Языки первого порядка

Определение. *Сигнатура* $\Sigma = (Cnst, F_n, Pr)$ — это тройка множеств: фиксированный набор констант, функциональных символов и предикатных символов. Она определяет *язык первого порядка (элементарный язык)* сигнатуры Σ. Синтаксис языка содержит определения правильно построенных выражений двух сортов — термов и формул. Термы делаются из переменных $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$ и функциональных констант. Формулы делаются подстановкой термов в предикаты, при попомщи связок $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Задача Я1.1. Сигнатура содержит двухместные $=$, $\in$, $\perp$. Констант нет. Носитель интерпретации M — все точки и прямые на плоскости. Предикатные символы интерпретируются равенством, принадлежностью (точка лежит на прямой) и перпендикулярностью (прямых). Выразить:

1. «x — точка», «x — прямая».
2. «Прямые x и y параллельны».
3. «x, y, z — вершины (невырожденного) треугольника».
4. «Высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке».
5. «Точки x, y, z, t являются последовательными вершинами параллелограмма».
6. «Точка z делит отрезок x, y пополам».

Задача Я1.2*(Язык арифметики).* На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x,y,z) =$ «$x + y = z$», $P(x,y,z) =$ «$x \cdot y = z$». На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

1. формулы с одной свободной переменной a, истинные тогда и только тогда, когда $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, a — чётное число, a — нечётное число;
2. формулы с двумя свободными переменными a и b, истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a \leqslant b$, a делит b;
3. формулы с тремя свободными переменными a, b и c, истинные тогда и только тогда, когда a — наименьшее общее кратное чисел b и c, a — наибольший общий делитель чисел b и c.

Задача Я1.3. Доказать выразимость в стандартной интерпретации языка арифметики условия «$y = 2x$».

Задача Я1.4*(Техника доказательства невыразимости).* Доказать, что если отношение не сохраняется при некотором автоморфизме модели, то оно невыразимо*.

Задача Я1.5. Выразимы ли следующие отношения?

1. $a = b$, $b = a + 1$, $c = a + b$ в $(\mathbb{Z}, <)$.
2. $a = 0$, $a = b$, $a < b$ в $(\mathbb{Z}, a + b = c)$.
3. $a = b, a = 1, a = 3$ в $(\mathbb{N}, a \vdots b)$, где $a \vdots b \Leftrightarrow \exists k \quad a = k \cdot b$.
4. $a = b, |a - b| = 2$ в $(\mathbb{R}, |a - b| = 1)$.
5. $a < b, a = 0, a = 1, a = 2$ в $(\mathbb{N}, a + b = c)$.
6. «a — простое число» в $(\mathbb{N}, a \vdots b)$.

Задача Я1.6. Выразимы ли следующие отношения?

(а) $a = 1, a = 2$ в $(\mathbb{Z}, a + b = c)$.
(б) $a = 0$ в $(\mathbb{Z}, a = b + 1)$.
(в) $a = b + 1$ в $(\mathbb{Z}, a = b + 2)$.
(г) $a = b + 1$ в $(\mathbb{Z}, |a - b| = 1)$.
(д) $|a - b| = 3$ в $(\mathbb{R}, |a - b| = 1)$.

Определение*Семантика.* Выбираем множество $M \neq \varnothing$ (*носитель*) и интерпретацию I

** Автоморфизм* — это биекция носителя на себя, сохраняющая все сигнатурные операции, отношения и константы.

сигнатуры Σ в M:

$$c \in Cnst \mapsto \bar{c} \in M, f^n \in Fn \mapsto \bar{f}\colon M^n \to M, P^n \in Pr \mapsto \bar{P} \subseteq M^n.$$

[†] Каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) элементы, операции и отношения на множестве M. Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение: $I \models \varphi$).
Определение. Замкнутая формула называется *выполнимой*, если существует интерпретация, в которой она истинна. *Общезначимость* означает истинность во всех интерпретациях.
Задача Я1.7. Исследовать на выполнимость и общезначимость:
1. $\exists x \quad P(x,x)$;
2. $(\forall x \quad P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x \quad P(x)) \vee (\forall x \quad Q(x))$;
3. $(\forall x \quad P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x \quad P(x)) \vee (\exists x \quad Q(x))$;
4. $(\exists x \quad \forall y \quad \exists z \quad P(x,y,z)) \to (\forall x \quad \exists y \quad P(x,y,y))$;
5. $(\exists y \quad \forall x \quad P(x,y,y)) \to (\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad P(x,y,z))$;

Задача Я1.8. Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:

$$(\forall x \quad \exists y \quad Q(x,y)) \wedge (\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad \neg Q(x,x) \wedge (Q(x,y) \to (Q(y,z) \to Q(x,z)))).$$

Задача Я1.9. Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трехэлементным носителем:

$$(\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad R(x,x) \wedge (R(x,z) \to R(x,y) \vee R(y,z))) \to (\exists x \quad \forall y \quad R(x,y)).$$

[†]Предикат $P\colon M^n \to \{\top, \bot\}$ отождествлен с его областью истинности $\bar{P} \subseteq M^n$.