Комплексная арифметика

Определение. *Компле́ксными*[*] *числами* будем называть формальные записи $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Множество таких чисел будем обозначать $\mathbb{C}$. Символ i называется *мнимой единицей*, число a — *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, число b — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$. Комплексные числа складываются, вычитаются и перемножаются по тем же законам, по которым производятся операции с многочленами, при этом полагается, что $i^2 = -1$.
Определение. *Сопряжённым* к комплексному числу z называют комплексное число $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$.
Везде далее под числом будем понимать комплексное число, если не оговорено иное.
Задача 21.1. Даны числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найдите

(а) $\operatorname{Re} z_2$; **(в)** $z_1 + z_2$; **(д)** $z_1 z_2$; **(ж)** z_1/z_2; **(и)** z_1^{2017}.
(б) $\operatorname{Im} z_2$; **(г)** $z_1 - z_2$; **(е)** $1/z_1$; **(з)** z_1^3;

Задача 21.2. Найдите два комплексных числа, сумма которых равна 4, а произведение 5.
Задача 21.3. **(а)** Найдите какое-нибудь число z, такое, что $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\operatorname{Im} z^3 = 0$. **(б)** Найдите все корни уравнения $z^3 = 1$.
Задача 21.4. Докажите, что

(а) $\bar{\bar{z}} = z$; **(в)** $\operatorname{Im}(\bar{z}z) = 0$; **(д)** $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;
(б) $\operatorname{Im}(\bar{z} + z) = 0$; **(г)** $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$; **(е)** $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$.

Задача 21.5. Для числа $z = a + bi$ напишите формулы, по которым можно найти противоположное $-z$ и обратное z^{-1} ему числа.
Задача 21.6. Найдите общую формулу для частного $(a + bi)/(c + di)$[†].
Задача 21.7. Докажите, что два числа с отличной от нуля мнимой частью являются сопряженными тогда и только тогда, когда их сумма и произведение являются действительными числами.
Определение. *Модулем* комплексного числа z называют неотрицательное действительное число $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.
Задача 21.8. Верно ли, что в случае действительного числа введенное выше определение модуля не отличается от известного ранее?
Задача 21.9. Докажите, что

(а) $|\bar{z}| = |z|$; **(в)** $|zw| = |z||w|$; **(д)** $|z/w| = |z|/|w|$;
(б) $\bar{z}z = |z|^2$; **(г)** $|z^{-1}| = 1/|z|$; **(е)** $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

Определение. Комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать как точку координатной плоскости $(a; b)$. В этом случае ось абсцисс называется действительной осью, поскольку на ней оказываются действительные числа. Множество всех комплексных чисел с нулевой действительной частью (такие числа называются чисто мнимыми) оказывается лежащим на оси ординат, которая называется мнимой осью. Также любому комплексному числу $z = a + bi$ можно поставить в соответствие вектор $(a; b)$ на координатной плоскости. В случае, если на координатной плоскости отмечаются комплексные числа, ее обычно называют комплексной плоскостью.

[*] В отличие от обеда, который ко́мплексный.
[†] Для получения формулы удобно воспользоваться сопряженными числами.

Задача 21.10. **(а)** Отметьте на комплексной плоскости число $z = 2 - 3i$. Где тогда находится число $\bar{z}$, как его можно получить для произвольного числа z? **(б)** Что с геометрической точки зрения представляет собой $|z|$? **(в)** На комплексной плоскости отмечены числа z и w. Как отметить на ней числа $-\frac{3}{2}z, z + w, z - 2w$?

Задача 21.11. Верно ли утверждение: «Операции, совершаемые над комплексными числами, эквивалентны таким же операциям, совершаемым над соответствующими векторами»?

Задача 21.12. Докажите с помощью комплексной плоскости следующие неравенства:

(а) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; **(б)** $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$.

Определение. *Аргументом* комплексного числа z называется угол на комплексной плоскости, отсчитанный против часовой стрелки от положительного направления оси абсцисс до вектора, соответствующего числу z и обозначается $\arg z$.

Задача 21.13. **(а)** Найдите число z, если $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$. **(б)** Найдите модуль и аргумент числа $z = 2 - 3i$.

Задача 21.14*(Тригонометрическая форма записи комплексного числа).* Докажите, что любое комплексное число z может быть записано в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Задача 21.15. **(а)** Как выражаются модуль и аргумент произведения двух комплексных чисел через их модули и аргументы? **(б)** Тот же вопрос для частного.

Задача 21.16*(Формула Муавра).* Пусть $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Докажите, что тогда

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Задача 21.17. Вычислите $\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^{33}$.

Задача 21.18. **(а)** Выведите с помощью формулы Муавра формулы для синуса и косинуса тройного и четверного угла. **(б)** Выразите $\sin nx$ и $\cos nx$ в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 21.19. Вычислите суммы $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$ и $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$.