Напоминание

$\mathbb{R}^n$ $(\vec x, \vec y)=\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$

$\vec x=(x^1, \dots x^n)$

$\vec y=(y^1, \dots y^n)$

$|\vec x|=\sqrt{(x, x)}$

$\rho(x,y)=|\bar x-\bar y|$

$U(x_0, r)=\{\vec x\in R^n \mid |x-x_0|<r\}$

открытый шар

Откр. мн-во V если $\forall x_0\in V$ т.-ч. $\exists r$ $U(x_0, r)\subset V$

Т-мы об обратной и неяв. ф-ии.

Классический Диф Гем

Мохов Олег Иванович

Чт П11

2 курс с.к. Доп. главы дифференц. Геометрии.

Ср. 16^{45}

Литература

Программа курса прошлогоднего есть на сайте (вопросы)

Текста лекций нет.

Рашевский П.К. "Курс Классической дифф. геом" (немного устаревшая)

С.П. Новиков, Тайманов И.А. "Современные геом. структуры и поля."

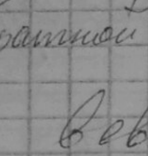
Тайманов И.А. "Лекции по дифф. геометрии"

Дубровин, Новиков, Фоменко "современная геометрия"

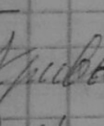
Кривые в евклидовом пр-ве R^n

$F(x,y)=0$

$\vec r(t)$



$r(t)=(x^1(t), \dots x^n(t))$



Def Элементарная кривая (простая дуга) — множество точек в R^n, гомеоморфное $I=[a, b]$. Т.е. задано непр. отоб-ие $\varphi: [a, b]\to R^n$

Конкретные φ — параметризация.

Def Гладкая кривая (не исп. этот термин)

Def Регулярная параметризация $\vec r(t)=(x^1(t), \dots x^n(t))$ —

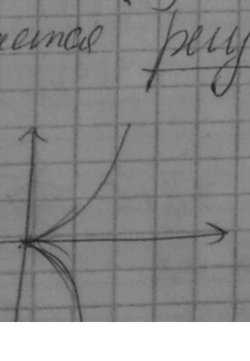
1) $x^i(t)$ должны быть гладкими (гладкости C^k, некоего k)

По-ду будем предполагать, что все функции гладкими такой, какой нам надо.

2) $\vec r_t\neq 0$ нигде ни при каком t

Def Эл. кривая называется регулярной, если $\exists$ регулярная параметризация.

Примеры (1) Полукуб. парабола:



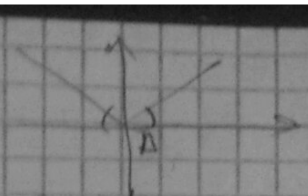
$x=t^2$ $y=t^3$

Кривая — гладкая

Почему не регулярная?

$y(t)$ - гл.

$x(t)$ - гл.



Полукубическая парабола.

Почему не регулярна? $x(t)$ - гл. $y(t)$ - гл.

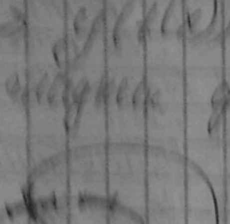
Δ $\exists$ регулярная параметризация $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$\vec{r}_t \neq 0$ $\Rightarrow$ $x_t \neq 0$ и $y_t \neq 0$.

Рассм. окр-ть т. A. $\exists$ где $x_t \neq 0 \Rightarrow$,

$\Rightarrow$ x_t - гладкая ф-ция $\Rightarrow$ $\exists$ $t(x)$ - гладкая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y(t(x))$ - гладкая ф-ия (т.к. суперпозиция гладких ф-ий). Но $y(x)$ - не гладкая !!! $\square$



Будем рассм. $\forall$ отобр. $I \to \mathbb{R}^n$, т.ч. кривая явл. простой дугой кривые, локально состоящие из простых дуг.

Кольца нет

$I \to \mathbb{R}^n$ $I \in \mathbb{R}^n$ $\vec{r}(t) = (x^1(t), \dots x^n(t))$

$\vec{r}_t \neq 0$ $(x^1_t, \dots x^n_t) \neq 0$ $rk = 1$

Опр. Две параметризованные кривые называются эквивалентными (одной кривой, т.е. задают параметризации $\vec{r}_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ $\vec{r}_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$), когда $\exists$ диффеоморфизм $\varphi : I_1 \to I_2$, такой, что $\forall t \in I_1$ $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t))$

Эквивалентность - отношение эквив-ти (можно проверить)

Утв. Пусть есть две регулярные парам-ции, тогда они связаны гладким преобразованием $\underset{\text{гл.}}{t(s)}$, $\underset{\text{гл.}}{s(t)}$

Д-во Применим теорему об обратной ф-ии.

Кривая задана $(x^1(t), \dots x^n(t))$

$(x^1(s), \dots x^n(s))$

$(x^1_t, \dots x^n_t) \neq 0$ $\exists$ $x^n_t \neq 0$ $\Rightarrow$ $t(x^n)$ - гладкая ф-ия

$x^n(s)$ - также гл. ф-ия.

$f(x^*(s)) = f(s)$ — (точний малюнк. Обозн.: просто зависимость ф-ии S). Некорректная запись, но в десятые можно)

гладкая ф-ия.

□

кривая задаётся:

$F(x, y) = 0$ — с помощью ур-ия

$y = f(x)$ — грем. уравнение

$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ параметризация

т.к. задается с помощью ур-ия $y - f(x) = 0$

Доказана эквивалентность задания двух способов кривой

▷ $\begin{cases} f_1(x_1^1 \ldots x^n) = 0 \\ \ldots \\ f_{n-1}(x^1 \ldots x^n) = 0 \end{cases}$ (*) дано (не надо зачёркивать)

Def: Регулярное отображение. Пусть задана $f: R^n \to R^m$.

$(f_1(x_0^1 \ldots x^n) \ldots f_m(x^1 \ldots x^n))$.

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = (c_{ij})$

$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \le \min(m, n)$

T1) $\vec{x_0} = (x_0^1, \ldots x_0^n)$ — решение (*)

Тогда, если отобр. $f: R^n \to R^{n-1}$ регулярно в т-ке x_0

Тогда ∃ окрестность т-ки x_0, т.ч. решение системы в этой окрестности — элементарная кривая (или простая дуга)

Рассм. Пример: Рассм. плоскость ($n = 2$), $F(x, y) = 0$

1) $x^2 = 0$ $\quad F: R^2 \to R$

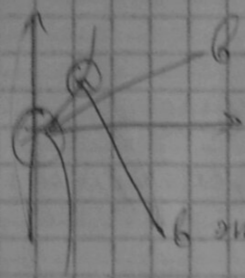
матр. Якоби $\to (F_x' \quad F_y') = (2x, 0)$ Все точки, кроме прямой $x = 0$, — регулярные

$x = 0$ — решение.

2) $x^3 - y^2 = 0$ – полукубич. парабола

$(3x^2; -2y)$ – м. Як.

Особая точка $(0, 0)$ – нерегулярна



в этой окр-ти не явл. регулярной кривой

в этой окр-ти кривая регулярна

3) $x^2 + y^2 = 0$

матр. Якоби $(2x, 2y)$

в окр-ти этой точки реш. не явл. рег. кривой

4) $xy = 0$

м. Як. (y, x)

$rk < 1$ только в $(0, 0)$

решение ур-ия $x = 0$, $y = 0$, ~~кроме~~

в $(0, 0)$ – реш-ия не явл. рег. кривой.

Спецкурс будет в 16 ЗБ.
ауд 13-20
Доп. главы дифф. г.?
21 марта 16-45. ауд. 16-24
встреча с кафедрой.

Теорема $\bar{r}(t)$ $\dot{r}_t \neq 0$ $\forall t$

Допустим, в нек-ой обл. $U \in \mathbb{R}^n$ заданы гладкие ф-ии $f_1(x^1, \dots x^n), \dots f_{n-1}(x^1 \dots x^n)$. рассм. дифф-мые ф-ии

$$\begin{cases} f_1(x^1 \dots x^n) = 0 \\ \dots \\ f_{n-1}(x^1 \dots x^n) = 0 \end{cases}$$

Пусть сист. имеет решение $f_i(\bar{x}_0) = 0$

f_i-ии задают отоб. $f: U \to \mathbb{R}^{n-1}$. Допустим x_0 – регул. точка отображения $\Rightarrow \operatorname{rank} \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right|_{x=x_0} = n-1$ (это озн. что в нек. окрестности т-ки x_0 нек-ый минор $\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}|_{U(x_0)} = n-1$)

Тогда $\exists$ нек-ая окрестность т-ки x_0 V, такая что в этой окрестности решения этой системы ур-ий явл-ся регулярной простой дугой

$\triangleright$ $\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \neq 0$ $1 \le i, j \le n-1$ – без огр. общности $\exists$ именно этот минор $\neq 0$.

$\Rightarrow$ по т-ме о неявной ф-ии $\exists$ окрестность нашей точки, такая, что в точке отсюда

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(x^n) \\ \vdots \\ x^n = \varphi^n(x^n) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_0^1 = \varphi^1(x_0^n) \\ x^{n-1} = \varphi^{n-1}(x_0^n) \end{cases}$$ – в частности.

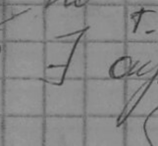
И это все решения.

Почему это регулярная параметризация?

$(\varphi^1(x^n), \dots \varphi^{n-1}(x^n), x^n)$ – эта параметр-ия.

Вектор скорости $(\varphi^{1\prime}, \dots \varphi', 1)$

2-я часть теоремы Если $\bar{r}(t)$ – кривая $\in \mathbb{R}^n$



Дано t_0, $\vec{x}_0$ Тогда $\exists U(x_0)$, т.ч. $\exists$

$$\begin{cases} f_1(x^1 \dots x^n) = 0 \\ \dots \\ f_{n-1}(x^1 \dots x^n) = 0 \end{cases}$$

$\dot{r}_t \neq 0$ $\forall t$

что вся эта окр-ть наша параметр. кривая совп. с реш-ем в этой окр-ти. совп. $r(t)$

▷ Значит $\exists$ криволинейная с.о. в x_0

$(x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}, x_0^n) \neq 0$

Пусть $x_0^n \neq 0 \Rightarrow$ в окр. $t(x^n) = \ldots = t(x(t)) = t$

$= (x^1(t(x^n)), \ldots, x^{n-1}(t(x^n)), x^n)$

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(x^n) \\ \vdots \\ x^{n-1} = \varphi^{n-1}(x^n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 - \varphi^1(x^n) = 0 \\ \vdots \\ x^{n-1} - \varphi^{n-1}(x^n) = 0 \end{cases}$$

минор $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\neq 0$ не выр.

отобр. регулярно. $\square$

$U \subset R^n \quad f: U \to R^{n-1}$ — регулярное в обл-ти.

Рассм. прообр. из R^{n-1}. Если $f^{-1}(c^1, \ldots, c^{n-1}) \neq \varnothing$ тогда

Пусть $f(x_0) = \bar{c}$

$$\begin{cases} f_1(x^1, \ldots, x^n) = c^1 \\ \text{— — — — —} \\ f_{n-1}(x^1, \ldots, x^n) = c^{n-1} \end{cases}$$ — реш. на этой системе мн-простая регулярная дуга (см. выше)

Рассм. пример. $f(x, y) = x^2 + y^2$

реш. прообр. c: $x^2 + y^2 = c$

Если $c < 0 \Rightarrow f^{-1}(c) = \varnothing$

Если $c = 0 \Rightarrow f^{-1}(c) = (0, 0)$

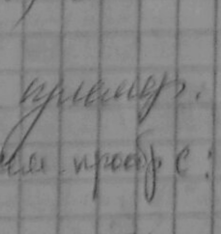
Если $c > 0 \Rightarrow f^{-1}(c)$ — рег. простая дуга.

Пути не рег. дуги, т.к. $(2x, 2y) = 0$ поск. $(2x, 2y) = 0$

$\square$ 1-й мес

Оп Касательная к регулярной кривой в R^n $\quad r(t) \in R^n$

$\bar{r}_t \neq 0$



Рассм. t_0

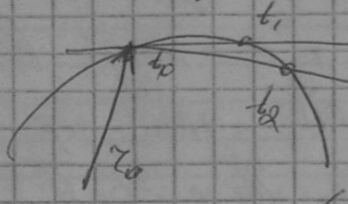
$r(t) = r(t_0) + r_t \big|_{t=t_0} (t - t_0) + \bar{o}(t - t_0)$

Кас. есть мн. образ при линеаризации отобр.-ия

Линеаризация — есть-ие уравнения в точке до членов 1-го порядка т.е. $\underbrace{\vec{r}(t) = \bar{r}(t_0) + r_t\big|_{t=t_0}(t-t_0)}_{\text{кас-ая}} + \bar{o}(t-t_0)$

$r_s = r_t\left(\frac{dt}{ds}\right)_{x_0}$ – вектора скорости коллинеарны

Из матана: Касательная – предел положения секущих.



при $t \to t_0$ секущие в пределе дают касат-ую

(Можно напис. ур-ие секущ. и увидеть ▽)

Секущие можно проводить ч/з 2-е произв. точки кривой

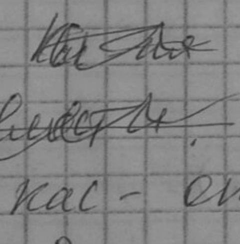
и устремлять пары точек к t.

обяз. упр-ие :С

Св-во кас-ой:

1. ~~Кас-ая~~ ~~является величиной 2-го порядка малости.~~ рассм. расст. от самой кривой
и только для касат-ой (единственная)
до кас-ой – кривая 2-го порядка малости

▷ Рассм. от точки нашей кривой до произв-ой прямой l



$r(t) - r(t_0)$

$\alpha(t)$ – угол м/д $r - r_0$ и прямой l

$\rho(t, l) = |\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)| \cdot \sin\alpha(t)$

$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) + \bar{o}(t - t_0)$

$|r(t) - r(t_0)| = |v_0 + \bar{o}(1)||t - t_0||$

$\alpha(t)$ - величина $\left(\alpha_0 + \bar{\bar{o}}(1)\right)$ - величина пор-ка конечная

$$\left|\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)\right| = \left|\bar{v}_0 + \bar{\bar{o}}\,1\right|\left|(t - t_0)\right|$$

величина 2-го пор-ка малости..

Из нужная величина 2-го пор-ка малости $\Leftrightarrow$
$\sin\alpha_0 = 0$ $\quad \alpha_0 = 0$ т.е. когда вектор скорости коллинеарен нашей прямой. Это док-ет, что касат-ая явл-ся единственной прямой для кот-ой разн-ть - кр
кривая второго порядка малости.

пример соприкосновения 2-х прямых

Как написать касат-ую для кривой зад-ой системой ур-ий

$$\begin{cases} f_1(x^1 \ldots x^n) = 0 \\ f_{n-1}(x^1 \ldots x^n) = 0 \end{cases}$$ - рег-ую кривые задаёт

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Bigg|_{x = x_0}(x^j - x^j_0) = 0$$

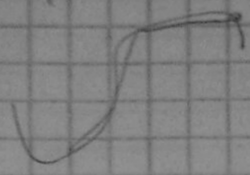
$$\text{или } \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}\Bigg|_{x = x_0}(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$$

Перейдём к параметризации.
Парам-ем эту кривую $\bar{r}(t)$; т.е.
$f_i(\bar{r}(t)) = 0$

Тогда кас-ая: $$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, \dot{x}^j_t\right)\Bigg|_{x = x^0} = 0$$

матр. Якоби

Длина кривой в $\mathbb{R}^n$ (без док-ва)



$$\sum_i |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|$$ — в пределе дадут длину дуги кривой

$$S = \int_{t_0}^{t} |\bar{r}_t| \, dt$$

$\bar{r}_t$ — производная

При замене пер-ых длина кривой не меняется

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\bar{r}_t, \bar{r}_t)} \, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i} \dot{u}_i, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_j} \dot{u}_j\right)} \, dt =$$

$\sum$ по i (опускаем) $\quad \sum$

$$\overset{\text{билин-ть}}{=} \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial u_i}, \frac{\partial r}{\partial u_j}\right) \dot{u}_i \dot{u}_j} \, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}(u) \dot{u}_i \dot{u}_j} \, dt$$

элемент матр. Грамма (обозначение)

Длина вычисл. ч/з Риманову метрику.

Натуральный параметр на кривой в $\mathbb{R}^n$

Параметр s на рег. кривой наз. натур-м, если длина вектора скорости $\bar{r}_s$ во всех т-ках кривой $|r_s| = 1$

Утв 1) На $\forall$ регул. кривой $\exists$ натур. пар-р.

2) $\tilde{s}$, s — два нат. параметра, тогда $\tilde{s} = \pm s + const$

(Иногда исп-т орр-параметра $|\bar{r}_s| = const$)

3) $|r_t| = const \Leftrightarrow t = \lambda s$, λ — $const \neq 0$ для нек-го s.

▷ 1) $s = \int_{t_0}^{t} |\bar{r}_t| \, dt$ — натуральный пар-р

$$|\bar{r}_s| = |\bar{r}_t| \left|\frac{dt}{ds}\right| = 1$$

производ. сложной ф-ии

2) $\left|\frac{\partial r}{\partial s}\right| = 1 = \left|\frac{\partial \bar r}{\partial \tilde s}\right| \left|\frac{\partial \tilde s}{\partial s}\right| = 1$

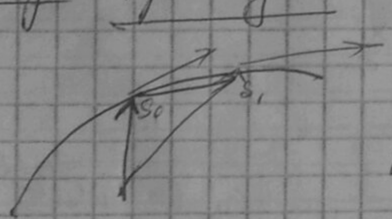
$\left|\frac{\partial \bar r}{\partial \tilde s}\right| = 1$

$\left|\frac{d\tilde s}{ds}\right| = 1 \Rightarrow \tilde s = \pm s + const$

3) $\underset{\neq 0}{const} = |\bar r_t| = \underset{= 1}{|\bar r_s|} \left|\frac{ds}{dt}\right|$

$\left|\frac{ds}{dt}\right| = const.$

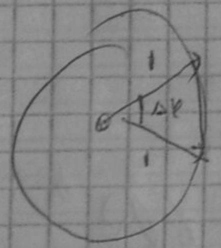
Опр <u>Кривизна</u> кривой в R^n это $k(s) = |\bar r''(s)|$



$r'(s) = \bar r'(s_0) + \bar r''(s)(s - s_0) + \bar o(s - s_0)$

нач-ну 2-х вектора s, s_0 — единичн. длина

$|\bar r'(s) - \bar r'(s_0)| = \Delta\varphi + \bar o(s)$



$|r''(s)| = \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta s} + \bar o(\dots)$

Геометрич. смысл. кривизны — скорость угла вращ-ия угла

Пример R^2

$\bar r(s) = (x(s), y(s))$

$\bar r'(s) = (x'(s), y'(s))$

$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$

$\begin{cases} x'(s) = \cos(\alpha(s)) \\ y'(s) = \sin(\alpha(s)) \end{cases}$

$x''(s) = -\sin\alpha \cdot \alpha'(s)$

$y''(s) = \cos\alpha \cdot \alpha'(s)$

$r''(s) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)\, \alpha'(s)$

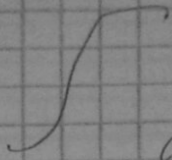
$k(s) = |\bar r''_s| = |\alpha'(s)|$

$\alpha(s) = \int k(s)\, ds$

Задание кривизны — нат-ое ур-ие вектор ф-ии кривой

Соприкосновение кривых в R^4

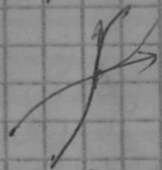
1 марта среда 15^{00}
ауд. 14-07
2 курс проф.
Букштабер В.М.
14^{00} научн. семин.
о урав. волнах.



$\vec{r}_1(s)$
$\vec{r}_2(s)$

Если кривые не пересек-ся - соприкосновения нет.

Т.е. рассм. т.-ку соприкосн.



$\vec{r}_1(s) = r_1(0) + r_1'(0)s + \frac{r_1''(0)}{2}s^2 + \ldots$

$\vec{r}_2(s) = \vec{r}_2(0) + \vec{r}_2'(0)s + \frac{1}{2}r_2''(0)s^2 + \ldots$

$\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s) = (\vec{r}_1(0) - \vec{r}_2(0)) + (r_1'(0) - r_2'(0))s + \frac{1}{2}(r_1''(0) - r_2''(0))s^2 + \ldots$

совп., поск-ку т-ка пересечения

величина первого порядка малости..

$r_1'(0) = r_2'(0)$

Если две кривые касаются в точке пересечения - вектора скорости либо совпадают либо противоположны по направлению. Можно поменять значение параметра s на $-s$ и вектор ск-ти поменяет знак. Поэтому будем считать, что вектора скорости совпадают в этой точке.

Равенство $r_1''(0) = r_2''(0) \Rightarrow$ совпадают кривизны этих кривых $k_1(0) = |r_1''(0)| = |r_2''(0)| = k_2(0)$

Опр Соприкосновение кривых порядка m - если все произв. $r_1', \ldots, r_1^{(m)}$ и $r_2', \ldots, r_2^{(m)}$ - совпадают

Опр Точное соп. п. m - $r_1^{(m+1)} \neq r_2^{(m+1)}$

Упр Для прямой $k = 0$ $\forall$ точки

Опр Если в эт. точке $k = 0$, то это точка спрямления

Утв. $k_{(t,0)} = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_t(t_0), \vec{r}_{tt}(t_0)$ коллинеарны.

Δ

Кан.

(⇒) $\vec{r}_t = \vec{r}'\frac{ds}{dt}$ $\quad \vec{r}_{tt} = \vec{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{r}'\frac{d^2s}{dt^2}$

Если есть точка спрямления ⇒ $r'' = 0$ ⇒ вектор ускорения коллинеарен вектору скорости

(⇐) В натур. парам. $(r', r'') = 0$ (1) в силу $(\vec{r}', \vec{r}') = 1$. (производную) $(a,b)_t = (a_t, b) + (a, b_t)$

Опр Бирегулярные кривые — регулярные кривые без точек спрямления ($k(s) \neq 0$ $\forall s$)

Для них вектор ускорения $\neq 0$ и он ортогонален вектору скорости. вектор главной нормали

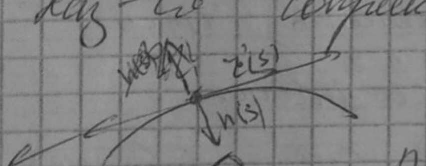
$\vec{n}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|}$ В каждой точке кривой есть репер из 2-х ортог. векторов

Вектор кривизны $\vec{k}(s) = \vec{r}''(s) = k(s) \cdot \vec{n}(s)$

Длина его — кривизна кривой

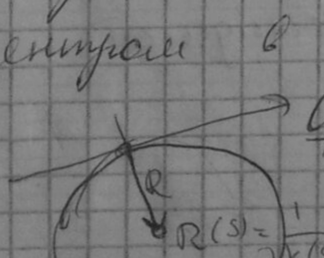
Опр Плоскость, проходящая ч/з эти 2-а вектора (кривая из R^n) наз-ся соприкасающейся плоскостью бирег-ой кривой в R^n.

$\vec{r}_{tt} = \vec{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + r'\frac{d^2s}{dt^2}$ лежит в соср. пл-ти



Опр Радиус кривизны кривой в точке $R(s) = \frac{1}{k(s)}$

Рассм. для бирег. кривой окружность радиуса $R(s)$ которая лежит в соприкасающейся плоскости с центром в $\vec{x}_0 + R(s)\vec{n}(s)$



Опр Эта окр-ть называется соприкасающейся окр-ю. Определена однозн-но

Тео Утв Соприкасающ. окружность — единственная окружность, которая имеет соприкосновение 2-го порядка в этой точке

▷ Рассм. произв. бирег. кривую $\vec r_1(s) = \vec r_1(0) + \vec r_1'(0)s + \frac{1}{2}\vec r_1''(0)s^2 \ldots$

И произв. окр-ть $\vec r_2(s)$ проход-ую ч/з данную точку $\vec r(0)$

$$\vec r_2(0) + \vec r_2'(0)s + \frac{1}{2}\vec r_2''(0)s^2 + \ldots$$

$\vec r_1(0) = \vec r_2(0)$

Опр. Если это соприкос. 2-го порядка, то

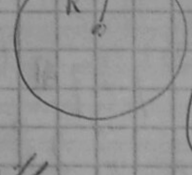
$\vec r_1'(0) = \vec r_2'(0)$ и $\vec r_1''(0) = \vec r_2''(0)$

$\Downarrow$

Сл. У них одинаковы $\vec b(0), \vec n(0), k(0), R(0)$

У них та же соприкас. плоскость.

Осталось рассм. У окр-ти радиуса R кривизна $k = \frac{1}{R}$.



(Если кривизна кривой постоянна, то это прямая если $k=0$ и если $k \neq 0$ — это окр-ть в $\mathbb{R}^2$)

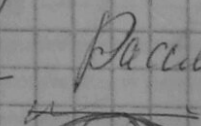
$\Downarrow$

Окружность совпадает с соприкас. окр-ю.

(пл-ти совп, центр совп., R) □

Упр. Если рассм. бирег. кр. и 3 произв. точки, не лежащие на одной прямой. Провести ч/з них плоскость. Провести в этой пл-ти окр-ть в $\mathbb{R}^n$ тогда в пределе это соприкас. окр-ть (когда эти в-ть не вырожд-ся к одной)

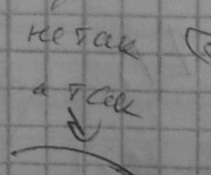
Упр. Рассм. плоскую кривую и произв. точку



Как расположена данная окр-ть и прямой. (Это соприкосновение точно второго порядка)?

не так

а так



Если 3-его порядка, то так.

Кривизна кривой в $\mathbb{R}^n$ в произв-ом параметре

$k(s) = \vec r''(s)$

$k(s) = |\vec r''(s)| = |\vec k(s)|$

Формула: $k(t) = \dfrac{(\dot r, \dot r)\ddot r - (\dot r, \ddot r)\dot r}{|\dot r|^4}$

Имеем $k(t) = \frac{S(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})}{|\dot{\vec r}|^3}$ ← площадь пар-ма, натянутого на $\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}$.

Кривизна $= 0 \Leftrightarrow \dot{\vec r}$ и $\ddot{\vec r}$ – коллинеарные
вектор скорости и уск. ← вект. ск-ти в границе пар.

$\triangleright\ k(t) = \vec r''(s) = \frac{d}{ds}\left(\dot{\vec r}\,\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|}\right) =$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec r}|} \Leftarrow \begin{cases} ds = |\dot{\vec r}|\,dt \\ s = \int_{s_0}^{s} |\dot{\vec r}|\,dt \end{cases}$$

$$= \frac{\ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|}\frac{dt}{ds} - \frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^2}\frac{d}{ds}\left(|\dot{\vec r}|\right) =$$

$$= \frac{\ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|}\frac{dt}{ds} - \frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^2}\frac{d}{ds}\left(\sqrt{(\dot{\vec r}, \dot{\vec r})}\right) = \frac{\ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^2} - \frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^3}(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})\frac{dt}{ds} =$$

$$= \frac{\ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^2} - \frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^4}(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}) = \frac{|\dot{\vec r}|^2\ddot{\vec r} - (\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^4}. \ \square$$

$\triangleright$ Имеем $|k(t)| = \frac{1}{|\dot{\vec r}|^4}\sqrt{\left(|\dot{\vec r}|^2\ddot{\vec r} - (\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})\dot{\vec r},\ |\dot{\vec r}|^2\ddot{\vec r} - (\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})\dot{\vec r}\right)} =$

$$= \frac{1}{|\dot{\vec r}|^4}\cdot\sqrt{|\dot{\vec r}|^4|\ddot{\vec r}|^2 - 2|\dot{\vec r}|^2(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})^2 + (\dot{\vec r}, \dot{\vec r})(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})^2} =$$

$$= \frac{1}{|\dot{\vec r}|^3}\sqrt{|\dot{\vec r}|^2|\ddot{\vec r}|^2 - (\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})^2} = \frac{1}{|\dot{\vec r}|^3}\cdot S(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r})$$

$S(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}) = |\dot{\vec r}|\,|\ddot{\vec r}|\sin\alpha$

$|\dot{\vec r}|^2|\ddot{\vec r}|^2 - 2|\dot{\vec r}|^2|\ddot{\vec r}|^2\cos^2\alpha + |\dot{\vec r}|^4$ $\square$

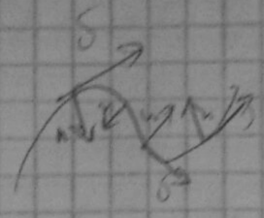
Следствие:

В $\mathbb{R}^3$ она выражается $k(t) = \frac{|[\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}]|}{|\dot{\vec r}|^3}$ и

$k(t) = \frac{|\dot x\ddot y - \ddot x\dot y|}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}$ в $\mathbb{R}^2$

Плоские кривые. (в $\mathbb{R}^2$).

$\vec{v}(s)$ $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$



Вектор скорости задаёт ориентацию на кривой (направ-е в одну сторону)

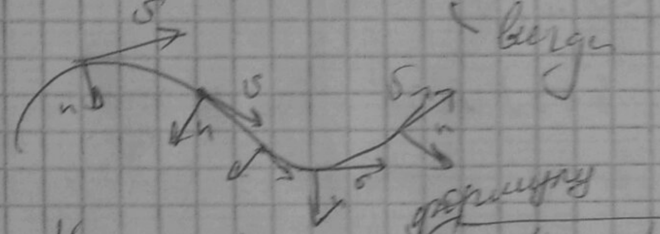
Вектор ускорения направлен всегда внутрь выпуклости

Для плоской кривой можно выбрать вектор нормали, гладко зависящий от точки

⊙ Задание коориентации

$(\vec{v}(s), \vec{n}(s)) > 0 \quad \forall s$

всегда одинаково ориентированы.



Но сохраняют формулу $\boxed{\vec{r}''(s) = k(s)\,\vec{n}(s)}$ – ориентация определяется со знаком

Для коориентации $k(s)$ может быть отрицательн.

Кривизна со знаком.

Формулы Френе для плоской кривой

В каждой точке пространства вводим базис.
часть базиса в касат. пр-ве, часть в норм.
т.е. в каждой точке берем вектор скорости и вектор из норм. пр-ва. Эти наборы и два вектора наз-ся репером Френе. Далее будем изучать деформацию этого репера в зависим. от базиса, т.е. $\vec{v}'(s), \vec{n}'(s)$ – Дерив.

Деривационные формулы или формулы Френе

$$\begin{cases} \vec{v}'(s) = k(s)\,\vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) = \alpha(s)\,\vec{v}(s) + \beta(s)\,\vec{n}(s) \end{cases}$$

Чтобы найти $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ будем скалярно умн-ть

Используем: $(\vec{v}, \vec{v}) = 1$

$(\vec{n}, \vec{n}) = 1$

$(\vec{v}, \vec{n}) = 0$

$$(\vec n'(s), \vec n(s)) = \beta(s)$$

$$\left.\begin{aligned} (n, n) &= 1 \\ (\dot n, n) &= 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow \beta(s) = 0$$

$$(\bar n', \bar \nu) = \alpha(s)$$

$$(n, \nu) = 0 \qquad \bar n' = \alpha(s)\,\nu(s)$$

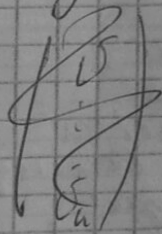
$$(n', \nu) + \underbrace{(n, \nu')}_{k(s)} = 0$$

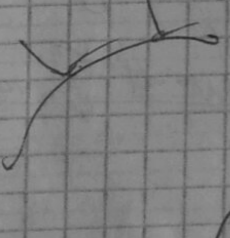
$$\alpha(s) = -k(s)$$

$$\boxed{\text{Отсюда} \quad \begin{cases} \bar\nu'(s) = k(s)\,\vec n(s) \\ \bar n'(s) = -k(s)\,\bar\nu(s) \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} \bar\nu \\ n \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar\nu \\ n \end{pmatrix}(s)$$

кососимметрич. матрица не случайно, потому что...





переходим от одной точки к другой — переход от одного орт. базиса к другому

$$\begin{pmatrix} \bar\nu_1 \\ \vdots \\ \bar\nu_n \end{pmatrix}(s+\Delta s) = B(s, \Delta s) \begin{pmatrix} \bar\nu_1 \\ \vdots \\ \bar\nu_n \end{pmatrix}(s)$$

$B(s, \Delta s)$ — матр. ортог. преобразования

$$B(s, \Delta s)\, B^T(s, \Delta s) = E$$

$B'_{\Delta s}(s,\Delta s)B^T(s,\Delta s)+B(s,\Delta s)B'^T_{\Delta s}(s,\Delta s)=0$

устремим

$\Delta s\to 0 \Rightarrow B'_{\Delta s}(s,0)+(B'_{\Delta s}(s,0))^T=0$

$\Downarrow$

кососим. матрица.

$$\begin{pmatrix}\bar{\sigma}_1\\ \vdots\\ \bar{\sigma}_n\end{pmatrix}'(s)=B'_{\Delta s}(s,0)\begin{pmatrix}\bar{\sigma}_1\\ \vdots\\ \bar{\sigma}_n\end{pmatrix}(s)$$

Т.е. дифференциальные формулы всегда подчиняются таким уравнениям, где $B'_{\Delta s}$ кососимметрическая.

Натуральное

$\bar{\sigma}(s)=(\cos\alpha(s),\sin\alpha(s))$

$n(s)=(-\sin\alpha(s),\cos\alpha(s))$

$r''(s)=\bar{\sigma}'(s)=(-\sin\alpha(s)\cos\alpha(s))\alpha'(s)=\alpha'(s)\bar{n}(s)$

$k(s)=\alpha'(s)$

$\alpha(s)=\int^s k(s)ds$

$x(s)=\int^s\cos\alpha(s)ds$

$y(s)=\int\sin\alpha(s)ds.$

Утв ①

Кривая однозначно восст-на с точностью до ориентации, поворота и сдвига

$\Downarrow$

Есть некоторое ортогональное преобр-ие плоскости, совмещ. эти кривые

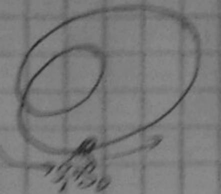
Глобальный смысл

Что такое $\oint_\gamma k(s)ds$? Если гладко вдоль всей кривой (по контуру) деформировать кривую то этот интеграл меняться не будет.

Δ рассм. $\varphi = \int_{s_0}^{s_1} k(s)\,ds$

$|s_1 - s_0|$ — длина нашей кривой

будем считать, что $\alpha(s_0) = 0$ и (можем повернуть всё)



$\Downarrow$ $\alpha(s_1) = \varphi$ — интегр. кривизна вдоль всей кривой

вектор скорости $\vec{v}(s_0) = \vec{v}(s_1)$.

Причём

$(\cos(\alpha(s_0)), \sin\alpha(s_0)) = v(s_0) = v(s_1) = (\cos(\alpha(s_1)), \sin(\alpha(s_1))) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(s_1) - \alpha(s_0) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

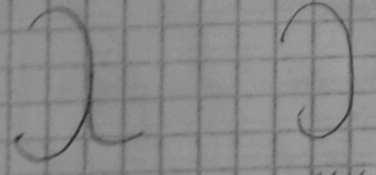
$\Rightarrow \varphi = 2k\pi$ — инвариант при деформировании кривой (причём в каждый момент она гладкая и регулярная), и меняется непрерывно) □

~~(Взаимн. интеграл)~~

(Для поверхностей и многообразий будет похожее док-во.) ~~вся кривизна~~

Утв (1) (зачем-то ещё раз (повторение))

Пример



движением нельзя перевести одну в другую.

Если рассм. кривизну без знака, то получ. кривизна одинаковая, а они не совмещаются. Поэтому рассм. кривизну со знаком. (Можно рассм. $k(s) \neq 0$ $\forall s$)

Утв (1) (повт-ие) Задана гладкая ф-ия $k(s)$ и заданы две кривые $\vec{r}(s)$ и $\vec{\tilde{r}}(s)$, у кот-ых кривизна задается ур-ем выше. Тогда $\exists$ преобр-ие A, т.ч. $(A\vec{v}, A\vec{n})$

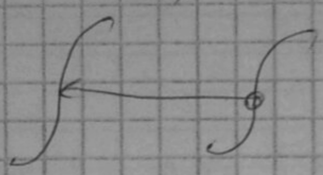
$\begin{cases} A\vec{v}' = kA\vec{n} \\ A\vec{n}' = -kA\vec{v} \end{cases}$

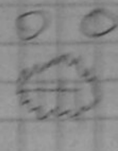
~~Если у расст. кривую A~~

~~Мы хотели сделать в~~

$\vec{r}(s)$ $\tilde{\vec{r}}(s)$

Δ





1 Шаг Сдвем точки, в которых реперы Френе совпадают + есть линейные ур-ия 1-го порядка, (∃! сист. дифф. ур-ий), т.е. эта кривая отличается ортог. преобр. и движением.

Почему такая кривая ∃? по т.-ме ∃! решения ∃. Если рассматривать начальные данные $(\vec{v}(s_0), v(s_0))$, то мы сможем полностью восстановить кривую.

Рассмотрим начальные данные $(\vec{v}(s_0), n(s_0))$ и расм. реш-ия ур-ия Френе с этими нач-ыми данными $(\vec{v}(s), n(s))$

Надо д-ть:

$$(\vec{v}(s), \vec{v}(s)) = 1$$
$$(\vec{v}(s), n(s)) = 0 \quad \forall s$$
$$(\vec{n}(s), \vec{n}(s)) = 1$$

Введём новые ф-ии. $a(s) = (\vec{v}(s), \vec{v}(s)) - 1$

$b(s) = (\vec{v}(s), \vec{n}(s))$

$c(s) = (\vec{n}(s), \vec{n}(s)) - 1$

Мы знаем, что $a(s_0) = 0$

$b(s_0) = 0$

$c(s_0) = 0$

Надо д-ть $a(s) = 0$

$b(s) = 0 \quad \forall s$

$c(s) = 0$

Продифф-ем:

$a'(s) = 2(\vec{v}(s), \vec{v}'(s)) = 2k(s)(\vec{v}(s), n(s)) =$

$= 2k(s)b(s)$

по ур-ниям Френе

$b'(s) = (\vec{v}'(s), \vec{n}(s)) + (\vec{v}(s), \vec{n}'(s)) = k(s)(\vec{n}(s), \vec{n}(s)) -$

$- k(s)(\vec{v}(s), \vec{v}(s)) = k(s)c(s) \cancel{+ k(s)} - k(s)a(s) \cancel{- k(s)} =$

$=$

вся неоднородность по ур-ниям сокращается, остались однородные члены

$c'(s) = 2(\vec{n}'(s), \vec{n}(s)) = -2k(s)(\vec{v}(s), \vec{n}(s)) = -2k(s)b(s)$

Получили, что a, b, c уд-т системе линейных ОДУ первого порядка с заданными нач. значениями. Но (т. $\exists$! ОДУ) $\exists$ лишь ед-ое решение
$$\begin{cases} a(s) = 0 \\ b(s) = 0 \\ c(s) = 0 \end{cases} \quad \forall s$$

$\square$

Если мы разом ~~и~~ приведём гладкую $r(s) = \int \vec{v}(s)\,ds$, то для этой кривой кривизна будет $k(s)$. Таким образом, для любой гладкой ф-ии $k(s)$ такая кривая $\exists !$.

(В теории поверхностей это теорема Бонне (более сложная) без ортонормир. реперов)

Утв ~~Для~~ Если есть гладкая невырожд. матрица $M(s)$, тогда два утв. эквивалентны:

1) $M(s)$ — ортогональная матрица $\forall s$

2) $M(s_0)$ — ортогон. ~~...~~ и $M_s' M^{-1}(s)$ — кососимметрична $\forall s$.

Рассм. новую матрицу $B(s) = M' M^{-1}(s)$

$A(s) = M(s)\, M^T(s)$

$A'_s(s) = \underbrace{M' M^T}_{BA} + \underbrace{M (M')^T}_{AB^T} = BA + AB^T$ (*)

$B^T = (M^T)^{-1} (M')^T$

1 усл $A(s)$ – единичная матрица $\forall s$

$A(s) = E$

$0 = B + B^T \Rightarrow$ кососимм-ть B (2 усл)

$B = M' M$

2 усл B – задано, кососимм-ая матр.

А матр A удовл-т вашей системе (*)

$A(s_0) = E$

A обязано быть решением $A(s) = E \ \forall s$.

Т.о. если у нас есть ортонорм. репер в $\mathbb{R}^n$. Мы можем его выписать покоорд-но

$$\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ v_2^1 & & \\ \vdots & & \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix} = M(s) \Rightarrow \text{т.к. } M(s) \text{ – ортогональна}$$

Рассмотрим уравнение $M' = BM$ (уравн-ие Френе)

B кососимм-ая

в двум. сл-е было $M = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ n^1 & n^2 \end{pmatrix}$

и $\begin{cases} \vec{v}\,'(s) = k(s)\,\vec{n}(s) \\ \vec{n}\,'(s) = -k(s)\,\vec{v}(s) \end{cases}$

и $M' = BM$ – ур-ие Френе для n-мерного сл-я

$$\begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ n^1 & n^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ n^1 & n^2 \end{pmatrix}$$

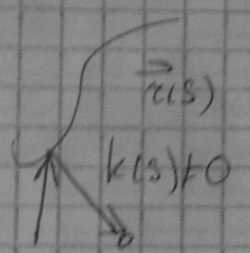
И там тоже будет B – кососимм-ая

Сохраняется ортонормир-ть репера
из-за наложения т-ти В.

Эволюта и эвольвента плоской кривой

Рассм. нек-ую регулярную плоскую кривую
(регулярную без точек спрямления)

Эволюта - это кривая, которая описывает центры кривизны кривой.



Напишем ур-ие для центров кривизны

$$\vec{\tilde r}(s) = \vec r(s) + \frac{1}{k(s)} \vec n(s)$$

точка на кривой

вектор, ведущий к центру

Посмотрим скорость её.

$$\vec{\tilde r}' = \vec r' - \frac{k'}{k^2}\vec n(s) + \frac{1}{k}\vec n' = \vec v - \frac{k'}{k^2}\vec n(s) - \frac{k}{k}\vec v =$$

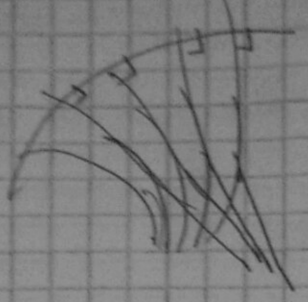
$$= -\frac{k'}{k^2}\vec n(s)$$ – не обяз. по единичн. по длине.

Эволюта явл. регул. кривой, если её кривизна не меняет знак. ($k' \neq 0$ необр.во)

Вектор скорости эволюты коллинеарен вектору нормали кривой.

Точка на эволюте лежит на векторе нормали кривой. Значит, эволюта огибающая нормалей кривой (~~касающаяся~~ их в каждой точке вектор скорости коллинеарен вектору нормали)

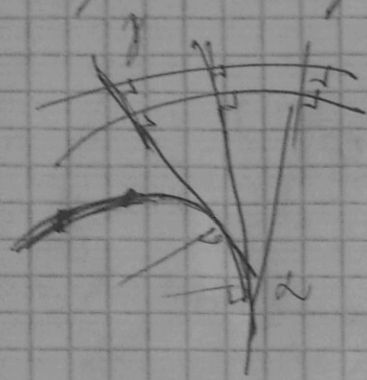
Если мы знаем эволюту, найдём кривую исходную кривую — эвольвенту (опр.)

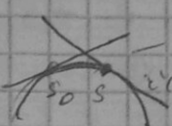


Эвольвента определяется неоднозначно.

Семейство касательных к эволюте есть нормали к кривой. Значит,

Чтобы построить эвольвенту рассм. это семейство и его ортогональные траектории. Формула для эвольвенты:





— перемещение кас-ой вдоль эволюты, без перемещения, длина участка эволюты

$$\tilde{\vec r} = \vec r(s) - (s-s_0)\,\vec r\,'(s)$$

радиус вектор эвольвенты

радиус вектор эволюты

Докажем, что эволютой будет $r(s)$.
И что эвольвента - ортогональная траектория касат-ой эволюты.

Т 4-утв. эквивалентны

1) γ - эволюта α
2) α - эвольвента γ
3) α - ортогональная траектория кас-ых кривой γ
4) $\tilde r$ - эволюта, тогда $\tilde{\vec r} = \vec r(s) - (s-s_0)\vec r\,'(s)$ эвольвента $\vec r$

и r - эволюта $\tilde r$

▷ 4⇒3

$$\tilde{\vec r}\,' = \vec r\,' - \vec r\,' - \underbrace{(s-s_0)\,\vec r\,''(s)}$$

вектор скорости ∥ ускорению нашей кривой r

⊥ вектору скорости r ⇒ 3.

(3 ⇒ 4) Рассм. произв. ортогональную траекторию.
Для этого запишем ур-ние её:

$$\tilde{\vec{r}} = \vec{r}\,'(s) + f(s)\,\vec{r}\,'(s)$$

$$\tilde{\vec{r}}\,' \perp \vec{r}\,'$$

$$\tilde{\vec{r}}\,' = r' + f'\,\vec{r}\,' + f\,\vec{r}\,''$$ (он орт. $\perp r'$ ~~и колинеар~~ $\vec{n}$; $r'(1+f')=0$)

(Он привести к)

$$f' = -1 \Rightarrow f = -s + s_0$$

$$\tilde{\vec{r}} = \vec{r} - (s - s_0)\,\vec{r}\,'(s) \Rightarrow (4).$$

(2 ⇒ 3) Доказано в предыдущем пункте

~~(3 ⇒ 2)~~ (1 ⇔ 2) Определение

(3 ⇒ 2) Дано: $r(s)$ $\quad \tilde{\vec{r}}(s)$ – орт. тр-ая траектория

Возьмём $\vec{r}(S) = \tilde{\vec{r}}(S) + \alpha(S)\,\vec{n}(S)$

Усл-ие ортогональности $\tilde{\vec{r}}\,'(s) \perp \vec{r}\,'(s)$

$$\vec{r}\,'(s) = \tilde{\vec{r}}\,'(s) + \alpha'\,\tilde{\vec{n}}(s) + \alpha\,\vec{n}'(s) =$$

$$= \cancel{k} - \alpha k\,\bar{r}' \quad \perp \tilde{\bar{r}}\,'(s)$$

кривой $\tilde{r}$

$$0 = \left(-kr, \vec{r}\,'\tfrac{1}{k}, \tilde{\vec{r}}\,'(s)\right) = 1 - \alpha k \Rightarrow \alpha = \frac{1}{k} \Rightarrow$$

это уравнение центров кривизны кривой

$$\vec{r}(S) = \tilde{\vec{r}}(S) + \alpha(S)\,\vec{n}(S) \Rightarrow (2)$$

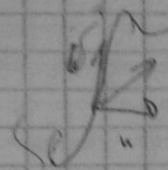
□.

Пространственные кривые (в R^3)

$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z) \end{cases}$ $\vec{v}(s)$ бирегулярность $k\neq 0$

$\vec{n}(s)$ $k=0$

$\vec{b}(s) = [\vec{v}(s), \vec{n}(s)]$ — бинормаль кривой.



В каждой точке — базис.

Изучим деформацию этого базиса вдоль кривой (ур-ие Френе)

$$\begin{cases} \vec{v}\,'(s) = k\vec{n}(s) \\ \vec{n}\,'(s) = \alpha(s)\vec{v}(s) + \beta(s)\vec{n}(s) + \gamma(s)\vec{b}(s) \\ \vec{b}\,'(s) = \end{cases}$$

Коэф-ты α, β, γ восстанавливаются из условия на базис: $(\vec{v},\vec{v}) = 1 = (\vec{n},\vec{n}) = (\vec{b},\vec{b}) = 1$

$(\vec{v},\vec{n}) = (\vec{v},\vec{b}) = (\vec{n},\vec{b}) = 0$

$0 = (n', n) = \beta(s)$

Задача: посчитать коэф-ты

(Из общего док-ва получится кососим. матрица)

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}(s)$$

$\varkappa(s)$ — кручение кривой

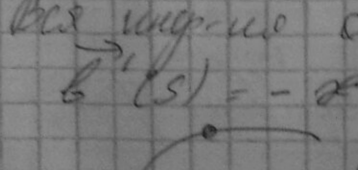
ур-ие Френе

В n-м случае не называем кручением, а всего n-1 — кривизны

Для плоских кривых $(\vec{v}, \vec{n}, \vec{b})$ — базис Френе

Вся инф-ия о кривой сод-ся в ур-ии Френе.

$\vec{b}\,'(s) = -\varkappa(s)\vec{n}(s)$



$\vec{b}(s+\Delta s) = \vec{b}(s) + \vec{b}\,'(s)\Delta s + \dots$ $(-\varkappa\vec{n}(s))$

$-\varkappa = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ $|\vec{b}(s+\Delta s) - \vec{b}(s)| = -\varkappa n(s)\Delta s - o(\Delta s)$

Свойство кручения.

Утв. Бикуругарная кривая — плоская $\Leftrightarrow \varkappa(s)=0$ на данном участке

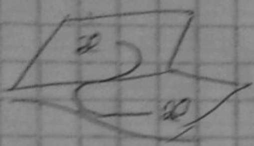
$\triangleright \Rightarrow \vec b(s)=\mathrm{const} \Rightarrow \varkappa=0$

$\Leftarrow\ (b, \vec b')=0 \Rightarrow (\vec b, \vec \tau)=\mathrm{const}$

$b=\mathrm{const}$, $\vec b'=\vec\tau'$, $(\vec b, \vec\tau)$: const

$\square$

$\varkappa=0$



Можно сделать переход из одной пл-ти в другую если в какой-то точке $\varkappa \neq 0$

В этой точке $k=0$ (можно док-ть)

Вектор Дарбу.

Ур-ие Френе можно записать в след виде.

$$\begin{cases} \vec v'(s)=[\vec\omega(s), \vec v] \\ \vec n'(s)=[\vec\omega(s), \vec n(s)] \\ \vec b'(s)=[\vec\omega(s), b(s)] \end{cases}$$

(вектор Дарбу — вект. мгновенного вращения)

$\vec b=[\vec v, \vec n]$ $\quad \vec v=[\vec n, \vec b]$ $\quad n=[\vec b, \vec v]$

$[\omega, v]$ $\quad \vec\omega(s)=\alpha(s)\vec v(s)+\beta(s)\vec n(s)+\gamma(s)b(s)$

$[\vec\omega, \vec v]=-\beta(s)b(s)+\gamma(s)\vec n(s)$

$\bar v'(s)=k(s)\,\bar n(s)$ $\qquad \gamma(s)=k(s)$

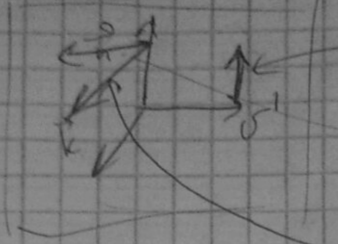
$\beta(s)=0$

$n'=\alpha\bar b-k\vec v=-k\vec v+\varkappa b$

$\alpha=\varkappa$

Если третье ур-ие несовместно, то вектора нет (надо проверять)

$b'=-\varkappa\vec n$



вектор длины k в напр-ии $\vec{n}$

$-k$ вектор по напр. $\vec{\upsilon}$ и длина $-k$

длины $æ$

В кажд. момент времени происходит вращение В. пл-и соприкасающ-ся пл-ть со скоростью k и нормальная пл-ть со скоростью $æ$.

При этом пл-и наз-ся:

$(\vec{\upsilon}, \vec{n})$ — соприкасающаяся плоскость

$(\vec{n}, b)$ — нормальная

$(\vec{\upsilon}, b)$ — спрямляющая

Любая бирегулярная кривая в малой окр-ти в $\forall$ точке имеет одинаковый вид.

(Проекция $\forall$ бирегулярной кривой на пл-ти репера Френе одинаковы в малой окр-ти каждой своей точке).

$$\triangleright\ \vec{r}(s+\Delta s) = \vec{r}(s) + \underbrace{\vec{r}\,'(s)}_{\vec{\upsilon}(s)}\Delta s + \frac{1}{2}\underbrace{r''(s)}_{k(s)\vec{n}(s)}\Delta s^2 + \frac{1}{6} r'''(s)\Delta s^3$$

$$\vec{r}\,'''(s) = (k\vec{n})' = k'(s)n(s) + k(s)n'(s) = k'(s)\vec{n}(s) - k^2\vec{\upsilon} + kæ\vec{b}$$

1 пор. мал. касат-ая

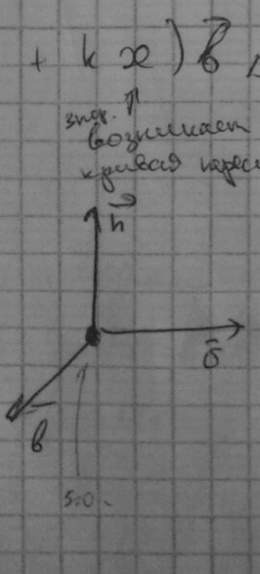
2 пор. мал. появл-ся кривизна

$$\vec{r}(s+\Delta s) = \vec{r}(s) + \vec{\upsilon}(s)\Delta s + \frac{1}{2}k(s)\vec{n}(s)\Delta s^2 + \frac{1}{6}(-k^2\vec{\upsilon} + k'\vec{n} + kæ)\vec{b}\,\Delta s^3 + O(\Delta s^3)$$

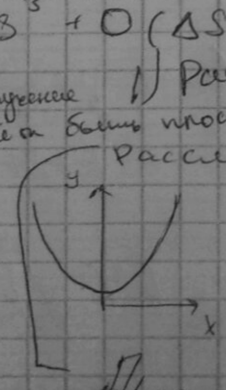
возникает

3 пор. возникает кручение кривая перестаёт быть плоской

1) Рассм. пр-на пл-ть $(\vec{n}, \vec{\upsilon})$ — соприк. пл.



Рассм. пр-ть



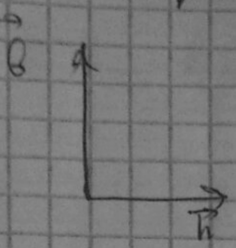
$x = \Delta s + O(\Delta s^2)$

$y = \frac{1}{2}k(s)\Delta s^2 + O(\Delta s^3) =$

$= k(s)x^2$

Проекция любой кривой на соприкас. плоск. есть парабола

2) Рассм. пр. на норм пл-ть $(\bar n, \bar b)$

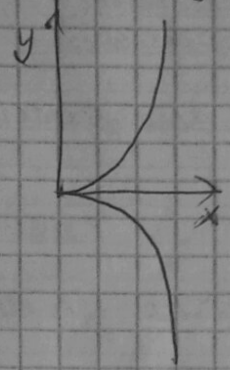


$$x = \frac{1}{2} k(s) \Delta s^2$$

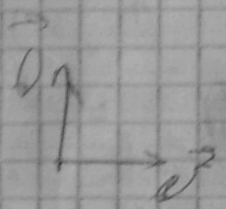
$$y = \frac{1}{6} k(s)\, æ(s) \Delta s^3$$

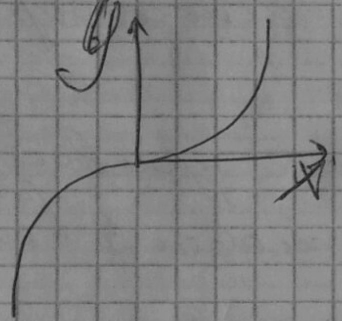
$$\Downarrow$$

$$y = const\, x^{\frac{3}{2}}$$



3) Рассм. пр. на спрямл-ую пр-ть $(\bar v, \bar b)$





$$x = \Delta s$$

$$y = \frac{1}{6} k(s)\, æ(s) \Delta s^3$$

$$y = const\, x^3$$

Нормальную плоскость кривая всегда пересекает.
~~Соп. пл-ть~~ Остальные две пл-ти кривая касает.
(остаётся на той же полупространстве, касаясь)

Ф-ла:

$$\boxed{æ(s) = \frac{(\bar r', \bar r'', \bar r''')}{|\bar r''|^2}}$$ — в нат. пар-ре

$$\boxed{æ(t) = \frac{(\dot{\bar r}, \ddot{\bar r}, \dddot{\bar r})}{|[\dot{\bar r}, \ddot{\bar r}]|^2}}$$ — в $\forall$ пар-ре

▷ $[\bar r', \bar r''] = [\vec v, k\vec n] = k\vec b$

$r''' = (k\bar n)' = k'n + kn' = k'n - k^2 v + k æ \bar b$

$(\bar r', \bar r'', \bar r''') = k^2 æ$

$$æ = \frac{(\bar r', \bar r'', \bar r''')}{k^2}$$

$\bar{r}(t)$ $\bar{r}(\tau)$ — два параметра

$$\bar{r}' = \dot{\bar{r}}\frac{d\tau}{dt}$$

$$r'' = \ddot{\bar{r}}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \dot{\bar{r}}\frac{d^2\tau}{dt^2}$$

$$[\bar{r}', \bar{r}''] = [\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^3$$

$$[\bar{r}', \bar{r}''](dt)^3 = [\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}](d\tau)^3$$ — величина не зависит от парам-ии.

$$\bar{r}''' = \dddot{\bar{r}}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^3 + 3\ddot{\bar{r}}\,2\frac{d\tau}{dt}\frac{d^2\tau}{dt^2} + \dot{\bar{r}}\frac{d^3\tau}{dt^3}$$

$$([\bar{r}', \bar{r}''], \bar{r}''') = ([\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}], \dddot{\bar{r}})\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^6$$

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')(dt)^6 = (\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}})(d\tau)^6$$ — ~~не зав~~ тоже инвариант отн-но параметра.

$$k = \frac{|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]|}{|\dot{\bar{r}}|^3}$$

$$\frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{k^2} = (\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}})\left(\frac{dt}{ds}\right)^6$$

$$\|$$

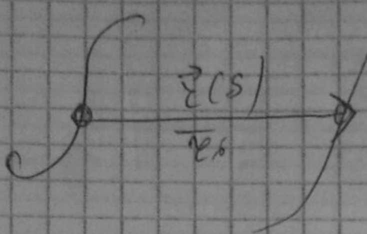
$$|\dot{\bar{r}}|^6$$

$\square$.

(I) $\forall$ ~~нахр~~ бирег-ой кривой, у кот гладкие ф-ии $k(s) > 0$, $\varkappa(s)$ — заданы (т.е. заданы натуральные уравнения кривой), — однозначна с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$ (или, если у 2-х кривых одинаковые $k(s)$ и $\varkappa(s)$ $\Rightarrow$ они совм. движением в $\mathbb{R}^3$). И такая кривая $\exists$.

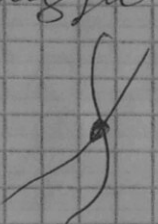
Δ как в $\mathbb{R}^2$

1) (!)



$\vec{r}(s)$ 2) Возьмём точку, ~~смещ~~ посчитаем вектор смещения и сдвинем все точки на этот вектор.

Кривая, смещённая на этот вектор r_0 - ~~проходит ч/з одну точку~~. имеют общую точку. $\rho(s) = \tilde{\vec{r}}(s) - r_0$



$\tilde{r}_0(\vec{v}, \vec{n}, b)$

A - ортогон. преобр. сохр. ориентацию. $A = const$

$AA^T = E$.

Рассм. кривую $A\rho(s)$

вектор скорости этой кривой $\tilde{\vec{v}} = A\vec{\rho}\,' =$

$= A\vec{r}\,' = A\vec{v}$

$A\vec{v}, A\vec{n}, A\vec{b}$

$\tilde{\vec{v}}\,' \quad A\tilde{\vec{v}}\,' = Ak\vec{n}(s) = k\underbrace{A\vec{n}(s)}_{\text{длина } 1}$

$$\begin{cases} A\vec{v}\,' = k\vec{n} \\ \vec{n}\,' = -kv + \varkappa b \\ b' = -\varkappa\vec{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\vec{v}\,' = kA\vec{n} \\ A\vec{n}\,' = -kAv + \varkappa Ab \\ Ab' = -\varkappa A\vec{n} \end{cases}$$

||

Реперы Френе совпадают (!)

⇒ И ур-ия совпадают

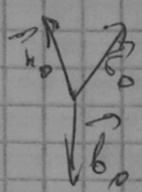
(той же кривизной и кручением (поскольку матр. A постоянна)

2) $\exists$ Пусть заданы $\varkappa(s)$, $k(s) > 0$.

Рассм. ур-ие Френе для них

$$\begin{cases} \vec{v}\,' = k(s)\,\vec{n}(s) \\ \vec{n}\,' = -k(s)\,\vec{v}(s) + \varkappa(s)\,\vec{b}(s) \\ \vec{b}\,' = -\varkappa(s)\,\vec{n}(s) \end{cases}$$

И нач. данные. (n_0, v_0, b_0)



$\vec{b} = [\vec{v}, \vec{n}]$

$\vec{n}_0$.

$\exists$ вектор-функц $\vec{v}(s)$, $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ — решение

$(\vec{v}, v) = 1 = (n, n) = (b, b) = 1$

$(\vec{v}, n) = (\vec{v}, b) = (n, b) = 0$

введём эти ф-ии

$\alpha(s) = (v, v) - 1$

$\beta(s) = (n, n) - 1$

$\gamma(s) = (b, b) - 1$

$\rho(s) = (n, v)$

При $s = s_0$ эти ф-ии нулевые

Продиф-в. $\alpha'(s)$ ... и подставим ур-ие Френе. Получим, что они удовл-т линейной однородной (с неоднородн-ти совр-ю) ур-ия 1го порядка. В силу т-мы о единственности диффуров 1го пор-ка

$\exists!$ единственное реш-ие и оно $\equiv 0$

$$\begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix}$$ — ортогон-ка в 1-й точке $\Rightarrow$ во всех точках.

21 марта
16.45
ауд 12-24
ВГТ

Кривые в R^n

регулярная, бирегулярная $k \neq 0$ $k > 0$

$\bar{r}(s)$ $\bar{r}''(s) = \vec{0}(s)$

Построение базиса в каждой точке кривой.

$$\vec{n}(s) = \frac{\bar{r}''}{|\bar{r}''|} \qquad \bar{r}'' = k\vec{n}$$

$\bar{e} = (\vec{m}_1(s), \dots, \vec{m}_n(s))$ — базис, где

$\vec{m}_1(s)$ $\vec{v}(s)$

$k_1(s) = k(s)$ — кривизна

$\vec{m}_2(s) = \vec{n}(s)$ Опр: $\vec{m}_1'(s) = k_1(s)\,\vec{m}_2(s)$

Чтобы обозн. остальные, временно достроим $\bar{e}$ до ортонорм. базиса $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$

$$\vec{m}_2'(s) = \alpha_1(s)\vec{m}_1(s) + \underbrace{\sum_{i=3}^{n} \beta_i(s)\vec{e}_i(s)}_{\bar{k}}$$

Получаем $\bar{k} \perp m_1$
$\bar{k} \perp m_2$

Обозн: $\bar{k}(s) = k_2(s) \cdot m_3(s)$

Если $\bar{k}(s) = \vec{0}$ то всё построение на этом заканчивается (Аналог условия бирегулярности). У нас не определены вектора базиса Френе тем, где соотв. кривизны равны 0.

Далее до получения m_1, m_2, m_3. $\mathcal{B}$ — ортонорм. репер. Каков $\alpha_1(s)$?

$$(m_2', \bar{m}_1) = \alpha_1(s)$$
$$\|$$
$$-(\bar{m}_2, \bar{m}_1') = -k_1(s)$$

$m_1'(s) = k(s) \cdot m_2(s)$

$m_2'(s) = -k_1(s)\, m_1(s) + k_2(s)\, m_3(s)$

Шаг индукции

Пусть $\exists$ Построены в кажд $\forall s$ $\overline{m}_1(s) \ldots \overline{m}_i(s)$

При $j < i$ известны $k_j(s) > 0$

$m_p' = -k_{p-1}(s)\overline{m}_{p-1}(s) + k_p(s) m_{p+1}(s) \quad \forall p < i$

$\Rightarrow$ базисный

Тогда построим следующий вектор

$m_i' \overset{?}{=} -k_{i-1}(s)\overline{m}_{i-1}(s) + k_i(s) m_{i+1}(s)$ (*)

Дополняем $m_1 \ldots m_i$ до ортонорм. базиса

$m_1 \ldots m_i \; \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_n$

Раскладываем m_i' по этому базису

~~$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_i$~~

$$m_i' = \sum_{p=1}^{i-1} \alpha_{i_p}(s)\overline{m}_p(s) + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} \beta_k(s)\varepsilon_k(s)}_{\overline{k} \perp m_1, \ldots, m_i}$$

$\tilde{k}(s)$ Определяется одно-но $k_i(s)\overline{m}_{i+1}(s)$

$\neq 0$

Скалярно умн. на m_p, где $p < i$

$\cancel{\mathcal{H}}(m_i', \overline{m}_p) = \alpha_p$

$m_i \perp m_p$
$\forall p < i$

$|\mathcal{H}| = 1$

$$-(\overline{m}_i, \overline{m}_p') = \begin{cases} p < i-1, \; 0 \\ p = i-1, \; -k_{p-1} \end{cases}$$

т.к. $m_p' = -k_{p-1}(s) m_{p-1}(s) + k_p(s)\overline{m}_{p+1}(s)$

~~$\ldots k_p(s)\overline{m}_{p+1}(s) \ldots$~~

Получаем след. вектор базиса и ф-лу (*).

Для кривой с кривизнами $k_i > 0$ верно ур-ие Френе для построенного базиса

$$\begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & & \bigcirc \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & \\ & -k_2(s) & \ddots & k_{n-1}(s) \\ \bigcirc & & -k_{n-1}(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix}(s)$$

Теорема Даны кривизны

$k_1(s)>0, \dots, k_{n-2}(s)>0, k_{n-1}(s)$ — гладкие ф-ции

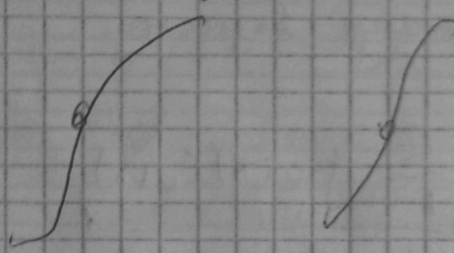
Тогда 1) Кривая определяется однозначно

Если две кривые обл-ют одинаковыми кривизнами, то они совпадут с точностью до дв-ва

2) Такая кривая $\exists$.

▷ 1) Как в $\mathbb{R}^3$.

1) Если даны 2-е кривые с одинаковыми $k_i(s)$



Сдвинем их в одну точку

$\tilde{\gamma}(s) - r_0$

После ортогон. преобр-ния у них совпадут реперы.

(!) Сдвиг и поворот на эти кривые не влияют

$A\tau_i$ — новые вектора базиса удовл-ют тем же ур-ниям Френе. т.к. ОДУ 1 го пор. решение единственно $\Rightarrow$ кривые совпадут

2) ~~Эта кривая~~ Рассм ур-ие Френе соотв-ее. Берём точку и произв. ортонормир-ый репер. И рассм решение этого ур-ия с произв. нач. данными. По ОДУ 1 го пор. $\exists$ это решение. Докажем, что что решения с этими нач. данными, то и всегда

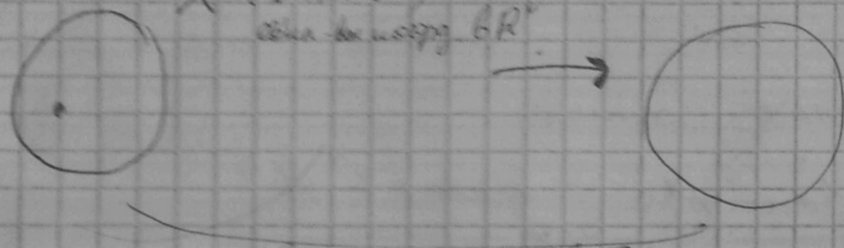
точно это решение будут задавать ортонорм. репер. (что утв. нот. с нам ~~зад~~ рассм 1) $M(s)$ 2) $M'M^{-1}$)

$$\Big(\quad \Big)' = \Big(\quad \Big)\Big(\quad \Big)$$

Если мы рассм. $r(S)$ такой, что $r'(S) = m(S)$, то $r(S)$ задаст кривую, для кот. ей будут кривизны $k_1(S) \dots k_{n-1}$ □

Криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$ (евкл. пр.)

Дано: $X \subset \mathbb{R}^n$ $(x^1 \dots x^n)$ евкл. координ. в $\mathbb{R}^n$ (в области $\mathbb{R}^n$) $U \subset \mathbb{R}^n$ $(u^1 \dots u^n)$ евкл. коорд. в $\mathbb{R}^n$



две области в $\mathbb{R}^n$

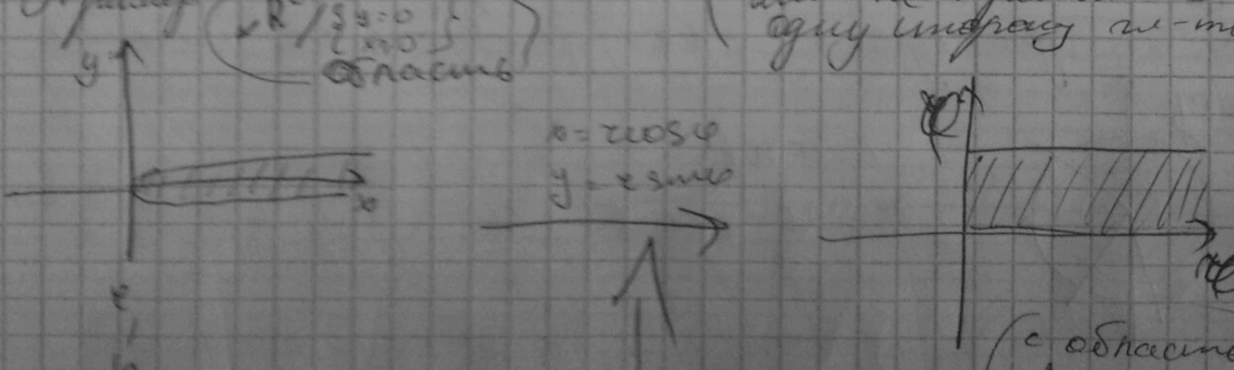
И задан ~~гомеоморфизм~~ диффеоморфизм

$$\begin{cases} x^1(u^1, \dots, u^n) = X_1 \\ \dots \\ x^n(u^1 \dots u^n) = X_n \end{cases}$$

— ~~непрерывные~~ гладкое в обе стороны вз.-одн. отображение, при кот-м ($\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) \neq 0$ — по сути лишнее усл-ие, но лучше его использовать или не требовать в одну сторону гл-ти)

Пример $\mathbb{R}^2 / \{y=0, x \geq 0\}$ область

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$



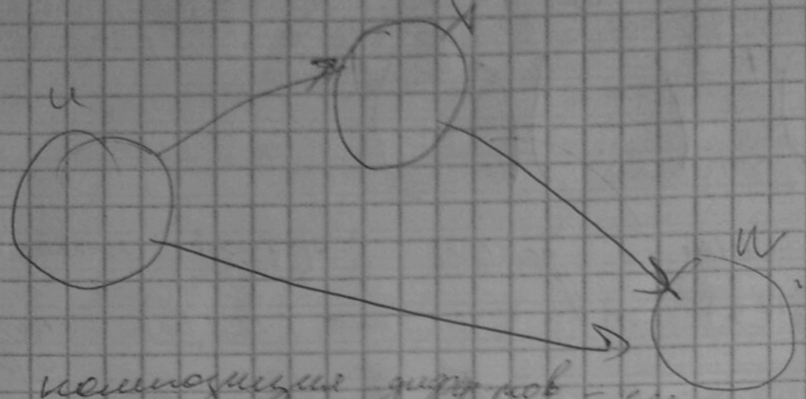
с областью $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$

Есть отображение областей в $\mathbb{R}^n$

Можно увидеть что при $r > 0$ $\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r \neq 0$

и) Условие $\det \neq 0$ локально есть но т. о коорд. ф-ии $\exists$ локально есть диффеоморфизм.

Утв.



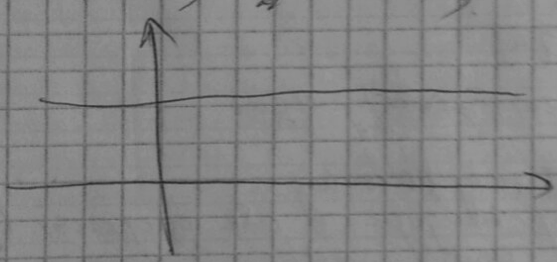
Есть композиция диффеоморфизмов - есть дифф-м
т.е. $\exists$ замена координат.

$$w^i(u^1 \dots u^n)$$

$$u^i(w^1 \dots w^n)$$

Опр Координатные линии

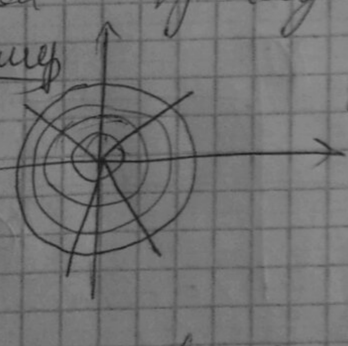
$x^1 = t,\ x^2 = x^2_0 \dots x^n_0$ - кривая в $\mathbb{R}^n$



Одна координата меняется, а остальные фиксир-ны. Получим кривую, от параметра, кот-ый мы не зафиксир.

Через каждую точку криволинейного пр-ва проходят координатные линии.

Пример



$r = const$

$\varphi = const$

Утв Координатная линия - регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$

$$\triangleright \begin{cases} x^1(\overset{\text{меняю}}{u^1}, \dots, u^n) = x^1 & \text{фикс. } (2) \\ x^n(\overset{\text{меня}}{u^1}, \dots, \underset{\text{фикс.}}{u^n}) = x^n \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1(u^i) = x^1 \\ x^n(u^i) = x^n \end{cases}$$

↑ коорд. кривая от u_i

Вектора скорости $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$ $\qquad r(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u))$

Почему они регулярны? из усл-ия

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow$ вектора линейно независимы. □

Для любой кривой задан базис Френе $\left(\dfrac{\partial r}{\partial u^i}\right)$, но он не ортонормирован

~~Покажем, что это базис Френе~~

$$\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) = g_{ij}$$ Получаем матр. Грама

1) $\det(g_{ij}) \neq 0$ (положительно определена) 2) Из симметр. скал. пр-ия $\Rightarrow$ G - симм. 3) Что происх-т при замене координат?

$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right)$$

подразум. суммирование

$$g_{ij}(w) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial w^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial w^j}\right) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial w^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}\right)\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j} = g_{ks}(u(w))\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}$$

Риманова метрика, заданная в области $X \subset \mathbb{R}^n$.

Наз-ся гладкая матричная ф-ия, задаваемая $g_{ij}(u)$, которая

1) положит. определена 3) при замене координат

2) симметрична матрица связаны

$$\bar g_{ij}(w) = g_{ks}(u)\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}$$

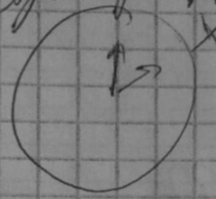
Упр. Матрица Грамма ~~частный~~ при вложении заданные через (частичный) ~~случай~~ частный случай Римановой метрики в общем.

Римановой метрикой наз. гладкая матричная функция, которая ($g_{ij}(u)$) 1) симм.-на $g_{ij} = g_{ji}$

2) положит. опр. $\det g_{ij} > 0$

3) преобраз. как квадр. форма

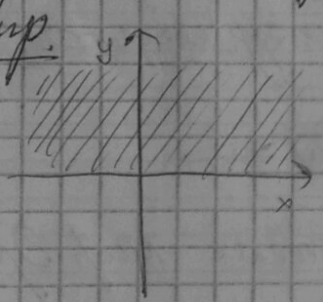
Пример Римановой метрики



$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right)$$

Матрица Грамма яв. примером Рим. м.

Упр.



Задано в качестве об. м. X верх. полупл. ($y>0$)

Рассм. метрику $\begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

Д-ть, что не ∃ никакой криволинейной ~~сист. по функц.~~ м

Д-ть Никакими преоб-ями нельзя привести к $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

В каждой точке U есть базис векторов (неортонормирован) (Аналог р. Френе)

Мы будем изучать его дер-ию по всем (координатным) параметрам $\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij}(u)\frac{\partial r}{\partial u^k}$ разложение по базису. деривационные ф-лы

$\Gamma^k_{ij}(u)$ — символ Кристоферя.

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\right) = \Gamma^k_{ij}(u)\left(\frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\right) = \Gamma^k_{ij}(u)\, g_{kl}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right) + \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial^2 r}{\partial u^j \partial u^k}\right) =$$

$$= \Gamma^s_{ik}\, g_{sj} + \Gamma^s_{jk}\, g_{si}$$

т.о. $$\boxed{\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma^s_{ik}\, g_{sj} + \Gamma^s_{jk}\, g_{ki}}$$ (это то же самое что $\nabla_k g_{ij} = 0$ потом)

Видим, что $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ (следует из перестановочности производных)

Докажем формулу для симв. Кр.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s}\right)$$

обратная матрица

(? Для невырожденного тензора типа $(0,2)$ обратная матрица — тензор типа $(2,0)$ (тенз. g^{ks}) следствие

частн. ф-ии

▷ Рассмотрим $\frac{\partial g_{si}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s}$ ...

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial u_j} = \Gamma^l_{sj}\, g_{li} + \Gamma^l_{ij}\, g_{ls}$$

$$\frac{\partial g_{sj}}{\partial u_i} = \Gamma^l_{si}\, g_{lj} + \Gamma^l_{ji}\, g_{ls}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} = \cancel{\Gamma^l_{is}\, g_{lj}} + \cancel{\Gamma^l_{js}\, g_{li}}$$

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} = 2\Gamma^l_{ij}\, g_{ls}\, g^{sk} = 2\Gamma^l_{ij}\, \delta^k_l = 2\Gamma^k_{ij}$$

домножить

произведение взаимнообр. матриц □

Теорема. Пусть задана метрика $g_{ij}(u)$, ей отвечают символы Кристоф. И мы имеем систему $\frac{\partial^2 \vec r}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij}(u) \frac{\partial \vec r}{\partial u^k}$. Тогда...

Переопределен-ая система, уд-ая этой системе

?

Опр. Допустим, что теперь "Совместные системы"

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec y}{\partial u^1} = \vec F_1(u^1 \dots u^n, y^1 \dots y^k) \\ \vdots \\ \frac{\partial \vec y}{\partial u^n} = \vec F_n(u^1, \dots u^n, y^1 \dots y^k) \end{cases}$$

— не обязательно линейная по y система.

$\vec F_i$ заданы в $U \times V$, где $U \subset R^n$, $V \subset R^k$

— гладкие (2-ды дифф-ые) ф-ии.

Рассм. начальное условие: $\vec a \in U$ $\vec b \in V$

$y(\vec a) = \vec b$

Гладкие $\vec y(u^1 \dots u^n)$

Опр. Система наз-ся совместной если для $\forall$ нач-ых данных $\vec a$ и $\vec b$ $\exists$ гладкое решение $\bar y(u)$ с нач-ми усл-ями $\bar y(a) = \bar b$ в нек-ой окр-ти точки $\bar a$

Пусть система совместна: $\vec F_i(u^1, \dots u^n, y^1(u^1 \dots u^n), \dots y^k(u^1 \dots u^n)) = \frac{\partial y}{\partial u^i}$

$$\frac{\partial F(u^1 \dots u^n, y^1 \dots y^k)}{\partial u^i}\Bigg|_{y = y(u^1 \dots u^n)}$$

$\frac{\partial F}{\partial u_i}$ — обычн. частные пр-ные

Иногда будем писать произв-ую по первым n-коорд.