

## Комплексная алгебра

Большая часть задач этого листка решается с помощью формулы Муавра.

**Задача 22.1.** Решите уравнение и отметьте его корни на комплексной плоскости:

(а)  $z^5 = 1$ ;

(б)  $z^4 = 1 - \sqrt{3}i$ .

**Задача 22.2.** (а) Сколько решений в зависимости от  $n$  имеет уравнение  $z^n = 1$  в действительных числах? (б) Тот же вопрос в комплексных числах.

**Определение.** Корнем  $n$ -ой степени из комплексного числа  $w$  называется любое комплексное число  $z$ , т.ч.  $z^n = w$ .

**Задача 22.3.** Укажите все корни степени 6 из  $-4$ , отметьте их на комплексной плоскости.

**Задача 22.4.** Сколько существует корней степени  $n$  из числа  $w$ ? Выразите их через  $|w|$  и  $\arg w$ .

**Задача 22.5.** Докажите, что при любом комплексном  $w \neq 0$  все корни степени  $n$  из  $w$  являются вершинами правильного многоугольника на комплексной плоскости. Сколько вершин у данного многоугольника, где находится его центр и чему равен радиус описанной около него окружности?

**Задача 22.6.** Докажите, что для любого числа\*  $z_0$  многочлен  $P(z)$  можно и притом единственным образом представить в виде  $P(z) = (z - z_0)Q(z) + w$ , где  $Q(z)$  также некоторый многочлен, а  $w$  — некоторое число.

**Определение.** В условиях предыдущей задачи многочлен  $Q(z)$  называется частным, а число  $w$  — остатком от деления многочлена  $P(z)$  на многочлен  $z - z_0$ .

**Задача 22.7.** Что называется корнем многочлена? Пусть число  $z_0$  является корнем многочлена  $P(z)$ . Докажите, что этот многочлен можно представить в виде  $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ , где  $Q(z)$  — также некоторый многочлен.

**Задача 22.8.** Докажите, что любой многочлен  $n$ -ой степени имеет не более  $n$  корней.

**Задача 22.9.** Представьте каждый из многочленов в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

(а)  $x^5 - 1$ ;

(б)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ;

(в)  $x^4 + 8$ .

**Задача 22.10.** (а) Пользуясь пунктом (а) предыдущей задачи, найдите  $\cos \frac{2\pi}{5}$ . (б) Найдите  $\cos \frac{\pi}{5}$  и  $\sin \frac{\pi}{5}$ , а также получите разложение многочлена  $x^5 - 1$  в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами, не использующее тригонометрические функции. (в) Попробуйте найти указанные в данной задаче значения тригонометрических функций из геометрических соображений†.

**Задача 22.11.** (а) Вычислите сумму и произведение всех корней степени  $n$  из числа  $w$ .

(б) Упростите выражение

$$\cos \alpha + \cos \left( \alpha + \frac{2\pi}{7} \right) + \cos \left( \alpha + \frac{4\pi}{7} \right) + \cos \left( \alpha + \frac{6\pi}{7} \right) + \cos \left( \alpha - \frac{2\pi}{7} \right) + \cos \left( \alpha - \frac{4\pi}{7} \right) + \cos \left( \alpha - \frac{6\pi}{7} \right).$$

**Задача 22.12.** Найдите общую формулу  $n$ -ого члена последовательности, заданной рекуррентно, если

---

\*Еще раз напомним, что речь везде идет про комплексные числа (которые могут оказаться и действительными), а многочлены могут иметь комплексные коэффициенты.

†нам известен способ их нахождения из равнобедренного треугольника с углом  $\frac{\pi}{5}$  при вершине

(а)  $a_1 = a_2 = 1, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ ; (б)  $b_1 = b_2 = 1, b_n = 2b_{n-1} - 3b_{n-2}$ .

**Задача 22.13.** Найдите остаток от деления многочлена  $x^{100} + 3x + 2$  на

(а)  $x^2 - 3x + 2$ ; (б)  $x^2 - 2x + 2$ .

**Задача 22.14.** Докажите, что многочлен  $x^{3k} + x^{3l+1} + x^{3m+2}$  делится на  $1 + x + x^2$  при любых натуральных  $k, l, m$ .

**Задача 22.15.** При каких значениях  $m$  многочлен  $(x+1)^m + x^m + 1$  делится на  $1 + x + x^2$ ?

**Задача 22.16.** Найдите суммы  $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$  и  $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots$ .

**Задача 22.17.** Найдите суммы

(а)  $\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \dots + 2^{n-1} \sin n\alpha$ ; (б)  $\cos \alpha + \cos(x + \alpha) + \dots + \cos(nx + \alpha)$ .

**Задача 22.18.** Докажите, что многочлен  $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$  делится на  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

**Задача 22.19.** Докажите, что если  $f_1(x^3) + xf_2(x^3)$  делится на  $1 + x + x^2$ , то  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  делятся на  $x - 1$ .

**Задача 22.20.** Найдите суммы

(а)  $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$ ; (б)  $C_n^i + C_n^{i+3} + C_n^{i+6} + \dots, i = 0, 1, 2$ .

**Задача 22.21.** Найдите суммы

(а)  $1 + 2 \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \dots + n \cos(n-1)\alpha$ ; (б)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha$ .

**Задача 22.22.** (а) Разложите на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами многочлен  $x^{2n} - 1$ . Пользуясь полученным разложением, найдите  $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$  и  $\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{2n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}$ . (б) Найдите  $\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1}$ .

**Задача 22.23.** (а) Докажите, что число  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  не является корнем  $n$ -ой степени из 1 ни при каком  $n$ . (б) Докажите, что градусная мера любого острого угла треугольника со сторонами 3, 4, 5 есть число иррациональное. (в) Докажите, что острый угол любого прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами выражается иррациональным числом градусов.

**Задача 22.24.** Найдите сумму и произведение  $s$ -тых степеней всех корней уравнения  $z^n - 1 = 0$  в зависимости от  $s$  и  $n$ .