

## Арифметическая иерархия

Будем рассматривать арифметику  $PA(0, S, =, \leq)$ , где  $x \leq y \leftrightarrow \exists z \quad x + z = y$ . Введём два обозначения

$$\begin{aligned}\forall x \leq t \quad \varphi(x) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \quad (x \leq t \rightarrow \varphi(x)), \\ \exists x \leq t \quad \varphi(x) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x \quad (x \leq t \& \varphi(x)),\end{aligned}$$

где  $x$  не входит в  $t$ .

**Определение.** Класс  $\Delta_0$  содержит все *ограниченные формулы*, то есть такие, что все вхождения кванторов в которые ограничены.

**Задача Г2.1.** Докажите, что если  $\varphi(\vec{x}) \in \Delta_0$ , то существует алгоритм, который по параметрам  $\vec{n}$  проверяет  $PA \models \varphi(\vec{n})$ .

**Определение.** Определим  $\Sigma_n, \Pi_n$ :  $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ ,  $\Sigma_{n+1} = \{\exists x \quad \varphi(x, y) \mid \varphi \in \Pi_n\}$ ,  $\Pi_{n+1} = \{\forall x \quad \varphi(x, y) \mid \varphi \in \Sigma_n\}$ ,

**Определение.** Будем говорить, что предикат  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  лежит в  $\Sigma_n$  ( $\Pi_n$ ), если его можно определить формулой  $\Sigma_n$  ( $\Pi_n$ )-формулой.  $P$  принадлежит  $\Delta_n$ , если он принадлежит и  $\Sigma_n$ , и  $\Pi_n$ .

**Задача Г2.2.** Докажите, что классы  $\Sigma_n$ - и  $\Pi_n$ -предикатов замкнуты относительно ограниченных кванторов.

**Задача Г2.3.** Докажите, что  $\Sigma_n$  замкнуты относительно квантора существования, а  $\Pi_n$  — всеобщности.

**Задача Г2.4.** Докажите, что классы  $\Sigma_n$ - и  $\Pi_n$ -предикатов замкнуты относительно объединения, пересечения и дополнения.

**Задача Г2.5.** Докажите, что любая арифметическая формула\* эквивалентна некоторой формуле из  $\Sigma_n$ .

**Теорема Г2.1.** Предикат  $P \subseteq \mathbb{N}^k$  является  $\Sigma_1$ -определимым в том и только в том случае, когда  $P$  перечислим†.

**Задача Г2.6 (Тогдасть).** Докажите, что  $\Sigma_1$ -предикаты перечислимы.

Для доказательства обратной стрелки нам понадобится следующий неформальный тезис Чёрча:

*Всякая вычислимая функция является частично рекурсивной.*

**Задача Г2.7.** Докажите, что график любой рекурсивной функции  $\Sigma_1$ -определим.

**Задача Г2.8 (Только тогдасть).** Покажите, что из предыдущей задачи следует обратная стрелка теоремы.

---

\*формула арифметики PA

†Существует машина Тьюринга, выводящая только элементы  $P$  по одному