

## Вычислимость

**Определение.**  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^s$  *тотально вычислима*, если существует машина Тьюринга, на любом входе  $(n_1, \dots, n_k)$  вычисляющая  $m = f(n_1, \dots, n_k)$ . Функция  $f$  может быть *частичной*, если  $\text{Dom}(f) \subsetneq \mathbb{N}^k$ ; тогда на остальных входах машина Тьюринга заиклиивается.

**Определение.** Множество  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  *перечислимо*, если существует вычислимая функция  $f$  такая, что область её определения равна  $P$ .

**Задача ТА2.1°.** Докажите, что  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  перечислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая  $f$  такая, что область её значений равна  $P$ .

**Задача ТА2.2°.** Докажите, что  $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{N}^k$  перечислимо тогда и только тогда, когда существует тотальная вычислимая  $f$  такая, что область её значений равна  $P$ .

**Определение.** Функция

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1, & x \in P, \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества  $P$ . Функция  $\pi_P$ , которая равна 1 на элементах  $P$  и неопределена вне  $P$ , называется *полухарактеристической*.

**Определение.** Множество  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  *разрешимо*, если его характеристическая функция вычислима, то есть алгоритм, способный проверить произвольный вход из  $\mathbb{N}^k$  на принадлежность  $P$ .

**Определение.** Множество  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  *полуразрешимо*, если его полухарактеристическая функция вычислима, то есть алгоритм, способный проверить вход из  $\mathbb{N}^k$  на принадлежность  $P$ .

**Задача ТА2.3°.** Приведите пример перечислимого, но не разрешимого множества.

**Задача ТА2.4.** Проверьте разрешимость множеств:

1. всех четных чисел;
2. всех простых чисел;
3. данного конечного множества;
4. множества всех решений  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  уравнения  $x^2 - y^2 > 5$ .

**Задача ТА2.5.** Проверьте полуразрешимость множеств:

1. каждого разрешимого множества;
2. всех пар простых чисел близнецов;
3. множества всех чисел, представимых в виде суммы квадратов попарно различных нечетных чисел;
4. множества тех  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{N}^5$ , для которых уравнение  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 = 0$  имеет решение в целых числах.

**Задача ТА2.6★.** Пользуясь определением перечислимого множества проверить перечислимость множеств из задачи ТА2.5.

**Задача ТА2.7.** Доказать исходя из определений:

1. если  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  разрешимы, то  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\neg A$  также разрешимы.
2. если  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  полуразрешимы, то  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  также полуразрешимы.
3. если  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  перечислимы, то  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  также перечислимы.

**Задача ТА2.8 (Теорема Поста).** а. Докажите, что множество  $A \subseteq \mathbb{N}$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $A$  и его дополнение полуразрешимы. б°. Докажите, что  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  — разрешимо тогда и только тогда, когда  $P$  и  $\mathbb{N}^k \setminus P$  одновременно перечислимы.

**Задача ТА2.9.** Доказать, что для каждого полуразрешимого множества  $A$  существует программа, которая работает вечно, время от времени посылая в выходной поток натуральные числа  $a \in A$  таким образом, что каждый элемент  $A$  когда-нибудь в нем появится.

**Задача ТА2.10.** Доказать, что класс всех полуразрешимых подмножеств  $\mathbb{N}$  совпадает совпа-

дает с классом всех перечислимых подмножеств  $\mathbb{N}^*$ .

**Задача ТА2.11.** Доказать, что

1. Проекция перечислимого множества  $R \in \mathbb{N}^2$  на первую координату является перечислимым множеством.
2. Каждое полуразрешимое множество может быть получено как проекция некоторого разрешимого множества.
3. Получить в качестве следствия из **а.,б.**, что каждое полуразрешимое множество перечислимо.

**Задача ТА2.12° (Теорема о графике).** Докажите, что функция  $f$  вычислима тогда и только тогда, когда её график  $\Gamma_f = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$  перечислим.

**Задача ТА2.13. а.** Доказать, что у тотальной вычислимой функции  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  график  $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in \text{Dom } f\}$  разрешим. **б.** Построить пример нетотальной вычислимой функции  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  с разрешимым графиком.

**Задача ТА2.14 (Теорема об униформизации).** Доказать, что каждое перечислимое подмножество  $A \subseteq \mathbb{N}^2$  содержит в себе график некоторой вычислимой функции  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , определенной во всех точках проекции множества  $A$  на первую координату.

---

\*Подсказка: посмотрите на одну из соседних задач