Листок №25 04.02.2020

Бесконечно Большие Последовательности

Определение. Последовательность называется *неограниченной*, если она не является ограниченной.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа C>0 найдётся такое число k, что при всех натуральных n, больших k, будет верно неравенство $|a_n|>C$.

Задача 25.1. Сформулируйте, не используя отрицания, определения неограниченной и бесконечно большой последовательностей с помощью кванторов. Верно ли, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной? А наоборот? Рассмотрим множество неограниченных и множество бесконечно больших последовательностей. Пересекаются ли они? Является ли одно из них подмножеством другого?

Задача 25.2. Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая (a) не является неограниченной; (б) не является бесконечно большой. Запишите их с помощью кванторов.

Задача 25.3. Последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая. Верно ли, что она монотонная? А последовательность $\{|a_n|\}$?

Задача 25.4. Является ли бесконечно большой последовательность, равная (a) сумме; (b) разности; (b) произведению; (c) отношению бесконечно больших последовательностей?

Задача 25.5. Изменятся ли ответы на вопросы предыдущей задачи, если везде заменить бесконечно большие последовательности на неограниченные?

Определение. Пусть $\{n_i\}$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_i\}$, где $b_i=a_{n_i}$, называется nodnocnedoвameльностью последовательности $\{a_n\}$.

Задача 25.6. (а) Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной последовательности ограничена. Останется ли верным аналогичное утверждение в случае (б) монотонной; (в) неограниченной; (г) бесконечно большой последовательности?

Задача 25.7. Докажите, что (a) любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность; (б) любая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.

Задача 25.8. (а) Докажите, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, в котором находится бесконечно много членов этой последовательности.

(б) Верно ли, что если для некоторой последовательности такого отрезка длины 1 найти нельзя, то эта последовательность бесконечно большая?

Задача 25.9. Докажите, что для любой ограниченной монотонной последовательности найдётся отрезок длины 1, в котором находятся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера.

Задача 25.10. Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга.

Задача 25.11. (а) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ при любом натуральном n. Может ли эта последовательность быть неограниченной? (б) Тот же вопрос, если $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

Задача 25.12. (а) Придумайте такую последовательность натуральных чисел, что любая последовательность натуральных чисел является её подпоследовательностью. (б) Можно ли решить аналогичную задачу, если натуральные числа всюду заменить на рациональные числа? (в) А на действительные?

Задача 25.13. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причём единственным образом?

Задача 25.14. Докажите, что найдётся такое число a > 0, при котором дробные части всех

Листок №25 04.02.2020

чисел последовательности $\{a^n\}$ принадлежат отрезку [1/3;2/3].

Задача 25.15. (а) Докажите, что у всякой последовательности длины $n^2 + 1$ существует монотонная подпоследовательность длины n+1. (б) Останется ли верным утверждение задачи в случае последовательности длины n^2 при больших значениях n?