

Комплексная геометрия

Задача 23.1. Найдите геометрическое место точек z на комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям: (а) $|z - 1| = 1$; (б) $|z| = |z + 1|$.

Задача 23.2. Докажите, что точки 0 , z и $\frac{1}{\bar{z}}$ лежат на одной прямой.

Задача 23.3. Докажите, что уравнение $z + \bar{z} = z\bar{z}$ задаёт окружность. Найдите её центр и радиус.

Задача 23.4. Нарисуйте множество точек $z \in \mathbb{C}$, таких, что $|z - 3| \leq 2$ и $|z + 4i| \leq 3$.

Задача 23.5. Докажите, что произведение диагоналей четырёхугольника не больше суммы произведений его противоположных сторон. Когда это неравенство обращается в равенство?

Задача 23.6. Докажите, что для любого числа a преобразование $z \mapsto az$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

Задача 23.7. Что можно сказать про это преобразование, если число a действительно? Если $|a| = 1$? При каком a это преобразование будет поворотом на 30° вокруг начала координат?

Задача 23.8. (а) Числа 0 и z являются вершинами правильного треугольника. Где может находиться третья его вершина? (б) На сторонах треугольника с вершинами в точках u , z , w построены равносторонние треугольники. Найдите формулы для их центров (через комплексные числа u , z , w). Докажите, что эти центры образуют равносторонний треугольник.

Задача 23.9. При каких a и b преобразование $z \mapsto az + b$ будет (а) поворотом? (б) переносом? (в) осевой симметрией?

Задача 23.10. При каких a и b преобразование $z \mapsto a\bar{z} + b$ является осевой симметрией?

Задача 23.11. Докажите, что треугольник с вершинами 0 , 1 , z подобен треугольнику с вершинами 0 , 1 , $\frac{1}{\bar{z}}$.

Задача 23.12. Точки x , y , z комплексной плоскости лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставьте пропущенную формулу и докажите.

Задача 23.13. Найдите геометрическое место точек z , для которых число $\frac{z-1}{z-2}$ — чисто мнимое.

Задача 23.14. Докажите, что точки z , w , $\frac{1}{\bar{z}}$, $\frac{1}{\bar{w}}$ лежат на одной окружности.

Задача 23.15. Докажите, что точка $\frac{1}{\bar{z}}$ пробегает окружность, когда z движется по прямой $\operatorname{Re} z = 1$.

Задача 23.16. Точки x , y , z , w комплексной плоскости лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставьте пропущенную формулу и докажите.

Задача 23.17. Докажите, что уравнение $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + c = 0$, где a — комплексное число, а c — действительное, задаёт пустое множество, прямую или окружность. Как по a и c определить, что именно?

Задача 23.18 (окружность Аполлония). Найдите геометрическое место точек таких X , что $\frac{|AX|}{|BX|} = \text{const}$.

Задача 23.19 (Степень точки относительно окружности). Докажите, что степень точки w относительно окружности $Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0$ равна $w\bar{w} + \frac{B}{A}w - \frac{\bar{B}}{A}\bar{w} + \frac{C}{A}$.

Задача 23.20 (Радикальная ось двух окружностей). Докажите, что геометрическое место точек w , степень которых относительно двух неконцентрических окружностей S_1 и S_2 одинакова, является прямой.

Задача 23.21 (Радикальный центр трех окружностей). На плоскости даны три окружности S_1 , S_2 и S_3 . Докажите, что если две радикальных оси этих окружностей пересекаются в точке Q , то третья радикальная ось также проходит через эту точку.

Задача 23.22. Как в комплексных числах записывается образ точки z при инверсии относительно окружности единичного радиуса? Относительно произвольной окружности? Докажите основные свойства инверсии через комплексные числа.