, в котором A_i не имеет максимального элемента.
Задача 27.15. Дайте определение **(а)** суммы и **(б)** произведения действительных чисел Дедекинда†.
Задача 27.16. Установите сохраняющую арифметические операции биекцию (*изоморфизм*) между множеством дедекиндовых действительных чисел и множеством действительных чисел, определённоv посредством БДД‡
Задача 27.17. Исходя только из дедекиндова определения действительных чисел§ **(а)** докажите теорему о полноте (ср. с задачей 27.8) и **(б)** определите квадратные корни (ср. с задачей 27.10).

*два отрезка называются соизмеримыми, если они допускают общую единицу измерения — третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них

†это должно быть сечение нужного типа

‡Подсказка: сопоставьте каждому классу эквивалентных БДД $\alpha \in \mathbb{R}$ сечение $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant \alpha\}$.

§т.е. не пользуясь БДД, но в терминах сечений