

## Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания</b>                           | <b>1</b>  |
| 1.1      | Понятие случайного блуждания   | 1         |
| 1.2      | Случайные блуждания  | 2         |
| 1.3      | Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции   | 5         |
| <b>2</b> | <b>Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления</b> | <b>6</b>  |
| 2.1      | Модель Гальтона–Ватсона  | 6         |
| 2.2      | Процессы восстановления  | 9         |
| <b>3</b> | <b>Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы</b>                        | <b>10</b> |
| 3.1      | Процессы восстановления (продолжение)                                    | 10        |
| 3.2      | Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным       | 11        |
| 3.3      | Элементарная теория восстановления                                       | 12        |
| 3.4      | Пуассоновский процесс как процесс восстановления                         | 13        |
|          | <b>Предметный указатель</b>  | <b>16</b> |

## 1 Лекция от 08.02.17

### Случайные блуждания

#### 1.1 Понятие случайного блуждания

**Определение 1.1.** Пусть  $V$  — множество, а  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Тогда  $(V, \mathcal{A})$  называется *измеримым пространством*.

**Определение 1.2.** Пусть есть  $(V, \mathcal{A})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — два измеримых пространства,  $f: V \rightarrow S$  — отображение.  $f$  называется  $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если  $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Обозначение:  $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ .

**Определение 1.3.** Пусть есть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — отображение. Если  $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ , то  $Y$  называется *случайным элементом*.

**Определение 1.4.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом  $Y$* , — это функция на множествах из  $\mathcal{B}$ , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

**Определение 1.5.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов  $X = \{X(t), t \in T\}$ , где  $X(t): \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$   $\forall t \in T$ . Здесь  $T$  — это произвольное параметрическое множество,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — произвольные измеримые пространства.

*Замечание.* Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то  $t \in T$  интерпретируется как время. Если  $T = \mathbb{R}$ , то время *непрерывно*; если  $T = \mathbb{Z}$  или  $T = \mathbb{Z}_+$ , то время *дискретно*; если  $T \subset \mathbb{R}^d$ , то говорят о *случайном поле*.

**Определение 1.6.** Случайные элементы  $X_1, \dots, X_n$  называются *независимыми*, если 
$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n.$$

**Теорема 1.1** (Ломницкого-Улама). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует семейство независимых случайных элементов  $X_t: \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X_t \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_t}$  таких, что  $P_{X_t} = Q_t$ ,  $t \in T$ .

*Замечание.* Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом  $T$  по-прежнему любое, как и  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности  $\forall$  конечного поднабора.

## 1.2 Случайные блуждания

**Определение 1.7.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Случайным блужданием в  $\mathbb{R}^d$  называется случайный процесс с дискретным временем  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Определение 1.8.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  — это такое случайное блуждание, что

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где  $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d$ .

**Определение 1.9.** Введем  $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$  ( $\leq \infty$ ). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  называется *возвратным*, если  $P(N = \infty) = 1$ ; *невозвратным*, если  $P(N < \infty) = 1$ .

*Замечание.* Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что  $P(N = \infty)$  равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

*Замечание* (от наборщика). Судя по всему, в лемме ниже подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

**Определение 1.10.** Число  $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$  ( $\tau := \infty$ , если  $S_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ) называется *моментом первого возвращения в 0*.

**Лемма 1.2.** Для  $\forall n \in \mathbb{N}$   $P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}$ .

*Доказательство.* При  $n = 1$  формула верна:  $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$ . Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где  $N'$  определяется по последовательности  $X'_1 = X_{k+1}$ ,  $X'_2 = X_{k+2}$  и так далее. Из того, что  $X_i$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что  $N'$  и  $N$  распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что  $n + 1 \geq 2$ . Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Следствие.**  $P(N = \infty)$  равно 0 или 1.  $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $P(\tau < \infty) < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано.  $\square$

**Теорема 1.3.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  возвратно  $\Leftrightarrow \mathbb{E}N = \infty$  (соответственно, не возвратно  $\Leftrightarrow \mathbb{E}N < \infty$ ).

*Доказательство.* Если  $\mathbb{E}N < \infty$ , то  $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ . Пусть теперь  $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ . Это равносильно тому, что  $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\tau = \infty) \mathbb{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= \mathbb{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left( \frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{\mathbb{P}(\tau = \infty)}{(1 - \mathbb{P}(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - \mathbb{P}(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

*Замечание.* Заметим, что поскольку  $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ , то

$$\mathbb{E}N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty.$$

**Следствие.**  $S$  возвратно при  $d = 1$  и  $d = 2$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$

*Случай  $d = 1$ :*  $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$  блуждание возвратно. Аналогично рассматривается

*случай  $d = 2$ :*  $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow$  ряд тоже разойдется  $\Rightarrow$  блуждание возвратно. Теорема доказана.  $\square$

### 1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

**Теорема 1.4.** Для простого случайного блуждания в  $\mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $X$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

*Доказательство.*  $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ . Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку  $|c\varphi| \leq c < 1$ , то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Следствие.** При  $d \geq 3$  простое случайное блуждание невозвратно.

*Замечание.* Можно говорить и о случайных блужданиях в  $\mathbb{R}^d$ , если  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ .

**Определение 1.11.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания  $S$  — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

**Определение 1.12.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием*  $S$ , — это множество  $P(S)$  такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

**Теорема 1.5** (Чжуна-Фукса). Если  $R(S) \neq \emptyset$ , то  $R(S) = P(S)$ .

**Следствие.** Если  $0 \in R(S)$ , то  $R(S) = P(S)$ ; если  $0 \notin R(S)$ , то  $R(S) = \emptyset$ .

## 2 Лекция от 15.02.17

### Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

#### 2.1 Модель Гальтона–Ватсона

**Описание модели** Пусть  $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$  — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$\begin{aligned} Z_0(\omega) &:= 1, \\ Z_n(\omega) &:= \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что если  $Z_{n-1}(\omega) = 0$ , то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим  $A = \{\omega : \exists n = n(\omega) \ Z_n(\omega) = 0\}$  — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если  $Z_n(\omega) = 0$ , то  $Z_{n+1}(\omega) = 0$ . Таким образом,  $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ .

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

**Определение 2.1.** Пусть дана последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  неотрицательных чисел такая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ . *Производящая функция* для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать  $s \in [0, 1]$ ).

Заметим, что если  $a_k = P(Y = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = Es^Y, \quad s \in [0, 1].$$

**Лемма 2.1.** Вероятность  $P(A)$  является корнем уравнения  $\psi(p) = p$ , где  $\psi = f_\xi$  и  $p \in [0, 1]$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= Es^{Z_n} = E \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$ , которая независима с  $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$  (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) E \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) P(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j Es^{\xi_{n,k}} P(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi^j(s) P(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности  $\xi_{n,k}$  и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим  $s = 0$  и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(0))$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_\xi(\psi_\xi(s))) = \dots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \dots (\psi_\xi(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \\ &= \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)). \end{aligned}$$

Тогда при  $s = 0$  имеем, что

$$P(Z_n = 0) = \psi_\xi(P(Z_{n-1} = 0)).$$

Но  $P(Z_n = 0) \nearrow P(A)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\psi_\xi$  непрерывна на  $[0, 1]$ . Переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$P(A) = \psi_\xi(P(A)),$$

то есть  $P(A)$  — корень уравнения  $p = \psi_\xi(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ .  $\square$

**Теорема 2.2.** Вероятность  $p$  вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $\psi = \psi_\xi$ .

*Доказательство.* Пусть  $p_0 := P(\xi = 0) = 0$ . Тогда

$$P(\xi \geq 1) = 1, \quad P\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\}\right) = 1.$$

Поэтому  $Z_n \geq 1$  при  $\forall n$ , то есть  $P(A)$  — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь  $p_0 = 1$ . Тогда  $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A)$  — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец,  $0 < p_0 < 1$ . Из этого следует, что  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $p_m > 0$ , а значит,  $\psi$  строго возрастает на  $[0, 1]$ . Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_n(s)$  — это производящая функция  $Z_n$ . Пусть  $s \in \Delta_n$ . Тогда из монотонности  $\psi$  на  $[0, 1]$  получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на  $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1  $P(A)$  является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что  $P(A)$  — наименьший корень, что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.3.**

1. Вероятность вырождения  $P(A)$  есть нуль  $\iff p_0 = 0$ .
2. Пусть  $p_0 > 0$ . Тогда при  $E\xi \leq 1$  имеем  $P(A) = 1$ , при  $E\xi > 1$  имеем  $P(A) < 1$ .

*Доказательство.* Докажем 1. Пусть  $P(A) = 0$ . Тогда  $p_0 = 0$ , потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания  $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$ . В другую сторону, если  $p_0 = 0$ , то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем 2. Пусть  $\mu = E\xi \leq 1$ . Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$



если только  $\xi$  не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что  $\psi'_\xi(z)$  возрастает на  $z > 0$ . Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где  $z \in (0, 1)$ , в силу монотонности  $\psi'_\xi(z)$ . Следовательно, если  $z < 1$ , то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть  $z = 1$  — это единственный корень уравнения (1). Значит,  $P(A) = 1$ .

Пусть  $\mu = E\xi > 1$ . Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно,  $\psi''_\xi(z)$  монотонно возрастает и больше нуля при  $z > 0$ . Из этого следует, что  $1 - \psi'_\xi(z)$  строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь  $z - \psi_\xi(z)$  при  $z = 0$ . Поскольку  $1 - \psi_\xi(1) = 0$ , производная этой функции монотонно убывает, а  $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$ , то график функции  $z - \psi_\xi(z)$  пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале  $(0, 1)$ . Так как вероятность вырождения  $P(A)$  равна наименьшему корню уравнения (1), то  $P(A) < 1$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $E\xi < \infty$ . Тогда  $EZ_n = (E\xi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится по индукции.

База индукции:  $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$ .

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left( \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

$\square$

## Определение 2.2.

При  $E\xi < 1$  процесс называется *докритическим*.

При  $E\xi = 1$  процесс называется *критическим*.

При  $E\xi > 1$  процесс называется *надкритическим*.

## 2.2 Процессы восстановления

**Определение 2.3.** Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что  $\sup \emptyset := \infty$ ). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс  $Z(t)$  называется *процессом восстановления*.

*Замечание.* Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

**Определение 2.4.** Рассмотрим *процесс восстановления*  $\{Z^*(t), t \geq 0\}$ , который строится по  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где  $P(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$ ,  $P(Y = 0) = 1 - p$ . Исключаем из рассмотрения случай, когда  $Y = C = \text{const}$ : если  $C = 0$ , то  $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$ ; если же  $C > 0$ , то  $Z(t) = \lfloor \frac{t}{c} \rfloor$ .

**Лемма 2.4.** Для  $l = 0, 1, 2, \dots$

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor, \quad \text{если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

### 3 Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы

#### 3.1 Процессы восстановления (продолжение)

**Определение 3.1.** Будем говорить, что дискретная случайная величина  $U$  имеет *геометрическое распределение* с параметром  $p \in (0, 1)$ , если для  $k = 0, 1, 2, \dots$   $P(U = k) = (1 - p)^k p$ .

**Лемма 3.1.** Рассмотрим независимые геометрические величины  $U_0, \dots, U_j$  с параметром  $p \in (0, 1)$ , где  $j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor$ . Тогда

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

*Доказательство.* Обозначим  $M = \left\{ (k_0, \dots, k_j) : k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=0}^j k_i = m - j \right\}$ .

$$\begin{aligned} P(U_0 + \dots + U_j = m - j) &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p(1-p)^{k_0} \dots p(1-p)^{k_j} = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p^{j+1} (1-p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\ &= p^{j+1} (1-p)^{m-j} \#M = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j}. \end{aligned}$$

□

### 3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

**Лемма 3.2.** Пусть  $t \geq \alpha$ . Тогда  $EZ^*(t) \leq At$  и  $EZ^*(t)^2 \leq Bt^2$ , где  $A = A(p, \alpha) > 0$ ,  $B = B(p, \alpha) > 0$ .

*Доказательство.* По лемме 3.1  $EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j + 1)EU$ , где  $EU =: a(p) < \infty$  — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$\begin{aligned} EZ^*(t) &= j + (j + 1)a(p) \leq (j + 1)(a(p) + 1) \leq \\ &\leq \frac{t + \alpha}{\alpha}(a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p) + 1) = At, \end{aligned}$$

где  $A := \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$ .

Далее,

$$\begin{aligned} EZ^*(t)^2 &= \text{var } Z^*(t) + (EZ^*(t))^2 \leq (j + 1) \underbrace{\text{var } U}_{\sigma^2(p)} + (j + 1)^2(a(p) + 1)^2 \leq \\ &\leq (j + 1)^2 \left( \sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right) \leq \frac{4}{\alpha^2} \left( \sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right) t^2 = Bt^2, \end{aligned}$$

где  $B := \frac{4}{\alpha^2} \left( \sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right)$ .  $\square$

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины  $X \geq 0$  найдется такое  $\alpha > 0$ , что  $P(X > \alpha) = p \in (0, 1)$ . Тогда построим процесс  $Z^*$ , как в определении 2.4, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, & \text{если } X_n \leq \alpha. \end{cases}$$

По построению  $Y_n \leq X_n$ , откуда  $Z(t) \leq Z^*(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**Следствие.**  $EZ(t) \leq At$  и  $EZ(t)^2 \leq Bt^2$  для любого  $t \geq \alpha$ . В частности,  $Z(t) < \infty$  н. н. при всех  $t \geq 0$ .

**Следствие.**  $P(\forall t \geq 0 Z(t) < \infty) = 1$ .

*Доказательство.* Поскольку  $Z(t)$  является неубывающим процессом, т. е.  $\forall s \leq t Z(s) \leq Z(t)$ , то достаточно доказать, что  $P(\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty) = 1$ . Но

$$\{\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{Z(n) < \infty\} -$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1.  $\square$

### 3.3 Элементарная теория восстановления

**Лемма 3.3.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — н. о. р. случайные величины,  $X \geq 0$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n.н.} \mu \in [0, \infty]$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\mu = EX$  (конечное или бесконечное).

*Доказательство.* Если  $\mu < \infty$ , то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть  $\mu = \infty$ . Положим для  $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k \xrightarrow{n.н.} EX \mathbb{I}\{X \leq c\}$ .

Возьмем  $c = m \in \mathbb{N}$ . Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} EX \mathbb{I}\{X \leq m\} = EX.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла).  $\square$

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

**Определение 3.2.** Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geq c\}} |\xi_\alpha| dP = 0.$$

Известно, что если семейство  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  равномерно интегрируемо и  $\xi_n \rightarrow \xi$  почти наверное, то  $\xi$  тоже интегрируемо и  $E\xi_n \rightarrow E\xi$ . Для неотрицательных случайных величин  $\xi_n, n \geq 1$ , таких, что  $\xi_n \rightarrow \xi$  п. н., где  $E\xi < \infty$ , имеет место и обратная импликация

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \implies \text{семейство } \{\xi_n, n \geq 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

**Теорема 3.4** (Де ла Валле Пуссен). Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , т. е.  $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0 \quad \text{и} \quad \sup E g(|\xi_\alpha|) < \infty.$$

**Теорема 3.5.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р. случайных величин  $X, X_1, X_2, \dots$ . Тогда

1.  $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n.н.} \frac{1}{\mu}$  при  $t \rightarrow \infty$ ;
2.  $\frac{EZ(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$ .

*Доказательство.* Если  $\mu = 0$ , то  $X_n = 0$  п. н., поэтому  $\forall t > 0 \ Z(t) = \infty$  и утверждение теоремы очевидно.

Далее  $\mu > 0$ . Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1} \quad (2)$$

Для фиксированного  $\omega$  рассмотрим последовательность  $t_n := S_n(\omega)$ . Поскольку  $Z(t_n, \omega) = n$  и траектория  $Z(t, \omega)$  монотонна,  $Z(t, \omega) \rightarrow \infty$ . Будем рассматривать те  $(t, \omega)$ , для которых  $0 < Z(t, \omega) < \infty$  (при всех  $t_n$ , а значит, вообще при всех  $t$  это выполнено почти наверное). Для этих  $(t, \omega)$  разделим обе части 2 на  $Z(t)$ . Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку  $Z(t) \rightarrow \infty$ , то  $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$ ,  $\frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$  и  $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \rightarrow 1$ . Следовательно,  $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.  $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п. н.}} \frac{1}{\mu}$ , что завершает доказательство утверждения 1.

Для доказательства утверждения 2 используем теорему 3.4. А именно, рассмотрим семейство  $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$  и функцию  $g(t) = t^2$ , где  $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$ . По лемме 3.2

$$\mathbb{E} \xi_t^2 = \frac{\mathbb{E} Z(t)^2}{t^2} \leq \frac{B t^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы 3.4 выполнены. Поэтому из нее вытекает, что семейство  $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$  равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения 1 получаем, что

$$\mathbb{E} \frac{Z(t)}{t} \rightarrow \mathbb{E} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

□

### 3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

**Определение 3.3.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с экспоненциальным распределением  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , т. е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пуассоновским процессом  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  называется процесс восстановления, построенный по  $X_1, X_2, \dots$ .

Для  $t > 0$  введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t; \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.6.** Для любого  $t > 0$  случайные величины  $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$  являются независимыми, причем  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ ,  $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$  для  $k = 1, 2, \dots$

*Доказательство.* Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$  выполнено  $P(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) = P(N(t) = n) P(X_1^t > u_1) \dots P(X_k^t > u_k)$ .

Доказываем это индукцией по  $k$ .

База индукции:  $k = 1$ . Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина  $S_n$  имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} P(N(t) = n, X_1^t > u_1) &= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \\ &= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1) = P(S_n \leq t, S_{n+1} > t + u_1) = \\ &= P(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \\ &= P\left((S_n, X_{n+1}) \in \{(x, y) : x \leq t, x + y > t + u_1\}\right) = \\ &= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y) dx dy = (\text{независимость } S_n \text{ и } X_{n+1}) = \\ &= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t, y \geq 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy = \\ &= (\text{теорема Фубини}) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Положим  $u_1 = 0$ , получим

$$P(N(t) = n, X_1^t > 0) = P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е.  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ . Далее,

$$P(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$

т. е.  $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$  и база установлена.

Индукционный переход: пусть  $k \geq 2$ .

$$\begin{aligned} P(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) &= \\ &= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \dots, X_{n+k} > u_k) = \\ &= (\text{см. предыдущее}) = P(N(t) = n) P(X_1^t > u_1) e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \\ &= P(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k}. \end{aligned}$$

Снова положим  $u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$  и просуммируем по всем  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Получим  $P(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$ , откуда  $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ , индукционный переход завершен.  $\square$

Пусть  $X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$  — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина  $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$  соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы:  $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

## Предметный указатель

- Вырождение, 6
- Измеримое
  - отображение, 1
  - пространство, 1
- Множество
  - возвратности, 6
  - достижимости, 6
- Модель Гальтона-Ватсона, 6
- Парадокс времени ожидания, 15
- Производящая функция, 6
- Процесс
  - восстановления, 9
  - пуассоновский, 13
- Пуассоновский процесс, 13
- Распределение
  - геометрическое, 10
  - случайного элемента, 1
- Случайное блуждание, 2
  - простое, 2
  - возвратное, 2
- Случайный
  - процесс, 1
  - элемент, 1
- Теорема
  - Де ла Валле Пуассена, 12
  - Ломницкого-Улама, 2
  - Чжуна-Фукса, 6