Комплексная алгебра

Большая часть задач этого листка решается с помощью формулы Муавра.

Задача 22.1. Решите уравнение и отметьте его корни на комплексной плоскости:

(а) $z^5 = 1$; **(б)** $z^4 = 1 - \sqrt{3}i$.

Задача 22.2. **(а)** Сколько решений в зависимости от n имеет уравнение $z^n = 1$ в действительных числах? **(б)** Тот же вопрос в комплексных числах.

Определение. *Корнем n–ой степени* из комплексного числа w называется любое комплексное число z, т.ч. $z^n = w$.

Задача 22.3. Укажите все корни степени 6 из -4, отметьте их на комплексной плоскости.

Задача 22.4. Сколько существует корней степени n из числа w? Выразите их через $|w|$ и $\arg w$.

Задача 22.5. Докажите, что при любом комплексном $w \neq 0$ все корни степени n из w являются вершинами правильного многоугольника на комплексной плоскости. Сколько вершин у данного многоугольника, где находится его центр и чему равен радиус описанной около него окружности?

Задача 22.6. Докажите, что для любого числа* z_0 многочлен $P(z)$ можно и притом единственным образом представить в виде $P(z) = (z - z_0)Q(z) + w$, где $Q(z)$ также некоторый многочлен, а w — некоторое число.

Определение. В условиях предыдущей задачи многочлен $Q(z)$ называется частным, а число w — остатком от деления многочлена $P(z)$ на многочлен $z - z_0$.

Задача 22.7. Что называется корнем многочлена? Пусть число z_0 является корнем многочлена $P(z)$. Докажите, что этот многочлен можно представить в виде $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, где $Q(z)$ — также некоторый многочлен.

Задача 22.8. Докажите, что любой многочлен n–ой степени имеет не более n корней.

Задача 22.9. Представьте каждый из многочленов в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

(а) $x^5 - 1$; **(б)** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; **(в)** $x^4 + 8$.

Задача 22.10. **(а)** Пользуясь пунктом **(а)** предыдущей задачи, найдите $\cos\frac{2\pi}{5}$. **(б)** Найдите $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$, а также получите разложение многочлена $x^5 - 1$ в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами, не использующее тригонометрические функции. **(в)** Попробуйте найти указанные в данной задаче значения тригонометрических функций из геометрических соображений†.

Задача 22.11. **(а)** Вычислите сумму и произведение всех корней степени n из числа w.

(б) Упростите выражение

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{7}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{7}) + \cos(\alpha + \frac{6\pi}{7}) + \cos(\alpha - \frac{2\pi}{7}) + \cos(\alpha - \frac{4\pi}{7}) + \cos(\alpha - \frac{6\pi}{7}).$$

Задача 22.12. Найдите общую формулу n–ого члена последовательности, заданной рекуррентно, если

*Еще раз напомним, что речь везде идет про комплексные числа (которые могут оказаться и действительными), а многочлены могут иметь комплексные коэффициенты.

†нам известен способ их нахождения из равнобедренного треугольника с углом $\frac{\pi}{5}$ при вершине

(а) $a_1 = a_2 = 1, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; **(б)** $b_1 = b_2 = 1, b_n = 2b_{n-1} - 3b_{n-2}$.

Задача 22.13. Найдите остаток от деления многочлена $x^{100} + 3x + 2$ на

(а) $x^2 - 3x + 2$; **(б)** $x^2 - 2x + 2$.

Задача 22.14. Докажите, что многочлен $x^{3k} + x^{3l+1} + x^{3m+2}$ делится на $1 + x + x^2$ при любых натуральных k, l, m.
Задача 22.15. При каких значениях m многочлен $(x+1)^m + x^m + 1$ делится на $1 + x + x^2$?
Задача 22.16. Найдите суммы $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$ и $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$
Задача 22.17. Найдите суммы

(а) $\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \ldots + 2^{n-1}\sin n\alpha$; **(б)** $\cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \ldots + \cos(nx+\alpha)$.

Задача 22.18. Докажите, что многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Задача 22.19. Докажите, что если $f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ делится на $1 + x + x^2$, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ делятся на $x - 1$.
Задача 22.20. Найдите суммы

(а) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$; **(б)** $C_n^i + C_n^{i+3} + C_n^{i+6} + \ldots$, $i = 0, 1, 2$.

Задача 22.21. Найдите суммы

(а) $1 + 2\cos\alpha + 3\cos 2\alpha + \ldots + n\cos(n-1)\alpha$; **(б)** $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha$.

Задача 22.22. **(а)** Разложите на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами многочлен $x^{2n} - 1$. Пользуясь полученным разложением, найдите $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$ и $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$. **(б)** Найдите $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$.
Задача 22.23. **(а)** Докажите, что число $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ не является корнем n–ой степени из 1 ни при каком n. **(б)** Докажите, что градусная мера любого острого угла треугольника со сторонами 3, 4, 5 есть число иррациональное. **(в)** Докажите, что острый угол любого прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами выражается иррациональным числом градусов.
Задача 22.24. Найдите сумму и произведение s–тых степеней всех корней уравнения $z^n - 1 = 0$ в зависимости от s и n.