

Содержание

1	Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания	1
1.1	Понятие случайного блуждания	1
1.2	Случайные блуждания	2
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции	4
1.4	Задачи	5
2	Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления	5
2.1	Модель Гальтона–Ватсона	5
2.2	Процессы восстановления	7
3	Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы	8
3.1	Процессы восстановления (продолжение)	8
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным	8
3.3	Элементарная теория восстановления	9
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления	10
3.5	Задачи	11
	Предметный указатель	13

1 Лекция от 08.02.17

Случайные блуждания

1.1 Понятие случайного блуждания

Определение 1.1. Пусть V — множество, а \mathcal{A} — σ -алгебра его подмножеств. Тогда (V, \mathcal{A}) называется *измеримым пространством*.

Определение 1.2. Пусть есть (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) — два измеримых пространства, $f: V \rightarrow S$ — отображение. f называется \mathcal{A}/\mathcal{B} -измеримым, если $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}/\mathcal{B}$.

Определение 1.3. Пусть есть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — отображение. Если $Y \in \mathcal{F}/\mathcal{B}$, то Y называется *случайным элементом*.

Определение 1.4. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, $Y: \Omega \rightarrow S$ — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом Y* , — это функция на множествах из \mathcal{B} , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Определение 1.5. Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов $X = \{X(t), t \in T\}$, где $X(t): \Omega \rightarrow S_t$, $X(t) \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_t$ $\forall t \in T$. Здесь T — это произвольное параметрическое множество, (S_t, \mathcal{B}_t) — произвольные измеримые пространства.

Замечание. Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпретируется как время. Если $T = \mathbb{R}$, то время *непрерывно*; если $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{Z}_+$, то время *дискретно*; если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о *случайном поле*.

Определение 1.6. Случайные элементы X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если $P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \ \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$.

Теорема 1.1 (Ломницкого-Улама). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором (Ω, \mathcal{F}, P) существует семейство независимых случайных элементов $X_t: \Omega \rightarrow S_t$, $X_t \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_t$ таких, что $P_{X_t} = Q_t$, $t \in T$.

Замечание. Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом T по-прежнему любое, как и $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$ — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности \forall конечного поднабора.

1.2 Случайные блуждания

Определение 1.7. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^d . Случайным блужданием в \mathbb{R}^d называется случайный процесс с дискретным временем $S = \{S_n, n \geq 0\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение 1.8. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d — это такое случайное блуждание, что

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$.

Определение 1.9. Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ ($\leq \infty$). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание $S = \{S_n, n \geq 0\}$ называется *возвратным*, если $P(N = \infty) = 1$; *невозвратным*, если $P(N < \infty) = 1$.

Замечание. Следует понимать, что хотя определение подразумевает, что $P(N = \infty)$ равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

Замечание (от наборщика). Судя по всему, в лемме ниже подразумевается, что начальная точка нашего случайного блуждания — это 0.

Определение 1.10. Число $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ ($\tau := \infty$, если $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) называется *моментом первого возвращения в 0*.

Лемма 1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(N = n) = P(\tau = \infty)P(\tau < \infty)^{n-1}$.

Доказательство. При $n = 1$ формула верна: $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$. Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где N' определяется по последовательности $X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}$ и так далее. Из того, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что N' и N распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n)P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что $n + 1 \geq 2$. Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n)P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty)P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Следствие. $P(N = \infty)$ равно 0 или 1. $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$.

Доказательство. Пусть $P(\tau < \infty) < 1$. Тогда

$$P(N < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1.$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$P(\tau < \infty) = 1 \Rightarrow P((\tau = \infty) = 0) \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(N < \infty) = 0.$$

Следствие доказано. \square

Теорема 1.3. Простое случайное блуждание в \mathbb{Z}^d возвратно $\Leftrightarrow EN = \infty$ (соответственно, не возвратно $\Leftrightarrow EN < \infty$).

Доказательство. Если $EN < \infty$, то $P(N < \infty) = 1$. Пусть теперь $P(N < \infty) = 1$. Это равносильно тому, что $P(\tau < \infty) < 1$.

$$EN = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left(\frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Заметим, что поскольку $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$, то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

Следствие. S возвратно при $d = 1$ и $d = 2$.

$$\text{Доказательство. } P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$$

$$\text{Случай } d = 1: P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow \text{блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай } d = 2: P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \text{ряд тоже разойдется} \Rightarrow \text{блуждание возвратно. Теорема доказана. } \square$$

1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

Теорема 1.4. Для простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d

$$EN = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция X , $t \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку $|c\varphi| \leq c < 1$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = EN, \quad c \uparrow 1,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие. При $d \geq 3$ простое случайное блуждание невозвратно.

Замечание. Можно говорить и о случайных блужданиях в \mathbb{R}^d , если $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в ε -окрестность точки x .

Определение 1.11. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания S — это множество

$$R(S) = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в окрестности точки } x\}.$$

Определение 1.12. Пусть есть случайное блуждание S на \mathbb{R}^d . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием* S , — это множество $P(S)$ такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \mathbb{P}(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1.5 (Чжуна-Фукса). Если $R(S) \neq \emptyset$, то $R(S) = P(S)$.

Следствие. Если $0 \in R(S)$, то $R(S) = P(S)$; если $0 \notin R(S)$, то $R(S) = \emptyset$.

1.4 Задачи

Задача 1.1. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ — простое случайное блуждание в \mathbb{Z} , имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.

Решение. Поделим случайные величины $\xi_n = S_n - S_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ на группы по $M = [b - a] + 1$ штук:

$$\underbrace{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M}_{M \text{ штук}}, \underbrace{\xi_{M+1}, \dots, \xi_{2M}}_{M \text{ штук}}, \dots$$

Покажем, что вероятность P_{ab} того, что блуждание останется в полосе, равняется нулю. Очевидно, что если в каждой группе все ξ_i одновременно равны либо $+1$, либо -1 , то тогда мы вылетаем за полосу. Вероятность того, что все ξ_i в каждой группе одновременно не обратятся в ± 1 вычисляется следующим образом:

$$P_{\pm 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - p^M + q^M)^k = 0$$

Вычисленная вероятность является в том числе верхней оценкой вероятности того, что мы останемся в полосе. Таким образом,

$$P_{ab} \leq P_{\pm 1} = 0 \Rightarrow P_{ab} = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

2 Лекция от 15.02.17

Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

2.1 Модель Гальтона–Ватсона

Описание модели Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если $Z_{n-1}(\omega) = 0$, то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим $A = \{\omega : \exists n = n(\omega) \ Z_n(\omega) = 0\}$ — событие вырождения популяции. Заметим, что если $Z_n(\omega) = 0$, то $Z_{n+1}(\omega) = 0$. Таким образом, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$.

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

Определение 2.1. Пусть дана последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел такая, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$. Производящая функция для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать $s \in [0, 1]$).

Заметим, что если $a_k = P(Y = k)$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = \mathbf{E} s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

Лемма 2.1. Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $\psi(p) = p$, где $\psi = f_{\xi}$ и $p \in [0, 1]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= \mathbb{E} s^{Z_n} = \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$, которая независима с $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$ (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{E} \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \mathbb{E} s^{\xi_{n,k}} \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) \mathbb{P}(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности $\xi_{n,k}$ и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим $s = 0$ и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_{\xi}(\psi_{\xi}(s))) = \dots = \underbrace{\psi_{\xi}(\psi_{\xi} \dots (\psi_{\xi}(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \psi_{\xi}(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при $s = 0$ имеем, что

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)).$$

Но $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(A)$ при $n \rightarrow \infty$ и ψ_{ξ} непрерывна на $[0, 1]$. Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \psi_{\xi}(\mathbb{P}(A)),$$

то есть $\mathbb{P}(A)$ — корень уравнения $p = \psi_{\xi}(p)$, $p \in [0, 1]$. □

Теорема 2.2. Вероятность p вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\psi = \psi_{\xi}$.

Доказательство. Пусть $p_0 := \mathbb{P}(\xi = 0) = 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1, \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\} \right) = 1.$$

Поэтому $Z_n \geq 1$ при $\forall n$, то есть $\mathbb{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть теперь $p_0 = 1$. Тогда $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A)$ — наименьший корень уравнения (1). Пусть, наконец, $0 < p_0 < 1$. Из этого следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$: $p_m > 0$, а значит, ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\psi_n(s)$ — это производящая функция Z_n . Пусть $s \in \Delta_n$. Тогда из монотонности ψ на $[0, 1]$ получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, \mathbb{P}(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow \mathbb{P}(A).$$

По лемме 2.1 $\mathbb{P}(A)$ является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что $\mathbb{P}(A)$ — наименьший корень, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.3.

1. Вероятность вырождения $P(A)$ есть нуль $\iff p_0 = 0$.
2. Пусть $p_0 > 0$. Тогда при $E\xi \leq 1$ имеем $P(A) = 1$, при $E\xi > 1$ имеем $P(A) < 1$.

Доказательство. Докажем 1. Пусть $P(A) = 0$. Тогда $p_0 = 0$, потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания $P(A) > P(Z_1 = 0) = p_0$. В другую сторону, если $p_0 = 0$, то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

Докажем 2. Пусть $\mu = E\xi \leq 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) будет единственный корень, равный 1.

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P(\xi = k) \Rightarrow \psi'_\xi(z) > 0 \text{ при } z > 0,$$

если только ξ не тождественно равна нулю (в противном случае утверждение теоремы выполнено). Заметим также, что $\psi'_\xi(z)$ возрастает на $z > 0$. Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$1 - \psi_\xi(z) = \psi_\xi(1) - \psi_\xi(z) = \psi'_\xi(\theta)(1 - z) < \psi'_\xi(1)(1 - z) \leq 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, в силу монотонности $\psi'_\xi(z)$. Следовательно, если $z < 1$, то

$$1 - \psi_\xi(z) < 1 - z,$$

то есть $z = 1$ — это единственный корень уравнения (1). Значит, $P(A) = 1$.

Пусть $\mu = E\xi > 1$. Покажем, что в таком случае у уравнения (1) есть два корня, один из которых строго меньше единицы.

$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} P(\xi = k),$$

следовательно, $\psi''_\xi(z)$ монотонно возрастает и больше нуля при $z > 0$. Из этого следует, что $1 - \psi'_\xi(z)$ строго убывает, причем

$$1 - \psi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0,$$

$$1 - \psi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0.$$

Рассмотрим теперь $z - \psi_\xi(z)$ при $z = 0$. Поскольку $1 - \psi_\xi(1) = 0$, производная этой функции монотонно убывает, а $0 - \psi_\xi(0) = -P(\xi = 0) < 0$, то график функции $z - \psi_\xi(z)$ пересечет ось абсцисс в двух точках, одна из которых будет лежать в интервале $(0, 1)$. Так как вероятность вырождения $P(A)$ равна наименьшему корню уравнения (1), то $P(A) < 1$, что и требовалось доказать. \square

Следствие. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда $EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

База индукции: $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$.

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

\square

Определение 2.2.

При $E\xi < 1$ процесс называется *докритическим*.

При $E\xi = 1$ процесс называется *критическим*.

При $E\xi > 1$ процесс называется *надкритическим*.

2.2 Процессы восстановления

Определение 2.3. Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $X \geq 0$. Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что $\sup \emptyset := \infty$). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс $Z(t)$ называется *процессом восстановления*.

Замечание. Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Определение 2.4. Рассмотрим процесс восстановления $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, который строится по Y, Y_1, Y_2, \dots — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где $P(Y = \alpha) = p \in (0, 1)$, $P(Y = 0) = 1 - p$. Исключаем из рассмотрения случай, когда $Y = C = \text{const}$: если $C = 0$, то $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$; если же $C > 0$, то $Z(t) = \lceil \frac{t}{c} \rceil$.

Лемма 2.4. Для $l = 0, 1, 2, \dots$

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor, \quad \text{если } m \geq j; \\ 0, & \text{если } m < j. \end{cases}$$

3 Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы

3.1 Процессы восстановления (продолжение)

Определение 3.1. Будем говорить, что дискретная случайная величина U имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0, 1)$, если для $k = 0, 1, 2, \dots$ $P(U = k) = (1 - p)^k p$.

Лемма 3.1. Рассмотрим независимые геометрические величины U_0, \dots, U_j с параметром $p \in (0, 1)$, где $j = \lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor$. Тогда

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

Доказательство. Обозначим $M = \left\{ (k_0, \dots, k_j) : k_j \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=0}^j k_j = m - j \right\}$.

$$\begin{aligned} P(U_0 + \dots + U_j = m - j) &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p(1 - p)^{k_0} \dots p(1 - p)^{k_j} = \\ &= \sum_{(k_0, \dots, k_j) \in M} p^{j+1} (1 - p)^{k_0 + \dots + k_j} = p^{j+1} (1 - p)^{m-j} \#M = C_m^j p^{j+1} (1 - p)^{m-j}. \end{aligned}$$

□

3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

Лемма 3.2. Пусть $t \geq \alpha$. Тогда $EZ^*(t) \leq At$ и $EZ^*(t)^2 \leq Bt^2$, где $A = A(p, \alpha) > 0$, $B = B(p, \alpha) > 0$.

Доказательство. По лемме 3.1 $EZ^*(t) = E(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j + 1)EU$, где $EU =: a(p) < \infty$ — математическое ожидание геометрического распределения.

Тогда

$$EZ^*(t) = j + (j + 1)a(p) \leq (j + 1)(a(p) + 1) \leq \frac{t + \alpha}{\alpha} (a(p) + 1) \leq \frac{2t}{\alpha} (a(p) + 1) = At,$$

где $A := \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$.

Далее,

$$\begin{aligned} EZ^*(t)^2 &= \text{var } Z^*(t) + (EZ^*(t))^2 \leq (j + 1) \underbrace{\text{var } U}_{{\sigma^2(p)}} + (j + 1)^2 (a(p) + 1)^2 \leq \\ &\leq (j + 1)^2 \left(\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right) \leq \frac{4}{\alpha^2} \left(\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right) t^2 = Bt^2, \end{aligned}$$

где $B := \frac{4}{\alpha^2} \left(\sigma^2(p) + (a(p) + 1)^2 \right)$.

□

Заметим, что для любой невырожденной (не равной константе почти наверное) случайной величины $X \geq 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что $P(X > \alpha) = p \in (0, 1)$. Тогда построим процесс Z^* , как в определении 2.4, по независимым одинаково распределенным случайным величинам

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } X_n > \alpha, \\ 0, & \text{если } X_n \leq \alpha. \end{cases}$$

По построению $Y_n \leq X_n$, откуда $Z(t) \leq Z^*(t)$, $t \geq 0$.

Следствие. $EZ(t) \leq At$ и $EZ(t)^2 \leq Bt^2$ для любого $t \geq \alpha$. В частности, $Z(t) < \infty$ п. н. при всех $t \geq 0$.

Следствие. $P(\forall t \geq 0 Z(t) < \infty) = 1$.

Доказательство. Поскольку $Z(t)$ является неубывающим процессом, т. е. $\forall s \leq t Z(s) \leq Z(t)$, то достаточно доказать, что $P(\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty) = 1$. Но

$$\{\forall n \in \mathbb{N} Z(n) < \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{Z(n) < \infty\} -$$

счетное пересечение событий вероятности 1 (см. предыдущее следствие). Оно тоже имеет вероятность 1. \square

3.3 Элементарная теория восстановления

Лемма 3.3. Пусть X, X_1, X_2, \dots — н. о. р. случайные величины, $X \geq 0$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{п. н.} \mu \in [0, \infty]$ при $n \rightarrow \infty$, где $\mu = EX$ (конечное или бесконечное).

Доказательство. Если $\mu < \infty$, то утверждение леммы представляет собой усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Пусть $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда снова по УЗБЧ А. Н. Колмогорова $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k \xrightarrow{п. н.} EX \mathbb{I}\{X \leq c\}$.

Возьмем $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} EX \mathbb{I}\{X \leq m\} = EX.$$

В последнем равенстве использовалась теорема о монотонной сходимости (для бесконечного предельного интеграла). \square

Введем определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение 3.2. Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geq c\}} |\xi_\alpha| dP = 0.$$

Известно, что если семейство $\{\xi_n, n \geq 1\}$ равномерно интегрируемо и $\xi_n \rightarrow \xi$ почти наверное, то ξ тоже интегрируема и $E\xi_n \rightarrow E\xi$. Для неотрицательных случайных величин $\xi_n, n \geq 1$, таких, что $\xi_n \rightarrow \xi$ п. н., где $E\xi < \infty$, имеет место и обратная импликация

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \implies \text{семейство } \{\xi_n, n \geq 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Следующая теорема принимается без доказательства

Теорема 3.4 (Де ла Валле Пуссен). Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, т. е. $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = 0 \quad \text{и} \quad \sup E g(|\xi_\alpha|) < \infty.$$

Теорема 3.5. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ — процесс восстановления, построенный по последовательности н. о. р. случайных величин X, X_1, X_2, \dots . Тогда

1. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n. n.} \frac{1}{\mu}$ при $t \rightarrow \infty$;
2. $\frac{EZ(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ при $t \rightarrow \infty$, где $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Доказательство. Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ п. н., поэтому $\forall t > 0$ $Z(t) = \infty$ и утверждение теоремы очевидно.

Далее $\mu > 0$. Заметим, что

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1} \quad (2)$$

Для фиксированного ω рассмотрим последовательность $t_n := S_n(\omega)$. Поскольку $Z(t_n, \omega) = n$ и траектория $Z(t, \omega)$ монотонна, $Z(t, \omega) \rightarrow \infty$. Будем рассматривать те (t, ω) , для которых $0 < Z(t, \omega) < \infty$ (при всех t_n , а значит, вообще при всех t это выполнено почти наверное). Для этих (t, ω) разделим обе части 2 на $Z(t)$. Получим

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} < \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Но поскольку $Z(t) \rightarrow \infty$, то $\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{n. n.} \mu$, $\frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{n. n.} \mu$ и $\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \rightarrow 1$. Следовательно, $\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{n. n.} \mu$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{n. n.} \frac{1}{\mu}$, что завершает доказательство утверждения 1.

Для доказательства утверждения 2 используем теорему 3.4. А именно, рассмотрим семейство $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$ и функцию $g(t) = t^2$, где $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$. По лемме 3.2

$$E\xi_t^2 = \frac{EZ(t)^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty.$$

Все условия теоремы 3.4 выполнены. Поэтому из нее вытекает, что семейство $\{\xi_t, t \geq \alpha\}$ равномерно интегрируемо. Тогда можно совершить предельный переход под знаком математического ожидания, и из утверждения 1 получаем, что

$$E \frac{Z(t)}{t} \rightarrow E \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

□

3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

Определение 3.3. Пусть X, X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с экспоненциальным распределением $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, т. е.

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пуассоновским процессом $N = \{N(t), t \geq 0\}$ называется процесс восстановления, построенный по X_1, X_2, \dots

Для $t > 0$ введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t; \\ X_k^t &:= S_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3.6. Для любого $t > 0$ случайные величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ являются независимыми, причем $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$, $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ для $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Чтобы доказать независимость указанных случайных величин, достаточно проверить, что для $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$ выполнено

$$P(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) = P(N(t) = n) P(X_1^t > u_1) \dots P(X_k^t > u_k).$$

Доказываем это индукцией по k .

База индукции: $k = 1$. Напомним (было в курсе теории вероятностей), что случайная величина S_n имеет плотность

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n, X_1^t > u_1) &= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t > u_1) = \\
&= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1) = P(S_n \leq t, S_{n+1} > t + u_1) = \\
&= P(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} > t + u_1) = \\
&= P\left((S_n, X_{n+1}) \in \{(x, y) : x \leq t, x + y > t + u_1\}\right) = \\
&= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{(S_n, X_{n+1})}(x, y) dx dy = (\text{независимость } S_n \text{ и } X_{n+1}) = \\
&= \iint_{\substack{x \leq t \\ x+y > t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t, y \geq 0 \\ x+y > t+u_1}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy = \\
&= (\text{теорема Фубини}) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\
&= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}.
\end{aligned}$$

Положим $u_1 = 0$, получим

$$P(N(t) = n, X_1^t > 0) = P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е. $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Далее,

$$P(X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n, X_1^t > u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda u_1} = 1 \cdot e^{-\lambda u_1},$$

т. е. $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$ и база установлена.

Индукционный переход: пусть $k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n, X_1^t > u_1, \dots, X_k^t > u_k) &= \\
&= P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > t + u_1, X_{n+2} > u_2, \dots, X_{n+k} > u_k) = \\
&= (\text{см. предыдущее}) = P(N(t) = n) P(X_1^t > u_1) e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \\
&= P(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k}.
\end{aligned}$$

Снова положим $u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$ и просуммируем по всем $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим $P(X_k^t > u_k) = e^{-\lambda u_k}$, откуда $X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda)$, индукционный переход завершен. \square

Пусть $X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$ — интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Тогда случайная величина $X_1^t = S_{N(t)+1} - t$ соответствует времени ожидания прибытия ближайшего автобуса. Мы только что доказали, что она распределена так же, как и интервалы: $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$. Мы будем в среднем ждать автобуса столько же времени, сколько в среднем проходит времени между двумя автобусами. В этом состоит **парадокс времени ожидания**. Никакого противоречия здесь на самом деле нет, так как сами моменты прихода автобусов также случайные.

3.5 Задачи

Задача 3.1. Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

Решение. Нет, нельзя. Приведем контрпример. Итак, пусть процесс восстановления $Z(t)$ порожден н.о.р. случайными величинами $\{X, X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, где

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$$

Покажем, что у процесса восстановления $Z(t)$ существуют зависимые приращения. Сначала заметим, что

$$P(Z(1) = 0, Z(2) - Z(1) = 0) = 0,$$

так как $X \leq 2$.

Теперь по отдельности рассмотрим следующие вероятности $P(Z(1) = 0)$, $P(Z(2) - Z(1) = 0)$:

$$P(Z(1) = 0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}$$

Со второй вероятностью чуть сложнее:

$$P(Z(2) - Z(1) = 0) = P(Z(2) = Z(1)) \geq P(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{9}$$

Напишем в явном виде полученное противоречие:

$$P(Z(1) = 0, Z(2) - Z(1) = 0) = 0 \neq P(Z(1) = 0) P(Z(2) - Z(1) = 0)$$

■

Задача 3.2. Найти ковариационную функцию процесса $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$, где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t), t \geq 0\}$ - пуассоновский процесс интенсивности λ , случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N .

Решение. Пусть $t > s$. Распишем определение ковариации:

$$\text{cov}(\xi_0(-1)^{N(t)}, \xi_0(-1)^{N(s)}) = E[\xi_0^2(-1)^{N(t)+N(s)}] - E[\xi_0(-1)^{N(t)}] E[\xi_0(-1)^{N(s)}]$$

Вспомним, что для независимых случайных величин ξ и η выполнено $E\xi\eta = E\xi E\eta$ и продолжим рассуждения:

$$= E\eta^2 E(-1)^{N(t)+N(s)} - (E\eta)^2 E[(-1)^{N(t)}] E[(-1)^{N(s)}]$$

Обозначим за $\psi_\mu(z) = e^{\mu(z-1)}$ - производящую функцию $\text{Pois}(\mu)$. Заметим, что $E\eta^2 \equiv 1$, $E\eta = 0$ и $(-1)^{N(t)-N(s)} = (-1)^{N(t)+N(s)}$. Подставим в полученное выше выражение, продолжив рассуждения:

$$= E(-1)^{N(t)-N(s)} = \psi_{\lambda(t-s)}(-1) = e^{-2\lambda(t-s)},$$

Опустив изначальное предположение $t > s$, получаем

Ответ: $e^{-2\lambda|t-s|}$

■

Предметный указатель

- Вырождение, 5
- Измеримое
 - отображение, 1
 - пространство, 1
- Множество
 - возвратности, 4
 - достижимости, 4
- Модель Гальтона-Ватсона, 5
- Парадокс времени ожидания, 11
- Производящая функция, 5
- Процесс
 - восстановления, 7
 - пуассоновский, 10
- Пуассоновский процесс, 10
- Распределение
 - геометрическое, 8
 - случайного элемента, 1
- Случайное блуждание, 2
 - простое, 2
 - возвратное, 2
- Случайный
 - процесс, 1
 - элемент, 1
- Теорема
 - Де ла Валле Пуссена, 9
 - Ломницкого-Улама, 1
 - Чжуна-Фукса, 4