

## Языки первого порядка

**Определение.** Сигнатура  $\Sigma = (Cnst, F_n, Pr)$  — это тройка множеств: фиксированный набор констант, функциональных символов и предикатных символов. Она определяет язык первого порядка (элементарный язык) сигнатуры  $\Sigma$ . Синтаксис языка содержит определения правильно построенных выражений двух сортов — термов и формул. Термы делаются из переменных  $Var = \{x_0, x_1, \dots\}$  и функциональных констант. Формулы делаются подстановкой термов в предикаты, при помощи связок  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  и кванторов  $\forall, \exists$ .

**Задача Я1.1.** Сигнатура содержит двухместные  $=, \in, \perp$ . Констант нет. Носитель интерпретации  $M$  — все точки и прямые на плоскости. Предикатные символы интерпретируются равенством, принадлежностью (точка лежит на прямой) и перпендикулярностью (прямых). Выразить:

- а. « $x$  — точка», « $x$  — прямая».
- б. «Прямые  $x$  и  $y$  параллельны».
- в. « $x, y, z$  — вершины (невырожденного) треугольника».
- г. «Высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке».
- д. «Точки  $x, y, z, t$  являются последовательными вершинами параллелограмма».
- е. «Точка  $z$  делит отрезок  $x, y$  пополам».

**Задача Я1.2 (Язык арифметики).** На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты  $S(x, y, z) = \langle x + y = z \rangle$ ,  $P(x, y, z) = \langle x \cdot y = z \rangle$ . На языке первого порядка с предикатными символами  $S, P$  записать:

- а. формулы с одной свободной переменной  $a$ , истинные тогда и только тогда, когда  $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = 2$ ,  $a$  — чётное число,  $a$  — нечётное число;
- б. формулы с двумя свободными переменными  $a$  и  $b$ , истинные тогда и только тогда, когда  $a = b$ ,  $a \leq b$ ,  $a$  делит  $b$ ;
- в. формулы с тремя свободными переменными  $a, b$  и  $c$ , истинные тогда и только тогда, когда  $a$  — наименьшее общее кратное чисел  $b$  и  $c$ ,  $a$  — наибольший общий делитель чисел  $b$  и  $c$ .

**Задача Я1.3.** Доказать выразимость в стандартной интерпретации языка арифметики условия « $y = 2x$ ».

**Задача Я1.4 (Техника доказательства невыразимости).** Доказать, что если отношение не сохраняется при некотором автоморфизме модели, то оно невыразимо\*.

**Задача Я1.5.** Выразимы ли следующие отношения?

- а.  $a = b, b = a + 1, c = a + b$  в  $(\mathbb{Z}, <)$ .
- б.  $a = 0, a = b, a < b$  в  $(\mathbb{Z}, a + b = c)$ .
- в.  $a = b, a = 1, a = 3$  в  $(\mathbb{N}, a : b)$ , где  $a : b \Leftrightarrow \exists k \quad a = k \cdot b$ .
- г.  $a = b, |a - b| = 2$  в  $(\mathbb{R}, |a - b| = 1)$ .
- д.  $a < b, a = 0, a = 1, a = 2$  в  $(\mathbb{N}, a + b = c)$ .
- е. « $a$  — простое число» в  $(\mathbb{N}, a : b)$ .

**Задача Я1.6.** Выразимы ли следующие отношения?

---

\* Автоморфизм — это биекция носителя на себя, сохраняющая все сигнатурные операции, отношения и константы.

а.  $a = 1, a = 2$  в  $(\mathbb{Z}, a + b = c)$ .

б.  $a = 0$  в  $(\mathbb{Z}, a = b + 1)$ .

в.  $a = b + 1$  в  $(\mathbb{Z}, a = b + 2)$ .

г.  $a = b + 1$  в  $(\mathbb{Z}, |a - b| = 1)$ .

д.  $|a - b| = 3$  в  $(\mathbb{R}, |a - b| = 1)$ .

**Определение** (Семантика). Выбираем множество  $M \neq \emptyset$  (*носитель*) и интерпретацию  $I$  сигнатуры  $\Sigma$  в  $M$ :

$$c \in Cnst \mapsto \bar{c} \in M, f^n \in Fn \mapsto \bar{f}: M^n \rightarrow M, P^n \in Pr \mapsto \bar{P} \subseteq M^n.$$

<sup>†</sup> Каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) элементы, операции и отношения на множестве  $M$ . Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение:  $I \models \varphi$ ).

**Определение.** Замкнутая формула называется *выполнимой*, если существует интерпретация, в которой она истинна. *Общезначимость* означает истинность во всех интерпретациях.

**Задача Я1.7.** Исследовать на выполнимость и общезначимость:

а.  $\exists x \ P(x, x)$ ;

б.  $(\forall x \ P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x \ P(x)) \vee (\forall x \ Q(x))$ ;

в.  $(\forall x \ P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x \ P(x)) \vee (\exists x \ Q(x))$ ;

г.  $(\exists x \ \forall y \ \exists z \ P(x, y, z)) \rightarrow (\forall x \ \exists y \ P(x, y, y))$ ;

д.  $(\exists y \ \forall x \ P(x, y, y)) \rightarrow (\forall x \ \exists y \ \forall z \ P(x, y, z))$ ;

**Задача Я1.8.** Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:

$$(\forall x \ \exists y \ Q(x, y)) \wedge (\forall x \ \forall y \ \forall z \ \neg Q(x, x) \wedge (Q(x, y) \rightarrow (Q(y, z) \rightarrow Q(x, z)))).$$

**Задача Я1.9.** Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трех-элементным носителем:

$$(\forall x \ \forall y \ \forall z \ R(x, x) \wedge (R(x, z) \rightarrow R(x, y) \vee R(y, z))) \rightarrow (\exists x \ \forall y \ R(x, y)).$$

<sup>†</sup>Предикат  $P: M^n \rightarrow \{\top, \perp\}$  отождествлен с его областью истинности  $\bar{P} \subseteq M^n$ .