Арифметическая иерархия

Будем рассматривать арифметику PA$(+,\cdot,0,S,=,\leqslant)$, где $x \leqslant y \leftrightarrow \exists z \quad x+z=y$. Введём два обозначения

$$\forall x \leqslant t \quad \varphi(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \quad (x \leqslant t \to \varphi(x)),$$
$$\exists x \leqslant t \quad \varphi(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists x \quad (x \leqslant t \& \varphi(x)),$$

где x не входит в t.

Определение. Класс Δ_0 содержит все *ограниченные формулы*, то есть такие все вхождения кванторов в которые ограничены.

Задача Г2.1. Докажите, что если $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$, который по параметрам $\vec{n}$ проверяет PA $\models \varphi(\vec{x})$.

Определение. Определим Σ_n, Π_n: $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$, $\Sigma_{n+1} = \{\exists x \quad \varphi(x,y) \mid \varphi \in \Pi_n\}$, $\Pi_{n+1} = \{\forall x \quad \varphi(x,y) \mid \varphi \in \Sigma_n\}$,

Определение. Будем говорить, что предикат $P \subseteq \mathbb{N}^k$ лежит в Σ_n (Π_n), если его можно определить формулой $\Sigma_n(\Pi_n)$-формулой. P принадлежит Δ_n, если он принадлежит и Σ_n, и Π_n.

Задача Г2.2. Докажите, что классы Σ_n- и Π_n-предикатов замкнуты относительно ограниченных кванторов.

Задача Г2.3. Докажите, что Σ_n замкнуты относительно квантора существования, а Π_n — всеобщности.

Задача Г2.4. Докажите, что классы Σ_n- и Π_n-предикатов замкнуты относительно объединения, пересечения и дополнения.

Задача Г2.5. Докажите, что любая арифметическая формула[1] эквивалентна некоторой формуле из Σ_n.

Теорема Г2.1. *Предикат $P \subseteq \mathbb{N}^k$ является Σ_1-определимым в том и только в том случае, когда P перечислим*[2].

Задача Г2.6 (Легкая стрелка теоремы). Докажите, что Σ_1-предикаты перечислимы.

Для доказательства обратной стрелки нам понадобится следующий неформальный тезис Чёрча:

Всякая вычислимая функция является частично рекурсивной.

Задача Г2.7. Докажите, что график любой рекурсивной функции Σ_1-определим.

Задача Г2.8. Покажите, что из предыдущей задачи следует обратная стрелка теоремы.

[1] формула арифметики PA

[2] Существует машина Тьюринга, выводящая только элементы P по одному