Топология прямой: Возрождение легенды

Определение. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если любая её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.
Задача 29.1. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **(а)** пусто; **(б)** состоит из одной точки; **(в)** состоит из двух точек; **(г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
Задача 29.2. Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$?
Задача 29.3. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?
Определение. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет).
Определение. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.
Задача 29.4. Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и луч — нет.
Задача 29.5. **(а)** Бывают ли дискретные незамкнутые множества? **(б)** А бесконечные дискретные компакты?
Задача 29.6. **(а)** Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? **(б)** Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.
Задача 29.7. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \backslash Z$ открыто.
Задача 29.8. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.
Задача 29.9. **(а)** Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. **(б)** Так ли это для бесконечных наборов?
Задача 29.10 ***(лемма о вложенных компактах).*** Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_n \neq \varnothing$.
Задача 29.11 ***(лемма о конечном покрытии).*** Докажите, что непустое $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие*.

Канторово множество

Определение. Определим по индукции последовательность компактов $K_n \subset [0,1]$ следующим образом. Каждый K_n является объединением 2^n отрезков: K_{n+1} получается из K_n выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в K_n, а $K_0 = [0,1]$. Пересечение $\mathfrak{K} \coloneqq \bigcap_n K_n$ называется *канторовым множеством*†. Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно определить как множество всех чисел $x \in [0,1]$, которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).
Задача 29.12. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.
Задача 29.13. Содержит ли канторово множество: **(а)** интервалы? **(б)** изолированные точки?

Конденсация несчётных множеств

Определение. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его точкой *конденсации*, если при всех $\varepsilon > 0$ $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно.
Задача 29.14*. Докажите, что множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.

*Подсказка: Сравните эти две задачи с задачами **??** и **??**.
†в честь Георга Кантора

Задача 29.15*. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?
Задача 29.16*. Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.
Задача 29.17*. Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.