

## Теоремы Гёделя

**Определение.** Введём предикат *доказуемости* в арифметике

$$\text{Pr}(x) = \exists y \text{ Prf}(y, x).$$

**Теорема Г5.1** (Первая теорема Гёделя о неполноте). *Существует замкнутая формула  $\varphi$  такая, что  $\mathbb{N} \models \varphi$ ,  $\text{PA} \not\vdash \varphi$ .*

**Задача Г5.1** (Лемма о неподвижной точке). Пусть  $\psi(x_i)$  — формула с единственной свободной переменной  $x_i$ . Докажите<sup>1</sup>, что найдётся такая арифметическая замкнутая формула  $\varphi$ , что

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

**Задача Г5.2.** Применив лемму о неподвижной точке к  $\neg \text{Pr}$  докажите первую теорему Гёделя.

**Определение.** Рассмотрим формулу *непротиворечивости арифметики Пеанно*

$$\text{Consis} = \neg \text{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

Введём обозначения:  $\perp = (0 = 1)$ ,  $\Box\psi = \text{Pr}(\ulcorner \psi \urcorner)$ . Следующие теоремы доказываются одна за другой.

**Теорема Г5.2** (Гильберт, Бернайс, Гёдель, Леб). *Для любых замкнутых  $\varphi, \psi$  верно, что*

$$\begin{aligned} \text{PA} \vdash \varphi &\Rightarrow \text{PA} \vdash \Box\varphi \\ \text{PA} \vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \\ \text{PA} \vdash \Box\varphi &\rightarrow \Box\Box\varphi \end{aligned}$$

**Теорема Г5.3** (Вторая теорема Гёделя о неполноте).

$$\text{PA} \not\vdash \text{Consis}.$$

**Теорема Г5.4** (Леб). *Если  $\text{PA} \vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$ , то  $\text{PA} \vdash \varphi$ .*

**Теорема Г5.5** (Тарского). *Не существует формулы  $T(x)$  такой, что для всех замкнутых формул  $\varphi$*

$$\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

*Эквивалентная формулировка: одноместный предикат « $x$  есть гёделев номер формулы, истинной в  $\mathbb{N}$ » не является арифметическим.*

**Теорема Г5.6.**  $\mathcal{Q}$  и PA неразрешимы.

**Теорема Г5.7.** Исчисление предикатов в сигнатуре арифметики неразрешимо.

<sup>1</sup> Ответ:  $\theta(x) = \psi(\text{Sub}(x, i, x))$ ,  $m = \ulcorner \theta \urcorner$ ,  $\varphi = \theta(m)$