

## Действительные числа

**Определение.** Бесконечная десятичная дробь (БДД) — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида  $\pm b_{-n} \dots b_{-1} b_0, b_1 b_2 \dots b_m \dots$ . Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, их обычно не пишут.

**Определение.** Множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер  $i \in \mathbb{Z}$ , такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее  $i$ -того совпадают, в  $i$ -том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей  $i$ -той цифрой имеет справа от  $i$ -того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки.

Иными словами,  $\overline{b_\beta \dots b_{i-1} b_i 9999 \dots} = \overline{b_\beta \dots b_{i-1} (b_i + 1) 0000 \dots}$  как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

**Задача 27.1.** Докажите, что множество  $\mathbb{R}$  несчётно.

**Определение.** Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот:  $-a < -b \Leftrightarrow a > b$ .

**Определение.** Число  $b \in \mathbb{R}$  называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел  $M \subset \mathbb{R}$ , если  $\forall x \in M \quad b \geq x$ . Множество  $M \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

**Задача 27.2.** Не употребляя отрицаний, дайте определения (а) числа, не являющегося нижней гранью данного множества  $M \subset \mathbb{R}$ ; (б) множества, неограниченного сверху; (в) неограниченного множества. Запишите их с помощью кванторов.

**Определение.** Число  $m \in M$ , такое что  $\forall x \in M \quad m \geq x$ , называется *максимальным элементом* множества  $M \subset \mathbb{R}$ . Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества  $M$  называется *точной нижней гранью* (сокращённо: тнг) и обозначается  $\inf M$  (от латинского «infimum»).

**Задача 27.3.** Дайте определение минимального элемента и точной верхней грани (сокращённо: твг) данного множества  $M \subset \mathbb{R}$  (она обозначается  $\sup M$  — от латинского «supremum»).

**Задача 27.4.** Каждое ли ограниченное сверху подмножество в  $\mathbb{R}$  имеет максимальный элемент?

**Задача 27.5.** Вычислите твг множеств:

(а)  $\{0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; 0,33333; \dots\}$ ;

(б) сумм  $1 + q + q^2 + \dots + q^m$  с фиксированным  $0 < q < 1$  и любым  $m \in \mathbb{N}$ .

**Задача 27.6.** Верно ли, что любая БДД  $b \in \mathbb{R}$  есть твг множества:

(а) всех БДД, меньших  $b$ ;

(б) всех конечных БДД, меньших  $b$ ;

(в) всех конечных БДД, являющихся начальными кусками  $b$ .

**Задача 27.7.** (а) Докажите, что  $b = \sup M$ , ограниченной снизу  $M \subset \mathbb{R}$ , обладает свойством *предельности*: для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $x \in M$  такое, что  $b - \varepsilon \leq x \leq b$ . (б) Докажите, что это свойство является достаточным. То есть, что любая верхняя грань обладающая этим свойством будет точной.

**Задача 27.8 (теорема о полноте).** Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в  $\mathbb{R}$  имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу — точную нижнюю.

**Задача 27.9 (сложение и умножение).** Суммой БДД  $a, b \in \mathbb{R}$  называется твг чисел вида  $\alpha + \beta$ , где  $\alpha < a$  и  $\beta < b$  — всевозможные *конечные* БДД. Аналогично, произведение  $a \cdot b$  двух *положительных* БДД — это твг чисел вида  $\alpha \cdot \beta$  с *конечными положительными*  $\alpha < a$  и  $\beta < b$  (на неположительные БДД произведение распространяется по стандартному правилу « $-$ » на « $-$ » даёт « $+$ »). Докажите, что **(а)** эти определения корректны (т. е. нужные твг существуют), **(б)** дают для конечных  $a$  и  $b$  то же, что и раньше. **(в)** Проверьте, что для любых  $a, b, c \in \mathbb{R}$  верно, что  $a(b + c) = ab + ac$ .

**Задача 27.10 (корни).** Пусть  $b \in \mathbb{R}$  есть твг конечных БДД  $\beta$  с  $\beta^2 < 5$ . Докажите, что  $b$  существует и вычислите  $b^2$ .

**Определение.** БДД с нулевой дробной частью называются *целыми*. На координатной прямой множество целых БДД  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  получается откладыванием от 0 всевозможных целых кратных единичного отрезка. БДД  $r \in \mathbb{R}$  называется рациональной, если  $\exists k, m \in \mathbb{Z} \quad kr = m$  в  $\mathbb{R}$ . Подмножество рациональных БДД  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  на числовой прямой изображается откладыванием от 0 всевозможных отрезков, соизмеримых\* с единичным.

**Задача 27.11.** Докажите, что конечные БДД рациональны.

**Задача 27.12.** Верно ли, что  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad \alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$ ?

**Определение.** Разбиение  $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$  в объединение двух непересекающихся подмножеств, таких что  $a_1 < a_2$  для любых  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ , называется *сечением* множества  $\mathbb{Q}$ .

**Задача 27.13.** Докажите, что для любого сечения  $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$  имеет место равенство  $\sup A_1 = \inf A_2$ .

**Задача 27.14.** Докажите, что для любого сечения  $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$  выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в  $A_1$  есть максимальный элемент, либо в  $A_2$  есть минимальный элемент, либо действительное число  $\sup A_1 = \inf A_2$  иррационально.

*Забудем на время про БДД, будем понимать  $\mathbb{Q}$  как множество обыкновенных дробей  $p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ , и назовём действительным числом Дедекинда любое сечение  $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ , в котором  $A_i$  не имеет максимального элемента.*

**Задача 27.15.** Дайте определение **(а)** суммы и **(б)** произведения действительных чисел Дедекинда<sup>†</sup>.

**Задача 27.16.** Установите сохраняющую арифметические операции биекцию (*изоморфизм*) между множеством дедекиндовых действительных чисел и множеством действительных чисел, определённых посредством БДД<sup>‡</sup>

**Задача 27.17.** Исходя только из дедекиндова определения действительных чисел<sup>§</sup> **(а)** докажите теорему о полноте (ср. с задачей 27.8) и **(б)** определите квадратные корни (ср. с задачей 27.10).

\*два отрезка называются соизмеримыми, если они допускают общую единицу измерения — третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них

<sup>†</sup>это должно быть сечение нужного типа

<sup>‡</sup>Подсказка: сопоставьте каждому классу эквивалентных БДД  $\alpha \in \mathbb{R}$  сечение  $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq \alpha\}$ .

<sup>§</sup>т.е. не пользуясь БДД, но в терминах сечений