Комплексная арифметика

Определение. *Компле́ксными** *числами* будем называть формальные записи $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Множество таких чисел будем обозначать $\mathbb{C}$. Символ i называется *мнимой единицей*, число a — *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, число b — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$. Комплексные числа складываются, вычитаются и перемножаются по тем же законам, по которым производятся операции с многочленами, при этом полагается, что $i^2 = -1$.

Определение. *Сопряжённым* к комплексному числу z называют комплексное число $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$.

Везде далее под числом будем понимать комплексное число, если не оговорено иное.

Задача 21.1. Даны числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4—3i$. Найдите

а) $\operatorname{Re} z_2$; в) $z_1 + z_2$; д) $z_1 z_2$; ж) $1/z_1$; и) z_1^{2017}.
б) $\operatorname{Im} z_2$; г) $z_1 - z_2$; е) z_1/z_2; з) z_1^3;

6 2. Найдите два комплексных числа, сумма которых равна 4, а произведение 5. 6 3. а) Найдите какое-нибудь число z, т.ч. Im z 6= 0, Im z 3 = 0.уравнения z 3 = 1. б) Найдите все корни Определение 6.2. Сопряженным к комплексному числу z называют комплексное число z = Re z − i Im z. 6 4◦ . Докажите, что а) (z) = z; в) Im(zz) = 0; д) zw = z w; б) Im(z + z) = 0; г) z ± w = z ± w; е) z/w = z/w. 6 5◦ . Для числа z = a + bi напишите формулы, по которым можно найти противоположное −z и обратное z −1 ему числа. 6 6◦ . Найдите общую формулу для частного (a + ib)/(c + id). (Для получения формулы удобно воспользоваться сопряженными числами.) 6 7. Докажите, что два числа с отличной от нуля мнимой частью являются сопряженными тогда и только тогда, когда их сумма и произведение являются действительными числами.

*В отличие от обеда, который ко́мплексный.