

Кодирование

Наша цель была научиться говорить о выводимости в РА языком арифметики. В прошлом листке мы поняли, что рекурсивные функции могут быть хорошим подспорьем в этом деле. Осталось эту возможность реализовать.

Пусть Σ не более чем счётная сигнатура, содержащая функциональные символы $\{f_i^n\}$, предикатные символы $\{R_i^n\}$, переменные v_0, v_1, \dots . Например, положим $=$ как R_0^2 , 0 как f_0^0 , S есть f_0^1 и так далее. Наша цель приписать гёделевы номера объектам языка, чтобы разным объектам соответствовали разные натуральные числа, а смысл слова мог бы определяться примитивно-рекурсивным образом. Обозначив гёделев номер объекта A как $[A]$, распределим номера, скажем, так:

$$[v_i] := \langle 1, i \rangle, [f_i^n] := \langle 2, \langle n, i \rangle \rangle, [R_i^n] := \langle 3, \langle n, i \rangle \rangle, [\neg] := \langle 4, 0 \rangle, [\rightarrow] := \langle 4, 1 \rangle, [\forall] := \langle 4, 3 \rangle.$$

Задача ГЗ.1. Объясняет почему квантору существования и остальным логическим связкам не нужны отдельные гёделевы номера.

Дальше можно этот язык расширить на более сложные конструкции, например: $[(A \rightarrow B)] = \langle [\rightarrow], [A], [B] \rangle$, $[\forall v_i A] = \langle [\forall], [v_i], [A] \rangle$.

Задача ГЗ.2. Докажите, что $\text{Tm}(x) = \langle x \text{ есть гёделев номер терма} \rangle$ является примитивно рекурсивной.

Задача ГЗ.3. Докажите, что $\text{AtFm}(x) = \langle x \text{ есть гёделев номер атомарной формулы} \rangle$ является примитивно рекурсивной.

Задача ГЗ.4. Докажите, что $\text{Fm}(x) = \langle x \text{ есть гёделев номер формулы} \rangle$ является примитивно рекурсивной.

Определение. Нумерал \underline{n} — это терм $\underbrace{S(\dots S(0) \dots)}_n$

Задача ГЗ.5. Покажите, что $\text{nm}(x) := [\underline{x}]$ и $\text{Num}(x) = \langle x \text{ есть гёделев номер нумерала} \rangle$ примитивно рекурсивны.

Задача ГЗ.6. Докажите, что $\text{Sub}(x, i, y) = \langle \text{результат подстановки в } x \text{ выражения } y \text{ вместо свободных вхождений переменной } v_i \rangle$ является примитивно рекурсивной. Другими словами, если $x = [\varphi]$, то выполняется $\text{Sub}([\varphi], i, [t]) = [\varphi[v_i/t]]$.

Задача ГЗ.7. Докажите, что $\text{Free}(x, y) = \langle x \text{ есть гёделев номер переменной, имеющей свободное вхождение в выражение с номером } y \rangle$ является примитивно рекурсивной.

Задача ГЗ.8. Покажите, что следующие предикаты примитивно рекурсивны $\langle x \text{ есть код подформулы формулы с кодом } y \rangle$, $\langle t \text{ подстановочен в } \varphi \text{ вместо свободного вхождения переменной } v_i \rangle$,

Определение. Пусть $\text{Ax}_i(x) = \langle x \text{ есть код применения } i\text{-ой аксиомы Cl} \rangle$, $\text{Log}(x) = \bigvee \text{Ax}_i(x)$, $\text{MP}(x, y, z) = (y = \langle [\rightarrow], x, z \rangle \& x, y, z \in \text{Fm})$ (выводимость по modus ponens),

$$\begin{aligned} \text{B1}(x, y) = & (x, y \in \text{Fm}) \& (\exists A, a, B, v \ (x = \langle A, [\rightarrow], \text{Sub}(B, a, v) \rangle \& \\ & \& (y = \langle A, [\rightarrow], [\forall] \quad , v, B \rangle) \& (A, B \in \text{Fm}) \& v \in \text{Var} \& \text{Tm}(a)) \end{aligned}$$

(1)

$\text{Gen}(x, i, y) = (y = \langle [\forall], [v_i], x \rangle)$ (применение квантора всеобщности).

Задача ГЗ.9. Покажите, что Ax_i , Log , MP , Gen являются примитивно рекурсивными.

Задача ГЗ.10. Докажите, что $\text{Prf}(x, y) = \langle x \text{ есть вывод } y \text{ в языке предикатов} \rangle$ является примитивно рекурсивной.