Обоснование кодирования

Пусть T некоторая теория в языке арифметики.
Определение. Отношение $P(\vec{x}) \subseteq \mathbb{N}^k$ *разрешимо* в T, если существует формула $\varphi(\vec{x})$, что $\forall \vec{n}$

$$P(\vec{n}) \Rightarrow T \vdash \varphi(\underline{\vec{n}})$$
$$\neg P(\vec{n}) \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\underline{\vec{n}})$$

Определение. Функция $f(\vec{x})$ *представима* в T, если существует $\varphi(\vec{x}, y)$ такая, что:

$$f(\vec{n}) = m \Rightarrow T \vdash \varphi(\underline{\vec{n}}, \underline{m}),$$
$$T \vdash \forall y \quad (\varphi(\underline{\vec{n}}, y) \to y = \underline{m}).$$

Для того, чтобы можно было формулировать в арифметике утверждения, подобные теоремам Гёделя (о доказуемости чего-либо в арифметике) нам понадобиться следующая теорема, обосновывающая тот синтаксис, который мы ввели в предыдущем листке.

Теорема Г4.1 (Обоснования). • *Любая ПРФ Σ_1-определима в $\mathbb{N}$;*
- *Рассмотрим* PA, *в которой схему индукции заменим аксиомой*[*] $\forall y \quad (y \neq 0 \to \exists x \quad y = S(x)$. *В Q разрешимы все ПР отношения и представимы все ПРФ.*

Определение. Функция $\beta(x, y, z) = rm((z+1) \cdot y + 1, x)$ называется β функцией Гёделя.
Задача Г4.1. Покажите, что β является Σ_1-определимой.
Задача Г4.2. Пусть $m = \max(n, k_0, \ldots, k_n)$, $c = m!$, $u_i = c(i+1)+1$. Покажите, что $(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

Теорема Г4.2 (Китайская теорема об остатках).

$$\forall \{k_0, \ldots, k_n\} \quad \exists b < u_1, \ldots, u_n \quad \forall i \leqslant n \quad b \equiv k_i (\mathrm{mod}\ u_i)$$

Задача Г4.3. Докажите, что

$$\forall \{k_0, \ldots, k_n\} \quad \exists a, b \quad \forall i \leqslant n \quad \beta(a, b, i) = k_i.$$

Задача Г4.4. Докажите, что любая ПРФ Σ_1-определима в $\mathbb{N}$.
Задача Г4.5. Докажите, что всякая Δ_0-формула разрешима в Q.
Задача Г4.6. Докажите, что всякая вычислимая формула представима в Q.
Задача Г4.7. Докажите, что всякая Σ_1-формула разрешима в Q.
Задача Г4.8. Завершите доказательство второго пункта теоремы Обоснования.

[*] Такая теория называется *арифметикой Робинсона Q*. В ней, в отличии от PA конечное число аксиом.