Нумерация

Определение. Символом $\simeq$ обозначим следующее отношение:

$$a \simeq b = \begin{cases} \top, (Defined(a) \wedge Defined(b) \wedge a = b) \vee (\neg Defined(a) \wedge \neg Defined(b)), \\ \bot, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Для дальнейших результатов нам понадобится пронумеровать все вычислимые функции в виде φ_i^m так, что верно следующее:

1. Для любого $m \in \mathbb{N}$ верно, что $\varphi_i^m \colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$.
2. При фиксированном m *универсальная* функция

$$u^m(i, x_1, \ldots, x_m) \simeq \varphi_i^m(x_1, \ldots, x_m)$$

   вычислима.
3. Нумерация выдерживает *обощённое каррирование*: для всех $m, n \geqslant 1$ существует тотальная вычислимая функция $s \colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ такая, что при всех $k, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_k^{m+n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \simeq \varphi_{s(k,\vec{x})}^n(\vec{y}).$$

Задача ТА3.1. **а.** Докажите, что множество всех вычислимых функций m-арных функций φ_i перечислимо. **б.** Докажите, что множество всех вычислимых функций перечислимо.
Задача ТА3.2. Докажите, что требуемая нумерация существует.
Задача ТА3.3. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ такая, что $\varphi_{h(i,j)}^1(x) \simeq \varphi_i^1(x) + \varphi_j^1(x)$.
Задача ТА3.4. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ такая, что $\varphi_{h(i,j)}^1(x) \simeq \varphi_i^1(\varphi_j^1(x))$.
Задача ТА3.5. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ такая, что $\varphi_{h(i,j,k)}^1(x) \simeq \varphi_k^1(x) ? \varphi_i^1(x) : \varphi_j^1(x)$ (условная операция в C).
Задача ТА3.6. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\begin{aligned} \varphi_{h(i,j)}^1(x) \simeq \{ & \\ & while(\varphi_i^1(x) > 0) \;\; x = \varphi_j^1(x); \\ & return\ x; \\ \} & \end{aligned}$$

Задача ТА3.7 ***(Свойство главности нумерации φ_i^1).*** Пусть у нумерации $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots$ некоторого семейства вычислимых функций универсальная функция $v(i,x) \simeq \psi_i(x)$ вычислима*. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция h такая, что $\psi_i(x) \simeq \varphi_{h(i)}^1(x)$.
Задача ТА3.8. Пусть $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ фиксированная вычислимая функция, ζ — нигде не определенная функция, $A \subseteq \mathbb{N}$ — перечислимое множество. Доказать, что существует тотальная вычислимая функция h такая, что

$$\varphi_{h(i)}^1 = \{ g, i \in A, \zeta, \quad i \ni A.$$

Задача ТА3.9. Говорят, что множество $A \subset \mathbb{N}^k$ *m-сводится* к множеству $B \subset \mathbb{N}^l$ (обозначается $A \leqslant_m B$), если существует тотальная вычислимая функция $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Доказать, что

*такие нумерации называются *вычислимыми*

1. отношение $\leqslant_m$ рефлексивно и транзитивно;
2. если $A \leqslant_m B$ и B разрешимо (перечислимо), то A тоже разрешимо (перечислимо).

Задача ТА3.10. Доказать, что каждое перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ m-сводится к множествам:

1. $\{i \mid \varphi_i^1(i)\}$;
2. $\{i \mid \varphi_i^1(5) = 25\}$;
3. $\{i \mid \varphi_i^1(i) = 99\}$;
4. $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{тотальна}\}$.

Задача ТА3.11. Доказать, что каждое коперечислимое множество m-сводится к $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{нигде не определена}\}$.

Негативные результаты

Задача ТА3.12. а.[†] Доказать, что функция $f(x) \simeq \varphi_x^1(x) + 1$ вычислима, но не имеет вычислимых тотальных продолжений. **б.** Доказать, что множество $K = \{x \mid \varphi_x^1(x) \quad \text{определена}\}$ перечислимо, но не разрешимо. **в.** Доказать, что множество $STOP = \{(i, x) \mid \varphi_i^1(x) \quad \text{определена}\}$ перечислимо, но не разрешимо.

Задача ТА3.13. а. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 179, \varphi_x^1(x) = 57 \\ 57, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

не вычислима. **б.** Доказать, что множество $\{x \mid \varphi_x^1(x) = 179\}$ перечислимо, но не разрешимо.

Задача ТА3.14. Пусть фиксирована машина Тьюринга M вычисления универсальной функции $u^1(i, x)$ и $T_M(i, x)$ — время (число шагов) ее работы на входе i, x.

1. Проверить, что функция T вычислима;
2. Проверить, что ($T(i, x)$ — определено) $\Leftrightarrow$ ($_i(x)$ — определено);
3. Проверить, что $\{(i, x, t) \mid T(i, x) \leqslant t\}$ — разрешимо.
4. Пусть $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотальная вычислимая функция. Доказать, что тотальная функция

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x^1(x) + 1, T(i, x) \leqslant h(x) \\ \qquad 0. \end{cases}$$

вычислима, но не вычислима за время h, т.е. $\forall i \quad \exists x \quad f = \varphi_i \to T(i, x) > h(x)$.

5. Построить тотальную вычислимую функцию со значениями $\{0, 1\}$, которая также не вычислима за время h.

Задача ТА3.15 *(Теорема Райса).* Пусть $\mathcal{P}$ — семейство одноместных вычислимых функций, $\mathcal{P} \neq \varnothing$ и существует одноместная вычислимая функция $f \notin \mathcal{P}$. Доказать, что его индексное множество $\{i \mid \varphi_i^1 \in \mathcal{P}\}$ неразрешимо.

Задача ТА3.16. Доказать неразрешимость множеств:

1. $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{тотальна}\}$;
2. $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{нигде не определена}\}$;
3. $\{i \mid \varphi_i^1(5) = 25\}$;
4. $\{i \mid \varphi_i^1(5) \quad \text{определено}\}$;
5. $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{монотонна}\}$;
6. $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{тотальна}\}$;

Задача ТА3.17. Доказать неперечислимость множеств:

1. $\{i \mid \varphi_i^1(5) \quad \text{не определено}\}$;

[†]Подсказка: попытатьс найти значение $g(k)$, где g — кандидат на продолжение, а k — его номер

2. $\{i \mid \varphi_i^1(5) \quad \text{не определено или} \neq 25\}$;
3. $\{i \mid \varphi_i^1 \quad \text{не принимает значений} > 25\}$;
4. $\{i \mid \neg(\exists x \quad \varphi_i^1(x) = x)\}$;

Задача ТА3.18. Доказать неразрешимость множеств:

1. $\{(i,j) \mid \varphi_i^1 \quad \text{есть продолжение } \varphi_j^1\}$;
2. $\{(i,j) \mid \mathrm{Dom}(\varphi_i^1) \cup \mathrm{Dom}(\varphi_j^1) = \mathbb{N}\}$;
3. $\{(i,j) \mid \mathrm{Dom}(\varphi_i^1) \cap \mathrm{Dom}(\varphi_j^1) = \varnothing\}$;
4. $\{(i,j) \mid \varphi_i^1, \varphi_j^1 \quad \text{тотальны и } \forall x \quad \varphi_i^1(x) = 2\varphi_j^1(x)\}$;