Другие последовательности

Определение. Последовательность называется *неограниченной*, если она не является ограниченной.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого числа $C > 0$ найдется такое число k, что при всех натуральных n, больших k, будет верно неравенство $|a_n| > C$.

Задача 25.1. Сформулируйте, не используя отрицания, определения неограниченной и бесконечно большой последовательностей с помощью кванторов. Верно ли, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной? А наоборот? Рассмотрим множество неограниченных и множество бесконечно больших последовательностей. Пересекаются ли они? Является ли одно из них подмножеством другого?

Задача 25.2. Сформулируйте, не используя отрицания, определение последовательности, которая **(а)** не является неограниченной; **(б)** не является бесконечно большой. Запишите их с помощью кванторов.

Задача 25.3. Последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая. Верно ли, что она монотонная? А последовательность $\{|a_n|\}$?

Задача 25.4. Является ли бесконечно большой последовательность, равная **(а)** сумме; **(б)** разности; **(в)** произведению; **(г)** отношению бесконечно больших последовательностей?

Задача 25.5. Изменятся ли ответы на вопросы предыдущей задачи, если везде заменить бесконечно большие последовательности на неограниченные?

Определение. Пусть $\{n_i\}$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_i\}$, где $b_i = a_{n_i}$, называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 25.6. **(а)** Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной последовательности ограничена. Останется ли верным аналогичное утверждение в случае **(б)** монотонной; **(в)** неограниченной; **(г)** бесконечно большой последовательности?

Задача 25.7. Докажите, что **(а)** любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность; **(б)** любая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.

Задача 25.8. **(а)** Докажите, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, в котором находится бесконечно много членов этой последовательности. **(б)** Верно ли, что если для некоторой последовательности такого отрезка длины 1 найти нельзя, то эта последовательность бесконечно большая?

Задача 25.9. Докажите, что для любой ограниченной монотонной последовательности найдется отрезок длины 1, в котором находятся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера.

Задача 25.10. Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга.

Задача 25.11. **(а)** Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ при любом натуральном n. Может ли эта последовательность быть неограниченной? **(б)** Тот же вопрос, если $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

Задача 25.12. **(а)** Придумайте такую последовательность натуральных чисел, что любая последовательность натуральных чисел является ее подпоследовательностью. **(б)** Можно ли решить аналогичную задачу, если натуральные числа всюду заменить на рациональные числа? **(в)** А на действительные?

Задача 25.13. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое натуральное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причем единственным образом?

Задача 25.14. Докажите, что найдется такое число $a > 0$, при котором дробные части всех чисел последовательности $\{a_n\}$ принадлежат отрезку $[1/3; 2/3]$.

Задача 25.15. **(а)** Докажите, что у всякой последовательности длины n^2+1 существует монотонная подпоследовательность длины $n+1$. **(б)** Останется ли верным утверждение задачи в случае последовательности длины n^2 при больших значениях n?

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для произвольного положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при любом натуральном $n > N$ будет верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

В задачах ниже при доказательстве надо явно указывать сколемовскую функцию.

Задача 25.16. Запишите в кванторах определение бесконечно малой последовательности и последовательности, не являющейся бесконечно малой. Запишите их так, чтобы кванторы существования шли в начале формулы.

Задача 25.17. Для последовательности $\{\alpha_n\}$ укажите какой-нибудь номер N, начиная с которого для всех членов последовательности верно неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если

(а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$;
(б) $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^3}$;
(в) $\alpha_n = 0{,}99^n$;
(г) $\alpha_n = \dfrac{2^n}{n!}$;
(д) $\alpha_n = \dfrac{2n+3}{n^2+2n-1}$;
(е) $\alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Задача 25.18. Верно ли, что **(а)** сумма; **(б)** разность; **(в)** произведение; **(г)** отношение бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.

Задача 25.19. Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются бесконечно малыми, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\alpha_n \leqslant \gamma_n \leqslant \beta_n$. Докажите, что тогда последовательность $\{\gamma_n\}$ также является бесконечно малой.

Задача 25.20. Верно ли, что последовательность $\{\alpha_n\}$ с отличными от нуля членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ является бесконечно большой?

Задача 25.21. **(а)** Верно ли, что последовательность $\{\alpha_n\}$ положительными членами является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n^2\}$ является бесконечно малой? **(б)** Верно ли аналогичное утверждение для последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\sqrt[3]{\alpha_n}\}$?

Задача 25.22. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые, а последовательность $\{\gamma_n\}$ такова, что $\gamma_{2n-1} = \alpha_n$, $\gamma_{2n} = \beta_n$ при любом натуральном n. Является ли последовательность $\{\gamma_n\}$ бесконечно малой?

Задача 25.23. Одна последовательность бесконечно малая, а другая ограниченная. Что можно сказать о **(а)** сумме; **(б)** произведении; **(в)** отношении этих последовательностей?

Задача 25.24. Решите предыдущую задачу в случае, если одна из последовательностей бесконечно малая, а другая бесконечно большая.

Задача 25.25. Докажите, пользуясь предыдущими задачами, что следующие последовательности являются бесконечно малыми:

(а) $\dfrac{n^5+3}{n^{10}}$; **(б)** $\dfrac{3n^6+2n^4-n}{n^9+7n^5-5n^2-2}$; **(в)** $\sqrt{\dfrac{|\sin 3n + \cos 7n|}{2n^2+3n}}$; **(г)** $\dfrac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$;

Задача 25.26. Любую ли последовательность можно представить в виде отношения двух бесконечно малых последовательностей?

Задача 25.27. По последовательности $\{\alpha_n\}$ построили последовательность $\{\beta_n\}$ так, что $\beta_n = \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_n}{2}$ при любом натурального n. Докажите, что если последовательность $\{\beta_n\}$ оказалась бесконечно малой, то и последовательность $\{\alpha_n\}$ также является бесконечно малой.