Вычислимость

Определение. $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^s$ *тотально вычислима*, если существует машина Тьюринга, на любом входе $(n_1, \ldots, n_k)$ вычисляющая $m = f(n_1, \ldots, n_k)$. Функция f может быть *частичной*, если $\mathrm{Dom}(f) \subsetneq \mathbb{N}^k$; тогда на остальных входах машина Тьюринга зацикливается.

Определение. Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ *перечислимо*, если существует вычислимая функция f такая, что область её определения равна P.

Задача ТА2.1°. Докажите, что $P \subseteq \mathbb{N}^k$ перечислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая f такая, что область её значений равна P.

Задача ТА2.2°. Докажите, что $\varnothing \neq P \subseteq \mathbb{N}^k$ перечислимо тогда и только тогда, когда существует тотальная вычислимая f такая, что область её значений равна P.

Определение. Функция

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1, x \in P, \\ 0, x \notin P. \end{cases}$$

называется *характеристической* функцией множества P. Функция π_P, которая равна 1 на элементах P и неопределена вне P, называется *полухарактеристической.*

Определение. Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ *разрешимо*, если его характеристическая функция вычислима, то есть алгоритм, способный проверить произвольный вход из $\mathbb{N}^k$ на принадлежность P.

Определение. Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ *полуразрешимо*, если его полухарактеристическая функция вычислима, то есть алгоритм, способный проверить вход из $\mathbb{N}^k$ на принадлежность P.

Задача ТА2.3°. Приведите пример перечислимого, но не разрешимого множества.

Задача ТА2.4. Проверьте разрешимость множеств:

1. всех четных чисел;
2. всех простых чисел;
3. данного конечного множества;
4. множества всех решений $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ уравнения $x^2 - y^2 > 5$.

Задача ТА2.5. Проверьте полуразрешимость множеств:

1. каждого разрешимого множества;
2. всех пар простых чисел близнецов;
3. множества всех чисел, представимых в виде суммы квадратов попарно различных нечетных чисел;
4. множества тех $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{N}^5$, для которых уравнение $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 = 0$ имеет решение в целых числах.

Задача ТА2.6⋆. Пользуясь определением перечислимого множества проверить перечислимость множеств из задачи **??**.

Задача ТА2.7. Доказать исходя из определений:

1. если $A, B \subseteq \mathbb{N}$ разрешимы, то $A \cup B$, $A \cap B$, $\neg A$ также разрешимы.
2. если $A, B \subseteq \mathbb{N}$ полуразрешимы, то $A \cup B$, $A \cap B$ также полуразрешимы.
3. если $A, B \subseteq \mathbb{N}$ перечислимы, то $A \cup B$, $A \cap B$ также перечислимы.

Задача ТА2.8 ***(Теорема Поста).*** **а.** Докажите, что множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда A и его дополнение полуразрешимы. **б°.** Докажите, что $P \subseteq \mathbb{N}^k$ — разрешимо тогда и только тогда, когда P и $\mathbb{N}^k \backslash P$ одновременно перечислимы.

Задача ТА2.9. Доказать, что для каждого полуразрешимого множества A существует программа, которая работает вечно, время от времени посылая в выходной поток натуральные числа $a \in A$ таким образом, что каждый элемент A когда-нибудь в нем появится.

Задача ТА2.10. Доказать, что класс всех полуразрешимых подмножеств $\mathbb{N}$ совпадает совпадает с классом всех перечислимых подмножеств $\mathbb{N}^*$.

Задача ТА2.11. Доказать, что

1. Проекция перечислимого множества $R \in \mathbb{N}^2$ на первую координату является перечислимым множеством.
2. Каждое полуразрешимое множество может быть получено как проекция некоторого разрешимого множества.
3. Получить в качестве следствия из **а.**,**б.**, что каждое полуразрешимое множество перечислимо.

Задача ТА2.12° ***(Теорема о графике).*** Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её график $\Gamma_f = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$ перечислим.

Задача ТА2.13. а. Доказать, что у тотальной вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ график $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in \operatorname{Dom} f\}$ разрешим. **б.** Построить пример нетотальной вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с разрешимым графиком.

Задача ТА2.14 ***(Теорема об униформизации).*** Доказать, что каждое перечислимое подмножество $A \subseteq \mathbb{N}^2$ содержит в себе график некоторой вычислимой функциии $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определенной во всех точках проекции множества A на первую координату.

*Подсказка: посмотрите на одну из соседних задач