

Содержание

1	Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания	1
1.1	Понятие случайного блуждания	1
1.2	Случайные блуждания	2
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	5
2	Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления	6
2.1	Модель Гальтона–Ватсона	6
2.2	Процессы восстановления	9
3	Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы	10
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	10
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	11
3.3	Элементарная теория восстановления	12
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	13

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение 1.2. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Определение 1.4. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом* Y , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где $X(t): \Omega \rightarrow S_t$, $X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \forall t \in T$. Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле*.

Определение 1.6. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n.$$

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором (Ω, \mathcal{F}, P) существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t$, $X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ таких, что $P_{X_t} = Q_t$, $t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности любого конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . Случайным блужданием в \mathbb{R}^d называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d — это такое случайное блуждание, что

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leq \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $P(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $P(N < \infty) = 1$.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $P(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Замечание (от наборщика). Судя по всему, в лемме ниже подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Лемма 1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}$.

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $P(N = \infty)$ равно 0 или 1. $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $P(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$P(N < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1.$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. \square

Теорема 1.3. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow EN = \infty$ (соответственно, не возвратно $\Leftrightarrow EN < \infty$).

Доказательство. Если $EN < \infty$, то $P(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $P(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $P(\tau < \infty) < 1$.

$$EN = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.

$$\text{Доказательство. } P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$$

$$\text{Случай } d = 1: P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow \text{блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай } d = 2: P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \text{ряд тоже разойдется} \Rightarrow \text{блуждание возвратно. Теорема доказана. } \square$$

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = EN, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание невозвратно.

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием* S , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \mathbb{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

1.4 Задачи

Задача 1.1. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание в \mathbb{Z} , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.

Решение. Поделим случайные величины $\xi_n = S_n - S_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ на группы по $M = [b - a] + 1$ штук:

$$\underbrace{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M}_{M \text{ штук}}, \underbrace{\xi_{M+1}, \dots, \xi_{2M}}_{M \text{ штук}}, \dots$$

Покажем, что вероятность P_{ab} того, что блуждание останется в полосе, равняется нулю. Очевидно, что если в каждой группе все ξ_i одновременно равны либо $+1$, либо -1 , то тогда мы вылетаем за полосу. Вероятность того, что все ξ_i в каждой группе одновременно не обратятся в ± 1 вычисляется следующим образом:

$$P_{\pm 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - p^M + q^M)^k = 0$$

Вычисленная вероятность является в том числе верхней оценкой вероятности того, что мы останемся в полосе. Таким образом,

$$P_{ab} \leq P_{\pm 1} = 0 \Rightarrow P_{ab} = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega: \exists n = n(\omega) \ Z_n(\omega) = 0\}$ — событие вырождения популяции. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. Производящая функция для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = P(Y = k), k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = \mathbf{E}s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_{\xi}$ и $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= \mathbb{E} s^{Z_n} = \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_{ξ} непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(A)),$$

то есть $\mathbb{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_{\xi}(p)$, $p \in [0, 1]$. □

Теорема 2.2. Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\psi = \psi_{\xi}$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathbb{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1, \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\} \right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $\mathbb{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n . Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, \mathbb{P}(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow \mathbb{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathbb{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathbb{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.3.

1. Вероятность вырождения $P(A)$ есть нуль $\iff p_0 = 0$.
2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $E\xi \leq 1$ имеем $P(A) = 1$, при $E\xi > 1$ имеем $P(A) < 1$.

Доказательство. Докажем 1. Пусть $P(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем 2. Пусть $\mu = E\xi \leq 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

Пусть $\mu = E\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $P(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $P(A) < 1$, что и требовалось доказать. \square

Следствие. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда $EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$.

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

\square

Определение 2.2.

При $E\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $E\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $E\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим процесс восстановления $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где $P(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$, $P(Y = 0) = 1 - p$. Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \lceil \frac{t}{c} \rceil$.

Лемма 2.4. Для $l = 0, 1, 2, \dots$

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor, \quad \text{если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

3 Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Определение 3.1. Будем говорить, что дискретная случайная величина U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если для $k = 0, 1, 2, \dots$ $P(U = k) = (1 - p)^k p$.

Лемма 3.1. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_j с параметром $p \in (0, 1)$, где $j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor$. Тогда

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

Доказательство. Обозначим $M = \left\{ (k_0, \dots, k_j) : k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=0}^j k_j = m - j \right\}$.

$$\begin{aligned} P(U_0 + \dots + U_j = m - j) &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p(1 - p)^{k_0} \dots p(1 - p)^{k_j} = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p^{j+1} (1 - p)^{k_0 + \dots + k_j} = p^{j+1} (1 - p)^{m-j} \#M = C_m^j p^{j+1} (1 - p)^{m-j}. \end{aligned}$$

□

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.2. Пусть $t \geq \alpha$. Тогда $EZ^*(t) \leq At$ и $EZ^*(t)^2 \leq Bt^2$, где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 3.1 $EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j + 1)EU$, где $EU =: a(p) < \infty$ — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$EZ^*(t) = j + (j + 1)a(p) \leq (j + 1)(a(p) + 1) \leq \frac{t + \alpha}{\alpha} (a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha} (a(p) + 1) = At,$$

где $A := \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$.

Далее,

$$\begin{aligned} EZ^*(t)^2 &= \text{var } Z^*(t) + (EZ^*(t))^2 \leq (j + 1) \underbrace{\text{var } U}_{\sigma^2(p)} + (j + 1)^2 (a(p) + 1)^2 \leq \\ &\leq (j + 1)^2 \left(\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right) \leq \frac{4}{\alpha^2} \left(\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right) t^2 = Bt^2, \end{aligned}$$

где $B := \frac{4}{\alpha^2} \left(\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right)$.

□

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины $X \geq 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что $P(X > \alpha) = p \in (0, 1)$. Тогда построим процесс Z^* , как в определении 2.4, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, & \text{если } X_n \leq \alpha. \end{cases}$$

По построению $Y_n \leq X_n$, откуда $Z(t) \leq Z^*(t)$, $t \geq 0$.

Следствие. $EZ(t) \leq At$ и $EZ(t)^2 \leq Bt^2$ для любого $t \geq \alpha$. В частности, $Z(t) < \infty$ п. н. при всех $t \geq 0$.

Следствие. $P(\forall t \geq 0 Z(t) < \infty) = 1$.

Доказательство. Поскольку $Z(t)$ является неубывающим процессом, т. е. $\forall s \leq t Z(s) \leq Z(t)$, то достаточно доказать, что $P(\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty) = 1$. Но

$$\{\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{Z(n) < \infty\} -$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1. \square

3.3 Элементарная теория восстановления

Лемма 3.3. Пусть X, X_1, X_2, \dots — н. о. р. случайные величины, $X \geq 0$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{п. н.} \mu \in [0, \infty]$ при $n \rightarrow \infty$, где $\mu = EX$ (конечное или бесконечное).

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k \xrightarrow{п. н.} EX \mathbb{I}\{X \leq c\}$.

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} EX \mathbb{I}\{X \leq m\} = EX.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла). \square

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение 3.2. Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geq c\}} |\xi_\alpha| dP = 0.$$

Известно, что если семейство $\{\xi_n, n \geq 1\}$ равномерно интегрируемо и $\xi_n \rightarrow \xi$ почти наверное, то ξ тоже интегрируемо и $E\xi_n \rightarrow E\xi$. Для неотрицательных случайных величин $\xi_n, n \geq 1$, таких, что $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н., где $E\xi < \infty$, имеет место и обратная импликация

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \implies \text{семейство } \{\xi_n, n \geq 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

Теорема 3.4 (Де ла Валле Пуссен). Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, т. е. $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \infty \quad \text{и} \quad \sup E g(|\xi_\alpha|) < \infty.$$

Теорема 3.5. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р. случайных величин X, X_1, X_2, \dots . Тогда

1. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n. n.} \frac{1}{\mu}$ при $t \rightarrow \infty$;
2. $\frac{EZ(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ при $t \rightarrow \infty$, где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ п. н., поэтому $\forall t > 0$ $Z(t) = \infty$ и утверждение теоремы очевидно.

Далее $\mu > 0$. Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1} \quad (2)$$

Для фиксированного ω рассмотрим последовательность $t_n := S_n(\omega)$. Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$ и траектория $Z(t, \omega)$ монотонна, $Z(t, \omega) \rightarrow \infty$. Будем рассматривать те (t, ω) , для которых $0 < Z(t, \omega) < \infty$ (при всех t_n , а значит, вообще при всех t это выполнено почти наверное). Для этих (t, ω) разделим обе части 2 на $Z(t)$. Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку $Z(t) \rightarrow \infty$, то $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{n. n.} \mu$, $\frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{n. n.} \mu$ и $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \rightarrow 1$. Следовательно, $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{n. n.} \mu$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n. n.} \frac{1}{\mu}$, что завершает доказательство утверждения 1.

Для доказательства утверждения 2 используем теорему 3.4. А именно, рассмотрим семейство $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$ и функцию $g(t) = t^2$, где $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$. По лемме 3.2

$$E\xi_t^2 = \frac{EZ(t)^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы 3.4 выполнены. Поэтому из нее вытекает, что семейство $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$ равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения 1 получаем, что

$$E \frac{Z(t)}{t} \rightarrow E \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

□

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.3. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с экспоненциальным распределением $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, т. е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пуассоновским процессом $N = \{N(t), t \geq 0\}$ называется процесс восстановления, построенный по X_1, X_2, \dots

Для $t > 0$ введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t; \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Для любого $t > 0$ случайные величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ являются независимыми, причем $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ для $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$ выполнено

$$P(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) = P(N(t) = n) P(X_1^t > u_1) \dots P(X_k^t > u_k).$$

Доказываем это индукцией по k .

База индукции: $k = 1$. Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина S_n имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n, X_1^t > u_1) &= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \\
&= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1) = P(S_n \leq t, S_{n+1} > t + u_1) = \\
&= P(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \\
&= P\left((S_n, X_{n+1}) \in \{(x, y) : x \leq t, x + y > t + u_1\}\right) = \\
&= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y) dx dy = (\text{независимость } S_n \text{ и } X_{n+1}) = \\
&= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t, y \geq 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy = \\
&= (\text{теорема Фубини}) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\
&= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.
\end{aligned}$$

Положим $u_1 = 0$, получим

$$P(N(t) = n, X_1^t > 0) = P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е. $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Далее,

$$P(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$

т. е. $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ и база установлена.

Индукционный переход: пусть $k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) &= \\
&= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \dots, X_{n+k} > u_k) = \\
&= (\text{см. предыдущее}) = P(N(t) = n) P(X_1^t > u_1) e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \\
&= P(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k}.
\end{aligned}$$

Снова положим $u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$ и просуммируем по всем $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим $P(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$, откуда $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$, индукционный переход завершен. \square

Пусть $X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$ — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$ соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы: $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$. Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

3.5 Задачи

Задача 3.1. Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

Решение. Нет, нельзя. Приведем контрпример. Итак, пусть процесс восстановления $Z(t)$ порожден н.о.р. случайными величинами $\{X, X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, где

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$$

Покажем, что у процесса восстановления $Z(t)$ существуют зависимые приращения. Сначала заметим, что

$$P(Z(1) = 0, Z(2) - Z(1) = 0) = 0,$$

так как $X \leq 2$.

Теперь по отдельности рассмотрим следующие вероятности $P(Z(1) = 0)$, $P(Z(2) - Z(1) = 0)$:

$$P(Z(1) = 0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}$$

Со второй вероятностью чуть сложнее:

$$P(Z(2) - Z(1) = 0) = P(Z(2) = Z(1)) \geq P(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{9}$$

Напишем в явном виде полученное противоречие:

$$P(Z(1) = 0, Z(2) - Z(1) = 0) = 0 \neq P(Z(1) = 0) P(Z(2) - Z(1) = 0)$$

■

Задача 3.2. Найти ковариационную функцию процесса $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$, где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t), t \geq 0\}$ - пуассоновский процесс интенсивности λ , случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N .

Решение. Пусть $t > s$. Распишем определение ковариации:

$$\text{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = E[\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)}] - E[\xi_0(-1)^{N(t)}] E[\xi_0(-1)^{N(s)}]$$

Вспомним, что для независимых случайных величин ξ и η выполнено $E\xi\eta = E\xi E\eta$ и продолжим рассуждения:

$$= E\eta^2 E(-1)^{N(t)+N(s)} - (E\eta)^2 E[(-1)^{N(t)}] E[(-1)^{N(s)}]$$

Обозначим за $\psi_\mu(z) = e^{\mu(z-1)}$ - производящую функцию $\text{Pois}(\mu)$. Заметим, что $E\eta^2 \equiv 1$, $E\eta = 0$ и $(-1)^{N(t)-N(s)} = (-1)^{N(t)+N(s)}$. Подставим в полученное выше выражение, продолжив рассуждения:

$$= E(-1)^{N(t)-N(s)} = \psi_{\lambda(t-s)}(-1) = e^{-2\lambda(t-s)},$$

Опустив изначальное предположение $t > s$, получаем

Ответ: $e^{-2\lambda|t-s|}$

■