$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^i \partial y^j} \text{ "} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial u^i \partial u^j} \text{"} \quad \frac{\partial F_j}{\partial u^i} =$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^i \partial y^j} = \frac{\partial F_i}{\partial u^j} = \frac{\partial F_j}{\partial u^i} + \frac{\partial F_j}{\partial u^s}\frac{\partial y^s}{\partial u^i} =$$

$$\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial y^s} F_i^s$$ — верно вдоль всего реш-ия, в частн-ти, в нач. т.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial u^i} = \frac{\partial F_j}{\partial u^i} + \frac{\partial F_j}{\partial y^s} F_i^s$$

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^j} + \frac{\partial F_i}{\partial u^s} F_j^s = \frac{\partial F_j}{\partial u^i} + \frac{\partial F_j}{\partial u^s} F_i^s$$ выполн-ся

$\forall s$ — условие совместности (если система совместна, то это верно, необходимость)

Теорема Это условие и достаточно. Если в начальных данных a, $\bar{b}$ эта система совместна и это реш-не единственно

∃ гладкое реш-не

верно это условие и ф-ции F_i - не заданы на $U \times V$ тогда если система совм-на и ~~выполн~~ ~~непосредственно~~ ~~-ния~~ и если выполн. когда переменная одна - это ОДУ.

$$\triangleright \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial u^1} = \bar{F}_1(u^1, u^2, y^1, \dots, y^k) \\ \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial u^2} = \bar{F}_2(u^1, u^2, y^1, \dots, y^k) \end{cases}$$

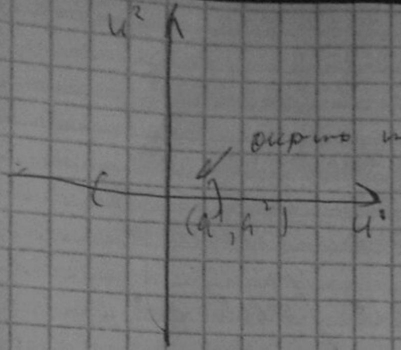
$\bar{y}(a^1, a^2) = \bar{b}$ — нач. усл-ия

координаты $\bar{a}$

u^2 фиксируем. $u^2 = a^2$

Рассм. след. ур-ие $\dfrac{d\bar{f}}{du^1} = \bar{F}_1(u^1, a^2, \bar{f})$

$\bar{f}(a^1) = \bar{b}$ $\quad \bar{f}(u^1)$



1 част-ая ур-ия $\frac{df}{du^1} = \bar F_1(u^1, a^2, f)$

Решим по оси u^1

начинаем от a^2 и решаем уравнение по оси u^2 с фиксированным u^1 с начальными значениями $\bar y(a^1, a^2) = \bar f(a^1) = \bar b$

Используем условие совместности.

$$h(u^1, u^2) = \frac{\partial \bar y}{\partial u^1} - F_1(u^1, u^2, \bar y)$$

$h(u^1, a^2) = 0$ Надо д-ть, $h(u^1, u^2) = 0$.

Продифф-ем $\frac{\partial h}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \bar y}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial F_1}{\partial u^2} - \frac{\partial F_1}{\partial y^s} F_2^s =$

$$= \frac{\partial^2 \bar y}{\partial u^2 \partial u^1} - \frac{\partial F^2}{\partial u^1} - \frac{\partial F_2}{\partial y^s} F_1^s = \frac{d F_2}{d u^1} + \frac{\partial F_2}{\partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial u^1}$$

$$- \cancel{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial y^s} h^s} - \cancel{\frac{\partial F_2}{\partial u^1}} - \frac{\partial F_2}{\partial y^1} F_1^s =$$

$$= \frac{\partial F^2}{\partial u^s} h^s$$

$\square$

Применение т-мы. Пусть пр-ая $\bar F$ не зависит от $\bar y$.

$$\frac{\partial \bar y}{\partial u^i} = \bar F_i(u^1, \dots, u^n)$$

Это ~~реш-ие~~ система совместна с

$$\frac{\partial \bar F_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \bar F_j}{\partial u^i}$$

Д-во теоремы

Ур-ие совм-ти для системы $\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial r}{\partial q^k}$

Это то, что 3-и производные r коммутируют по перестановке j и l

$$\frac{\partial^3 \bar{x}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial^3 \bar{x}}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j}$$

т.е.

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^k \partial u^l} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \frac{\partial r}{\partial u^s} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} = \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u_j} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}$$

Определение тензора Римана кривизны в связности γ (в частн-ти Леви-Чив.)

$$R_{ilj}^s = \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u_j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s - \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s$$

Если задана метрику, то прив-ая система координат $\exists$ тогда и только тогда когда $R_{ilj}^s = 0$

Опр. Такая метрика наз-ся плоской.

Задача (оч. сложная) Метрика задаёт прив-ную коорд-ы

1) $\exists$ коорд. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\exists$ коорд $\Gamma_{ij}^k = 0$

не тензор.

3) ~~метрика прив. сист. коорд.~~

$R_{ijl}^k = 0$

Д-ть $1 \sim 2 \sim 3$

Примеры крив. лин. коорд.

Ортогональная крив. с.к. эквивалентно тому что

в Диагональная метрика (орто

$$\begin{pmatrix} g_1(x) & 0 \\ 0 & g_n(x) \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial u_i}, \frac{\partial r}{\partial u_j}\right) = g_{ij}(u) = 0$$

Пример орт. с. к.

1) полярная

2) эллиптическая

Описать все. Для $n=2$ несложно, для $n \geq 3$ - задача нетривиальная

Уравнения Ламе

$$\begin{pmatrix} g_1(x) & 0 \\ 0 & g_n(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$R_{ij\,l}^{\;k} = 0$$

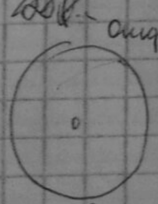
Коэф-ты Ламе H_i

Поверхности (k-мерные регулярные подмногообразия)

Дано

R^k - евкл. пр. и R^n евкл. пр.

открытый шар



$U = \{x; |x| < R\}$

И расм. отображение $\varphi: U \to R^n$

Образ ~~гомеоморф.~~ отобр-ие φ - наз-ся элементарной k-мер. поверхностью.

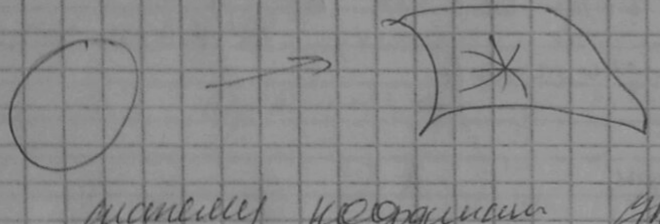
φ – параметризация пов-ти

$\left(x^1(u^1 \ldots, u^k), \ldots x^n(u^1 \ldots u^n)\right) = \vec{r}(u^1 \ldots u^n)$

Если у пов-ти $\exists$ гладкая (регул. (отображение регул. во всех точках $\operatorname{rank} J$ = max)) параметр-ия, то это частный случай криволинейных координат в k-мерных многообразий.

Мы рассм-ем только

Опр. ~~Подмн-во~~ $M \subset R^n$ – подмногообразие, ~~…~~, если $\forall x \in R^n$ $\exists$ окр. то U т. x, $U \cap M = \varnothing$ $\vee$ элементарным k-мерным подмногообразием.



$u^1, \ldots u^k$

Получаем криволин. систему координат для многообр-ия

$u_0^1, \ldots u_0^k$

Можно также рассм. (линии уровня) координатн. линий $\vec{r}(u^1, u_0^2, \ldots, u_0^k)$
фикс. ищ-ю фикс. фикс.

Получаем k коорд. линий $r(u^i)$ $\forall i = 1 \ldots k$.

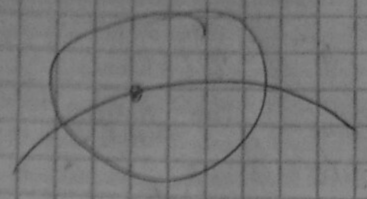
Вектора скоростей для них $\frac{d\vec{r}}{du^i}$

Из этих векторов, получаем ~~базис~~ k-мерный репер (линейно независимые т.к. $\operatorname{rank}\{J\} = k$ max) и вектора не нулевые.)

Опр. Касательное пространство к k-мерной регул. поверхности в точке $x \in M^k$ это $T_x = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} \right\rangle$ – k мерное линейное пространство

Утв. Касат-ое пр-во в каждой точке состоит из всех векторов скоростей всех регулярных кривых лежащих в M и проход-их ч/з эту точку в этой точке

Δ $\Rightarrow)$



Подмногообр. задаётся $\vec{r}(u^1 \dots u^k)$

Кривая лежит в подмн-ии, значит

$r(t) = r(u^1(t) \dots u^k(t))$

(Я можно задать её так)

Вектор скорости: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \underbrace{u^i_t} \in T_x$

$\Leftarrow)$ $\forall$ ненулевой $\vec{a} \in T_x$

$a = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\partial r}{\partial u^i}$, где $a_i = const$.

$r(u^1_0, \dots, u^k_0)$ — подмн.

Рассм. кривую $u^i(t) = u^i_0 + a^i t$ для

дост. маленьких t

$\vec{r}(u(t))$ — подмн.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u^i} u^i_t = \frac{\partial r}{\partial u^i} a^i \quad \square$$

Опр Метрика k-мерного многообр-ия (первая квадратичная форма k-мерного подмногообразия) — это $g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right)$

Ут. это риманова метрика, поскольку:

$\det g_{ij} \neq 0$, положит. опред-на, поск-ку отобр-ие задаётся матр. Грама для регул. отображения. (Всё аналогично) крив. с. к.)

$g_{ij}(u) = g_{ji}(u)$ $\forall u$ — очевидно.

И замена координат следующая

Даны 2 с. сист. к. $g_{ij}(v) = \left(\frac{\partial r}{\partial v^i}, \frac{\partial r}{\partial v^j}\right) =$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial v^i}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^s}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\right)\frac{\partial u^s}{\partial v^i}\frac{\partial u^l}{\partial v^j} =$$

$= g_{se}(u(\sigma))\frac{\partial u^s}{\partial u^i}\frac{\partial u^l}{\partial u^j}$

переход из одной сист. коорд. в другую переходит так как нужно $\Rightarrow$ римановой модуль.

Первая кв. ф. задаёт скалярное пр-ие в касательном пр-ве T_x

$v_1 = a^i\frac{\partial r}{\partial u^i}$ $\quad v_2 = b^i\frac{\partial r}{\partial u^i}$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right)a^i b^j = g_{ij}a^i b^j$ - невырожденное

скал. пр-ие, т.е. $R^k_{ij} \neq 0$, вообще говоря.

В окр-ти каждой точки ~~в качестве~~ лок-ые координаты можно выбрать так, что пов-ть будет задаваться

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ \dots \\ x^k = u^k \\ x^{k+1} = x^{k+1}(u^1 \dots u^k) \\ x^n = x^n(u_1 \dots u^k) \end{cases}$$

$\triangleright$ $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = k$

Можно считать, что первые k столбцов задают невырожд. минор $\Rightarrow$ по т-ме о неявной ф-ии в окр-ти каждой точки ф-ии можно обратить

$u^1 = u^1(x^1 \dots x^k)$

$\vdots$

$u^k = u^k(x^1 \dots x^k)$

Пос-ку все ост-ые коорд. зависят от $u^1 \dots u^k$, получаем

В качестве новых координат возьмём $\cancel{x^1, \dots x^k}$ $u^1 \dots u^k$. Получим то, что нужно $\square$

~~Функция ... Рассмотрим ... в т. ...~~

Опр. M ... явл. гладкой на каждом ... C^1, если она явл. гладкой при ... ... на $\forall$ координатную поверхность.

Неявное задание k-мерной поверхности.

В предыдущем случае пов-ть была задана в виде системы $\begin{cases} x^{k+1} = x^{k+1}(u^1, \dots, u^k) \\ x^n = x^n(\dots) \end{cases}$

$$\begin{cases} F_1(x_0^1, \dots, x^n) = 0 \\ F_m(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

Пусть есть решение этой системы x_0, $m \leq n$

Утв. Если $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F}{\partial x^j}\right) = m$ в x_0 (система регулярна в x_0), тогда в нек. окр-ти т. x_0 решения этой системы задают k-мерное регулярное подмногообр-ие в $\mathbb{R}^n$, где $k = n - m$.

(m – ... коразмерностью подмн-ия)

$\triangleright$ ~~Из рег-ти ...~~ По т-ме о неявн. ф-и

$\operatorname{rank} = m$ $\quad \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \quad 1 \leq i, j \leq m$

c т. о н. ф.

$$\begin{cases} x^1 = x^1(x^{m+1}, \dots, x^n) \\ x^m = x^m(x^{m+1}, \dots, x^n) \end{cases} \Rightarrow x^{m+1}, \dots, x^n \text{ явл-ся}$$

криволинейными коорд-ми на нашем подмногообр-ии.

т. е. все x^i явл-ся ф-циями от
n-m координат. Получаем n-m-мерн.
подмногообр-ие □

~~Пусть теперь~~ т. о.

$\forall$ k-мерн. подмн-ие мы можем зад-ть
2-мя разн. способами

1) параметрически с исп. радиус-в.

$\vec{r}(u^1, \dots, u^k)$

2) с помощью системы

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k} = 0 \end{cases}$$

Локально это эквивалентные способы.

~~Теперь~~ Пусть дано: $F_i(x^1(t), \dots, x^n(t)) = 0$, т. е. кривая лежит в M

Рассм ~~дифф~~:

$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = 0$ — ~~Получаем~~ ∂ это вектор скорости.

$\vec{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$

$\downarrow$

Получаем вектор

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x^n}\right) = \vec{\sigma}_i \quad \forall i$$

Тогда $\vec{\sigma}_i \perp \vec{r} \quad \forall r \in T_x \quad \forall i$.

из условия линейной независим-ти.

Получаем $N_x \langle \frac{\partial F_i}{\partial x^i} \rangle$ — n-мерное пространство.

Опр N_x — нормальное мн. пр-во

$$N_x \oplus T_x = \mathbb{R}^n$$

~~Дано Пусть~~ Дано: $T_x \langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} \rangle$

мы можем рассм-ть задание вектора $(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial x^1}{\partial u^1} z_1$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} z^1 + \ldots \dfrac{\partial x^n}{\partial u^1} z^n = 0 \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^k} z^1 \ldots + \dfrac{\partial x^n}{\partial u^k} z^n = 0 \end{cases}$$

Расш. - это условие орт-ти. У этой системы

$n - k$-мерное пр-во решений. Можно провести процедуру ортогонализации (из линала), которая будет гладко зависеть от точки.

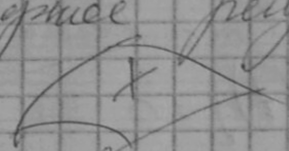
Поэтому б. о. будем рассматривать ортогон. базис

$(\vec{n}(u^1 \ldots u^k), \ldots \vec{n}(u^1 \ldots u^k))$

$(\vec{n}^i, \vec{n}^j) = \delta_{ij}$

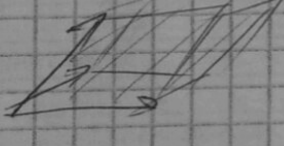
У нас задано k-мерное регулярное подмногообразие

$\vec{r}(u^1 \ldots u^k)$.



И для параллел-а на векторах $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i$

Напоминание, что $V^2(\vec{a}, \vec{b}, \ldots \vec{d}) = \begin{vmatrix} a^1 & \ldots & a^n \\ b^1 & \ldots & b^n \\ d^1 & \ldots & d^n \end{vmatrix}$ ·



$$\cdot \begin{vmatrix} a^1 & \ldots & d^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a^n & \ldots & d^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{a}) & (\bar{a}, \bar{b}) & \ldots & (\bar{a}, \bar{d}) \\ (\bar{b}, \bar{a}) & & & \\ \vdots & & & \\ (\bar{d}, \bar{a}) & \ldots & & (\bar{d}, \bar{d}) \end{vmatrix}$$

Тогда для k-мерного касат-го пр-ва T_x

объём $V^2\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i\right) = G_r = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial u^1} du^1, \frac{\partial r}{\partial u^1} du^1\right) & \ldots \\ \vdots & \\ & (du^k)^2 \end{vmatrix} =$

$= \left| \left(\left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j} \right) \right) \right| (du^1)^2 \ldots (du^k)^2 = \det g_{ij} (du^1)^2 \ldots (du^k)^2.$

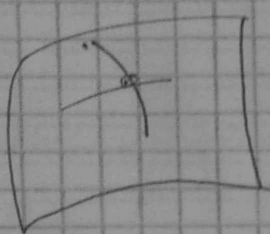
Тогда $V = \int dM_{g_0} \, du^1 \dots du^k$

▷ Чтобы д-ть, надо интегрировать, мы не будем

Координатная поверхность

$R^n \quad \vec{r}(u^1 \dots u^n)$

$s \le k \quad u^1, u^2 \qquad \vec{r}(u^1, u^2, u_0^3, u_0^4 \dots u_0^n)$



Мы ввели в каждой точке пов-ти базис:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \dots \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k}\right), \vec{n}_1(u), \dots \vec{n}_m(u)$$

Деривационное уравнение k-мерн подмн-ия

$$\frac{\partial r}{\partial u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k(u) \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^{m} b_{ij\alpha}(u) \vec{n}_\alpha(u)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial u^i} = C_{i\alpha}^k(u) \frac{\partial r}{\partial u^k} + \sum_{\beta=1}^{m} \mu_{i\alpha\beta}(u) \vec{n}_\beta(u) \quad (*)$$

Опр. $b_{ij\alpha}(u)$ — α-ая квадратичная форма k-мерн подмногообр-ия, вложенного в евкл пр-во.

Назыв. иначе 2-ой кв. форм.

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n}_\alpha\right) = b_{ij\alpha}(u)$$

это тензор типа $(0,2)$ для $\forall \alpha$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ Посмотрим, как преобр-ется эта форма при замене координат

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^i \partial v^j}, \vec{n}_\alpha\right) = \tilde{b}_{ij\alpha}(v) = \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial v^j}\right), \vec{n}_\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^s \partial u^p} \frac{\partial u^p}{\partial v^i} \frac{\partial u^s}{\partial v^j} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^s} \frac{\partial^2 u^s}{\partial v^i \partial v^j}, \vec{n}_\alpha\right) = b_{sp\alpha}(u) \frac{\partial u^p}{\partial v^i} \frac{\partial u^s}{\partial v^j}$$

преоб. т.е. мн. кв. форма
и она симм. на (видно, что $b_{ij} = b_{ji}$

2.5 Кв. ая форма также зависит от выбора базиса в норм. пр-ве.

Опр $d_{i\alpha\beta}(u)$ из ⊛ — коэфф-ты кручения поверхности.

$$d_{i\alpha\gamma}(u) = \left(\frac{\partial n_\alpha}{\partial u^i}, n_\gamma\right).$$

$$(\bar{n}_\alpha, \bar{n}_\gamma) = \delta_{\alpha\gamma}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_\alpha}{\partial u^i}, \bar{n}_\gamma\right) + \left(\bar{n}_\alpha, \frac{\partial \bar{n}_\gamma}{\partial u^i}\right) = 0$$

$$d_{i\alpha\gamma}(u) + d_{i\gamma\alpha}(u) = 0$$

$\Downarrow$

коэф-ты кососимметричны.

Если $m=1$ (гиперп-ть), то индексы α, β прин. ним. единственное значение $\Rightarrow d_{i\alpha\beta}(u) = 0$

Т.е. коэф. кручения нет.

Это подмногообразия с плоской нормальной связностью или подмн-ия без кручения (можно выбрать базис, в кот-ом можно избавиться от коэф. кручения). Для коэф. кручения тоже тензорный закон преобразования:

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_\alpha}{\partial \sigma^i}, \bar{n}_\gamma\right) = \tilde{d}_{i\alpha\gamma}(\sigma) = \left(\frac{\partial n_\alpha}{\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial \sigma^i}, n_\gamma\right) \ominus$$

или (это ковекторы, если закон преобр-ся тензорный)

$$\ominus\ d_{s\alpha\gamma}(u)\frac{\partial u^s}{\partial \sigma^i} \Rightarrow \text{тенз } (0,1)$$

a_{ij}^k из ⊛ — символы Кристоффеля.

$$a_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \bar r}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^l}\right) = a_{ij}^{k}(u)\, g_{kl}(u)$$

$a_{ij}^k = a_{ji}^k$ - следует из ⊛

$$\left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^l}\right) = g_{il}(u)$$

Продифф-ем по j

$$\left(\frac{\partial^2 \bar r}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^l}\right) + \left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^i}, \frac{\partial^2 \bar r}{\partial u^l \partial u^j}\right) = \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = a_{ij}^k g_{kl} + a_{lj}^k g_{ki}$$

Таким образом $a_{ij}^k(u) = \Gamma_{ij}^k(u) = \frac{1}{2} g^{ks}(u)\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s}\right)$,

Геометрические объекты различают по тому, как они изменяются при замене координат.

Напишем деривационную формулу в других коорд. и посмотрим, как она изменяется.

$$\frac{\partial^2 \bar r}{\partial u^i \partial u^j} = \tilde\Gamma_{ij}^k(v)\frac{\partial \bar r}{\partial v^k} + \sum_{\alpha=1} \tilde b_{ij\alpha}(v)\, \bar n_\alpha(v)$$

$\frac{\partial u^s}{\partial v^m}$

$$\frac{\partial}{\partial v^j}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial v^i}\right) = \underbrace{\frac{\partial^2 \bar r}{\partial u^e \partial u^p}}_{\text{разл. по дерив. ф}}\frac{\partial u^e}{\partial v^i}\frac{\partial u^p}{\partial v^j} + \frac{\partial \bar r}{\partial u^s}\frac{\partial^2 u^s}{\partial v^i \partial v^j}$$

$$\tilde\Gamma_{ij}^k(v)\frac{\partial u^s}{\partial v^k} = \Gamma_{ep}^s\frac{\partial u^e}{\partial v^i}\frac{\partial u^p}{\partial v^j} + \frac{\partial^2 u^s}{\partial v^i \partial v^j}$$

Домножив на обр. матр. Якоби получим

$$\cdot\frac{\partial v^r}{\partial u^s} \Rightarrow \underset{\tilde\Gamma_{ij}^r(v)}{\underset{\parallel}{\Gamma_{ij}^k \delta_k^r}} = \Gamma_{ep}^s\frac{\partial u^e}{\partial v^i}\frac{\partial u^p}{\partial v^j}\frac{\partial v^r}{\partial u^s} + \frac{\partial^2 u^s}{\partial v^i \partial v^j}\frac{\partial v^r}{\partial u^s}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{n}_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l}\right) = C^{k}_{i\alpha}(u) g_{kl}(u)$$

Рассм. ур-ие $\left(\vec{n}_\alpha, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l}\right) = 0$

Продифф-ем

$$\left(\frac{\partial n_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l}\right) + \left(\vec{n}_\alpha, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^l}\right) = 0$$

$$C^{k}_{i\alpha}(u) g_{kl}(u) + b_{il,\alpha}(u) = 0.$$

Получаем ф-лу $C^{k}_{i,\alpha}(u) = -g^{ks}(u) b_{si,\alpha}(u)$.

эти коэф. выр-ся ч/з первую и 2-ю кв ф.

Получаем дерив. ф-лы,

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^{k}_{ij}(u) \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^{m} b_{ij\alpha}(u) \vec{n}_\alpha(u)$$

← Разложение Гаусса.

$$\frac{\partial \vec{n}_\alpha}{\partial u^i} = -g^{ks}(u)\, b_{si}(u) \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} + \sum_{\beta=1}^{m} d_{i,\alpha\beta}(u) \vec{n}_\beta(u)$$

$C^{k}_{i\alpha}(u)$ - операторы Вайнгартена

разложение Вайнгартена.

<u>Фундамент. ур-ия теории подмногообразий в $\mathbb{R}^n$</u>

$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \vec{n}_\alpha\right)$ ~~- такая систем~~

Когда задано подм. - ур-ия вып-ся

Пусть теперь заданы формы (все коэф-ты системы дерив. ур) ⇒ можно ли определить подм-ие?

Система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma \ldots \\ \dfrac{\partial \vec{n}_\alpha}{\partial u^i} = \ldots \end{cases}$$

Когда такая система совместна?

Когда вып-ся усл-я совм-ти:

1) уравнения Гаусса

2) уравнения Кодацци (Майнарди - Кодацци)
Петерсона - Майнарди - Кодацци)

3) уравнения Риччи.

1) $$\frac{\partial^3 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 r}{\partial u^k \partial u^l} +$$

надо раскладывать по векторам базиса, что бы сравнивать.

$$+ \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial b_{ij\alpha}}{\partial u^l} \vec{n}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^m b_{ij\alpha}(u) \frac{\partial \vec{n}_\alpha}{\partial u^l} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \frac{\partial r}{\partial u^s} + \Gamma_{ij}^k \sum_{\alpha=1}^m b_{kl\alpha} n_\alpha +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial b_{ij\alpha}}{\partial u^l} \bar{n}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^m b_{ij\alpha}(u) g^{sp} b_{pl,\alpha} \frac{\partial r}{\partial u^s} +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^m b_{ij\alpha}\, d_{l\alpha\beta}\, \bar{n}_\beta$$

Надо перест-ть индексы j и l и приравнять. Уравнения Гаусса получ-ся при сравнении коэф-тов при базисе в касат. пр-ве. (Риччи -//- в норм. пр-ве)

Получается надо сравнить только 3 шт.

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{s}}{\partial u^{l}} + \Gamma_{ij}^{k}\Gamma_{kl}^{s} - \sum_{\alpha=1}^{m} b_{ij\alpha}(u) g^{sp} b_{pl\alpha} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{il}^{s}}{\partial u^{j}} + \Gamma_{il}^{k}\Gamma_{kj}^{s} - \sum_{\alpha=1}^{m} g^{sp} b_{il,\alpha} b_{pj,\alpha}$$

$$R_{ilj}^{s} = \sum_{\alpha=1}^{m} g^{sp}\left(b_{ij,\alpha} b_{pl,\alpha} - b_{il,\alpha} b_{pj,\alpha}\right)$$

тензор Римановой кривизны.

выр-ие зависит только от 1-й ив форм.

Уравнение Гаусса.

Опустим индекс

где $R_{pilj} = \sum \left(b_{ij,\alpha} b_{pl} - b_{il,\alpha} b_{pj,\alpha}\right)$

2) Расм. что от-ся на вектора норм. пр-ва.

(другие 3 слагаемых) из (**)

$$\frac{\partial b_{ij,\alpha}}{\partial u^{l}} + \Gamma_{ij}^{k} b_{k\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m} b_{ij,\beta} d_{l\beta\alpha} =$$

$$= \frac{\partial b_{il,\alpha}}{\partial u^{j}} + \Gamma_{il}^{k} b_{kj,\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m} b_{il,\beta} d_{j,\beta\alpha}$$

Опр Ковариантная производная

$$\nabla_l b_{ij} \overset{def}{=} \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^{l}} - \Gamma_{il}^{s} b_{sj} - \Gamma_{jl}^{s} b_{si}$$

$$\nabla_l b_{ij,\alpha} - \nabla_j b_{il} = \sum_{\beta=1}^{m} \left(b_{il,\beta} d_{j\beta\alpha} - b_{ij,\beta} d_{l\beta\alpha}\right)$$

$$\nabla_l b_{ij} = \nabla_j b_{il}$$