Листок №ЛП 21.10.2019

Логика предикатов

Пусть Γ — множество замкнутых формул (meopus), а F — замкнутая формула.

Определение. Формула F логически следует из Γ (обозначение $\Gamma \models F$), если для каждой интерпретации, обращающей все формулы из Γ в истину, формула F также оказывается истинной.

Определение. Формула F дедуктивно следует или выводима из множества (обозначение $\vdash F$), если у неё существует формальный вывод из гипотез .

Напомним, что формальным выводом F из Γ называется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n = F$, где каждое A_i либо аксиома, либо элемент Γ , либо получено из предыдущих по $npaeunam\ ebieo\partial a$. Аксиомы логики предикатов:

A1.
$$A \to (B \to \to A)$$
,
A6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$,

A2. $A \land B \to A$, $A \land B \to B$,
A7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,

A3. $A \to (B \to A \land B)$,
A8. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

A4. $A \to A \lor B$, $B \to A \lor B$,
A9. $(\forall x \ A(x)) \to A(t)$, где t — терм,

A5. $\neg \neg A \to A$,
A10. $A(t) \to \exists x \ A(x)$, где t — терм.

Правил вывода всего 3: Modus ponens и два правила Бернайса

MP:
$$\frac{A - A \to B}{B}$$
 B1 $\frac{A \to B(a)}{A \to \forall x - B(x)}$ B1 $\frac{B(a) \to A}{(\forall x - B(x)) \to A}$

Теорема ЛП.1 (Полнота и корректность ЛП, Гёдель).

$$T \models F \Leftrightarrow T \vdash F$$
.

Теорема ЛП.2 (Гёделя о компактности). *Теория Т непротиворечива** тогда и только тогда, когда любая её конечная подтеория непротиворечива.

^{*}Теория непротиворечива, когда у неё есть модель, то есть интерпретация сигнатуры, в которой эта теория верна