Логика предикатов

Пусть Γ — множество замкнутых формул (*теория*), а F — замкнутая формула.

Определение. Формула F *логически следует* из Γ (обозначение $\Gamma \models F$), если для каждой интерпретации, обращающей все формулы из Γ в истину, формула F также оказывается истинной.

Определение. Формула F *дедуктивно следует или выводима* из множества (обозначение $\vdash F$), если у неё существует *формальный вывод* из гипотез .

Напомним, что формальным выводом F из Γ называется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n = F$, где каждое A_i либо *аксиома*, либо элемент Γ, либо получено из предыдущих по *правилам вывода.* Аксиомы логики предикатов:

A1. $A \to (B \to \to A)$,
A2. $A \wedge B \to A$, $A \wedge B \to B$,
A3. $A \to (B \to A \wedge B)$,
A4. $A \to A \vee B$, $B \to A \vee B$,
A5. $\neg\neg A \to A$,
A6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
A7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
A8. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
A9. $(\forall x \quad A(x)) \to A(t)$, где t — терм,
A10. $A(t) \to \exists x \quad A(x)$, где t —терм.

Правил вывода всего 3: Modus ponens и два правила Бернайса

$$\text{MP: } \frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad \text{B1 } \frac{A \to B(a)}{A \to \forall x \quad B(x)} \qquad\qquad \text{B1 } \frac{B(a) \to A}{(\forall x \quad B(x)) \to A}$$

Теорема ЛП.1 (Полнота и корректность ЛП, Гёдель)**.**

$$T \models F \Leftrightarrow T \vdash F.$$

Теорема ЛП.2 (Гёделя о компактности)**.** *Теория T непротиворечива[*] тогда и только тогда, когда любая её конечная подтеория непротиворечива.*

[*]Теория непротиворечива, когда у неё есть модель, то есть интерпретация сигнатуры, в которой эта теория верна