

Комплексная арифметика

Определение. *Комплéксными** числами будем называть формальные записи $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Множество таких чисел будем обозначать \mathbb{C} . Символ i называется *мнимой единицей*, число a — *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, число b — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$. Комплексные числа складываются, вычитаются и перемножаются по тем же законам, по которым производятся операции с многочленами, при этом полагается, что $i^2 = -1$.

Определение. *Сопряжённым* к комплексному числу z называют комплексное число $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$.

Везде далее под числом будем понимать комплексное число, если не оговорено иное.

Задача 21.1. Даны числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найдите

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| (а) $\operatorname{Re} z_2$; | (в) $z_1 + z_2$; | (д) $z_1 z_2$; | (ж) z_1 / z_2 ; | (и) z_1^{2017} . |
| (б) $\operatorname{Im} z_2$; | (г) $z_1 - z_2$; | (е) $1 / z_1$; | (з) z_1^3 ; | |

Задача 21.2. Найдите два комплексных числа, сумма которых равна 4, а произведение 5.

Задача 21.3. (а) Найдите какое-нибудь число z , такое, что $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\operatorname{Im} z^3 = 0$. (б) Найдите все корни уравнения $z^3 = 1$.

Задача 21.4. Докажите, что

- | | | |
|--|--|--|
| (а) $\bar{\bar{z}} = z$; | (в) $\operatorname{Im}(\bar{z}z) = 0$; | (д) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$; |
| (б) $\operatorname{Im}(\bar{z} + z) = 0$; | (г) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$; | (е) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$. |

Задача 21.5. Для числа $z = a + bi$ напишите формулы, по которым можно найти противоположное $-z$ и обратное z^{-1} ему числа.

Задача 21.6. Найдите общую формулу для частного $(a + bi)/(c + di)^\dagger$.

Задача 21.7. Докажите, что два числа с отличной от нуля мнимой частью являются сопряженными тогда и только тогда, когда их сумма и произведение являются действительными числами.

Определение. *Модулем* комплексного числа z называют неотрицательное действительное число $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

Задача 21.8. Верно ли, что в случае действительного числа введенное выше определение модуля не отличается от известного ранее?

Задача 21.9. Докажите, что

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| (а) $ \bar{z} = z $; | (в) $ zw = z w $; | (д) $ z/w = z / w $; |
| (б) $\bar{z}z = z ^2$; | (г) $ z^{-1} = 1/ z $; | (е) $z^{-1} = \bar{z}/ z ^2$. |

Определение. Комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать как точку координатной плоскости $(a; b)$. В этом случае ось абсцисс называется действительной осью, поскольку на ней оказываются действительные числа. Множество всех комплексных чисел с нулевой действительной частью (такие числа называются чисто мнимыми) оказывается лежащим на оси ординат, которая называется мнимой осью. Также любому комплексному числу $z = a + bi$ можно поставить в соответствие вектор $(a; b)$ на координатной плоскости. В случае, если на координатной плоскости отмечаются комплексные числа, ее обычно называют комплексной плоскостью.

*В отличие от обеда, который комплексный.

†Для получения формулы удобно воспользоваться сопряженными числами.

Задача 21.10. (а) Отметьте на комплексной плоскости число $z = 2 - 3i$. Где тогда находится число \bar{z} , как его можно получить для произвольного числа z ? (б) Что с геометрической точки зрения представляет собой $|z|$? (в) На комплексной плоскости отмечены числа z и w . Как отметить на ней числа $-\frac{3}{2}z$, $z + w$, $z - 2w$?

Задача 21.11. Верно ли утверждение: «Операции, совершаемые над комплексными числами, эквивалентны таким же операциям, совершаемым над соответствующими векторами»?

Задача 21.12. Докажите с помощью комплексной плоскости следующие неравенства:

$$(а) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$(б) \quad |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Определение. Аргументом комплексного числа z называется угол на комплексной плоскости, отсчитанный против часовой стрелки от положительного направления оси абсцисс до вектора, соответствующего числу z и обозначается $\arg z$.

Задача 21.13. (а) Найдите число z , если $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$. (б) Найдите модуль и аргумент числа $z = 2 - 3i$.

Задача 21.14 (Тригонометрическая форма записи комплексного числа). Докажите, что любое комплексное число z может быть записано в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Задача 21.15. (а) Как выражаются модуль и аргумент произведения двух комплексных чисел через их модули и аргументы? (б) Тот же вопрос для частного.

Задача 21.16 (Формула Муавра). Пусть $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Докажите, что тогда

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Задача 21.17. Вычислите $\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^{33}$.

Задача 21.18. (а) Выведите с помощью формулы Муавра формулы для синуса и косинуса тройного и четверного угла. (б) Выразите $\sin nx$ и $\cos nx$ в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 21.19. Вычислите суммы $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$ и $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha$.