# ***Предел***

Бесконечность — не предел!

Buzz Lightyear, space ranger

**Задача 30.1.** Привидите пример последовательности, которая имеет **(а)** ноль; **(б)** одну; **(в)** две; **(г)** $N$, для некоторого фиксированного $N \in \mathbb{N}$; **(д)** счётно предельных точек.

**Определение.** Последовательность $a_n$ называется *сходящейся*, если она имеет одну предельную точку $A$, которая называтся пределом. Обозначение: $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ или $a_n \to A$ при $n \to +\infty$.

Последовательности, которые не являющиеся сходящимися называют *расходящимися.*

**Задача 30.2.** Докажите, что $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha_n$ — бесконечно малая такая, что $a_n = A + \alpha_n$.

**Задача 30.3.** Докажите, что $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда существует окрестноть $A$ такая, что в ней находятся все члены $a_n$ начиная с некоторого.

**Задача 30.4.** Докажите, что $A$ — предельная точка последовательности $a_n$ тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $a_{n_k} \to A$ при $n_k \to +\infty$.

**Определение.** Последовательность $a_n$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

**Задача 30.5*(Критерий Коши).*** Докажите, что $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ сходится если и только если является фундамаентальной.

**Задача 30.6.** Привидите пример фундаментальной расходщейся $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

**Задача 30.7*(Теорема Больцано–Вейерштрасса).*** Докажите, что в $\mathbb{R}$ сходится любая ограниченная монотонная последовательность.

**Задача 30.8.** **(а)** Докажите, что всякая сходящаяся ограничена. **(б)** Привидите пример ограниченной расходящейся последовательности.

**Задача 30.9.** Пусть $A$ — предел последовательности $\{a_n\}$. **(а)** Верно ли, что если $A > 0$, то начиная с некоторого все члены $\{a_n\}$ положительны? **(б)** Докажите, что если в $\{a_n\}$ бесконечно много положительных и отрицательных членов, то $A = 0$.

**Задача 30.10.** Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы $A$ и $B$ соответственно. Докажите, что тогда

**(а)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$;

**(б)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = AB$;

**(в)** если $B \neq 0$ и все элементы последовательности $\{b_n\}$ отличны от нуля, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

**Определение.** Говорят, что почти все члены последовательности удовлетворяют некоторому условию, если существует лишь конечное число членов последовательности, не удовлетворяющих этому условию.

**Задача 30.11.** Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся. Докажите, что если почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие **(а)** $a_n = b_n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ **(б)** $a_n \geqslant b_n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ **(в)** Останется ли верным последнее утверждение, если в нем все знаки нестрогого неравенства заменить на знаки строгого неравенства?

**Задача 30.12*(Лемма о двух милиционерах).*** Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ таковы, что почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A$. Докажите, что тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = A$.

**Задача 30.13.** **(а)** Алиса записала определение последовательности, имеющей предел, следующим образом: «$\exists N \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.» Опишите множество последовательностей, которые задает данное определение. **(б)** Выполните это же задание для определения Боба: «$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$.»