

## Бесконечно Большие Последовательности

**Определение.** Последовательность называется *неограниченной*, если она не является ограниченной.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *бесконечно большой*, если для любого числа  $C > 0$  найдётся такое число  $k$ , что при всех натуральных  $n$ , больших  $k$ , будет верно неравенство  $|a_n| > C$ .

**Задача 25.1.** Сформулируйте, не используя отрицания, определения неограниченной и бесконечно большой последовательностей с помощью кванторов. Верно ли, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной? А наоборот? Рассмотрим множество неограниченных и множество бесконечно больших последовательностей. Пересекаются ли они? Является ли одно из них подмножеством другого?

**Задача 25.2.** Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая (а) не является неограниченной; (б) не является бесконечно большой. Запишите их с помощью кванторов.

**Задача 25.3.** Последовательность  $\{a_n\}$  бесконечно большая. Верно ли, что она монотонная? А последовательность  $\{|a_n|\}$ ?

**Задача 25.4.** Является ли бесконечно большой последовательность, равная (а) сумме; (б) разности; (в) произведению; (г) отношению бесконечно больших последовательностей?

**Задача 25.5.** Изменяются ли ответы на вопросы предыдущей задачи, если везде заменить бесконечно большие последовательности на неограниченные?

**Определение.** Пусть  $\{n_i\}$  возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность  $\{b_i\}$ , где  $b_i = a_{n_i}$ , называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{a_n\}$ .

**Задача 25.6.** (а) Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной последовательности ограничена. Останется ли верным аналогичное утверждение в случае (б) монотонной; (в) неограниченной; (г) бесконечно большой последовательности?

**Задача 25.7.** Докажите, что (а) любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность; (б) любая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.

**Задача 25.8.** (а) Докажите, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, в котором находится бесконечно много членов этой последовательности. (б) Верно ли, что если для некоторой последовательности такого отрезка длины 1 найти нельзя, то эта последовательность бесконечно большая?

**Задача 25.9.** Докажите, что для любой ограниченной монотонной последовательности найдётся отрезок длины 1, в котором находятся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера.

**Задача 25.10.** Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга.

**Задача 25.11.** (а) Последовательность  $\{a_n\}$  такова, что  $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$  при любом натуральном  $n$ . Может ли эта последовательность быть неограниченной? (б) Тот же вопрос, если  $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ .

**Задача 25.12.** (а) Придумайте такую последовательность натуральных чисел, что любая последовательность натуральных чисел является её подпоследовательностью. (б) Можно ли решить аналогичную задачу, если натуральные числа всюду заменить на рациональные числа? (в) А на действительные?

**Задача 25.13.** Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причём единственным образом?

**Задача 25.14.** Докажите, что найдётся такое число  $a > 0$ , при котором дробные части всех

чисел последовательности  $\{a^n\}$  принадлежат отрезку  $[1/3; 2/3]$ .

**Задача 25.15.** (а) Докажите, что у всякой последовательности длины  $n^2 + 1$  существует монотонная подпоследовательность длины  $n + 1$ . (б) Останется ли верным утверждение задачи в случае последовательности длины  $n^2$  при больших значениях  $n$ ?