Кодирование

Наша цель была научиться говорить о выводимости в PA языком арифметики. В прошлом листке мы поняли, что рекурсивные функции могут быть хорошим подспорьем в этом деле. Осталось эту возможность реализовать.

Пусть Σ не более чем счётная сигнатура, содержащая функциональные символы $\{f_i^n\}$, предикатные символы $\{R_i^n\}$, переменные $v_0, v_1, \ldots$ Например, положим $=$ как R_0^2, 0 как f_0^0, S есть f_0^1 и так далее. Наша цель приписать гёделевы номера объектам языка, чтобы разным объектам соответствовали разные натуральные числа, а смысл слова мог бы определяться примитивно-рекурсивным образом. Обозначив гёделев номер объекта A как $\ulcorner A \urcorner$, распределим номера, скажем, так:

$$\ulcorner v_i \urcorner := \langle 1, i\rangle, \ulcorner f_i^n \urcorner := \langle 2, \langle n, i\rangle\rangle, \ulcorner R_i^n \urcorner := \langle 3, \langle n, i\rangle\rangle, \ulcorner \neg \urcorner := \langle 4, 0\rangle, \ulcorner \rightarrow \urcorner := \langle 4, 1\rangle, \ulcorner \forall \urcorner := \langle 4, 3\rangle.$$

Задача Г3.1. Объясняет почему квантору существования и остальным логическим связкам не нужны отдельные гёделевые номера.

Дальше можно этот язык расширить на более сложные конструкции, например: $\ulcorner (A \rightarrow B) \urcorner = \langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner\rangle$, $\ulcorner \forall v_i \quad A \urcorner = \langle \ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner v_i \urcorner, \ulcorner A \urcorner\rangle$.

Задача Г3.2. Докажите, что $\mathrm{Tm}(x) =$ «x есть гёделев номер терма» является примитивно рекурсивной.

Задача Г3.3. Докажите, что $\mathrm{AtFm}(x) =$ «x есть гёделев номер атомарной формулы» является примитивно рекурсивной.

Задача Г3.4. Докажите, что $\mathrm{Fm}(x) =$ «x есть гёделев номер формулы» является примитивно рекурсивной.

Определение. *Нумерал* $\underline{n}$ — это терм $\underbrace{S(\ldots S(0)\ldots)}_{n}$

Задача Г3.5. Покажите, что $nm(x) := \ulcorner \underline{x} \urcorner$ и $\mathrm{Num}(x) =$ «x есть гёделев номер нумерала» примитивно рекурсивны.

Задача Г3.6. Докажите, что $\mathrm{Sub}(x, i, y) =$ «результат подстановки в x выражения y вместо свободных вхождений переменной v_i» является примитивно рекурсивной. Другими словами, если $x = \ulcorner \varphi \urcorner$, то выполняется $\mathrm{Sub}(\ulcorner \varphi \urcorner, i, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner \varphi[v_i/t] \urcorner$.

Задача Г3.7. Докажите, что $\mathrm{Free}(x, y) =$ «x есть гёделев номер переменной, имеющей свободное вхождение в выражение с номером y» является примитивно рекурсивной.

Задача Г3.8. Покажите, что следующие предикаты примитивно рекурсивны «x есть код подформулы формулы с кодом y», «t подстановочен в φ вместо свободного вхождения переменной v_i»,

Определение. Пусть $\mathrm{Ax}_i(x)$ $=$ «x есть код применения i-ой аксиомы Cl», $\mathrm{Log}(x) = \bigvee \mathrm{Ax}_i(x)$, $\mathrm{MP}(x, y, z) = (y = \langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, x, y\rangle) \& x, y, z \in \mathrm{Fm}$ (выводимость по modus ponens), $\mathrm{Gen}(x, i, y) = (y = \langle \ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner v_i \urcorner, x\rangle)$ (применение квантора всеобщности).

Задача Г3.9. Покажите, что Ax_i, Log, MP, Gen являются примитивно рекурсивными.

Задача Г3.10. Докажите, что $\mathrm{Prf}(x, y) =$ «x есть вывод y в языке предикатов» является примитивно рекурсивной.