

Теоремы Гёделя

Определение. Введём предикат *доказуемости* в арифметике

$$\text{Pr}(x) = \exists y \quad \text{Prf}(y, x).$$

Теорема Г5.1 (Первая теорема Гёделя о неполноте). *Существует замкнутая формула φ такая, что $\mathbb{N} \models \varphi$, $\text{PA} \not\vdash \varphi$.*

Задача Г5.1 (Лемма о неподвижной точке). Пусть $\psi(x_i)$ — формула с единственной свободной переменной x_i . Докажите*, что найдётся такая арифметическая замкнутая формула φ , что

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi([\varphi]).$$

Задача Г5.2. Применив лемму о неподвижной точке к $\neg \text{Pr}$ докажите первую теорему Гёделя.

Определение. Рассмотрим формулу непротиворечивости арифметики Пеанно

$$\text{Consis} = \neg \text{Pr}([0 = 1])$$

Введём обозначения: $\perp = (0 = 1)$, $\Box\psi = \text{Pr}([\psi])$. Следующие теоремы доказываются одна за другой.

Теорема Г5.2 (Гильберт, Бернайс, Гёдель, Леб). *Для любых замкнутых φ , ψ верно, что*

$$\begin{aligned} \text{PA} \vdash \varphi &\Rightarrow \text{PA} \vdash \Box\varphi \\ \text{PA} \vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \\ \text{PA} \vdash \Box\varphi &\rightarrow \Box\Box\varphi \end{aligned}$$

Теорема Г5.3 (Вторая теорема Гёделя о неполноте).

$$\text{PA} \not\vdash \text{Consis}.$$

Теорема Г5.4 (Леб). *Если $\text{PA} \vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$, то $\text{PA} \vdash \varphi$.*

Теорема Г5.5 (Тарского). *Не существует формулы $T(x)$ такой, что для всех замкнутых формул φ*

$$\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models T([\varphi]).$$

Эквивалентная формулировка: одноместный предикат « x есть гёделев номер формулы, истинной в \mathbb{N} » не является арифметическим.

Теорема Г5.6. Q и PA неразрешимы.

Теорема Г5.7. *Исчисление предикатов в сигнатуре арифметики неразрешимо.*

*Ответ: $\theta(x) = \psi(\text{Sub}(x, i, x))$, $m = [\theta]$, $\varphi = \theta(\underline{m})$