МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Булинский А.В.
Случайные процессы

6 семестр, втрой поток

5 марта 2017 г.

Оглавление

Предметный указатель

Лекция 1

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение. Пусть V — множество, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Тогда $(V, \mathscr{A})$ называется *измеримым пространством.*

Определение. Пусть есть $(V, \mathscr{A})$ и $(S, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства, $f\colon V \to S$ — отображение. f называется $\mathscr{A} \,\big|\, \mathscr{B}$*-измеримым*, если $\forall\, B \in \mathscr{B}\ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$.

Обозначение. $f \in \mathscr{A} \,\big|\, \mathscr{B}$.

Определение. Пусть есть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — отображение. Если $Y \in \mathscr{F} \,\big|\, \mathscr{B}$, то Y называется *случайным элементом.*

Пример 1.1.1. $S = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевские множества. Тогда при $m > 1$ случайный элемент Y — случайный вектор; если $m = 1$, то Y — случайная величина. $\mathbf{P}_Y(B) = \mathbf{P}[Y^{-1}(B)]$ — мера на $\mathcal{B}$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}_Y(B) = \mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \in B\right\}$$

Определение. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $(S, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, $Y\colon \Omega \to S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y,* — это функция на множествах из $\mathscr{B}$, задаваемая равенством

$$\mathbf{P}_Y(B) \coloneqq \mathbf{P}(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Определение. Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством,* — это семейство случайных элементов $X = \{X(t) \mid t \in T\}$, где $X(t)\colon \Omega \to S_t$, $X(t) \in \mathscr{F} \,\big|\, \mathscr{B}_t \quad \forall\ t \in T$. Здесь T — это произвольное параметрическое множество, $(S_t, \mathscr{B}_t)$ — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле.*

Определение. Случайные элементы $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in B_k), \qquad \forall\, B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n.$$

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). *Пусть $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathbb{Q}_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ существует семейство независимых случайных элементов $X_t\colon \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathscr{F} \,\big|\, \mathscr{B}_t$ таких, что $\mathbf{P}_{X_t} = \mathbb{Q}_t$, $t \in T$.*

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениеми. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathscr{B}_t, \mathbb{Q})_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности для любого конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. *Случайным блужданием в* $\mathbb{R}^d$ называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geqslant 0\}, n \in \mathbb{Z}_+$ такой, что

$$S_0 \coloneqq x \in \mathbb{R}^d \quad \text{(начальная точка);}$$
$$S_n \coloneqq x + X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ — это такое случайное блуждание, что

$$\mathbf{P}(X = e_k) = \mathbf{P}(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение. Введем $N \coloneqq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\} \leqslant \infty$. Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ называется *возвратным*, если $\mathbf{P}(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $\mathbf{P}(N < \infty) = 1$.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $\mathbf{P}(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Определение. Число $\tau \coloneqq \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau \coloneqq \infty$, если $S_n \neq 0 \; \forall n \in N$) называется *моментом первого возвращения в 0.*

Лемма 2.1. *Для* $\forall\, n \in \mathbb{N}\; \mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(\tau = \infty)\mathbf{P}(\tau < \infty)^{n-1}$. [1]

☐ При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\mathbf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(N = n+1, \tau = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) \mathbf{P}(\tau = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(N' = n)\mathbf{P}(\tau = k),$$

где N' определяется по последовательности $X_1' = X_{k+1}, X_2' = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независиые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P}(N = n+1, \tau < \infty) = \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{P}(N = n+1) = \mathbf{P}(N = n+1, \tau < \infty) + \mathbf{P}(N = n+1, \tau = \infty),$$

[1] *от наборщика:* Судя по всему, в лемме подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n+1 \geqslant 2$. Из этого следует, что

$$\mathbf{P}(N=n+1)=\mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(\tau<\infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$\mathbf{P}(N=n+1)=\mathbf{P}(\tau=\infty)\mathbf{P}(\tau<\infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. ■

Следствие 2.1. $\mathbf{P}(N=\infty)$ *равно 0 или 1.* $\mathbf{P}(N<\infty)=1 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\tau<\infty)<1$.

□ Пусть $\mathbf{P}(\tau<\infty)<1$. Тогда

$$\mathbf{P}(N<\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\tau=\infty)\mathbf{P}(\tau<\infty)^{n-1}=\frac{\mathbf{P}(\tau=\infty)}{1-\mathbf{P}(\tau<\infty)}=\frac{\mathbf{P}(\tau=\infty)}{\mathbf{P}(\tau=\infty)}=1.$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$\mathbf{P}(\tau<\infty)=1 \Rightarrow \mathbf{P}\left(\tau=\infty\right)=0 \Rightarrow \mathbf{P}(N=n)=0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \Rightarrow \mathbf{P}(N<\infty)=0.$$

Следствие доказано. ■

Теорема 2.2. *Простое случайное блуждание в* $\mathbb{Z}^d$ *возвратно* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{E}N=\infty$ *(соответственно, невозвратно* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{E}N<\infty$*).*

□ Если $\mathbf{E}N<\infty$, то $\mathbf{P}(N<\infty)=1$. Пусть теперь $\mathbf{P}(N<\infty)=1$. Это равносильно тому, что $\mathbf{P}(\tau<\infty)<1$.

$$\mathbf{E}N=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{P}(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{P}(\tau=\infty)\mathbf{P}(\tau<\infty)^{n-1}=\mathbf{P}(\tau=\infty)\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{P}(\tau<\infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}np^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}p^n\right)'=(\frac{1}{1-p})'=\frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathbf{P}(\tau=\infty)\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{P}(\tau<\infty)^{n-1}=\frac{\mathbf{P}(\tau=\infty)}{(1-\mathbf{P}(\tau<\infty))^2}=\frac{1}{1-\mathbf{P}(\tau<\infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Замечание. Заметим, что поскольку $N=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}\left\{S_n=0\right\}$, то

$$\mathbf{E}N=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\mathbb{I}\left\{S_n=0\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(S_n=0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$\text{S возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(S_n=0)=\infty.$$

Следствие 2.2. *S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.*

□

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = (\frac{1}{2d})^{2n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_d=n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \ldots (n_d!)^2}.$$

Случай $d = 1$: $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n}$. Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \to \infty.$$

Соответственно,

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ блуждание возвратно. Аналогично рассматривается *случай $d = 2$*:

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \ldots = \left\{\frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n}\right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$$

ряд тоже разойдется $\Rightarrow$ блуждание возвратно. Теорема доказана. ■

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 3.1. *Для простого случайного блуждания в $\mathbb{Z}^d$*

$$\mathbf{E}N = \lim_{c\uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)}\, dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X, $t \in \mathbb{R}^d$.

□

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi}\, dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathbb{I}\left\{S_n = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{I}\left\{S_n^{(k)} = 0\right\} = \prod_{k=1}^{d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi}\, dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\, dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbf{E}\mathbb{I}\left\{S_n = 0\right\} = \mathbf{E}\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{E}e^{i(S_n,t)}\, dt.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}e^{i(S_n,t)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} (\varphi(t))^n\, dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n \, dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leqslant c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n \, dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} \, dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbf{P}(S_n = 0) \to \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Следствие 3.1. *При $d \geqslant 3$ простое случайное блуждание невозвратно.*

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в $\mathbb{R}^d$, если $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε-окрестность точки x.

Определение. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x \right\}.$$

Определение. Пусть есть случайное блуждание S на $\mathbb{R}^d$. Тогда *точки, достижимые случайным блужданием S,* — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall\, z \in P(S) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n : \; \mathbf{P}(|S_n - z| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 3.2 (Чжуна-Фукса). *Если $R(S) \neq \varnothing$, то $R(S) = P(S)$.*

Следствие 3.2. *Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \varnothing$.*

Лекция 2

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона – Ватсона

Описание модели. Пусть $\{\xi, \xi_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathbf{P}(\xi = m) = p_m \geqslant 0,\ m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) \coloneqq 1,$$
$$Z_n(\omega) \coloneqq \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega \mid\ \exists\, n = n(\omega) : Z_n(\omega) = 0\}$ — *событие вырождения популяции.* Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

Определение. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leqslant 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = \mathbf{P}(Y = k), k = 0, 1,\ \ldots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{E} s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 1.1. *Вероятность* $\mathbf{P}(A)$ *является корнем уравнения* $\psi(p) = p$, *где* $\psi = f_\xi$ *и* $p \in [0, 1]$.

□

$$f_{Z_n}(s) = \mathbf{E}s^{Z_n} = \mathbf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}\xi_{n,k}}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\left\{Z_{n-1}=j\right\}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\left(s^{\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbb{I}\left\{Z_{n-1}=j\right\}\right].$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k},\ m=1,\ldots,r,\ k\in\mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k},\ k\in\mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\left\{s^{\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right\}\mathbb{I}\left\{Z_{n-1}=j\right\}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbf{E}\mathbb{I}\left\{Z_{n-1}=j\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right)\mathbf{P}(Z_{n-1}=j) = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\mathbf{E}s^{\xi_{n,k}}\mathbf{P}(Z_{n-1}=j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi^j(s)\mathbf{P}(Z_{n-1}=j) = f_{Z_{n-1}}\left(\psi_\xi(s)\right)$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}\left(\psi_\xi(s)\right), \quad s\in[0,1].$$

Подставим $s=0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}\left(\psi_\xi(0)\right)$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}\left(\psi_\xi\left(\psi_\xi(s)\right)\right) = \ldots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi\ldots(\psi_\xi(s))\ldots)}_{n\text{ итераций}} = \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s=0$ имеем, что

$$\mathbf{P}(Z_n=0) = \psi_\xi\left(\mathbf{P}\left(Z_{n-1}=0\right)\right).$$

Но $\mathbf{P}(Z_n=0) \nearrow \mathbf{P}(A)$ при $n\to\infty$ и ψ_ξ непрерывна на $[0,1]$. Переходим к пределу при $n\to\infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \psi_\xi(\mathbf{P}(A)),$$

то есть $\mathbf{P}(A)$ — корень уравнения $p=\psi_\xi(p)$, $p\in[0,1]$. ■

Теорема 1.2. *Вероятность* p *вырождения процесса Гальтона – Ватсона есть* ***наименьший*** *корень уравнения*

$$\psi(p) = p, \quad p\in[0,1], \tag{2.1.1}$$

где $\psi=\psi_\xi$.

□ Пусть $p_0 \coloneqq \mathbf{P}(\xi=0)=0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\xi\geqslant 1)=1, \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{n,k}\{\xi_{n,k}\geqslant 1\}\right)=1.$$

Поэтому $Z_n\geqslant 1$ при $\forall\, n$, то есть $\mathbf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (**??**).

Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathbf{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathbf{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (**??**).

Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists\, m \in \mathbb{N}: \; p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n.

Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (**??**) нет корней на $\Delta_n \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, \mathbf{P}(A)), \quad \psi_n(0) \nearrow \mathbf{P}(A).$$

По лемме **??** $\mathbf{P}(A)$ является корнем уравнения (**??**). Следовательно, показано, что $\mathbf{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. ■

Теорема 1.3.

1° *Вероятность вырождения* $\mathbf{P}(A)$ *есть нуль* $\Leftrightarrow p_0 = 0$.

2° *Пусть* $p_0 > 0$. *Тогда при* $\mathbf{E}\xi \leqslant 1$ *имеем* $\mathbf{P}(A) = 1$, *при* $\mathbf{E}\xi > 1$ *имеем* $\mathbf{P}(A) < 1$.

□ Докажем **??**. Пусть $\mathbf{P}(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем **??**. Пусть $\mu = \mathbf{E}\xi \leqslant 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (**??**) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \mathbf{P}(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0, \quad \text{при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leqslant 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (**??**). Значит, $P(A) = 1$.

Пусть $\mu = \mathbf{E}\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (**??**) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} \mathbf{P}(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - \mathbf{P}(\xi = 1) > 0,$$
$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -\mathbf{P}(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $\mathbf{P}(A)$ равна наименьшему корню уравнения (**??**), то $\mathbf{P}(A) < 1$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 1.1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi < \infty$. *Тогда* $\mathbf{E}Z_n = (\mathbf{E}\xi)^n, \; n \in \mathbb{N}$.

□ Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow \mathbf{E}Z_1 = \mathbf{E}\xi$.

Индуктивный переход:

$$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} j\mathbf{E}\xi\mathbf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}Z_{n-1} = (\mathbf{E}\xi)^n .$$

■

Определение.

При $\mathbf{E}\xi < 1$ процесс называется *докритическим.*

При $\mathbf{E}\xi = 1$ процесс называется *критическим.*

При $\mathbf{E}\xi > 1$ процесс называется *надкритическим.*

2.2 Процессы восстановления

Определение. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, где $n \in \mathbb{N}$, $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geqslant 0$. Положим

$$\begin{aligned} Z(0) &\coloneqq 0; \\ Z(t) &\coloneqq \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leqslant t\}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

(здесь считаем, что $\sup \varnothing \coloneqq \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) \leqslant t\} .$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\} .$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления.*

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

Определение. Рассмотрим *процесс восстановления* $\{Z^\star(t),\; t \geqslant 0\}$, который строится по $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где $\mathbf{P}(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$, $\mathbf{P}(Y = 0) = 1 - p$. Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \mathrm{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \;\; \forall\, t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \left[\frac{t}{c}\right]$.

Лемма 2.1. *Для* $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}(Z^\star(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]+1} q^{m-\left[\frac{t}{\alpha}\right]}, & \text{если } m \geqslant j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

Лекция 3

Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Определение. Будем говорить, что дискретная случайная величина U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0,1)$, если для $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathbf{P}(U = k) = (1-p)^k p$.

Лемма 1.1. *Рассмотрим независимые геометрические величины* $U_0, \ldots, U_j$ *с параметром* $p \in (0,1)$, *где* $j = \left[\frac{t}{\alpha}\right]$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(j + U_0 + \ldots + U_j = m) = \mathbf{P}(Z^\star(t) = m).$$

□ Обозначим $M = \left\{(k_0, \ldots, k_j) \mid k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum\limits_{i=0}^{j} k_j = m - j\right\}$.

$$\mathbf{P}\left(U_0 + \ldots + U_j = m - j\right) = \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} \mathbf{P}(U_0 = k_0, \ldots, U_j = k_j) =$$
$$= \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} \mathbf{P}(U_0 = k_0) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(U_j = k_j) = \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} p(1-p)^{k_0} \cdot \ldots \cdot p(1-p)^{k_j} =$$
$$= \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} p^{j+1}(1-p)^{k_0+\ldots+k_j} = p^{j+1}(1-p)^{m-j} \# M = C_m^j p^{j+1}(1-p)^{m-j}.$$

■

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 2.1. *Пусть* $t \geqslant \alpha$. *Тогда* $\mathbf{E}Z^\star(t) \leqslant At$ *и* $\mathbf{E}Z^\star(t)^2 \leqslant Bt^2$, *где* $A \coloneqq A(p,\alpha) > 0$, $B \coloneqq B(p,\alpha) > 0$.

□ По лемме **??** $\mathbf{E}Z^\star(t) = \mathbf{E}(j + U_0 + \ldots + U_j) = j + (j+1)\mathbf{E}U$, где $\mathbf{E}U \eqqcolon a(p) < \infty$ — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$\mathbf{E}Z^\star(t) = j + (j+1)a(p) \leqslant (j+1)\left(a(p)+1\right) \leqslant \frac{t+\alpha}{\alpha}\left(a(p)+1\right) \leqslant \frac{2t}{\alpha}\left(a(p)+1\right) = At,$$

где $A \coloneqq \dfrac{2(a(p)+1)}{\alpha}$.

Далее,

$$\mathbf{E}Z^\star(t)^2 = \mathbf{D}Z^\star(t) + (\mathbf{E}Z^\star(t))^2 \leqslant (j+1)\underbrace{\mathbf{D}U}_{\sigma^2(p)} + (j+1)^2\,(a(p)+1)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (j+1)^2\left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2\right) \leqslant \frac{4}{\alpha^2}\left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2\right)t^2 = Bt^2,$$

где $B \coloneqq \frac{4}{\alpha^2}\left(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2\right)$. ■

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины $X \geqslant 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что $\mathbf{P}(X > \alpha) = p \in (0,1)$. Тогда построим процесс $Z^\star$, как в определении определении из прошлой лекции, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, \text{если } X_n \leqslant \alpha. \end{cases}$$

По построению $Y_n \leqslant X_n$, откуда $Z(t) \leqslant Z^\star(t)$, $t \geqslant 0$.

Следствие 2.1. $\mathbf{E}Z(t) \leqslant At$ *и* $\mathbf{E}Z(t)^2 \leqslant Bt^2$ *для любого* $t \geqslant \alpha$. *В частности,* $Z(t) < \infty$ *п. н. при всех* $t \geqslant 0$.

Следствие 2.2. $\mathbf{P}\,(\,\forall\, t \geqslant 0\ Z(t) < \infty) = 1$.

□ Поскольку $Z(t)$ является неубывающим процессом, т. е. $\forall\ s \leqslant t\ Z(s) \leqslant Z(t)$, то достаточно доказать, что $\mathbf{P}\left(\mathbb{A} n \in \mathbb{N}\ Z(n) < \infty\right) = 1$. Но

$$\{\,\forall\, n \in \mathbb{N}\ Z(n) < \infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{Z(n) < \infty\}\ —$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1. ■

3.3 Элементарная теория восстановления

Лемма 3.1. *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ *— н. о. р. случайные величины,* $X \geqslant 0$. *Тогда* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0,\infty]$ *при* $n \to \infty$, *где* $\mu = \mathbf{E}X$ *(конечное или бесконечное).*

□ Если $\mu < \infty$, то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) \coloneqq X_n \mathbb{I}\left(X_n \leqslant c\right).$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{E}X\mathbb{I}\text{-}X_n \leqslant c$.

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}X\mathbb{I}\left\{X \leqslant m\right\} = \mathbf{E}X.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла). ■

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение. Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, t \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\alpha\in\Lambda} \int\limits_{\{|\xi_\alpha| \geqslant c\}} |\xi_\alpha|\, d\mathbf{P} = 0.$$

Известно, что если семейство $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируемо и $\xi_n \to \xi$ почти наверное, то ξ тоже интегрируема и $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$. Для неотрицательных случайных величин ξ_n, $n \geqslant 1$, таких, что $\xi_n \to \xi$ п. н., где $\mathbf{E}\xi < \infty$, имеет место и обратная импликация

$$\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi \Rightarrow \text{семейство } \{\xi_n, n \geqslant 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

Теорема 3.2 (Де ла Валле Пуссен). *Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, т. е. $g \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \,\big|\, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, т. ч. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = \infty$ и $\sup \mathbf{E}g(|\xi_\alpha|) < \infty$.*

Теорема 3.3. *Пусть $Z = \{Z(t), t \geqslant 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р случайных величин $X, X_1, X_2, \ldots$. Тогда*

1° $\dfrac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \dfrac{1}{\mu}$ *при $t \to \infty$;*

2° $\dfrac{\mathbf{E}Z(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$ *при $t \to \infty$,*

где $\frac{1}{0} \coloneqq \infty$, $\frac{1}{\infty} \coloneqq 0$.

□ Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ п. н., поэтому $\forall\ t > 0\ Z(t) = \infty$ и утверждение теоремы очевидно.

Далее $\mu > 0$. Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leqslant t < S_{Z(t)+1} \tag{3.3.1}$$

Для фиксированного ω рассмотрим последовательность $t_n \coloneqq S_n(\omega)$. Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$ и траектория $Z(t, \omega)$ монотонна, $Z(t, \omega) \to \infty$. Будем рассматривать те (t, ω), для которых $0 < Z(t, \omega) < \infty$ (при всех t_n, а значит, вообще при всех t это выполнено почти наверное). Для этих (t, ω) разделим обе части **??** на $Z(t)$. Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leqslant \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1}\frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку $Z(t) \to \infty$, то $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$, $\frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$ и $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \to 1$. Следовательно, $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$ при $t \to \infty$, т. е. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}$, что завершает доказательство утверждения **??**.

Для доказательства утверждения **??** используем теорему Валле–Пуссена. А именно, рассмотрим семейство $\{\xi_t, t \geqslant \alpha\}$ и функцию $g(t) = t^2$, где $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$. По лемме **??**

$$\mathbf{E}\xi_t^2 = \frac{\mathbf{E}Z(t)^2}{t^2} \leqslant \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы Валле–Пуссена выполнены.

Поэтому из нее вытекает, что семейство $\{\xi_t, t \geqslant \alpha\}$ равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения **??** получаем, что

$$\mathbf{E}\frac{Z(t)}{t} \to \mathbf{E}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \to \infty.$$

■

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение. Пусть $X,\ X_1,\ X_2,\ldots$ — н. о. р. случайные величины с экспоненциальным распределением $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,т. е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пуассоновским процессом $N = \{N(t), t \geqslant 0\}$ называется процесс восстановления, построенный по $X_1, X_2, \ldots$.

Для $t > 0$ введем случайные величины

$$X_1^t \coloneqq S_{N(t)+1} - t;$$
$$X_k^t \coloneqq S_{N(t)+k}, \quad k \geqslant 2.$$

Лемма 4.1. *Для любого $t > 0$ случайные величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \ldots$ являются независимыми, причем $N(t) \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$, $X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ для $k = 1, 2, \ldots$.*

$\square$ Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\ \ \forall\, u_1, \ldots, u_k \geqslant 0$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{N(t) = n, X_1^t > u_1, \ldots, X_k^t > u_k\right\} = \mathbf{P}(N(t) = n) \cdot \mathbf{P}(X_1^t > u_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(X_k^t > u_k).$$

Доказываем это индукцией по k.

База индукции: $k = 1$. Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина S_n имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) &= \mathbf{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \mathbf{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t + u_1) = \\
&= \mathbf{P}(S_n \leqslant t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \mathbf{P}\left((S_n, X_{n+1}) \in \{(x, y) \mid x \leqslant t, x + y > t + u_1\}\right) = \\
&= \iint\limits_{\substack{x \leqslant t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y)\, dx\, dy \xlongequal{S_n\ \perp\ X_{n+1}} \iint\limits_{\substack{x \leqslant t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y)\, dx\, dy = \\
&= \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t, y \geqslant 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}\, dx\, dy \xlongequal{\text{т. Фубини}} \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx \int\limits_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}\, dy = \\
&= \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)}\, dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.
\end{aligned}$$

Положим $u_1 = 0$, получим

$$\mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > 0) = \mathbf{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е. $N(t) \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. Далее,

$$\mathbf{P}(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$

т. е. $X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ и база установлена.

Индукционный переход: пусть $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{N(t) = n, X_1^t > u_1, \ldots, X_k^t > u_k\right\} = \\
&\qquad = \mathbf{P}\left\{S_n \leqslant t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \ldots, X_{n+k} > u_k\right\} \overset{\text{см. выше}}{=\!=} \\
&\qquad = \mathbf{P}\left\{N(t) = n\right\} \mathbf{P}\left\{X_1^t > u_1\right\} \cdot e^{-\lambda u_2} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda u_k} = \mathbf{P}\left\{N(t) = n\right\} \cdot e^{-\lambda u_1} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda u_k}.
\end{aligned}$$

Снова положим $u_1 = \ldots = u_{k-1} = 0$ и просуммируем по всем $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим $\mathbf{P}(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$, откуда $X_k^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, индукционный переход завершен. ■

Пусть $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$ соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы: $X_1^t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

Литература

[1] Булинский, Ширяев, Теория случайных процессов