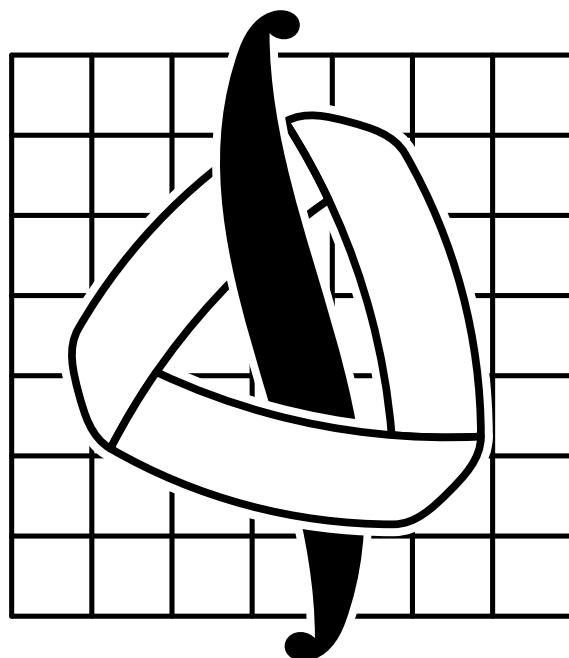


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет



Булинский А.В.  
Случайные процессы

6 семестр, второй поток

5 марта 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Случайные блуждания</b>	<b>4</b>
1.1	Понятие случайного блуждания	4
1.2	Случайные блуждания	5
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	7
<b>2</b>	<b>Ветвящиеся процессы и процессы восстановления</b>	<b>9</b>
2.1	Модель Гальтона – Ватсона	9
2.2	Процессы восстановления	12
<b>3</b>	<b>Пуассоновские процессы</b>	<b>13</b>
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	13
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	13
3.3	Элементарная теория восстановления	14
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	16

# Предметный указатель

Вырождение, 9

Измеримое

    отображение, 4

    пространство, 4

Множество

    возвратности, 8

    достижимости, 8

Модель Гальтона-Ватсона, 9

Парадокс времени ожидания, 17

Производящая функция, 9

Процесс

    восстановления, 12

    пуассоновский, 16

Пуассоновский процесс, 16

Распределение

    геометрическое, 13

    случайного элемента, 4

Случайное блуждание, 5

    простое, 5

    возвратное, 5

Случайный

    процесс, 4

    элемент, 4

Теорема

    Де ла Валле Пуссена, 15

    Ломницкого-Улама, 4

    Чжуна-Фукса, 8

# Лекция 1

## Случайные блуждания

### 1.1 Понятие случайного блуждания

**Определение.** Пусть  $V$  — множество, а  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Тогда  $(V, \mathcal{A})$  называется *измеримым пространством*.

**Определение.** Пусть есть  $(V, \mathcal{A})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — два измеримых пространства,  $f: V \rightarrow S$  — отображение.  $f$  называется  $\mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ -измеримым, если  $\forall B \in \mathcal{B} f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

**Обозначение.**  $f \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ .

**Определение.** Пусть есть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — отображение. Если  $Y \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ , то  $Y$  называется *случайным элементом*.

**Пример 1.1.1.**  $S = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  — борелевские множества. Тогда при  $m > 1$  случайный элемент  $Y$  — случайный вектор; если  $m = 1$ , то  $Y$  — случайная величина.  $P_Y(B) = P[Y^{-1}(B)]$  — мера на  $\mathcal{B}$ .

Легко видеть, что

$$P_Y(B) = P\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in B\}$$

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом  $Y$* , — это функция на множествах из  $\mathcal{B}$ , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

**Определение.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов  $X = \{X(t) \mid t \in T\}$ , где  $X(t): \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X(t) \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}_t \forall t \in T$ . Здесь  $T$  — это произвольное параметрическое множество,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — произвольные измеримые пространства.

**Замечание.** Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то  $t \in T$  интерпретируется как время. Если  $T = \mathbb{R}$ , то время непрерывно; если  $T = \mathbb{Z}$  или  $T = \mathbb{Z}_+$ , то время дискретно; если  $T \subset \mathbb{R}^d$ , то говорят о случайном поле.

**Определение.** Случайные элементы  $X_1, \dots, X_n$  называются *независимыми*, если

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k), \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n.$$

**Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама).** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t, \mathbb{Q}_t)_{t \in T}$  — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует семейство независимых случайных элементов  $X_t: \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X_t \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}_t$  таких, что  $P_{X_t} = \mathbb{Q}_t$ ,  $t \in T$ .

**Замечание.** Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом  $T$  по-прежнему любое, как и  $(S_t, \mathcal{B}_t, \mathbb{Q})_{t \in T}$  — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности для любого конечного поднабора.

## 1.2 Случайные блуждания

**Определение.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . *Случайным блужданием в  $\mathbb{R}^d$*  называется случайный процесс с дискретным временем  $S = \{S_n, n \geq 0\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Определение.** *Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$*  — это такое случайное блуждание, что

$$\mathbf{P}(X = e_k) = \mathbf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где  $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d$ .

**Определение.** Введем  $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\} \leq \infty$ . Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  называется *возвратным*, если  $\mathbf{P}(N = \infty) = 1$ ; *невозвратным*, если  $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$ .

**Замечание.** Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что  $\mathbf{P}(N = \infty)$  равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

**Определение.** Число  $\tau := \inf \{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$  ( $\tau := \infty$ , если  $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ) называется *моментом первого возвращения в 0*.

**Лемма 2.1.** Для  $\forall n \in \mathbb{N}$   $\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(\tau = \infty)\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1}$ .<sup>1</sup>

□ При  $n = 1$  формула верна:  $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$ . Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N = n + 1, \tau = k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) \mathbf{P}(\tau = k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N' = n) \mathbf{P}(\tau = k), \end{aligned}$$

где  $N'$  определяется по последовательности  $X'_1 = X_{k+1}, X'_2 = X_{k+2}$  и так далее. Из того, что  $X_i$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что  $N'$  и  $N$  распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) = \mathbf{P}(N = n) \mathbf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{P}(N = n + 1) = \mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) + \mathbf{P}(N = n + 1, \tau = \infty),$$

<sup>1</sup> от наборщика: Судя по всему, в лемме подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что  $n + 1 \geq 2$ . Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n)P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty)P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. ■

**Следствие 2.1.**  $P(N = \infty)$  равно 0 или 1.  $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$ .

□ Пусть  $P(\tau < \infty) < 1$ . Тогда

$$P(N < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty)P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1.$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P(\tau = \infty) = 0 \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. ■

**Теорема 2.2.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  возвратно  $\Leftrightarrow EN = \infty$  (соответственно, невозвратно  $\Leftrightarrow EN < \infty$ ).

□ Если  $EN < \infty$ , то  $P(N < \infty) = 1$ . Пусть теперь  $P(N < \infty) = 1$ . Это равносильно тому, что  $P(\tau < \infty) < 1$ .

$$EN = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau = \infty)P(\tau < \infty)^{n-1} = P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left( \frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} nP(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. ■

**Замечание.** Заметим, что поскольку  $N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ , то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

**Следствие 2.2.**  $S$  возвратно при  $d = 1$  и  $d = 2$ .

□

$$P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$$

Случай  $d = 1$ :  $P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ . Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$  блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай  $d = 2$ :

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$$

ряд тоже разойдется  $\Rightarrow$  блуждание возвратно. Теорема доказана. ■

## 1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

**Теорема 3.1.** Для простого случайного блуждания в  $\mathbb{Z}^d$

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $X$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

□

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку  $|c\varphi| \leq c < 1$ , то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

**Следствие 3.1.** При  $d \geq 3$  простое случайное блуждание не возвратно.

**Замечание.** Можно говорить и о случайных блужданиях в  $\mathbb{R}^d$ , если  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ .

**Определение.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда множество возвратности случайного блуждания  $S$  — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

**Определение.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда точки, достижимые случайным блужданием  $S$ , — это множество  $P(S)$  такое, что

$$\forall z \in P(S) \forall \varepsilon > 0 \exists n : \mathbf{P}(|S_n - z| < \varepsilon) > 0.$$

**Теорема 3.2 (Чжуна-Фукса).** Если  $R(S) \neq \emptyset$ , то  $R(S) = P(S)$ .

**Следствие 3.2.** Если  $0 \in R(S)$ , то  $R(S) = P(S)$ ; если  $0 \notin R(S)$ , то  $R(S) = \emptyset$ .



# Лекция 2

## Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

### 2.1 Модель Гальтона – Ватсона

**Описание модели.** Пусть  $\{\xi, \xi_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$  — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если  $Z_{n-1}(\omega) = 0$ , то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим  $A = \{\omega \mid \exists n = n(\omega) : Z_n(\omega) = 0\}$  — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если  $Z_n(\omega) = 0$ , то  $Z_{n+1}(\omega) = 0$ . Таким образом,  $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ .

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

**Определение.** Пусть дана последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  неотрицательных чисел такая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ . *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать  $s \in [0, 1]$ ).

Заметим, что если  $a_k = P(Y = k), k = 0, 1, \dots$ , то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

**Лемма 1.1.** Вероятность  $P(A)$  является корнем уравнения  $\psi(p) = p$ , где  $\psi = f_{\xi}$  и  $p \in [0, 1]$ .

□

$$\begin{aligned}
f_{Z_n}(s) &= \mathbb{E} s^{Z_n} = \mathbb{E} \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} \right].
\end{aligned}$$

Поскольку  $\sigma \{Z_r\} \subset \sigma \{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$ , которая независима с  $\sigma \{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$  (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s))
\end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности  $\xi_{n,k}$  и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим  $s = 0$  и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при  $s = 0$  имеем, что

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но  $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(A)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\psi_{\xi}$  непрерывна на  $[0, 1]$ . Переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(A)),$$

то есть  $\mathbb{P}(A)$  — корень уравнения  $p = \psi_{\xi}(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ . ■

**Теорема 1.2.** Вероятность  $p$  вырождения процесса Гальтона – Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (2.1.1)$$

где  $\psi = \psi_{\xi}$ .

□ Пусть  $p_0 := \mathbb{P}(\xi = 0) = 0$ . Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1, \quad \mathbb{P} \left( \bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\} \right) = 1.$$

Поэтому  $Z_n \geq 1$  при  $\forall n$ , то есть  $\mathbb{P}(A)$  — наименьший корень уравнения (2.1.1).

Пусть теперь  $p_0 = 1$ . Тогда  $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$  — наименьший корень уравнения (2.1.1).

Пусть, наконец,  $0 < p_0 < 1$ . Из этого следует, что  $\exists m \in \mathbb{N} : p_m > 0$ , а значит,  $\psi$  строго возрастает на  $[0, 1]$ . Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_n(s)$  — это производящая функция  $Z_n$ .

Пусть  $s \in \Delta_n$ . Тогда из монотонности  $\psi$  на  $[0, 1]$  получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (2.1.1) нет корней на  $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)), \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 1.1  $P(A)$  является корнем уравнения (2.1.1). Следовательно, показано, что  $P(A)$  — наименьший корень, что и требовалось доказать. ■

### Теорема 1.3.

**1°** Вероятность вырождения  $P(A)$  есть нуль  $\Leftrightarrow p_0 = 0$ .

**2°** Пусть  $p_0 > 0$ . Тогда при  $E\xi \leq 1$  имеем  $P(A) = 1$ , при  $E\xi > 1$  имеем  $P(A) < 1$ .

□ Докажем п. **1°**. Пусть  $P(A) = 0$ . Тогда  $p_0 = 0$ , потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания  $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$ . В другую сторону, если  $p_0 = 0$ , то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем п. **2°**. Пусть  $\mu = E\xi \leq 1$ . Покажем, что в таком случае у уравнения (2.1.1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0, \quad \text{при } z > 0,$$

если только  $\xi$  не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что  $\psi'_\xi(z)$  возрастает на  $z > 0$ . Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где  $z \in (0, 1)$ , в силу монотонности  $\psi'_\xi(z)$ . Следовательно, если  $z < 1$ , то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть  $z = 1$  — это единственный корень уравнения (2.1.1). Значит,  $P(A) = 1$ .

Пусть  $\mu = E\xi > 1$ . Покажем, что в таком случае у уравнения (2.1.1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно,  $\psi''_\xi(z)$  монотонно возрастает и больше нуля при  $z > 0$ . Из этого следует, что  $1 - \psi'_\xi(z)$  строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь  $z - \psi_\xi(z)$  при  $z = 0$ . Поскольку  $1 - \psi_\xi(1) = 0$ , производная этой функции монотонно убывает, а  $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$ , то график функции  $z - \psi_\xi(z)$  пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале  $(0, 1)$ . Так как вероятность вырождения  $P(A)$  равна наименьшему корню уравнения (2.1.1), то  $P(A) < 1$ , что и требовалось доказать. ■

**Следствие 1.1.** Пусть  $E\xi < \infty$ . Тогда  $EZ_n = (E\xi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

□ Доказательство проводится по индукции.

База индукции:  $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$ .

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left( \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

■

**Определение.**

При  $E\xi < 1$  процесс называется *докритическим*.

При  $E\xi = 1$  процесс называется *критическим*.

При  $E\xi > 1$  процесс называется *надкритическим*.

## 2.2 Процессы восстановления

**Определение.** Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Положим

$$\begin{aligned} Z(0) &:= 0; \\ Z(t) &:= \sup \{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что  $\sup \emptyset := \infty$ ). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс  $Z(t)$  называется *процессом восстановления*.

**Замечание.** Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

**Определение.** Рассмотрим процесс восстановления  $\{Z^*(t), t \geq 0\}$ , который строится по  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где  $P(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$ ,  $P(Y = 0) = 1 - p$ . Исключаем из рассмотрения случай, когда  $Y = C = \text{const}$ : если  $C = 0$ , то  $Z(t) = \infty \forall t > 0$ ; если же  $C > 0$ , то  $Z(t) = \lceil \frac{t}{c} \rceil$ .

**Лемма 2.1.** Для  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{\lceil \frac{t}{\alpha} \rceil + 1} q^{m - \lceil \frac{t}{\alpha} \rceil}, & \text{если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

## Лекция 3

# Пуассоновские процессы

### 3.1 Процессы восстановления (продолжение)

**Определение.** Будем говорить, что дискретная случайная величина  $U$  имеет *геометрическое распределение* с параметром  $p \in (0, 1)$ , если для  $k = 0, 1, 2, \dots$   $P(U = k) = (1 - p)^k p$ .

**Лемма 1.1.** Рассмотрим независимые геометрические величины  $U_0, \dots, U_j$  с параметром  $p \in (0, 1)$ , где  $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor$ . Тогда

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

□ Обозначим  $M = \left\{ (k_0, \dots, k_j) \mid k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=0}^j k_i = m - j \right\}$ .

$$\begin{aligned} P(U_0 + \dots + U_j = m - j) &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0) \cdot \dots \cdot P(U_j = k_j) = \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p(1 - p)^{k_0} \cdot \dots \cdot p(1 - p)^{k_j} = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p^{j+1} (1 - p)^{k_0 + \dots + k_j} = p^{j+1} (1 - p)^{m-j} \#M = C_m^j p^{j+1} (1 - p)^{m-j}. \end{aligned}$$

■

### 3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

**Лемма 2.1.** Пусть  $t \geq \alpha$ . Тогда  $EZ^*(t) \leq At$  и  $EZ^*(t)^2 \leq Bt^2$ , где  $A := A(p, \alpha) > 0$ ,  $B := B(p, \alpha) > 0$ .

□ По лемме 1.1  $EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j + 1)EU$ , где  $EU =: a(p) < \infty$  — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$EZ^*(t) = j + (j + 1)a(p) \leq (j + 1)(a(p) + 1) \leq \frac{t + \alpha}{\alpha} (a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha} (a(p) + 1) = At,$$

где  $A := \frac{2(a(p) + 1)}{\alpha}$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z^*(t)^2 &= \mathbf{D}Z^*(t) + (\mathbf{E}Z^*(t))^2 \leq (j+1) \underbrace{\mathbf{D}U}_{\sigma^2(p)} + (j+1)^2 (a(p) + 1)^2 \leq \\ &\leq (j+1)^2 (\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2) \leq \frac{4}{\alpha^2} (\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2) t^2 = Bt^2, \end{aligned}$$

где  $B := \frac{4}{\alpha^2} (\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2)$ . ■

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины  $X \geq 0$  найдется такое  $\alpha > 0$ , что  $\mathbf{P}(X > \alpha) = p \in (0, 1)$ . Тогда построим процесс  $Z^*$ , как в определении из прошлой лекции, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, & \text{если } X_n \leq \alpha. \end{cases}$$

По построению  $Y_n \leq X_n$ , откуда  $Z(t) \leq Z^*(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**Следствие 2.1.**  $\mathbf{E}Z(t) \leq At$  и  $\mathbf{E}Z(t)^2 \leq Bt^2$  для любого  $t \geq \alpha$ . В частности,  $Z(t) < \infty$  п. н. при всех  $t \geq 0$ .

**Следствие 2.2.**  $\mathbf{P}(\forall t \geq 0 Z(t) < \infty) = 1$ .

□ Поскольку  $Z(t)$  является неубывающим процессом, т.е.  $\forall s \leq t Z(s) \leq Z(t)$ , то достаточно доказать, что  $\mathbf{P}(\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty) = 1$ . Но

$$\{\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{Z(n) < \infty\} -$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1. ■

### 3.3 Элементарная теория восстановления

**Лемма 3.1.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — н. о. р. случайные величины,  $X \geq 0$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0, \infty]$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\mu = \mathbf{E}X$  (конечное или бесконечное).

□ Если  $\mu < \infty$ , то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть  $\mu = \infty$ . Положим для  $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}(X_n \leq c).$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{E}X \mathbb{I}(X \leq c)$ .

Возьмем  $c = m \in \mathbb{N}$ . Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbf{E}X.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла). ■

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

**Определение.** Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, t \in \Lambda\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geq c\}} |\xi_\alpha| d\mathbf{P} = 0.$$

Известно, что если семейство  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  равномерно интегрируемо и  $\xi_n \rightarrow \xi$  почти наверное, то  $\xi$  тоже интегрируема и  $E\xi_n \rightarrow E\xi$ . Для неотрицательных случайных величин  $\xi_n, n \geq 1$ , таких, что  $\xi_n \rightarrow \xi$  п. н., где  $E\xi < \infty$ , имеет место и обратная импликация

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \Rightarrow \text{семейство } \{\xi_n, n \geq 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

**Теорема 3.2 (Де ла Валле Пуссен).** Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , т. е.  $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , т. ч.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \infty$  и  $\sup E g(|\xi_\alpha|) < \infty$ .

**Теорема 3.3.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р случайных величин  $X, X_1, X_2, \dots$ . Тогда

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п. н.}} \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty; \\ 2^\circ \quad & \frac{EZ(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$ .

□ Если  $\mu = 0$ , то  $X_n = 0$  п. н., поэтому  $\forall t > 0 \ Z(t) = \infty$  и утверждение теоремы очевидно.

Далее  $\mu > 0$ . Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1} \quad (3.3.1)$$

Для фиксированного  $\omega$  рассмотрим последовательность  $t_n := S_n(\omega)$ . Поскольку  $Z(t_n, \omega) = n$  и траектория  $Z(t, \omega)$  монотонна,  $Z(t, \omega) \rightarrow \infty$ . Будем рассматривать те  $(t, \omega)$ , для которых  $0 < Z(t, \omega) < \infty$  (при всех  $t_n$ , а значит, вообще при всех  $t$  это выполнено почти наверное). Для этих  $(t, \omega)$  разделим обе части 3.3.1 на  $Z(t)$ . Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку  $Z(t) \rightarrow \infty$ , то  $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu, \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$  и  $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \rightarrow 1$ . Следовательно,  $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.  $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п. н.}} \frac{1}{\mu}$ , что завершает доказательство утверждения п. 1°.

Для доказательства утверждения п. 2° используем теорему Валле–Пуссена. А именно, рассмотрим семейство  $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$  и функцию  $g(t) = t^2$ , где  $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$ . По лемме 2.1

$$E\xi_t^2 = \frac{EZ(t)^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы Валле–Пуссена выполнены.

Поэтому из нее вытекает, что семейство  $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$  равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения п. 1° получаем, что

$$E \frac{Z(t)}{t} \rightarrow E \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

■

## 3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

**Определение.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — н.о.р. случайные величины с экспоненциальным распределением  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , т. е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пуассоновским процессом  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  называется процесс восстановления, построенный по  $X_1, X_2, \dots$

Для  $t > 0$  введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t; \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

**Лемма 4.1.** Для любого  $t > 0$  случайные величины  $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$  являются независимыми, причем  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ,  $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$  для  $k = 1, 2, \dots$

□ Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$  выполнено

$$\mathbf{P}\{N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k\} = \mathbf{P}(N(t) = n) \cdot \mathbf{P}(X_1^t > u_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(X_k^t > u_k).$$

Доказываем это индукцией по  $k$ .

База индукции:  $k = 1$ . Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина  $S_n$  имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) &= \mathbf{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \mathbf{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t + u_1) = \\ &= \mathbf{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \mathbf{P}((S_n, X_{n+1}) \in \{(x, y) \mid x \leq t, x + y > t + u_1\}) = \\ &= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y) dx dy = (S_n \perp X_{n+1}) = \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t, y \geq 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy = (\text{т. Фубини}) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Положим  $u_1 = 0$ , получим

$$\mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > 0) = \mathbf{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е.  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ . Далее,

$$\mathbf{P}(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$



т. е.  $X_1^t \sim \text{Ехр}(\lambda)$  и база установлена.

Индукционный переход: пусть  $k \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k\} &= \\ &= \mathbf{P} \{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \dots, X_{n+k} > u_k\} = (\text{см. выше}) = \\ &= \mathbf{P} \{N(t) = n\} \mathbf{P} \{X_1^t > u_1\} \cdot e^{-\lambda u_2} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda u_k} = \mathbf{P} \{N(t) = n\} \cdot e^{-\lambda u_1} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda u_k}. \end{aligned}$$

Снова положим  $u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$  и просуммируем по всем  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Получим  $\mathbf{P}(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$ , откуда  $X_k^t \sim \text{Ехр}(\lambda)$ , индукционный переход завершен. ■

Пусть  $X_j \sim \text{Ехр}(\lambda)$  — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина  $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$  соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы:  $X_1^t \sim \text{Ехр}(\lambda)$ . Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

# Литература

- [1] Булинский, Ширяев, Теория случайных процессов