Speedrun. Топология прямой

Символом 👻 обозначены задачи, при решении которых могут возникать непреодолимые трудности. Если Вы долго думаете над задачей без каких-то продвижений, стоит обратиться к ближайшему преподавателю математического анализа.

Определение. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in M \quad b \geqslant x$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества, ограниченные одновременно и сверху, и снизу, называются просто *ограниченными*.

Задача 🚀.1. Не употребляя отрицаний, дайте определения **(а)** числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$; **(б)** множества, неограниченного сверху; **(в)** неограниченного множества. Запишите их с помощью кванторов.

Определение. Число $m \in M$, для которого $\forall x \in M \quad m \geqslant x$, называется *максимальным элементом* множества $M \subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: тнг) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

Задача 🚀.2. Дайте определение минимального элемента и точной верхней грани (сокращённо: твг) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

Задача 🚀.3. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

Задача 🚀.4. Вычислите твг множеств: **(а)** $\{0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; 0{,}3333; 0{,}33333; \ldots\}$; **(б)** сумм $1 + q + q^2 + \cdots + q^m$ с фиксированным $0 < q < 1$ и любым $m \in \mathbb{N}$.

Задача 🚀.5. **(а)** Докажите, что твг $b = \sup M$ ограниченного сверху множества $M \subset \mathbb{R}$ обладает свойством *предельности*: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $x \in M$, что $b - \varepsilon \leqslant x \leqslant b$. **(б)** Докажите, что это свойство является достаточным, то есть что любая верхняя грань, обладающая этим свойством, будет точной.

Что такое число? Понятно, что как-то можно разобраться с тем, как устроено множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Оно состоит из элементов, которые следуют друг за другом по цепочке, начиная с 1. Несложно определить операции: например, чтобы прибавить к числу $n \in \mathbb{N}$ число $m \in \mathbb{N}$, надо m раз взять следующее число после n. Целые числа $\mathbb{Z}$ легко строятся из натуральных, а рациональные $\mathbb{Q}$ — из целых и натуральных как множество дробей. Вопрос о том, из чего состоит множество действительных чисел $\mathbb{R}$, оказывается далеко не столь прост, и можно отвечать на него разными способами.

Часто действительные числа воспринимают как точки на геометрической прямой, но не все при этом понимают, как определяется прямая в элементарной геометрии (как?).

Другое привычное определение множества действительных чисел — бесконечные десятичные дроби, среди которых надо отождествить бесконечные десятичные дроби с бесконечным числом девяток на конце с соответствующими конечными десятичными дробями. При таком определении действительных чисел не так легко, как кажется на первый взгляд, определять операции: например, как сложить две бесконечные десятичные дроби, нельзя же складывать в столбик, начиная с конца, если конца нет? Или, хуже, как перемножить? И почему после того, как мы дадим какие-то определения операций, будут выполняться привычные нам из начальной школы свойства вроде дистрибутивности $a(b + c) = ab + ac$ и ассоциативностей $(ab)c = a(bc)$, $(a + b) + c = a + (b + c)$?

Есть ещё определение действительных чисел как так называемых Дедекиндовых сечений — число $x \in \mathbb{R}$ определяется как разбиение множества рациональных чисел на две такие непересекающиеся части $\mathbb{Q} = A \sqcup B$, что любое число из A меньше любого числа из B (+ некоторое техническое условие). По сути множество A состоит из рациональных чисел, не превосходящих x, а B — из чисел, больших x. С такими громоздкими конструкциями работать довольно непривычно, но зато несложно определяются операции сложения и умножения.

Геометрическая прямая, бесконечные десятичные дроби и Дедекиндовы сечения — разные «модели» одного и того же понятия. Мы не будем углубляться в определение операций и доказательства их простых свойств в разных моделях, можно ими пользоваться без доказательства. Однако некоторые свойства действительных чисел, которые следуют из конкретных моделей выше, нельзя вывести из свойств сложения и умножения. Одно из таких свойств мы примем в качестве аксиомы.

Аксиома полноты: у любого ограниченного сверху множества $M \subset \mathbb{R}$ существует твг $\sup M \in \mathbb{R}$.

Задача 🚀.6. Объясните, почему при замене $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$ аксиома полноты перестаёт выполняться.

Задача 🚀.7. Докажите, что каждое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.

Задача 🚀.8 *(лемма о вложенных отрезках)* 👻. Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Докажите, что пересечение всех этих отрезков непусто.*

Задача 🚀.9 *(лемма о стягивающихся отрезках)* 👻. Пусть про последовательность отрезков из предыдущей задачи известно, что последовательность их длин является бесконечно малой. Докажите, что пересечение этих отрезков состоит из одной точки.

Задача 🚀.10. Верна ли лемма для вложенных интервалов?

Задача 🚀.11 *(лемма о конечном покрытии)*👻. Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок.

Указание к задаче 🚀.11: Действуйте от противного и поделите отрезок пополам.

Задача 🚀.12. Верна ли лемма о конечном покрытии для интервала?

Определение. Для любого положительного числа ε будем называть *ε-окрестностью* точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал $D_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ длины 2ε с центром в x_0.

Определение. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M.

Определение. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall u \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(u) \subset U$. Пустое множество тоже по определению считается открытым.

Задача 🚀.13. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и (a, b) открыты.

Задача 🚀.14. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

Задача 🚀.15. **(а)** Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. **(б)** Так ли это для пересечений бесконечных наборов.

Задача 🚀.16 *(лемма о конечном покрытии-2)*👻. Докажите, что в любом покрытии отрезка открытыми множествами найдётся конечный набор этих множеств, покрывающий весь отрезок.

Указание к задаче 🚀.16: Сведите к интервалам или докажите так же.

Определение. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если любая её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.

Пример. Рассмотрим множество $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Точка 0 — предельная точка M, так как для любого $\varepsilon > 0$ существует $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и для этого n выполнено $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, то есть точка $\frac{1}{n} \in M$ лежит в $D_\varepsilon(0)$ и не совпадает с 0.

Задача 🚀.17. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **(а)** пусто; **(б)** состоит из двух точек; **(в)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Задача 🚀.18👻. Докажите, что бесконечное ограниченное множество имеет предельные

*На самом деле эта лемма равносильна аксиоме полноты и можно взять в качестве аксиомы её.

точки.

Указание к задаче 🚀.18: Поделите отрезок пополам.

Определение. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет).

Задача 🚀.19. Докажите, что отрезок и прямая замкнуты, а интервал и луч — нет.

Задача 🚀.20. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \backslash Z$ открыто.†

Задача 🚀.21. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Задача 🚀.22. (а) Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. **(б)** Так ли это для бесконечных наборов?

Определение. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами.*

Пример. Любой отрезок является компактом.

Задача 🚀.23 *(лемма о конечном покрытии-3)*👻. Докажите, что непустое $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Указание к задаче 🚀.23: $\Rightarrow$ Компакт $K \subseteq [a; b]$ (почему?) Покройте $[a; b]$ и воспользуйтесь....
$\Leftarrow$ Если K не ограничено, рассмотрите покрытие интервалами длины 1. Если K не замкнуто, то у него есть предельная точка $x_0 \notin K$: рассмотрите $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| > 1/n\}$.

Задача 🚀.24 *(лемма о вложенных компактах).* Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_n \neq \varnothing$.

Указание к задаче 🚀.24: Указание: удобно действовать от противного. Не забыв про ограниченность K_1, рассмотрите дополнения к K_i — что они покрывают?

† Очень полезная задача — помогает сводить замкнутые множества к открытым...