Рекурсивные функции

Определение. Определим по индукции класс *примитивно рекурсивных функций* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Объявим $z(x) = 0$, $S(x) = x + 1$ и $I^n_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ примитивно рекурсивными. Если $f, g_1, \ldots, g_n$ — примитивно рекурсивные, то их *композиция* $h(\vec{x}) \equiv f(g_1(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x}))$ такова. Так же имеется операция *примитивной рекурсии*: по примитивно рекурсивным g, h строится следующая f.

$$\begin{cases} f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}), \\ f(n+1, \vec{x}) = h(f(n, \vec{x}), n, \vec{x}). \end{cases}$$

Задача Г1.1. Докажите, что примитивно рекурсивная функция тотально вычислима. Иными словами, что существует машина Тьюринга, которая на любом входе $x \in \mathbb{N}^k$ завершает работу и выдаёт $f(x)$.

Задача Г1.2. Докажите, что можно вести рекурсию по любому аргументу функции*.

Задача Г1.3. Докажите, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

1. $x + y$;
2. $x \cdot y$;
3. $prev(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
4. $sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
5. $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x \leqslant y; \end{cases}$
6. $\min(x, y)$;
7. $\max(x, y)$;
8. $case(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } z = 0, \\ y, & \text{если } z > 0; \end{cases}$
9. $rm(x, y), qt(x, y)$ — остаток и неполное частное от деления.

Задача Г1.4. Докажите, что если $f(\vec{x}, y)$ примитивно рекурсивная, то $\sum_{y<z(y\leqslant z)} f(\vec{x}, y)$ и $\prod_{y<z(y\leqslant z)} f(\vec{x}, y)$ примитивно рекурсивные.

Определение. Скажем, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *примитивно рекурсивно*, если примитивно рекурсивна его характеристическая функция

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } R(\vec{x}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача Г1.5. Докажите, что следующие отношения примитивно рекурсивны $=$, $<$, $\leqslant$, «x делится на y», «x простое».

Задача Г1.6. Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$. *Ограниченные кванторы* задают соотношения $\exists u < v \quad R(\vec{x}, u)$ и $\forall u < v \quad R(\vec{x}, u)$. Докажите, что если R — примитивно рекурсивное, то $\exists u < v \quad R(\vec{x}, u)$, $\forall u < v \quad R(\vec{x}, u)$ также.

Задача Г1.7. Рассмотрим *ограниченный μ–оператор*:

$$\mu y < z.R(\vec{x}, y) = \begin{cases} \text{наименьшее } y \text{ такое, что } y < z \text{ и } R(\vec{x}, y), \text{ если такое существует}, \\ z, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что если R — примитивное рекурсивное, то $(\vec{x}, z) \mapsto \mu y < z.R(\vec{x}, y)$ также.

Задача Г1.8 *(разбор случаев)*. Пусть для $i, j = 1, \ldots, n$ функции g_i и отношения $\bigsqcup_i R_i = \mathbb{N}^k$ — примитивно рекурсивны. Тогда примитивно рекурсивна функция разбора случаев:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}), & \text{если } R_1(\vec{x}), \\ g_2(\vec{x}), & \text{если } R_2(\vec{x}), \\ \quad \ldots\ldots \\ g_n(\vec{x}), & \text{если } R_n(\vec{x}), \end{cases}$$

*Подсказка: покажите, что если f — п.р., то $g(x, y) = f(y, x)$ такая же.

Задача Г1.9 ***(совместная рекурсия).*** [†] Пусть g_1, g_2, h_1, h_2 — п.р.ф. Для $i = 1, 2$ положим

$$f_i(\vec{x}, 0) = g_i(\vec{x}), f_i(\vec{x}, y+1) = h_i(\vec{x}, y, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y)).$$

Докажите, что f_i — примитивно рекурсивные.
Задача Г1.10. Пусть p_x — простое число с номером x ($p_0 = 2$). Докажите, что $x \mapsto p_x$ — п.р.ф.
Задача Г1.11. Докажите, что функция нумерации пар

$$pair(x, y) = sign(x - y) \cdot (x^2 + 2y + 1) + sign(y - x + 1) \cdot (y^2 + 2x)$$

и её обратные $left(x)$ и $right(x)$ являются примитивно рекурсивными.
Определение. *Кодом* последовательности $a_0, \ldots, a_n$ назовём число

$$\ulcorner a_0, \ldots, a_n \urcorner = p_0^{a_0+1} \cdot p_1^{a_1+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}.$$

Для дальнейшего нам понадобится, чтобы функции работы с последовательностями оказались примитивно рекурсивными.
Задача Г1.12. Покажите, что следующие функции примитивно рекурсивны: $x[i] = \nu_{p_i}(x)$, $l(x)$ —число различных простых делителей x, предикат $seq(x) =$ «x — код последовательности», конкатенация

$$\ulcorner a_1, \ldots, a_n \urcorner * \ulcorner b_1, \ldots b_m \urcorner = \ulcorner a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \urcorner,$$

Определение. *Возвратная рекурсия* — это операция $f \mapsto f_\sharp(\vec{x}, y) = \prod_{u<y} (p_u)^{f(\vec{x},u)}$. Заметим, что для всех $i \leqslant y$ верно, что $f(\vec{x}, i) = f_\sharp(\vec{x}, y+1)[i]$.
Задача Г1.13. Пусть h — п.р.ф., то $f(\vec{x}, y) = h(\vec{x}, y, f_\sharp(\vec{x}, y))$ — тоже.
Задача Г1.14. Пусть φ_n — n-ое число Фибоначчи. Докажите, что $n \mapsto \varphi_n$ — п.р.ф.
Определение. *Рекурсивные функции* получаются при замыкании класса примитивно рекурсивных функций относительно (неограниченного) μ-оператора:

$$f(\vec{x}) = \mu y.(g(\vec{x}, y) = 0)$$

Мы считаем, что $f(\vec{x}) = y$, если $g(\vec{x}, y) = 0$ и для каждого $z < y$ значение $g(\vec{x}, z)$ определено и $g(\vec{x}, z) \neq 0$, и $f(\vec{x})$ не определена иначе.
Вообще говоря, существуют тотальные рекурсивные, но не примитивно рекурсивные функции.
Определение. Функция Аккермана определяется так:

$$\begin{cases} Ack(0, x) = x + 2, \\ Ack(n+1, 0) = Ack(n, 1), \\ Ack(n+1, m+1) = Ack(n, Ack(n+1, m)) \end{cases}$$

Задача Г1.15. Докажите, что Ack — тотально вычислимая функция, то есть для любого входа существует значение и его можно посчитать машиной Тьюринга.
Задача Г1.16. Докажите, что $Ack(2, m) \geqslant 2^m$.
Задача Г1.17*. Докажите, что k-ветвь функции Аккермана растёт быстрее любой п.р.ф. с не более k вложенными рекурсиями. Получите из этого, что $Ack(n, n)$ не является п.р.ф. от одного аргумента.

[†] Полезно сначала решить задачу Г1.12