

Нумерация

Определение. Символом \simeq обозначим следующее отношение:

$$a \simeq b = \begin{cases} \top, & (\text{Defined}(a) \wedge \text{Defined}(b) \wedge a = b) \vee (\neg \text{Defined}(a) \wedge \neg \text{Defined}(b)), \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для дальнейших результатов нам понадобится пронумеровать все вычислимые функции в виде φ_i^m так, что верно следующее:

1. Для любого $m \in \mathbb{N}$ верно, что $\varphi_i^m: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$.
2. При фиксированном m универсальная функция

$$u^m(i, x_1, \dots, x_m) \simeq \varphi_i^m(x_1, \dots, x_m)$$

вычислима.

3. Нумерация выдерживает *обобщённое каррирование*: для всех $m, n \geq 1$ существует тотальная вычислимая функция $s: \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что при всех $k, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_k^{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \simeq \varphi_{s(k, \vec{x})}^n(\vec{y}).$$

Задача ТА3.1. а. Докажите, что множество всех вычислимых функций m -арных функций φ_i перечислимо. **б.** Докажите, что множество всех вычислимых функций перечислимо.

Задача ТА3.2. Докажите, что требуемая нумерация существует.

Задача ТА3.3. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что $\varphi_{h(i,j)}^1(x) \simeq \varphi_i^1(x) + \varphi_j^1(x)$.

Задача ТА3.4. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что $\varphi_{h(i,j)}^1(x) \simeq \varphi_i^1(\varphi_j^1(x))$.

Задача ТА3.5. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что $\varphi_{h(i,j,k)}^1(x) \simeq \varphi_k^1(x) ? \varphi_i^1(x) : \varphi_j^1(x)$ (условная операция в С).

Задача ТА3.6. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$\varphi_{h(i,j)}^1(x) \simeq \begin{cases} \text{while}(\varphi_i^1(x) > 0) & x = \varphi_j^1(x); \\ \text{return } x; \end{cases}$$

Задача ТА3.7 (Свойство главности нумерации φ_i^1). Пусть у нумерации $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ некоторого семейства вычислимых функций универсальная функция $v(i, x) \simeq \psi_i(x)$ вычислима*. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция h такая, что $\psi_i(x) \simeq \varphi_{h(i)}^1(x)$.

Задача ТА3.8. Пусть $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ фиксированная вычислимая функция, ζ — нигде не определённая функция, $A \subseteq \mathbb{N}$ — перечислимое множество. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция h такая, что

$$\varphi_{h(i)}^1 = \{g, i \in A, \zeta, \quad i \notin A.$$

Задача ТА3.9. Говорят, что множество $A \subset \mathbb{N}^k$ m -сводится к множеству $B \subset \mathbb{N}^l$ (обозначается $A \leq_m B$), если существует тотальная вычислимая функция $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^l$ такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Доказать, что

*такие нумерации называются *вычислимыми*

1. отношение \leq_m рефлексивно и транзитивно;
2. если $A \leq_m B$ и B разрешимо (перечислимо), то A тоже разрешимо (перечислимо).

Задача ТА3.10. Доказать, что каждое перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ m -сводится к множествам:

1. $\{i \mid \varphi_i^1(i)\}$;
2. $\{i \mid \varphi_i^1(5) = 25\}$;
3. $\{i \mid \varphi_i^1(i) = 99\}$;
4. $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ — тотальна}\}$.

Задача ТА3.11. Доказать, что каждое коперечислимое множество m -сводится к $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ — нигде не определена}\}$.

Негативные результаты

Задача ТА3.12. а.[†] Доказать, что функция $f(x) \simeq \varphi_x^1(x) + 1$ вычислима, но не имеет вычислимых тотальных продолжений. **б.** Доказать, что множество $K = \{x \mid \varphi_x^1(x) \text{ — определена}\}$ перечислимо, но не разрешимо. **в.** Доказать, что множество $STOP = \{(i, x) \mid \varphi_i^1(x) \text{ — определена}\}$ перечислимо, но не разрешимо.

Задача ТА3.13. а. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 179, \varphi_x^1(x) = 57 \\ 57, \text{ иначе.} \end{cases}$$

не вычислима. **б.** Доказать, что множество $\{x \mid \varphi_x^1(x) = 179\}$ перечислимо, но не разрешимо.

Задача ТА3.14. Пусть фиксирована машина Тьюринга M вычисления универсальной функции $u^1(i, x)$ и $T_M(i, x)$ — время (число шагов) ее работы на входе i, x .

1. Проверить, что функция T вычислима;
2. Проверить, что $(T(i, x) \text{ — определено}) \Leftrightarrow (\varphi_i^1(x) \text{ — определено})$;
3. Проверить, что $\{(i, x, t) \mid T(i, x) \leq t\}$ — разрешимо.
4. Пусть $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ тотальная вычислимая функция. Доказать, что тотальная функция

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x^1(x) + 1, T(i, x) \leq h(x) \\ 0. \end{cases}$$

вычислима, но не вычислима за время h , т.е. $\forall i \exists x f = \varphi_i \rightarrow T(i, x) > h(x)$.

5. Построить тотальную вычислимую функцию со значениями $\{0, 1\}$, которая также не вычислима за время h .

Задача ТА3.15 (Теорема Райса). Пусть \mathcal{P} — семейство одноместных вычислимых функций, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ и существует одноместная вычислимая функция $f \notin \mathcal{P}$. Доказать, что его индексное множество $\{i \mid \varphi_i^1 \in \mathcal{P}\}$ неразрешимо.

Задача ТА3.16. Доказать неразрешимость множеств:

1. $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ — тотальна}\}$;
2. $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ — нигде не определена}\}$;
3. $\{i \mid \varphi_i^1(5) = 25\}$;
4. $\{i \mid \varphi_i^1(5) \text{ — определено}\}$;
5. $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ — монотонна}\}$;
6. $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ — тотальна}\}$;

Задача ТА3.17. Доказать неперечислимость множеств:

1. $\{i \mid \varphi_i^1(5) \text{ — не определено}\}$;

[†]Подсказка: попытаться найти значение $g(k)$, где g — кандидат на продолжение, а k — его номер

2. $\{i \mid \varphi_i^1(5) \text{ не определено или } \neq 25\};$
3. $\{i \mid \varphi_i^1 \text{ не принимает значений } > 25\};$
4. $\{i \mid \neg(\exists x \ \varphi_i^1(x) = x)\};$

Задача ТА3.18. Доказать неразрешимость множеств:

1. $\{(i, j) \mid \varphi_i^1 \text{ есть продолжение } \varphi_j^1\};$
2. $\{(i, j) \mid \text{Dom}(\varphi_i^1) \cup \text{Dom}(\varphi_j^1) = \mathbb{N}\};$
3. $\{(i, j) \mid \text{Dom}(\varphi_i^1) \cap \text{Dom}(\varphi_j^1) = \emptyset\};$
4. $\{(i, j) \mid \varphi_i^1, \varphi_j^1 \text{ тотальны и } \forall x \ \varphi_i^1(x) = 2\varphi_j^1(x)\};$