# *Рекурсивные функции*

**Определение.** Определим по индукции класс *примитивно рекурсивных функций* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Объявим $z(x) = 0$, $S(x) = x + 1$ и $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ примитивно рекурсивными. Если $f, g_1, \ldots, g_n$ — примитивно рекурсивные, то их *композиция* $h(\vec{x}) \equiv f(g_1(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x}))$ такова. Так же имеется операция *примитивной рекурсии*: по примитивно рекурсивным $g$, $h$ строится следующая $f$.

$$\begin{cases} f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}), \\ f(n+1, \vec{x}) = h(f(n, \vec{x}), n, \vec{x}). \end{cases}$$

**Задача Г1.1.** Докажите, что примитивно рекурсивная функция тотально вычислима. Иными словами, что существует машина Тьюринга, которая на любом входе $x \in \mathbb{N}^k$ завершает работу и выдаёт $f(x)$.

**Задача Г1.2.** Докажите, что можно вести рекурсию по любому аргументу функции[1].

**Задача Г1.3.** Докажите, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

а) $x + y$ ;

б) $x \cdot y$ ;

в) $prev(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

г) $sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

д) $x - y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x \leqslant y; \end{cases}$

е) $\min(x, y)$;

ж) $\max(x, y)$;

з) $case(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } z = 0, \\ y, & \text{если } z > 0; \end{cases}$

и) $rm(x, y)$, $qt(x, y)$ — остаток и частное от деления.

**Задача Г1.4.** Докажите, что если $f(\vec{x}, y)$ примитивно рекурсивная, то $\sum_{y<z(y\leqslant z)} f(\vec{x}, y)$ и $\prod_{y<z(y\leqslant z)} f(\vec{x}, y)$ примитивно рекурсивные.

**Определение.** Скажем, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *примитивно рекурсивно*, если примитивно рекурсивна его характеристическая функция

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } R(\vec{x}), \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Задача Г1.5.** Докажите, что следующие отношения примитивно рекурсивны $=$, $<$, $\leqslant$, «$x$ делится на $y$», «$x$ простое».

**Задача Г1.6.** Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$. *Ограниченные кванторы* задают соотношения $\exists u < v \quad R(\vec{x}, u)$ и $\forall u < v \quad R(\vec{x}, u)$. Докажите, что если $R$ — примитивно рекурсивное, то $\exists u < v \quad R(\vec{x}, u)$, $\forall u < v \quad R(\vec{x}, u)$ также.

**Задача Г1.7.** Рассмотрим *ограниченный $\mu$–оператор*:

$$\mu y < z.R(\vec{x}, y) = \begin{cases} \text{наименьшее } y \text{ такое, что } y < z \text{ и } R(\vec{x}, y), \text{ если такое существует,} \\ z, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что если $R$ — примитивное рекурсивное, то $\vec{x} \mapsto \mu y < z.R(\vec{x}, y)$ также.

[1] Подсказка: покажите, что если $f$ — п.р., то $g(x, y) = f(y, x)$ такая же.

**Задача Г1.8 (разбор случаев).** Пусть для $i, j = 1, \ldots, n$ функции $g_i$ и отношения $\bigsqcup_i R_i = \mathbb{N}^k$ — примитивно рекурсивны. Тогда примитивно рекурсивна функция разбора случаев:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}), & \text{если } R_1(\vec{x}), \\ g_2(\vec{x}), & \text{если } R_2(\vec{x}), \\ \quad \ldots\ldots \\ g_n(\vec{x}), & \text{если } R_n(\vec{x}), \end{cases}$$

**Задача Г1.9 (совместная рекурсия).** Пусть $g_1, g_2, h_1, h_2$ — п.р.ф. Для $i = 1, 2$ положим

$$f_i(\vec{x}, 0) = g_i(\vec{x}), f_i(\vec{x}, y) = h_i(\vec{x}, y, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y)).$$

Докажите, что $f_i$ — примитивно рекурсивные.

**Задача Г1.10.** Пусть $p_x$ — простое число с номером $x$ ($p_0 = 2$). Докажите, что $x \mapsto p_x$ — п.р.ф.

**Задача Г1.11.** Докажите, что функция нумерации пар

$$pair(x, y) = sign(x - y) \cdot (x^2 + 2y + 1) + sign(y - x) \cdot (y^2 + 2x)$$

и её обратные $left(x)$ и $right(x)$ являются примитивно рекурсивными.

**Определение.** *Кодом* последовательности $a_0, \ldots, a_n$ назовём число

$$\lceil a_0, \ldots, a_n \rceil = p_0^{a_0+1} \cdot p_1^{a_1+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}.$$

Для дальнейшего нам понадобиться, чтобы функции работы с последовательностями оказались примитивно рекурсивными.

**Задача Г1.12.** Покажите, что следующие функции примитивно рекурсивны: $x[i] = \nu_{p_i}(x)$, $l(x)$ —число различных простых делителей $x$, предикат $seq(x)$ = «$x$ — код последовательности», конкатенация

$$\lceil a_1, \ldots, a_n \rceil * \lceil b_1, \ldots b_m \rceil = \lceil a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rceil,$$

**Определение.** *Возвратная рекурсия* — это операция $f \mapsto f_\sharp(\vec{x}, y) = \prod_{u<v} (p_u)^{f(\vec{x}, u)}$. Заметим, что $f(\vec{x}, y) = f_\sharp(\vec{x}, y + 1)[y]$.

**Задача Г1.13.** Пусть $h$ — п.р.ф., то $f(\vec{x}, y) = h(\vec{x}, y, f_\sharp(\vec{x}, y))$ — тоже.

**Задача Г1.14.** Пусть $\varphi_n$ — $n$-ое число Фибоначчи. Докажите, что $n \mapsto \varphi_n$ — п.р.ф.

**Определение.** *Рекурсивные функции* получаются при замыкании класса примитивно рекурсивных функций относительно (неограниченного) $\mu$-оператора:

$$f(\vec{x}) = \mu y.(g(\vec{x}, y) = 0)$$

Мы считаем, что $f(\vec{x}) = y$, если $g(\vec{x}, y) = 0$ и для каждого $z < y$ значение $g(\vec{x}, z)$ определено и $g(\vec{x}, z) \neq 0$, и $f(\vec{x})$ не определена иначе.

Вообще говоря, существуют тотальные рекурсивные, но не примитивно рекурсивные функции.

**Определение.** Функция Аккермана определяется так:

$$\begin{cases} Ack(0, x) = x + 2, \\ Ack(n + 1, 0) = Ack(n, 0), \\ Ack(n + 1, m + 1) = Ack(n, Ack(n + 1, m)) \end{cases}$$

**Задача Г1.15.** Докажите, что $Ack$ — тотально вычислимая функция, то есть для любого входа существует значение и его можно посчитать машиной Тьюринга.

**Задача Г1.16.** Докажите, что $Ack(2, m) \geqslant 2^m$.

**Задача Г1.17$^\star$.** Докажите, что $k$-ветвь функции Аккермана растёт быстрее любой п.р.ф. с не более $k$ вложенными рекурсиями. Получите из этого, что $Ack(n, n)$ не является п.р.ф. от одного аргумента.