Вычислимость

Определение. $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^s$ *вычислима*, если существует машина Тьюринга, на любом входе $(n_1, \ldots, n_k)$ вычисляющая $m = f(n_1, \ldots, n_k)$. Функция f может быть *частичной*, если $\mathrm{Dom}(f) \subsetneq \mathbb{N}^k$; тогда на остальных входах машина Тьюринга зацикливается.

Определение. Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ *перечислимо*, если существует вычислимая функция f такая, что область её определения равна P.

Задача Г0.1. Докажите, что $P \subseteq \mathbb{N}^k$ перечислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая f такая, что область её значений равна P.

Задача Г0.2. Докажите, что $\varnothing \neq P \subseteq \mathbb{N}^k$ перечислимо тогда и только тогда, когда существует тотальная вычислимая f такая, что область её значений равна P.

Задача Г0.3 (Теорема о графике). Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её график $\Gamma_f = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$ перечислим.

Определение. Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ *разрешимо*, если её характеристическая функция вычислима, то есть алгоритм, способный проверить произвольный вход из $\mathbb{N}^k$ на принадлежность P.

Задача Г0.4. Приведите пример перечислимого, но не разрешимого множества.

Задача Г0.5 (Теорема Поста). Докажите, что $P \subseteq \mathbb{N}^k$ — разрешимо тогда и только тогда, когда P и $\mathbb{N}^k \setminus P$ одновременно перечислимы.