# Содержание



# 1 Лекция от 08.02.17

## Случайные блуждания

### 1.1 Понятие случайного блуждания

**Определение 1.1.** Пусть $V$ — множество, а $\mathscr{A}$ — $\sigma$-алгебра его подмножеств. Тогда $(V, \mathscr{A})$ называется *измеримым пространством.*

**Определение 1.2.** Пусть есть $(V, \mathscr{A})$ и $(S, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства, $f\colon V \to S$ — отображение. $f$ называется *$\mathscr{A}|\mathscr{B}$-измеримым*, если $\forall\, B \in \mathscr{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. *Обозначение*: $f \in \mathscr{A}|\mathscr{B}$.

**Определение 1.3.** Пусть есть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — отображение. Если $Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$, то $Y$ называется *случайным элементом.*

**Определение 1.4.** Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом* $Y$, — это функция на множествах из $\mathscr{B}$, задаваемая равенством

$$\mathsf{P}_Y(B) := \mathsf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

**Определение 1.5.** Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством,* — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где $X(t)\colon \Omega \to S_t$, $X(t) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ $\forall\, t \in T$. Здесь $T$ — это произвольное параметрическое множество, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — произвольные измеримые пространства.

*Замечание.* Если $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле.*

**Определение 1.6.** Случайные элементы $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \in B_k)\ \forall\, B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n$.

**Теорема 1.1** (Ломницкого-Улама)**.** *Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ существует семейство* независимых *случайных элементов $X_t \colon \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ таких, что $\mathsf{P}_{X_t} = Q_t$, $t \in T$.*

*Замечание.* Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениеми. При этом $T$ по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathbb{Q})_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности $\forall$ конечного поднабора.

## 1.2 Случайные блуждания

**Определение 1.7.** Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. *Случайным блужданием в* $\mathbb{R}^d$ называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ такой, что

$$S_0 := x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(начальная точка);}$$
$$S_n := x + X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Определение 1.8.** *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ — это такое случайное блуждание, что

$$\mathsf{P}(X = e_k) = \mathsf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0)$, $k = 1, \ldots, d$.

**Определение 1.9.** Введем $\mathrm{N} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ $(\leqslant \infty)$. Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathsf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$.

*Замечание.* Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathsf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

*Замечание* (от наборщика). Судя по всему, в лемме ниже подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

**Определение 1.10.** Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ $(\tau := \infty$, если $S_n \neq 0$ $\forall\, n \in N)$ называется *моментом первого возвращения в 0.*

**Лемма 1.2.** *Для* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{P}(N = n) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}$.

*Доказательство.* При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n+1, \tau = k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) \mathsf{P}(\tau = k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(N' = n)\,\mathsf{P}(\tau = k),$$

где $N'$ определяется по последовательности $X_1' = X_{k+1}$, $X_2' = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что $X_i$ — независиcые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что $N'$ и $N$ распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \mathsf{P}(N = n)\,\mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n+1, \tau < \infty) + \mathsf{P}(N = n+1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n+1 \geqslant 2$. Из этого следует, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(N = n)\,\mathsf{P}(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathsf{P}(N = n+1) = \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

**Следствие.** $\mathsf{P}(N = \infty)$ *равно 0 или 1.* $\mathsf{P}(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

*Доказательство.* Пусть $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$\mathsf{P}(N < \infty) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{1-\mathsf{P}(\tau<\infty)} =$
$= \frac{\mathsf{P}(\tau=\infty)}{\mathsf{P}(\tau=\infty)} = 1.$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}\big((\tau = \infty) = 0\big) \Rightarrow \mathsf{P}(N = n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{P}(N < \infty) = 0.$

Следствие доказано. □

**Теорема 1.3.** *Простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}^d$ возвратно $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}N = \infty$ (соответственно, невозвратно $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}N < \infty$).*

*Доказательство.* Если $\mathsf{E}N < \infty$, то $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathsf{P}(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathsf{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\mathsf{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau = \infty)\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} =$$
$$= \mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = (\sum_{n=1}^{\infty} p^n)' = (\frac{1}{1-p})' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathsf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathsf{P}(\tau = \infty)}{(1 - \mathsf{P}(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - \mathsf{P}(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. □

*Замечание.* Заметим, что поскольку $N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$\mathsf{E}N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$\text{S возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0) = \infty.$$

**Следствие.** *$S$ возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.*

*Доказательство.* $\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = (\frac{1}{2d})^{2n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \ldots (n_d!)^2}$.

*Случай $d = 1$*: $\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} (\frac{1}{2})^{2n}$.

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \to \infty.$$

Соответственно,

$$\mathsf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается *случай $d = 2$*: $\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = \ldots = \left\{\frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n}\right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$ ряд тоже разойдется $\Rightarrow$ блуждание возвратно. Теорема доказана. □

## 1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

**Теорема 1.4.** *Для простого случайного блуждания в* $\mathbb{Z}^d$

$$\mathsf{E}N = \lim_{c\uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-c\varphi(t)}\,\mathrm{d}t,$$

*где* $\varphi(t)$ *— характеристическая функция* $X$*,* $t \in \mathbb{R}^d$*.*

*Доказательство.* $\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi}\,\mathrm{d}t_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\,\mathrm{d}t.$$

По теореме Фубини

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{E}\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathsf{E}e^{i(S_n,t)}\,\mathrm{d}t.$$

Заметим, что

$$\mathsf{E}e^{i(S_n,t)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \big(\varphi\,(t)\big)^n\,\mathrm{d}t.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n\,\mathsf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n\,\mathrm{d}t, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leqslant c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-c\varphi(t)}\,\mathrm{d}t$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n\,\mathsf{P}(S_n = 0) \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(S_n = 0) = \mathsf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

**Следствие.** *При* $d \geqslant 3$ *простое случайное блуждание невозвратно.*

*Замечание.* Можно говорить и о случайных блужданиях в $\mathbb{R}^d$, если $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в $\varepsilon$-окрестность точки $x$.

**Определение 1.11.** Пусть есть случайное блуждание $S$ на $\mathbb{R}^d$. Тогда *множество возвратности* случайного блуждания $S$ — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

**Определение 1.12.** Пусть есть случайное блуждание $S$ на $\mathbb{R}^d$. Тогда *точки, достижимые случайным блужданием $S$,* — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n\colon \ \mathsf{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

**Теорема 1.5** (Чжуна-Фукса)**.** *Если $R(S) \neq \varnothing$, то $R(S) = P(S)$.*

**Следствие.** *Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \varnothing$.*

# 2 Лекция от 15.02.17

## Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

## 2.1 Модель Гальтона–Ватсона

**Описание модели** Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathsf{P}(\xi = m) = p_m \geqslant 0, \ \ m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$\begin{aligned} Z_0(\omega) &:= 1, \\ Z_n(\omega) &:= \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega\colon \exists\, n = n(\omega) \ Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции.* Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Z_n = 0).$$

**Определение 2.1.** Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leqslant 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathsf{P}(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$ , то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\, \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E} s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

**Лемма 2.1.** *Вероятность* $\mathsf{P}(A)$ *является корнем уравнения* $\psi(p) = p$, *где* $\psi = f_\xi$ *и* $p \in [0, 1]$.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) = \mathsf{E} s^{Z_n} = \mathsf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}}\right) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}}\right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\}\right] = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\}\right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k},\ m = 1, \dots, r,\ k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k},\ k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\left(s^{\,\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathsf{E}\mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\sum\limits_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \mathsf{E} s^{\xi_{n,k}}\, \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi^j(s)\, \mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(s)\big), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}\big(\psi_\xi(0)\big)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}\Big(\psi_\xi\big(\psi_\xi(s)\big)\Big) = \dots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \dots (\psi_\xi}_{n \text{ итераций}}(s)) \dots) = \\ = \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathsf{P}(Z_n = 0) = \psi_\xi\big(\mathsf{P}(Z_{n-1} = 0)\big).$$

Но $\mathsf{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathsf{P}(A)$ при $n \to \infty$ и $\psi_\xi$ непрерывна на $[0,1]$. Переходим к пределу при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \psi_\xi(\mathsf{P}(A)),$$

то есть $\mathsf{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_\xi(p)$, $p \in [0,1]$. $\square$

**Теорема 2.2.** *Вероятность $p$ вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть* ***наименьший*** *корень уравнения*

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0,1], \tag{1}$$

*где $\psi = \psi_\xi$.*

*Доказательство.* Пусть $p_0 := \mathsf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant 1) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geqslant 1\}\right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geqslant 1$ при $\forall\, n$, то есть $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathsf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, $\psi$ строго возрастает на $[0,1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = \big[\psi_n(0),\ \psi_{n+1}(0)\big),\ n = 0,1,2,\dots\ ,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция $Z_n$. Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности $\psi$ на $[0,1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s \ > \ \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) \ = \ \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) \ = \ 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \big[0,\ \mathsf{P}(A)\big), \quad \psi_n(0) \nearrow \mathsf{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathsf{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathsf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. $\square$

**Теорема 2.3.**

1. *Вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ есть нуль $\Longleftrightarrow p_0 = 0$.*
2. *Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $\mathsf{E}\xi \leqslant 1$ имеем $\mathsf{P}(A) = 1$, при $\mathsf{E}\xi > 1$ имеем $\mathsf{P}(A) < 1$.*

*Доказательство.* Докажем 1. Пусть $\mathsf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем 2. Пусть $\mu = \mathsf{E}\xi \leqslant 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\,\mathsf{P}(\xi = k) \quad \Rightarrow \quad \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только $\xi$ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1-z) < \psi'_\xi(1)(1-z) \leqslant 1 - z,$$

где $z \in (0,1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

Пусть $\mu = \mathsf{E}\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}\,\mathsf{P}(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$\begin{aligned} 1 - \psi'_\xi(0) &= 1 - \mathsf{P}(\xi = 1) > 0, \\ 1 - \psi'_\xi(1) &= 1 - \mu < 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -\mathsf{P}(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0,1)$. Так как вероятность вырождения $\mathsf{P}(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $\mathsf{P}(A) < 1$, что и требовалось доказать. $\square$

**Следствие.** *Пусть* $\mathsf{E}\xi < \infty$. *Тогда* $\mathsf{E}Z_n = (\mathsf{E}\xi)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

*Доказательство.* Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathsf{E}Z_1 = \mathsf{E}\xi$.

Индуктивный переход:

$$\mathsf{E}Z_n = \mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,\mathsf{E}\xi\,\mathsf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathsf{E}\xi\,\mathsf{E}Z_{n-1} = (\mathsf{E}\xi)^n.$$

$\square$

**Определение 2.2.**

При $\mathsf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим.*

При $\mathsf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим.*

При $\mathsf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим.*

## 2.2 Процессы восстановления

**Определение 2.3.** Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Положим

$$\begin{aligned} &Z(0) := 0; \\ &Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} :\ S_n \leqslant t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что $\sup\varnothing := \infty$). Таким образом,

$$Z(t,\omega) = \sup\left\{n \in \mathbb{N}:\ S_n(\omega) \leqslant t\right\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления.*

*Замечание.* Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leqslant t\},\ \ t > 0.$$

**Определение 2.4.** Рассмотрим *процесс восстановления* $\{Z^\star(t),\ t \geqslant 0\}$, который строится по $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где $\mathsf{P}(Y = \alpha) = p \in (0,1)$, $\mathsf{P}(Y = 0) = 1 - p$. Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty\ \ \forall\, t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left[\frac{t}{c}\right]$.

**Лемма 2.4.** *Для* $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}(Z^\star(t) = m) = \begin{cases} C_m^j\, p^{j+1} q^{m-j}, \text{ где } j = \left[\frac{t}{\alpha}\right], & \text{если } m \geqslant j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

# 3 Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы

## 3.1 Процессы восстановления (продолжение)

**Определение 3.1.** Будем говорить, что дискретная случайная величина $U$ имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0,1)$, если для $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathsf{P}(U = k) = (1-p)^k p$.

**Лемма 3.1.** *Рассмотрим независимые геометрические величины* $U_0, \ldots, U_j$ *с параметром* $p \in (0,1)$*, где* $j = \left[\frac{t}{\alpha}\right]$*. Тогда*

$$\mathsf{P}(j + U_0 + \ldots + U_j = m) = \mathsf{P}(Z^\star(t) = m).$$

*Доказательство.* Обозначим $M = \left\{(k_0, \ldots, k_j)\colon k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum\limits_{i=0}^{j} k_j = m - j\right\}$.

$$\mathsf{P}\left(U_0 + \ldots + U_j = m - j\right) = \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} \mathsf{P}(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j) =$$

$$= \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} \mathsf{P}(U_0 = k_0) \ldots \mathsf{P}(U_j = k_j) = \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} p(1-p)^{k_0} \ldots p(1-p)^{k_j} =$$

$$= \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} = p^{j+1}(1-p)^{k_0+\ldots+k_j} =$$

$$= p^{j+1}(1-p)^{m-j}\#M = C_m^j p^{j+1}(1-p)^{m-j}.$$

□

## 3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

**Лемма 3.2.** *Пусть $t \geqslant \alpha$. Тогда* $\mathsf{E}Z^\star(t) \leqslant At$ *и* $\mathsf{E}Z^\star(t)^2 \leqslant Bt^2$, *где* $A = A(p,\alpha) > 0$, $B = B(p,\alpha) > 0$.

*Доказательство.* По лемме 3.1 $\mathsf{E}Z^\star(t) = \mathsf{E}(j + U_0 + \ldots + U_j) = j + (j + 1)\mathsf{E}U$, где $\mathsf{E}U =: a(p) < \infty$ — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$\mathsf{E}Z^\star(t) = j + (j+1)a(p) \leqslant (j+1)\big(a(p)+1\big) \leqslant \leqslant \frac{t+\alpha}{\alpha}\big(a(p)+1\big) \leqslant \frac{2t}{\alpha}\big(a(p)+1\big) = At,$$

где $A := \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$.

Далее,

$$\mathsf{E}Z^\star(t)^2 = \operatorname{var} Z^\star(t) + \big(\mathsf{E}Z^\star(t)\big)^2 \leqslant (j+1)\underbrace{\operatorname{var} U}_{\sigma^2(p)} + (j+1)^2\big(a(p)+1\big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (j+1)^2\left(\sigma^2(p) + \big(a(p)+1\big)^2\right) \leqslant \frac{4}{\alpha^2}\left(\sigma^2(p) + \big(a(p)+1\big)^2\right)t^2 = Bt^2,$$

где $B := \frac{4}{\alpha^2}\left(\sigma^2(p) + \big(a(p)+1\big)^2\right)$. □

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины $X \geqslant 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что $\mathsf{P}(X > \alpha) = p \in (0,1)$. Тогда построим процесс $Z^\star$, как в определении 2.4, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, & \text{если } X_n \leqslant \alpha. \end{cases}$$

По построению $Y_n \leqslant X_n$, откуда $Z(t) \leqslant Z^\star(t)$, $t \geqslant 0$.

**Следствие.** $\mathsf{E}Z(t) \leqslant At$ *и* $\mathsf{E}Z(t)^2 \leqslant Bt^2$ *для любого* $t \geqslant \alpha$. *В частности,* $Z(t) < \infty$ *п. н. при всех* $t \geqslant 0$.

**Следствие.** $\mathsf{P}\big(\forall\, t \geqslant 0\ Z(t) < \infty\big) = 1$.

*Доказательство.* Поскольку $Z(t)$ является неубывающим процессом, т. е. $\forall\, s \leqslant t\ Z(s) \leqslant Z(t)$, то достаточно доказать, что $\mathsf{P}\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\ Z(n) < \infty\big) = 1$. Но

$$\big\{\forall\, n \in \mathbb{N}\ Z(n) < \infty\big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big\{Z(n) < \infty\big\} —$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1. □

## 3.3 Элементарная теория восстановления

**Лемма 3.3.** *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ *— н. о. р. случайные величины,* $X \geqslant 0$. *Тогда* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu \in [0, \infty]$ *при* $n \to \infty$*, где* $\mu = \mathsf{E}X$ *(конечное или бесконечное).*

*Доказательство.* Если $\mu < \infty$, то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leqslant c\}.$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X_n \leqslant c\}$.

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant \lim_{m\to\infty} \mathsf{E}X\mathbb{I}\{X \leqslant m\} = \mathsf{E}X.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла). □

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

**Определение 3.2.** Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, t \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\alpha\in\Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geqslant c\}} |\xi_\alpha| \, \mathrm{d}\mathsf{P} = 0.$$

Известно, что если семейство $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируемо и $\xi_n \to \xi$ почти наверное, то $\xi$ тоже интегрируема и $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин $\xi_n$, $n \geqslant 1$, таких, что $\xi_n \to \xi$ п. н., где $\mathsf{E}\xi < \infty$, имеет место и обратная импликация

$$\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi \implies \text{семейство } \{\xi_n, n \geqslant 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

**Теорема 3.4** (Де ла Валле Пуссен)**.** *Семейство случайных величин* $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ *является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция* $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*, т. е.* $g \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)|\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$*, такая, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = \infty \quad \text{и} \quad \sup \mathsf{E}g(|\xi_\alpha|) < \infty.$$

**Теорема 3.5.** *Пусть* $Z = \big\{Z(t), t \geqslant 0\big\}$ *— процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р случайных величин* $X, X_1, X_2, \ldots$ *. Тогда*

1. $\dfrac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п. н.}} \dfrac{1}{\mu}$ *при* $t \to \infty$*;*
2. $\dfrac{\mathsf{E}Z(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$ *при* $t \to \infty$*, где* $\frac{1}{0} := \infty$*,* $\frac{1}{\infty} := 0$.

*Доказательство.* Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ п. н., поэтому $\forall\, t > 0$ $Z(t) = \infty$ и утверждение теоремы очевидно.

Далее $\mu > 0$. Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leqslant t < S_{Z(t)+1} \tag{2}$$

Для фиксированного $\omega$ рассмотрим последовательность $t_n := S_n(\omega)$. Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$ и траектория $Z(t, \omega)$ монотонна, $Z(t, \omega) \to \infty$. Будем рассматривать те $(t, \omega)$, для которых $0 < Z(t, \omega) < \infty$ (при всех $t_n$, а значит, вообще при всех $t$ это выполнено почти наверное). Для этих $(t, \omega)$ разделим обе части 2 на $Z(t)$. Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leqslant \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1}\,\frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку $Z(t) \to \infty$, то $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$, $\frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$ и $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \to 1$. Следовательно, $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$ при $t \to \infty$, т. е. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п. н.}} \frac{1}{\mu}$, что завершает доказательство утверждения 1.

Для доказательства утверждения 2 используем теорему 3.4. А именно, рассмотрим семейство $\{\xi_t, t \geqslant \alpha\}$ и функцию $g(t) = t^2$, где $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$. По лемме 3.2

$$\mathsf{E}\xi_t^2 = \frac{\mathsf{E}Z(t)^2}{t^2} \leqslant \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы 3.4 выполнены. Поэтому из нее вытекает, что семейство $\{\xi_t, t \geqslant \alpha\}$ равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения 1 получаем, что

$$\mathsf{E}\frac{Z(t)}{t} \to \mathsf{E}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \to \infty.$$

$\square$

## 3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

**Определение 3.3.** Пусть $X$, $X_1$, $X_2$, … — независимые одинаково распределенные случайные величины с экспоненциальным распределением $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, т. е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

*Пуассоновским процессом* $N = \big\{N(t), t \geqslant 0\big\}$ называется процесс восстановления, построенный по $X_1$, $X_2$, … .

Для $t > 0$ введем случайные величины

$$X_1^t := S_{N(t)+1} - t;$$
$$X_k^t := S_{N(t)+k}, \quad k \geqslant 2.$$

**Лемма 3.6.** *Для любого $t > 0$ случайные величины $N(t)$, $X_1^t$, $X_2^t$, … являются независимыми, причем $N(t) \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$, $X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ для $k = 1, 2, \ldots$.*

*Доказательство.* Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \ \forall\, u_1, \dots, u_k \geqslant 0$ выполнено

$$\mathsf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) = \mathsf{P}(N(t) = n)\, \mathsf{P}(X_1^t > u_1) \dots \mathsf{P}(X_k^t > u_k).$$

Доказываем это индукцией по $k$.

База индукции: $k = 1$. Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина $S_n$ имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{gathered}
\mathsf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \mathsf{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \\
= \mathsf{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1) = \mathsf{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t + u_1) = \\
= \mathsf{P}(S_n \leqslant t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \\
= \mathsf{P}\Big( (S_n, X_{n+1}) \in \big\{ (x, y) \colon x \leqslant t, x + y > t + u_1 \big\} \Big) = \\
\iint\limits_{\substack{x \leqslant t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (\text{независимость } S_n \text{ и } X_{n+1}) = \\
= \iint\limits_{\substack{x \leqslant t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t, y \geqslant 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\
= (\text{теорема Фубини}) = \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \int\limits_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y = \\
= \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)}\, \mathrm{d}x = e^{-\lambda(t+u_1)} \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}x = \\
= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.
\end{gathered}$$

Положим $u_1 = 0$, получим

$$\mathsf{P}(N(t) = n, X_1^t > 0) = \mathsf{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е. $N(t) \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Далее,

$$\mathsf{P}(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$

т. е. $X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ и база установлена.

Индукционный переход: пусть $k \geqslant 2$.

$$\begin{gathered}
\mathsf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) = \\
\mathsf{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \dots, X_{n+k} > u_k) = \\
= (\text{см. предыдущее}) = \mathsf{P}(N(t) = n)\, \mathsf{P}(X_1^t > u_1) e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \\
= \mathsf{P}(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k}.
\end{gathered}$$

Снова положим $u_1 = \ldots = u_{k-1} = 0$ и просуммируем по всем $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим $\mathsf{P}(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$, откуда $X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, индукционный переход завершен. $\square$

Пусть $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$ соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы: $X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

## 3.5 Задачи

**Задача 3.1.** *Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?*

*Решение.* Нет, нельзя. Приведем контрпример. Итак, пусть процесс восстановления $Z(t)$ порожден н.о.р. случайными величинами $\{X, X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, где

$$\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

Покажем, что у процесса восстановления $Z(t)$ существуют зависимые приращения. Сначала заметим, что

$$\mathsf{P}(Z(1) = 0, Z(2) - Z(1) = 0) = 0,$$

так как $\mathsf{P}(X \leq 2) = 1$.

Теперь по отдельности рассмотрим следующие вероятности $\mathsf{P}(Z(1) = 0)$, $\mathsf{P}(Z(2) - Z(1) = 0)$:

$$\mathsf{P}(Z(1) = 0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}$$

Со второй вероятностью чуть сложнее:

$$\mathsf{P}(Z(2) - Z(1) = 0) = \mathsf{P}(Z(2) = Z(1)) \geq \mathsf{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{9}$$

Напишем в явном виде полученное противоречие:

$$\mathsf{P}(Z(1) = 0, Z(2) - Z(1) = 0) = 0 \neq \mathsf{P}(Z(1) = 0)\,\mathsf{P}(Z(2) - Z(1) = 0)$$

$\blacksquare$

**Задача 3.2.** *Найти ковариционную функцию процесса $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$, где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}, N = \{N(t), t \geq 0\}$ - пуассоновский процесс интенсивоности $\lambda$, случайная величина $\xi_0$ принимает значения $1$ и $-1$ с вероятностью $1/2$, причем $\xi_0$ не зависит от процесса $N$.*

*Решение.* Пусть $t > s$. Распишем определение ковариации:

$$\operatorname{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = \mathsf{E}\left[\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)}\right] - \mathsf{E}\left[\xi_0(-1)^{N(t)}\right]\mathsf{E}\left[\xi_0(-1)^{N(s)}\right]$$

Вспомним, что для независимых случайных величин $\xi$ и $\eta$ выполнено $\mathsf{E}\xi\eta = \mathsf{E}\xi\mathsf{E}\eta$ и продолжим рассуждения:

$$= \mathsf{E}\eta^2\mathsf{E}(-1)^{N(t)+N(s)} - (\mathsf{E}\eta)^2\,\mathsf{E}\left[(-1)^{N(t)}\right]\mathsf{E}\left[(-1)^{N(s)}\right]$$

Обозначим за $\psi(z) = e^{\mu(z-1)}$ - производящуюю функцию $Poiss(\mu)$. Заметим, что $\mathsf{E}\eta^2 \equiv 1$, $\mathsf{E}\eta = 0$ и $(-1)^{N(t)-N(s)} = (-1)^{N(t)+N(s)}$. Подставим в полученное выше выражение, продолжив рассуждения:

$$= \mathsf{E}(-1)^{N(t)-N(s)} = \psi(-1) = e^{-2\lambda(t-s)},$$

Опустив изначальное предположение $t > s$, получаем

**Ответ:** $e^{-2\lambda|t-s|}$ ■

# Предметный указатель