Топология прямой: Начало

Задача 28.1 ***(лемма о вложенных отрезках).*** Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?
Задача 28.2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?
Задача 28.3. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти **(а)** 5м? **(б)** 10м? **(в)** 12м?
Задача 28.4 ***(лемма о конечном покрытии).*** Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок*.
Задача 28.5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?
Задача 28.6. Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?
Задача 28.7. Всегда ли из покрытия отрезка **(а)** конечным; **(б)** любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?
Определение. Для любого положительного числа ε будем называть *ε-окрестностью* точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал $D_\varepsilon(x_0) \coloneqq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ длины 2ε с центром в x_0.
Определение. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M.
Определение. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall u \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon(u) \subset U$. Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.
Задача 28.8. Убедитесь, что промежутки **(а)** $(-\infty, a)$; **(б)** $(a, +\infty)$; **(в)** (a, b); открыты.
Задача 28.9. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?
Задача 28.10. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.
Задача 28.11. **(а)** Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. **(б)** Так ли это для пересечений бесконечных наборов?
Задача 28.12. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.
Определение. Точка $a \in M \subset \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M.
Определение. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным.*
Задача 28.13. Может ли бесконечное дискретное множество быть **(а)** ограниченным? **(б)** несчётным?

*Подсказка: воспользуйтесь леммой о вложенных отрезках.