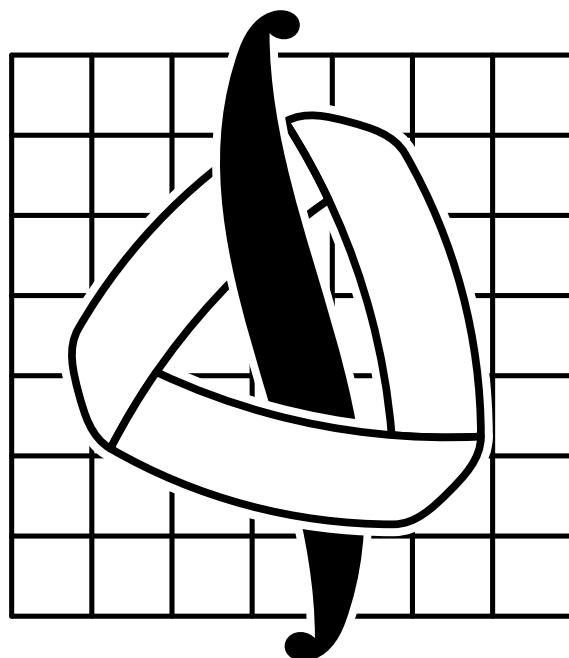


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет



Булинский А.В.
Случайные процессы

6 семестр, второй поток

5 марта 2017 г.

Оглавление

1	Случайные блуждания	4
1.1	Понятие случайного блуждания	4
1.2	Случайные блуждания	5
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	7
2	Ветвящиеся процессы и процессы восстановления	9
2.1	Модель Гальтона – Ватсона	9
2.2	Процессы восстановления	12
3	Пуассоновские процессы	13
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	13
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	13
3.3	Элементарная теория восстановления	14
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	16

Предметный указатель

Вырождение, 9

Измеримое

 отображение, 4

 пространство, 4

Множество

 возвратности, 8

 достижимости, 8

Модель Гальтона-Ватсона, 9

Парадокс времени ожидания, 17

Производящая функция, 9

Процесс

 восстановления, 12

 пуассоновский, 16

Пуассоновский процесс, 16

Распределение

 геометрическое, 13

 случайного элемента, 4

Случайное блуждание, 5

 простое, 5

 возвратное, 5

Случайный

 процесс, 4

 элемент, 4

Теорема

 Де ла Валле Пуссена, 15

 Ломницкого-Улама, 4

 Чжуна-Фукса, 8

Лекция 1

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется $\mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Обозначение. $f \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$.

Определение. Пусть есть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Пример 1.1.1. $S = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевские множества. Тогда при $m > 1$ случайный элемент Y — случайный вектор; если $m = 1$, то Y — случайная величина. $\mathbf{P}_Y(B) = \mathbf{P}[Y^{-1}(B)]$ — мера на \mathcal{B} .

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}_Y(B) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in B\}$$

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y* , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$\mathbf{P}_Y(B) := \mathbf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t) \mid t \in T\}$, где $X(t): \Omega \rightarrow S_t$, $X(t) \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}_t \quad \forall t \in T$. Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время непрерывно; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время дискретно; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о случайном поле.

Определение. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \in B_k), \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n.$$

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, \mathbb{Q}_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t$, $X_t \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}_t$ таких, что $\mathbf{P}_{X_t} = \mathbb{Q}_t$, $t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, \mathbb{Q})_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности для любого конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . *Случайным блужданием в \mathbb{R}^d* называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geq 0\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение. *Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d* — это такое случайное блуждание, что

$$\mathbf{P}(X = e_k) = \mathbf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\} \leq \infty$. Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathbf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathbf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Определение. Число $\tau := \inf \{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Лемма 2.1. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(\tau = \infty)\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1}$.¹

□ При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N = n + 1, \tau = k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) \mathbf{P}(\tau = k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N' = n) \mathbf{P}(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}, X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) = \mathbf{P}(N = n) \mathbf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{P}(N = n + 1) = \mathbf{P}(N = n + 1, \tau < \infty) + \mathbf{P}(N = n + 1, \tau = \infty),$$

¹ от наборщика: Судя по всему, в лемме подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$\mathbf{P}(N = n + 1) = \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathbf{P}(N = n + 1) = \mathbf{P}(\tau = \infty)\mathbf{P}(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. ■

Следствие 2.1. $\mathbf{P}(N = \infty)$ равно 0 или 1. $\mathbf{P}(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\tau < \infty) < 1$.

□ Пусть $\mathbf{P}(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}(N < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau = \infty)\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathbf{P}(\tau = \infty)}{1 - \mathbf{P}(\tau < \infty)} = \frac{\mathbf{P}(\tau = \infty)}{\mathbf{P}(\tau = \infty)} = 1.$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow \mathbf{P}(\tau = \infty) = 0 \Rightarrow \mathbf{P}(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbf{P}(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. ■

Теорема 2.2. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow \mathbf{E}N = \infty$ (соответственно, невозвратно $\Leftrightarrow \mathbf{E}N < \infty$).

□ Если $\mathbf{E}N < \infty$, то $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathbf{P}(\tau < \infty) < 1$.

$$\mathbf{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(\tau = \infty)\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \mathbf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathbf{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathbf{P}(\tau = \infty)}{(1 - \mathbf{P}(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - \mathbf{P}(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$\mathbf{E}N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие 2.2. S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.

□

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$$

Случай $d = 1$: $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай $d = 2$:

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$$

ряд тоже разойдется \Rightarrow блуждание возвратно. Теорема доказана. ■

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 3.1. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$\mathbf{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

□

$$\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbf{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \mathbf{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbf{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Следствие 3.1. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание не возвратно.

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда множество возвратности случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда точки, достижимые случайным блужданием S , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \mathbf{P}(|S_n - z| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 3.2 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие 3.2. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

Лекция 2

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона – Ватсона

Описание модели. Пусть $\{\xi, \xi_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathbf{P}(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega \mid \exists n = n(\omega) : Z_n(\omega) = 0\}$ — событие вырождения популяции. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

Определение. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. Производящая функция для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathbf{P}(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{E}s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 1.1. Вероятность $\mathbf{P}(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_{\xi}$ и $p \in [0, 1]$.

□

$$\begin{aligned}
f_{Z_n}(s) &= \mathbf{E} s^{Z_n} = \mathbf{E} \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} \right].
\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma \{Z_r\} \subset \sigma \{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma \{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\left\{ s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right\} \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbf{E} \mathbb{I} \{Z_{n-1} = j\} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbf{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbf{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbf{P}(Z_{n-1} = j) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbf{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s))
\end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbf{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $\mathbf{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbf{P}(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_{ξ} непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbf{P}(A)),$$

то есть $\mathbf{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_{\xi}(p)$, $p \in [0, 1]$. ■

Теорема 1.2. Вероятность p вырождения процесса Гальтона – Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (2.1.1)$$

где $\psi = \psi_{\xi}$.

□ Пусть $p_0 := \mathbf{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\xi \geq 1) = 1, \quad \mathbf{P} \left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\} \right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $\mathbf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (2.1.1).

Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathbf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathbf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (2.1.1).

Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N} : p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n .

Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (2.1.1) нет корней на $\Delta_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, \mathbf{P}(A)), \quad \psi_n(0) \nearrow \mathbf{P}(A).$$

По лемме 1.1 $\mathbf{P}(A)$ является корнем уравнения (2.1.1). Следовательно, показано, что $\mathbf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. ■

Теорема 1.3.

1° Вероятность вырождения $\mathbf{P}(A)$ есть нуль $\Leftrightarrow p_0 = 0$.

2° Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $\mathbf{E}\xi \leq 1$ имеем $\mathbf{P}(A) = 1$, при $\mathbf{E}\xi > 1$ имеем $\mathbf{P}(A) < 1$.

□ Докажем п. 1°. Пусть $\mathbf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем п. 2°. Пусть $\mu = \mathbf{E}\xi \leq 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (2.1.1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \mathbf{P}(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0, \quad \text{при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (2.1.1). Значит, $\mathbf{P}(A) = 1$.

Пусть $\mu = \mathbf{E}\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (2.1.1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} \mathbf{P}(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - \mathbf{P}(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -\mathbf{P}(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $\mathbf{P}(A)$ равна наименьшему корню уравнения (2.1.1), то $\mathbf{P}(A) < 1$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 1.1. Пусть $\mathbf{E}\xi < \infty$. Тогда $\mathbf{E}Z_n = (\mathbf{E}\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

□ Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathbf{E}Z_1 = \mathbf{E}\xi$.

Индуктивный переход:

$$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbf{E}\xi \mathbf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathbf{E}\xi \mathbf{E}Z_{n-1} = (\mathbf{E}\xi)^n.$$

■

Определение.

При $\mathbf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $\mathbf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $\mathbf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} Z(0) &:= 0; \\ Z(t) &:= \sup \{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение. Рассмотрим процесс восстановления $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где $\mathbf{P}(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$, $\mathbf{P}(Y = 0) = 1 - p$. Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left\lceil \frac{t}{C} \right\rceil$.

Лемма 2.1. Для $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{\left\lceil \frac{t}{\alpha} \right\rceil + 1} q^{m - \left\lceil \frac{t}{\alpha} \right\rceil}, & \text{если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

Лекция 3

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Определение. Будем говорить, что дискретная случайная величина U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если для $k = 0, 1, 2, \dots$ $\mathbf{P}(U = k) = (1 - p)^k p$.

Лемма 1.1. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_j с параметром $p \in (0, 1)$, где $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor$. Тогда

$$\mathbf{P}(j + U_0 + \dots + U_j = m) = \mathbf{P}(Z^*(t) = m).$$

□ Обозначим $M = \left\{ (k_0, \dots, k_j) \mid k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=0}^j k_i = m - j \right\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U_0 + \dots + U_j = m - j) &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} \mathbf{P}(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} \mathbf{P}(U_0 = k_0) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(U_j = k_j) = \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p(1 - p)^{k_0} \cdot \dots \cdot p(1 - p)^{k_j} = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p^{j+1} (1 - p)^{k_0 + \dots + k_j} = p^{j+1} (1 - p)^{m-j} \#M = C_m^j p^{j+1} (1 - p)^{m-j}. \end{aligned}$$

■

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 2.1. Пусть $t \geq \alpha$. Тогда $\mathbf{E}Z^*(t) \leq At$ и $\mathbf{E}Z^*(t)^2 \leq Bt^2$, где $A := A(p, \alpha) > 0$, $B := B(p, \alpha) > 0$.

□ По лемме 1.1 $\mathbf{E}Z^*(t) = \mathbf{E}(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j + 1)\mathbf{E}U$, где $\mathbf{E}U =: a(p) < \infty$ — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$\mathbf{E}Z^*(t) = j + (j + 1)a(p) \leq (j + 1)(a(p) + 1) \leq \frac{t + \alpha}{\alpha} (a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha} (a(p) + 1) = At,$$

где $A := \frac{2(a(p) + 1)}{\alpha}$.

Далее,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Z^*(t)^2 &= \mathbf{D}Z^*(t) + (\mathbf{E}Z^*(t))^2 \leq (j+1) \underbrace{\mathbf{D}U}_{\sigma^2(p)} + (j+1)^2 (a(p) + 1)^2 \leq \\ &\leq (j+1)^2 (\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2) \leq \frac{4}{\alpha^2} (\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2) t^2 = Bt^2,\end{aligned}$$

где $B := \frac{4}{\alpha^2} (\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2)$. ■

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины $X \geq 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что $\mathbf{P}(X > \alpha) = p \in (0, 1)$. Тогда построим процесс Z^* , как в определении из прошлой лекции, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, & \text{если } X_n \leq \alpha. \end{cases}$$

По построению $Y_n \leq X_n$, откуда $Z(t) \leq Z^*(t)$, $t \geq 0$.

Следствие 2.1. $\mathbf{E}Z(t) \leq At$ и $\mathbf{E}Z(t)^2 \leq Bt^2$ для любого $t \geq \alpha$. В частности, $Z(t) < \infty$ п. н. при всех $t \geq 0$.

Следствие 2.2. $\mathbf{P}(\forall t \geq 0 Z(t) < \infty) = 1$.

□ Поскольку $Z(t)$ является неубывающим процессом, т.е. $\forall s \leq t Z(s) \leq Z(t)$, то достаточно доказать, что $\mathbf{P}(\bigwedge n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty) = 1$. Но

$$\{\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{Z(n) < \infty\} -$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1. ■

3.3 Элементарная теория восстановления

Лемма 3.1. Пусть X, X_1, X_2, \dots — н. о. р. случайные величины, $X \geq 0$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0, \infty]$ при $n \rightarrow \infty$, где $\mu = \mathbf{E}X$ (конечное или бесконечное).

□ Если $\mu < \infty$, то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}(X_n \leq c).$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{E}X \mathbb{I}\{X \leq c\}$.

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbf{E}X.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла). ■

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение. Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, t \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geq c\}} |\xi_\alpha| d\mathbf{P} = 0.$$

Известно, что если семейство $\{\xi_n, n \geq 1\}$ равномерно интегрируемо и $\xi_n \rightarrow \xi$ почти наверное, то ξ тоже интегрируема и $\mathbf{E}\xi_n \rightarrow \mathbf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин ξ_n , $n \geq 1$, таких, что $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н., где $\mathbf{E}\xi < \infty$, имеет место и обратная импликация

$$\mathbf{E}\xi_n \rightarrow \mathbf{E}\xi \Rightarrow \text{семейство } \{\xi_n, n \geq 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

Теорема 3.2 (Де ла Валле Пуссен). Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, т. е. $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, т. ч. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \infty$ и $\sup \mathbf{E}g(|\xi_\alpha|) < \infty$.

Теорема 3.3. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р случайных величин X, X_1, X_2, \dots . Тогда

$$1^\circ \quad \frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

$$2^\circ \quad \frac{\mathbf{E}Z(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

□ Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ п. н., поэтому $\forall t > 0 \quad Z(t) = \infty$ и утверждение теоремы очевидно.

Далее $\mu > 0$. Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1} \quad (3.3.1)$$

Для фиксированного ω рассмотрим последовательность $t_n := S_n(\omega)$. Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$ и траектория $Z(t, \omega)$ монотонна, $Z(t, \omega) \rightarrow \infty$. Будем рассматривать те (t, ω) , для которых $0 < Z(t, \omega) < \infty$ (при всех t_n , а значит, вообще при всех t это выполнено почти наверное). Для этих (t, ω) разделим обе части 3.3.1 на $Z(t)$. Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку $Z(t) \rightarrow \infty$, то $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$, $\frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$ и $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \rightarrow 1$. Следовательно, $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}$, что завершает доказательство утверждения п. 1°.

Для доказательства утверждения п. 2° используем теорему Валле–Пуссена. А именно, рассмотрим семейство $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$ и функцию $g(t) = t^2$, где $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$. По лемме 2.1

$$\mathbf{E}\xi_t^2 = \frac{\mathbf{E}Z(t)^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы Валле–Пуссена выполнены.

Поэтому из нее вытекает, что семейство $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$ равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения п. 1° получаем, что

$$\mathbf{E} \frac{Z(t)}{t} \rightarrow \mathbf{E} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

■

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение. Пусть X, X_1, X_2, \dots — н.о.р. случайные величины с экспоненциальным распределением $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, т.е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пуассоновским процессом $N = \{N(t), t \geq 0\}$ называется процесс восстановления, построенный по X_1, X_2, \dots

Для $t > 0$ введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t; \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 4.1. Для любого $t > 0$ случайные величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ являются независимыми, причем $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ для $k = 1, 2, \dots$

□ Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$ выполнено

$$\mathbf{P}\{N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k\} = \mathbf{P}(N(t) = n) \cdot \mathbf{P}(X_1^t > u_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(X_k^t > u_k).$$

Доказываем это индукцией по k .

База индукции: $k = 1$. Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина S_n имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) &= \mathbf{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \mathbf{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t + u_1) = \\ &= \mathbf{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \mathbf{P}((S_n, X_{n+1}) \in \{(x, y) \mid x \leq t, x + y > t + u_1\}) = \\ &= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y) dx dy \stackrel{S_n \perp X_{n+1}}{=} \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t, y \geq 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Положим $u_1 = 0$, получим

$$\mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > 0) = \mathbf{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т.е. $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Далее,

$$\mathbf{P}(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$

т. е. $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ и база установлена.

Индукционный переход: пусть $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k\} &= \\ &= \mathbf{P} \{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \dots, X_{n+k} > u_k\} \stackrel{\text{см. выше}}{=} \\ &= \mathbf{P} \{N(t) = n\} \mathbf{P} \{X_1^t > u_1\} \cdot e^{-\lambda u_2} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda u_k} = \mathbf{P} \{N(t) = n\} \cdot e^{-\lambda u_1} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda u_k}. \end{aligned}$$

Снова положим $u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$ и просуммируем по всем $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим $\mathbf{P}(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$, откуда $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$, индукционный переход завершен. ■

Пусть $X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$ — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$ соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы: $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$. Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

Литература

- [1] Булинский, Ширяев, Теория случайных процессов