Предел

Бесконечность — не предел!

Buzz Lightyear, space ranger

Задача 30.1. Приведите пример последовательности, которая имеет **(а)** ноль; **(б)** одну; **(в)** две; **(г)** N, для некоторого фиксированного $N \in \mathbb{N}$; **(д)** счётное количество предельных точек.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такая точка A, что в любой её окрестности содержатся все кроме конечного числа члены a_n. Обозначение: $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ или $a_n \to A$ при $n \to +\infty$.

Последовательности, которые не являющиеся сходящимися, называют *расходящимися.*

Задача 30.2. Докажите, что $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечно малая $\{\alpha_n\}$, что $a_n = A + \alpha_n$.

Задача 30.3. Докажите, что A — предел последовательности a_n тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Задача 30.4. Докажите, что A — предельная точка последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $a_{n_k} \to A$ при $n_k \to +\infty$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n, m > N$ имеет место $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Задача 30.5*(Критерий Коши)*. Докажите, что $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ сходится если и только если является фундаментальной.

Задача 30.6. Приведите пример фундаментальной расходящейся $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

Задача 30.7*(Теорема Больцано–Вейерштрасса)*. Докажите, что в $\mathbb{R}$ сходится любая ограниченная монотонная последовательность.

Задача 30.8. **(а)** Докажите, что всякая сходящаяся ограничена. **(б)** Приведите пример ограниченной расходящейся последовательности.

Задача 30.9. Пусть A — предел последовательности $\{a_n\}$. **(а)** Верно ли, что если $A > 0$, то все члены $\{a_n\}$, начиная с некоторого, положительны? **(б)** Докажите, что если в $\{a_n\}$ бесконечно много положительных и отрицательных членов, то $A = 0$.

Задача 30.10. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы A и B соответственно. Докажите, что тогда

(а) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$;

(б) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = AB$;

(в) если $B \neq 0$ и все элементы последовательности $\{b_n\}$ отличны от нуля, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Определение. Говорят, что почти все члены последовательности удовлетворяют некоторому условию, если существует лишь конечное число членов последовательности, не удовлетворяющих этому условию.

Задача 30.11. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся. Докажите, что если почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие **(а)** $a_n = b_n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$; **(б)** $a_n \geqslant b_n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. **(в)** Останется ли верным последнее утверждение, если в нем все знаки нестрогого неравенства заменить на знаки строгого неравенства?

Задача 30.12*(Лемма о двух милиционерах)*. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ таковы, что почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A$. Докажите, что тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = A$.

Задача 30.13. **(а)** Алиса записала определение последовательности, имеющей предел, следующим образом: «$\exists N \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.» Опишите множество последовательностей, которые задает данное определение. **(б)** Выполните это же задание для определения Боба: «$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.»