Кодирование

Наша цель была научиться говорить о выводимости в PA языком арифметики. В прошлом листке мы поняли, что рекурсивные функции могут быть хорошим подспорьем в этом деле. Осталось эту возможность реализовать.

Пусть Σ не более чем счётная сигнатура, содержащая функциональные символы $\{f_i^n\}$, предикатные символы $\{R_i^n\}$, переменные $v_0, v_1, \ldots$ Например, положим $=$ как R_0^2, 0 как f_0^0, S есть f_0^1 и так далее. Наша цель приписать гёделевы номера объектам языка, чтобы разным объектам соответствовали разные натуральные числа, а смысл слова мог бы определяться примитивно-рекурсивным образом. Обозначив гёделев номер объекта A как $\lceil A \rceil$, распределим номера, скажем, так:

$$\lceil v_i \rceil \coloneqq \langle 1, i\rangle, \lceil f_i^n \rceil \coloneqq \langle 2, \langle n, i\rangle\rangle, \lceil R_i^n \rceil \coloneqq \langle 3, \langle n, i\rangle\rangle, \lceil \neg \rceil \coloneqq \langle 4, 0\rangle, \lceil \to \rceil \coloneqq \langle 4, 1\rangle, \lceil \forall \rceil \coloneqq \langle 4, 3\rangle.$$

Задача Г3.1. Объясняет почему квантору существования и остальным логическим связкам не нужны отдельные гёделевые номера.

Дальше можно этот язык расширить на более сложные конструкции, например: $\lceil (A \to B) \rceil = \langle \lceil \to \rceil, \lceil A \rceil, \lceil B \rceil \rangle$, $\lceil \forall v_i \quad A \rceil = \langle \lceil \forall \rceil, \lceil v_i \rceil, \lceil A \rceil \rangle$.

Задача Г3.2. Докажите, что $\mathrm{Tm}(x)$ = «x есть гёделев номер терма» является примитивно рекурсивной.

Задача Г3.3. Докажите, что $\mathrm{AtFm}(x)$ = «x есть гёделев номер атомарной формулы» является примитивно рекурсивной.

Задача Г3.4. Докажите, что $\mathrm{Fm}(x)$ = «x есть гёделев номер формулы» является примитивно рекурсивной.

Определение. *Нумерал* $\underline{n}$ — это терм $\underbrace{S(\ldots S(0)\ldots)}_{n}$

Задача Г3.5. Покажите, что $nm(x) \coloneqq \lceil \underline{x} \rceil$ и $\mathrm{Num}(x)$ = «x есть гёделев номер нумерала» примитивно рекурсивны.

Задача Г3.6. Докажите, что $\mathrm{Sub}(x, i, y)$ = «результат подстановки в x выражения y вместо свободных вхождений переменной v_i» является примитивно рекурсивной. Другими словами, если $x = \lceil \varphi \rceil$, то выполняется $\mathrm{Sub}(\lceil \varphi \rceil, i, \lceil t \rceil) = \lceil \varphi[v_i/t] \rceil$.

Задача Г3.7. Докажите, что $\mathrm{Free}(x, y)$ = «x есть гёделев номер переменной, имеющей свободное вхождение в выражение с номером y» является примитивно рекурсивной.

Задача Г3.8. Покажите, что следующие предикаты примитивно рекурсивны «x есть код подформулы формулы с кодом y», «t подстановочен в φ вместо свободного вхождения переменной v_i»,

Определение. Пусть $\mathrm{Ax}_i(x)$ = «x есть код применения i-ой аксиомы Cl», $\mathrm{Log}(x) = \bigvee \mathrm{Ax}_i(x)$, $\mathrm{MP}(x, y, z) = (y = \langle \lceil \to \rceil, x, z\rangle \& x, y, z \in \mathrm{Fm})$ (выводимость по modus ponens),

$$\begin{aligned} \mathrm{B1}(x, y) = (x, y \in \mathrm{Fm}) \& (\exists A, a, B, v \quad (x = \langle A, \lceil \to \rceil, \mathrm{Sub}(B, a, v)) \& \\ \& (y = \langle A, \lceil \to \rceil, \lceil \forall \rceil \quad , v, B\rangle) \& (A, B \in \mathrm{Fm}) \& v \in \mathrm{Var} \& \mathrm{Tm}(a)) \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathrm{Gen}(x, i, y) = (y = \langle \lceil \forall \rceil, \lceil v_i \rceil, x\rangle)$ (применение квантора всеобщности).

Задача Г3.9. Покажите, что Ax_i, Log, MP, Gen являются примитивно рекурсивными.

Задача Г3.10. Докажите, что $\mathrm{Prf}(x, y)$ = «x есть вывод y в языке предикатов» является примитивно рекурсивной.