Проверка гипотез

План

- Что такое гипотезы
- p_value
- Ошибки 1 и 2 рода
- Какими бывают критерии
- Параметрические критерии для долей, средних и дисперсий

Обозначения

- Внимание: в этой презентации будут тонко использоваться греческие буквы с крышечкой и без крышечки. Это традиция в статистике

- Когда они **без** крышечки, речь идет о параметрах некоторого распределения (можно воспринимать их как неизвестные константы)

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

- Когда они **с** крышечкой, речь идет о некоторых статистиках, посчитанных по выборке из случайных величин, а значит тоже о случайных величинах с каким-то распределением. Этими статистиками мы будем оценивать параметры , которые обозначаются той же греческой буквой, но **без** крышечки.

$$\hat{\mu} = \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right) \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$(n-1)\cdot\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{n-1}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Что такое гипотезы и как их проверять

Что такое гипотеза

Гипотеза – любое утверждение, которое возникло в нашей голове и которое мы собираемся проверить по данным.

- В Австралии женщин дискриминируют на рынке труда
- В Питере кофе любят больше, чем в Москве
- Осьминог Пауль может предсказывать будущее
- Доходности по акциям Яндекса нормально распределены
- Подгузники и пиво часто покупают вместе

Что значит проверить гипотезу

- Собрать данные и посмотреть, не противоречит ли им наше утверждение
- Любая выборка – случайная, просто посчитать описательные статистики недостаточно
- Описательные статистики – случайные величины
- При любом объёме выборки можно допустить ошибку

Что значит проверить гипотезу

- Собрали данные о предсказаниях осьминога

memepedia.com

- Данные не противоречат тому, что он провидец
- Это не означает, что осьминог правда пророк. Если мы соберём ещё данных, они могут начать этому противоречить.

Что значит проверить гипотезу

- Собрали данные о предсказаниях осьминога

Если данные не противоречат утверждению, это не является доказательством его верности

- Данные не противоречат тому, что он провидец
- Это не означает, что осьминог правда пророк. Если мы соберём ещё данных, они могут начать этому противоречить

Взболтать, но не смешивать

James Bond Casino Royale (2006)

«Взболтать,
но не смешивать»

© Бонд, Джеймс
Бонд

- Правда ли агент 007 отличает взболтанный мартини от смешанного?

Взболтать, но не смешивать

James Bond Casino Royale (2006)

«Взболтать,
но не смешивать»

© Бонд, Джеймс
Бонд

- Завязываем агенту 007 глаза и даём два мартини: смешанный и взболтанный n раз
- Случайная величина $X_i = 1$, если Бонд отличил взболтанный мартини от смешанного

Взболтать, но не смешивать

James Bond Casino Royale (2006)

«Взболтать,
но не смешивать»

© Бонд, Джеймс
Бонд

H_0: агент 007 не различает два вида мартини

H_a: агент 007 различает два вида мартини

Нужно формализовать гипотезу **на языке статистики**

Формализация задачи

Выборка состоит из единиц и нулей:

- $X_i = 1$, если правильно назвал вид мартини
- $X_i = 0$, если не правильно назвал

$$X_1, \ldots, X_n \sim iid\ Bern(p)$$

Если Бонд не различает напитки и выбирает наугад, вероятность успеха p должна быть равна 0.5

H_0: $p = 0.5 \;\; \Leftrightarrow \;\;$ Бонд не различает напитки

H_a: $p \neq 0.5 \;\; \Leftrightarrow \;\;$ Бонд различает напитки

Поиск критерия

H_0: $p = 0.5$

H_a: $p \neq 0.5$

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$

Представим, что мы дали Бонду мартини 10 раз и получили, что $\hat{p} = 0.6$

Выходит, что Бонд отвечает за свои слова

Поиск критерия

$\mathrm{H}_0\colon p = 0.5$

$\mathrm{H}_a\colon p \neq 0.5$

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$

Представим, что мы дали Бонду мартини 10 раз и получили, что $\hat{p} = 0.6$

~~Выходит, что Бонд отвечает за свои слова~~

$\hat{p}$ – случайная величина, которая зависит от выборки

Поиск критерия

$$H_0\colon p = 0.5$$

$$H_a\colon p \neq 0.5$$

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$$

Представим, что мы дали Бонду мартини 10 раз и получили, что $\hat{p} = 0.6$

Задача: узнать при текущем объёме выборки насколько $\hat{p}$ близка к 0.5

Поиск критерия

$$H_0\colon p = 0.5$$

$$H_a\colon p \neq 0.5$$

$$X_1, \ldots, X_n \sim iid\ Bern(p)$$

$\hat{p}$ – случайная величина

$\hat{p} - 0.5$ – случайная величина

- Если расстояние от $\hat{p}$ до 0.5 достаточно маленькое, данные не противоречат нулевой гипотезе

Поиск критерия

$$\mathrm{H}_0\colon p = 0.5$$

$$\mathrm{H}_a\colon p \neq 0.5$$

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$$

По ЦПТ:

$$\hat{p} \overset{asy}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Leftrightarrow \hat{p} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N\left(0.5, \frac{0.5\,(1-0.5)}{n}\right)$$

при верности нулевой гипотезы

$$\frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{n}}} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1)$$

Поиск критерия

$$\mathrm{H}_0\colon p = 0.5$$

$$\mathrm{H}_a\colon p \neq 0.5$$

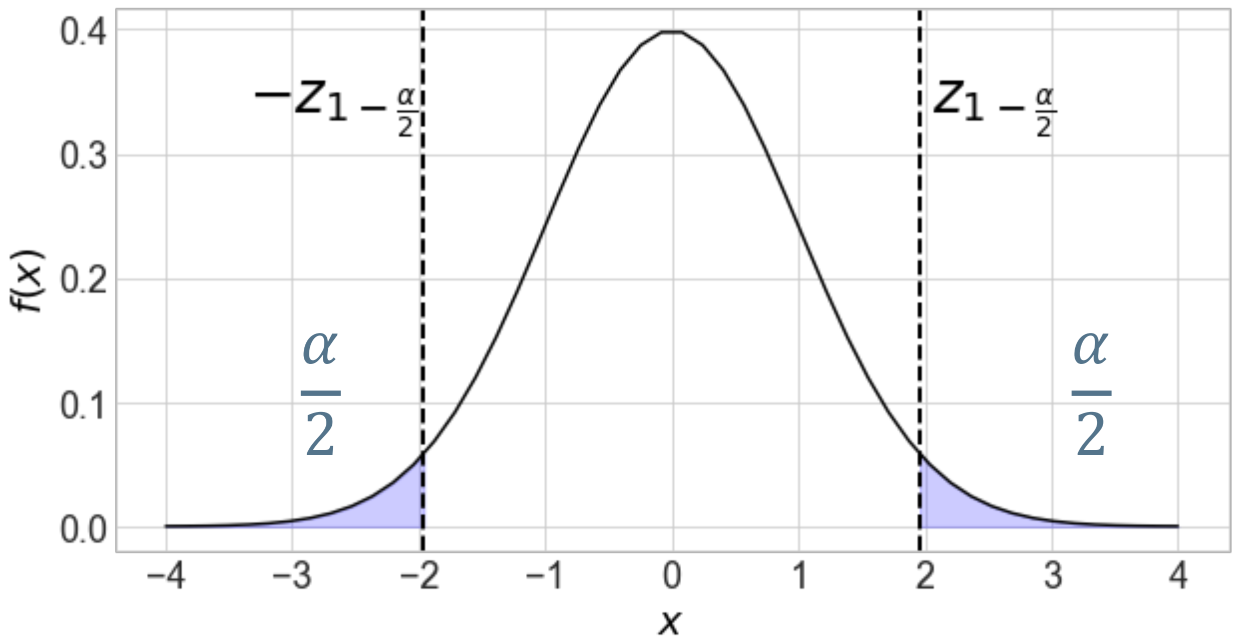
$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$$

$$z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{n}}} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1)$$

- Мы выяснили, как распределено расстояние до 0.5 при верности нулевой гипотезы
- Осталось выбрать порог, при котором мы будем считать, что нулевая гипотеза H_0 не отвергается
- Против нашей гипотезы говорят очень большие либо очень маленькие значения статистики

Проверка гипотезы

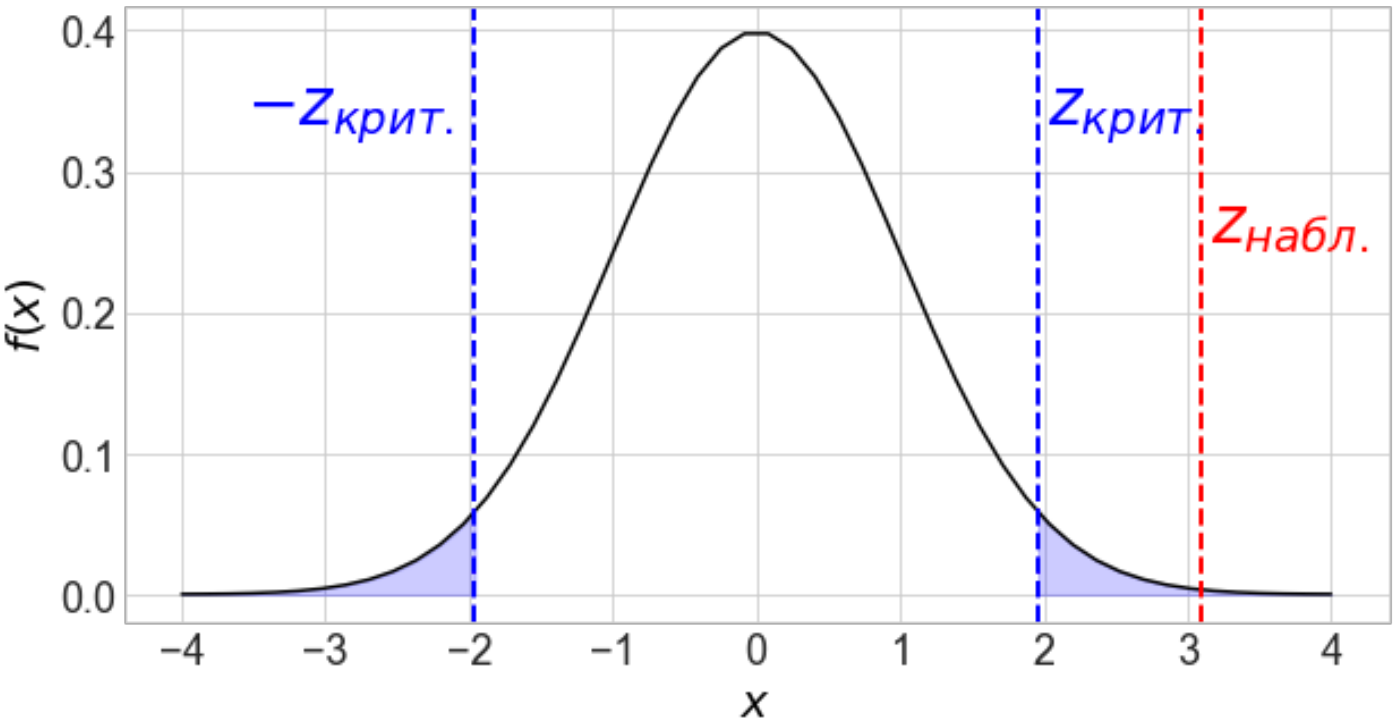
Мы рассуждаем о распределении в терминах нулевой гипотезы. Близкие к центру значения z-статистики показывают, что H_0 не противоречат данным



Мы не решаем, верна ли гипотеза,
а проверяем, противоречат ли ей данные

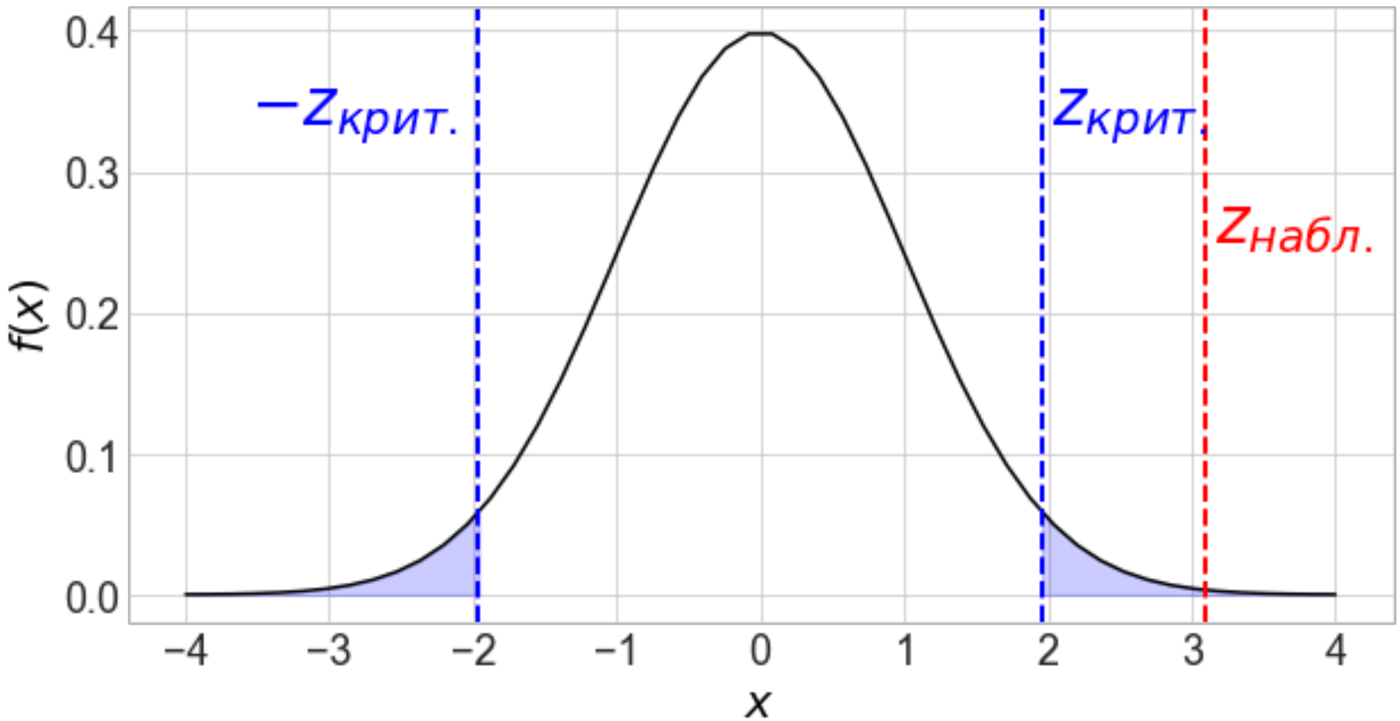
Проверка гипотезы

Если наблюдаемое значение статистики попало в хвост (левый или правый), гипотеза отвергается, расстояние между $\hat{p}$ и 0.5 оказывается слишком большим



Проверка гипотезы

Если наблюдаемое значение попало между критическими, данные не противоречат гипотезе



Уровень значимости

- Если мы отвергаем нулевую гипотезу, когда она верна – мы ошибаемся
- Выбирая порог для отсечения, мы фиксируем вероятность такой ошибки
- Вероятность такой ошибки α – **уровень значимости**, также эту ошибку называют **ошибкой первого рода**
- Если мы 100 раз попытаемся сесть на поезд на уровне значимости 0.05, в среднем мы будем опаздывать 5 раз
- Обычно α выбирают равным 0.05, 0.01 или 0.001

Процедура проверки гипотез

Процедура проверки гипотез

1. Определяем природу выборку, определяем распределение и его параметры

2. иксируем уровень значимости: $\alpha = 0.05$

$\mathrm{H}_0\colon p = 0.5 \qquad \mathrm{H}_a\colon p \neq 0.5$

3. Формулируем нулевую гипотезу и альтернативную

4. Выбираем **союзника** (статистический тест) для проверки гипотезы

$$z_{obs} = \frac{0.6-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{10}}} = 0.654$$

5. Находим наблюдаемое значение статистики:

ЦПТ: $z \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1)$

6. Находим критическое значение с помощью **союзника**:

Процедура проверки гипотез

1. Определяем природу выборки: вид распределения и его параметры

2. Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы о параметрах распределения

$$\mathrm{H}_0\colon p = 0.5 \qquad \mathrm{H}_a\colon p \neq 0.5$$

3. Выбираем статистику, на основе которой мы будем тестировать гипотезу, и конструируем статистический тест для проверки гипотезы

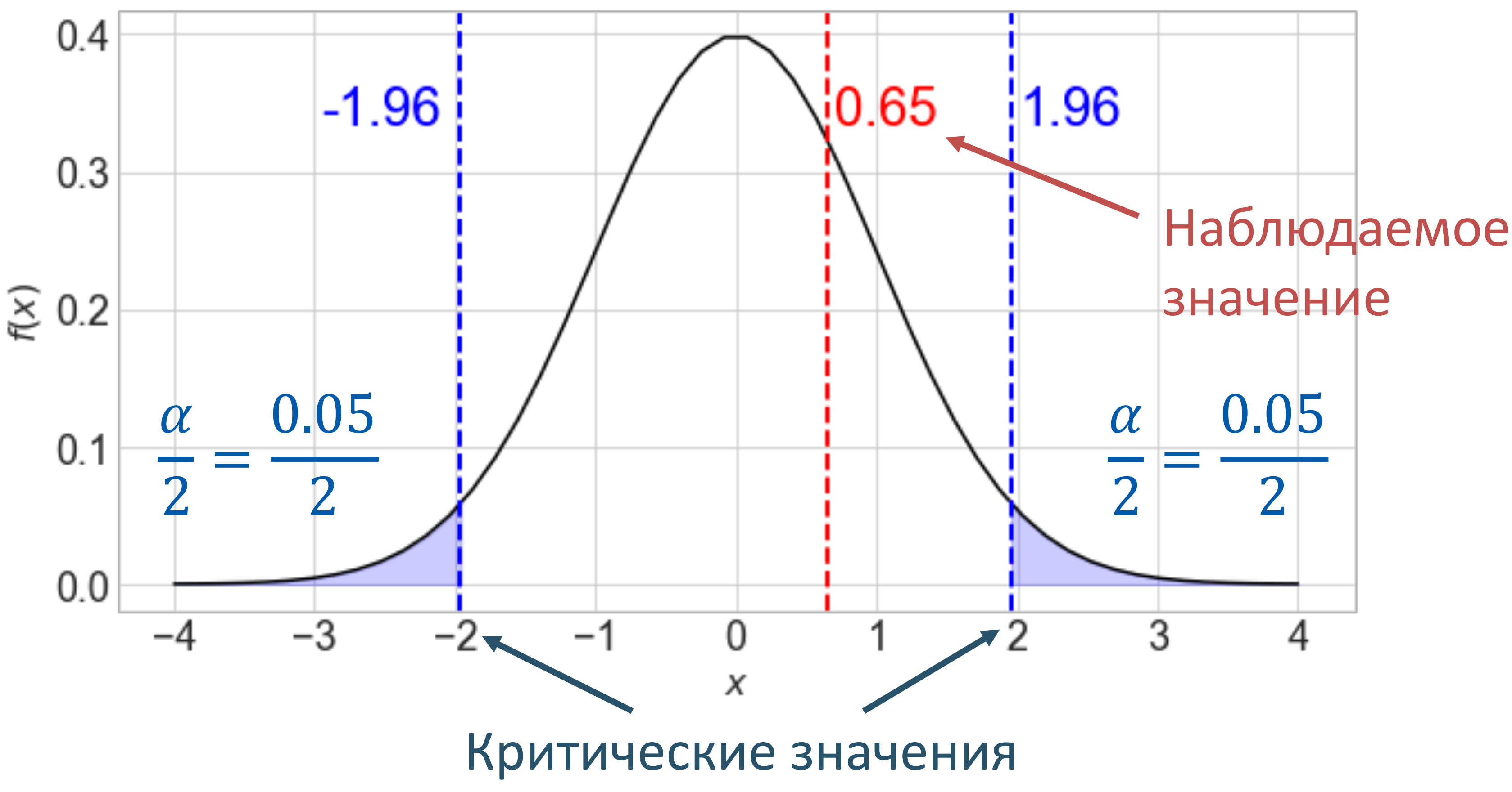
ЦПТ: $z \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1)$

4. Находим **наблюдаемое** и **критическое** значение статистики на некотором фиксированном уровне α

$$z_{obs} = \frac{0.6-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{10}}} = 0.654 \qquad z_{crit}(\alpha) = 1.96$$

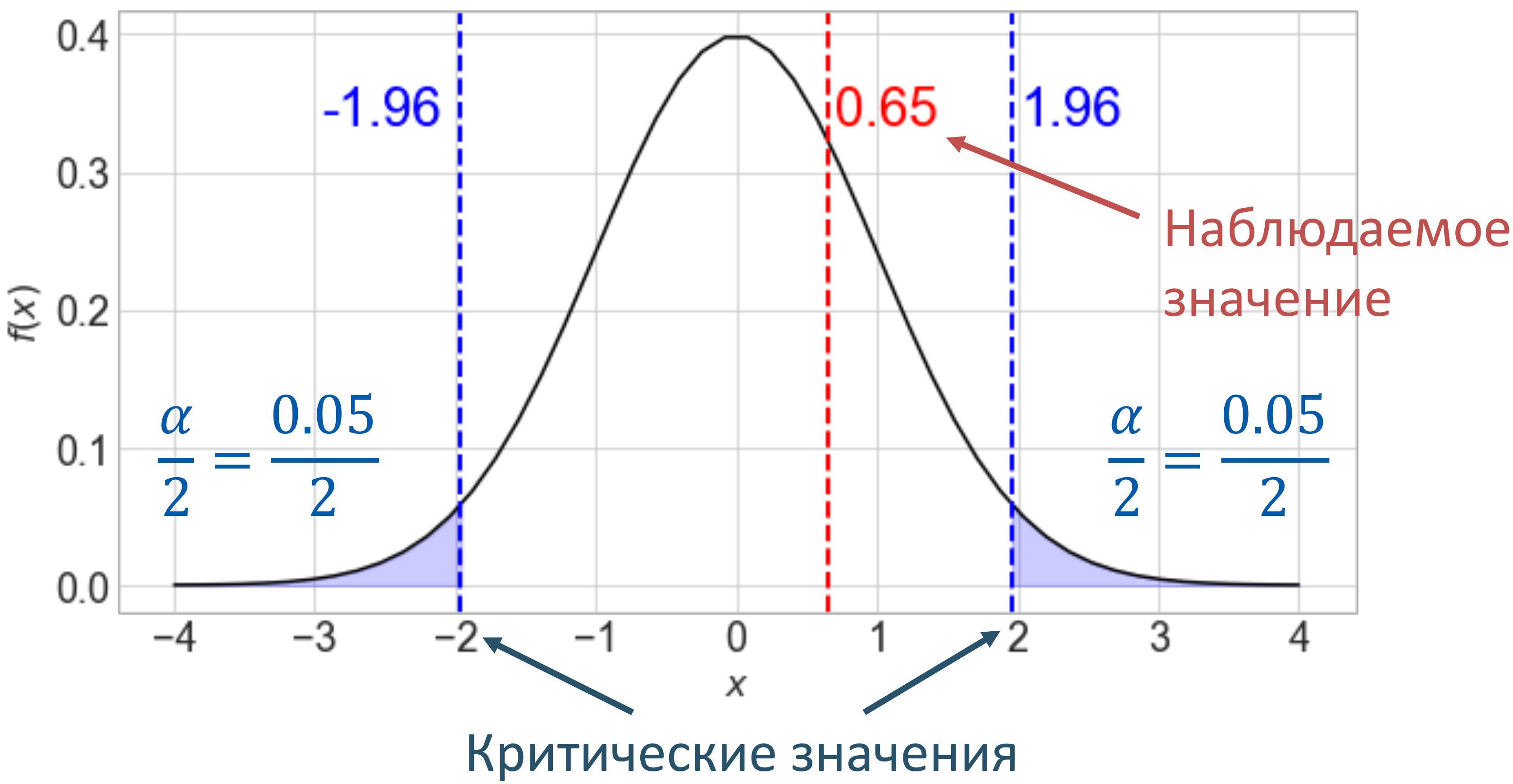
Процедура проверки гипотез

5. Сравниваем наблюдаемое значение с критическим и делаем выводы



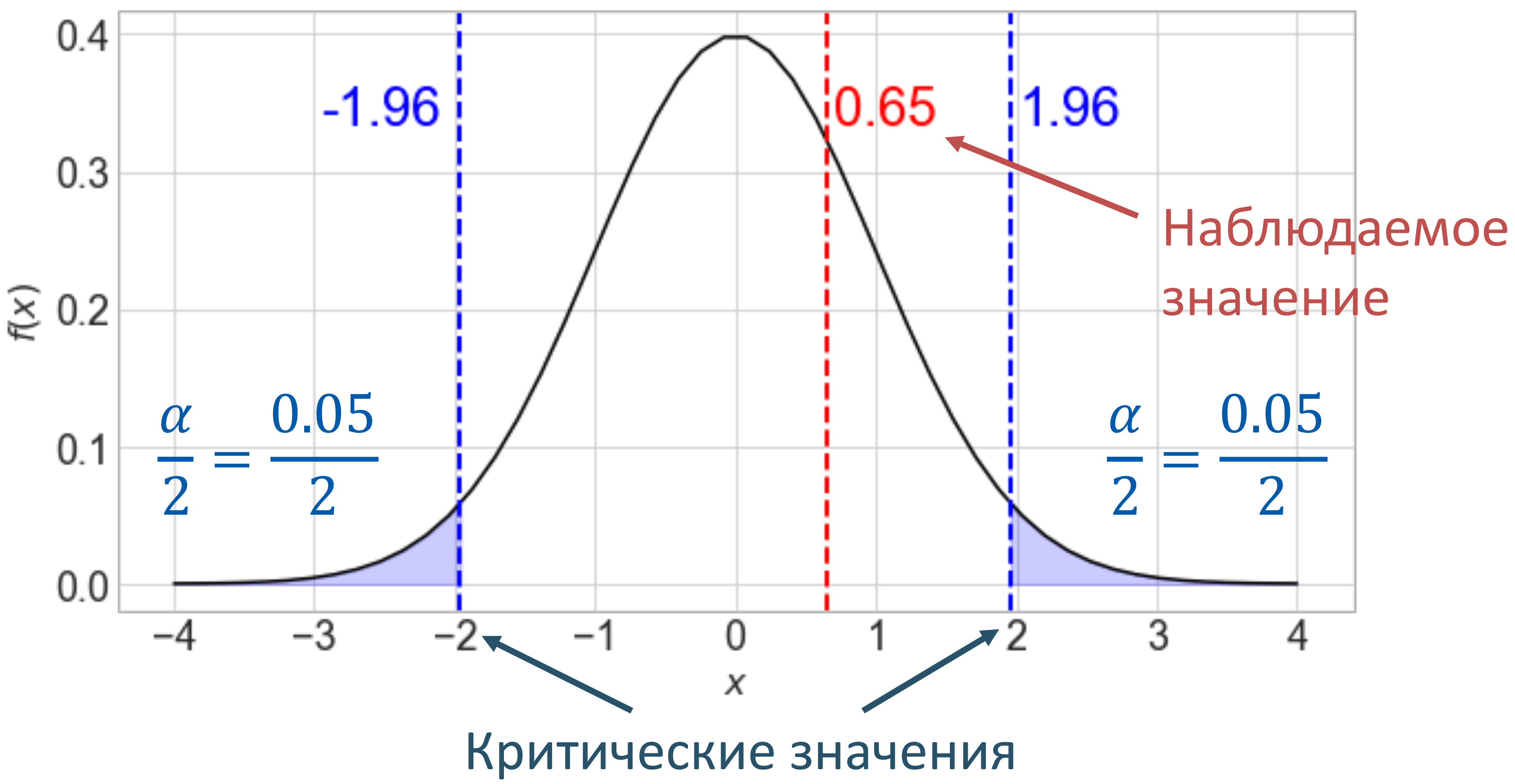
Процедура проверки гипотез

- Наблюдаемое значение попало в область между критическими ⇒ гипотеза <u>не отвергается</u>
- Голубая площадь под хвостами – уровень значимости



Процедура проверки гипотез

Гипотеза, что Джеймс Бонд не различает напитки, не отвергается на уровне значимости 5%

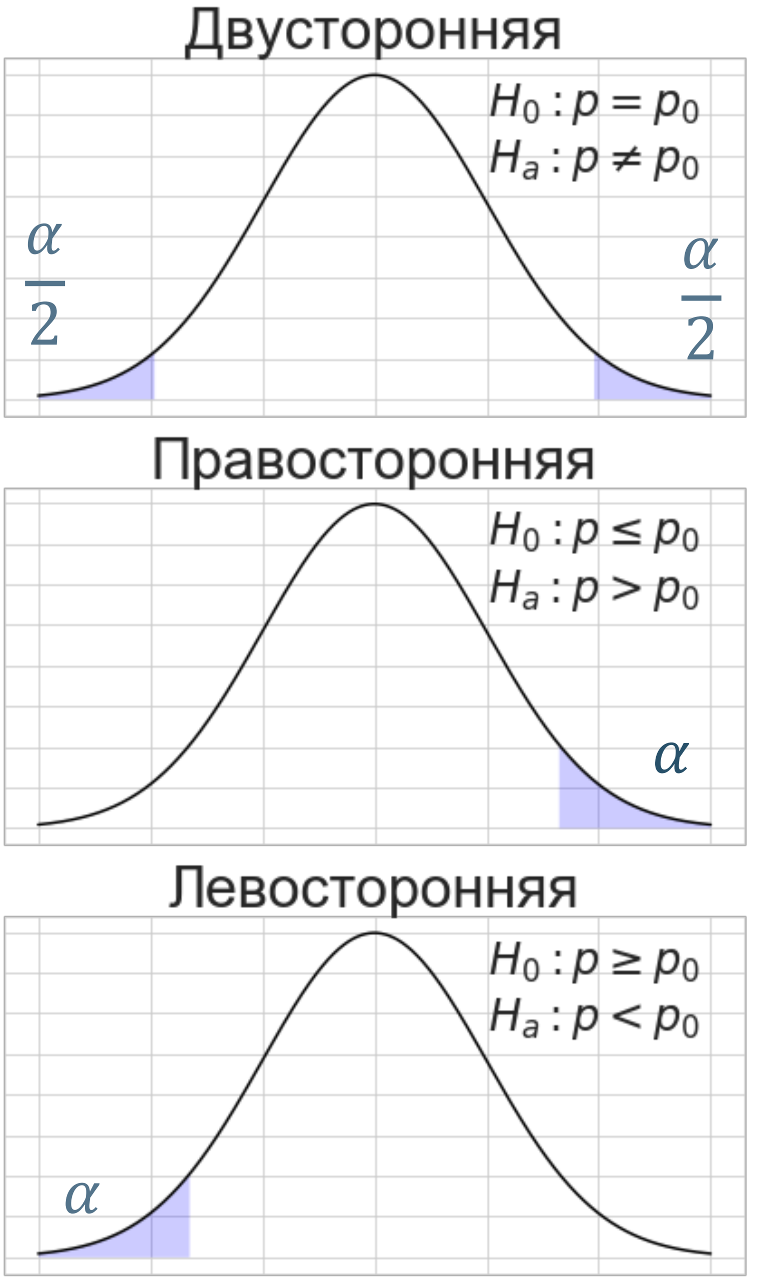


Нельзя принять нулевую гипотезу

- Если при проверке нулевая гипотеза не отвергается, нельзя считать её доказанной
- Говорят, что данные не противоречат нулевой гипотезе
- Новые данные могут показать, что гипотеза неверна

Альтернативы

- Иногда рассматривают односторонние альтернативы
- Обычно это делается в ситуациях, когда мы уверены в направлении ожидаемых различий
- При таких альтернативах ошибку первого рода полностью переносят на один из двух хвостов

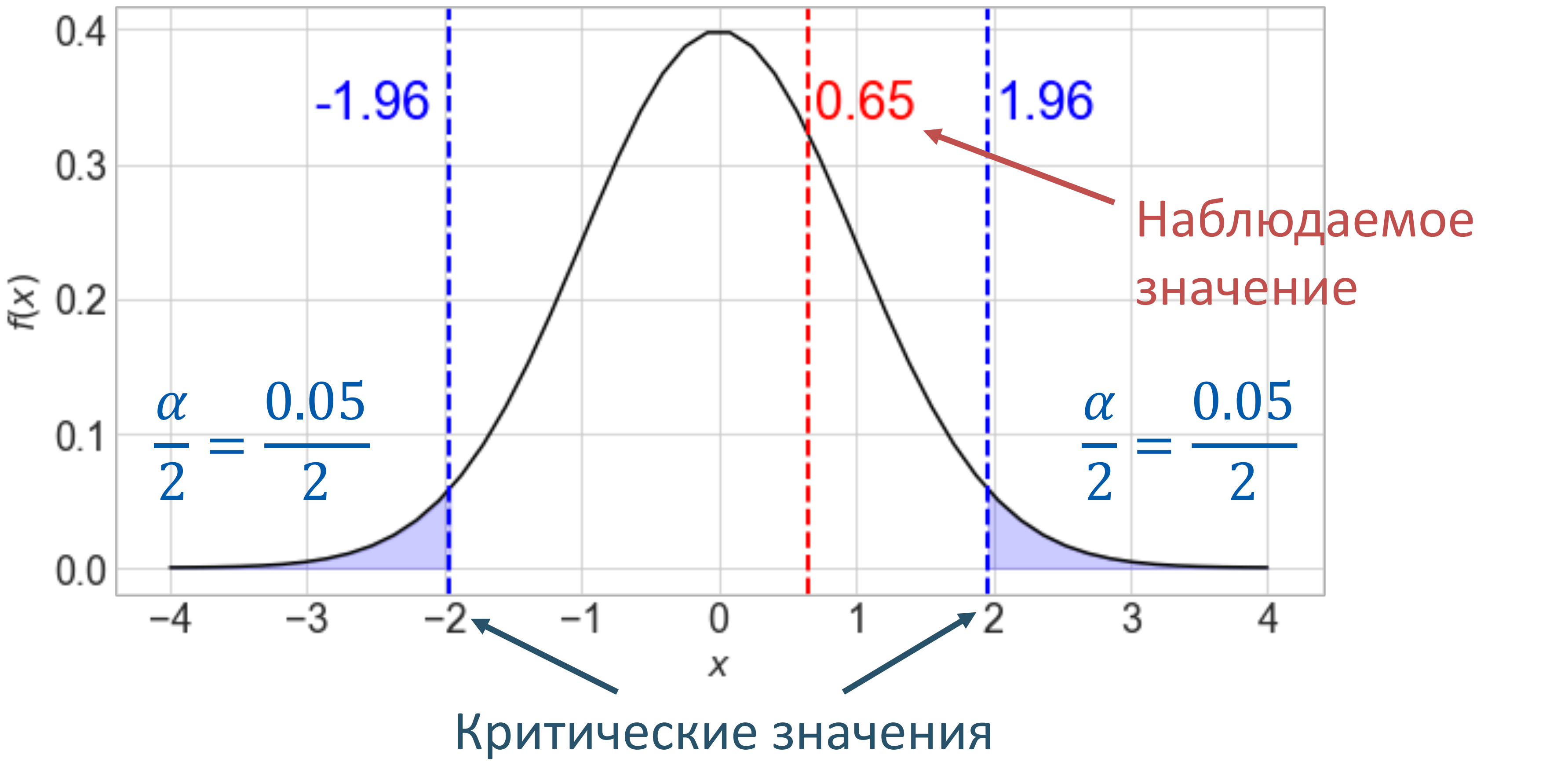


P-значение

P-значение

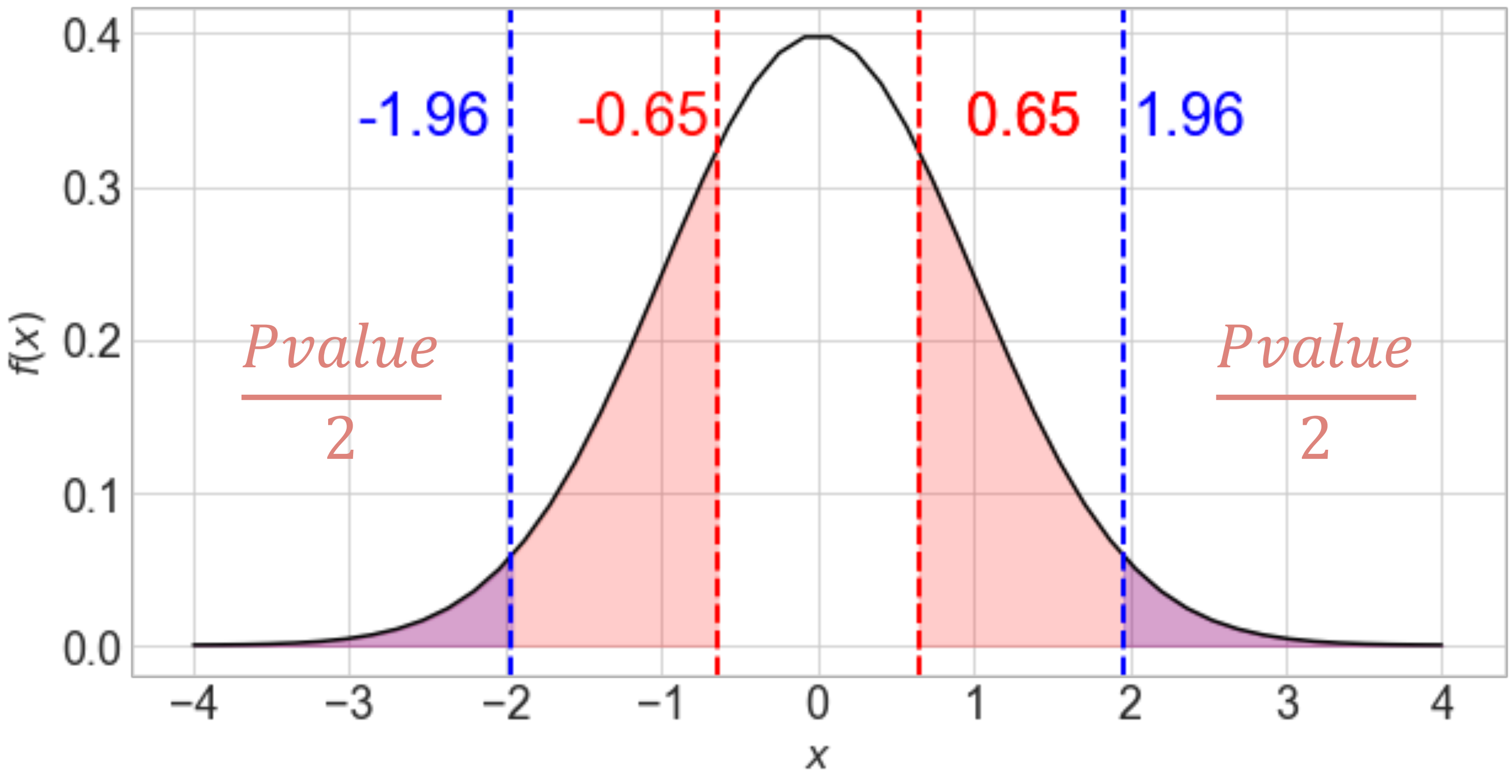
- Наблюдаемое значение попало в область между критическими $\Rightarrow$ гипотеза не отвергается

- Голубая площадь под хвостами – уровень значимости



P-значение

- Красная площадь под хвостами – **p-значение** (достигаемый уровень значимости)

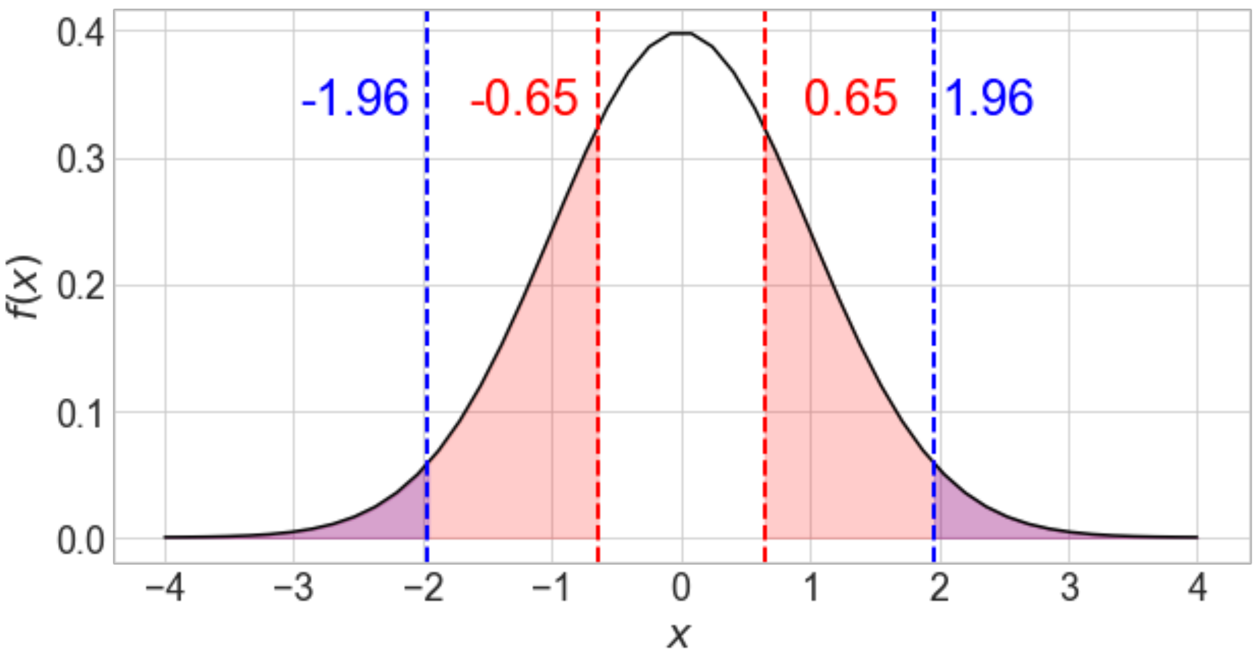


P-значение упрощает проверку гипотез

Если красная площадь оказалась **больше** синей

$$p\_value > \alpha,$$

$\Rightarrow$ наблюдаемое значение попало в область между критическими, гипотеза **не отвергается**.



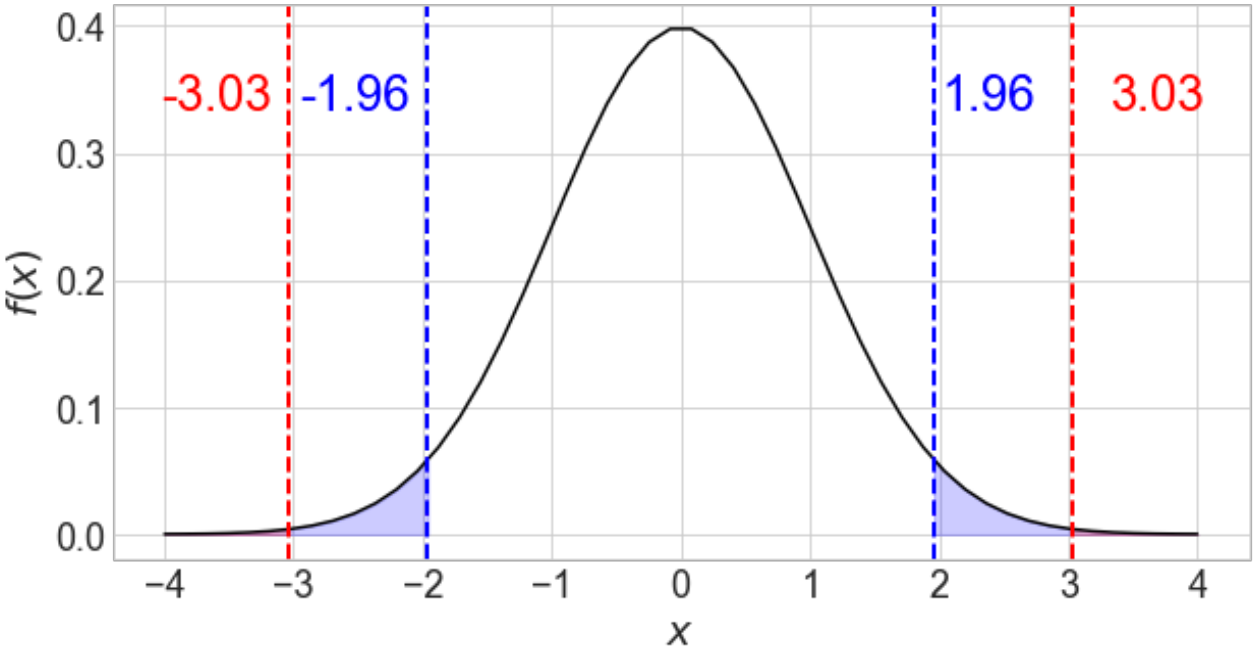
$p\_value > \alpha \Rightarrow$ не отвергается

P-значение упрощает проверку гипотез

Если красная площадь оказалась **меньше** синей

$$p\_value < \alpha,$$

$\Rightarrow$ наблюдаемое значение попало в критическую область, гипотеза **отвергается**.



$p\_value < \alpha \Rightarrow$ отвергается

P-значение

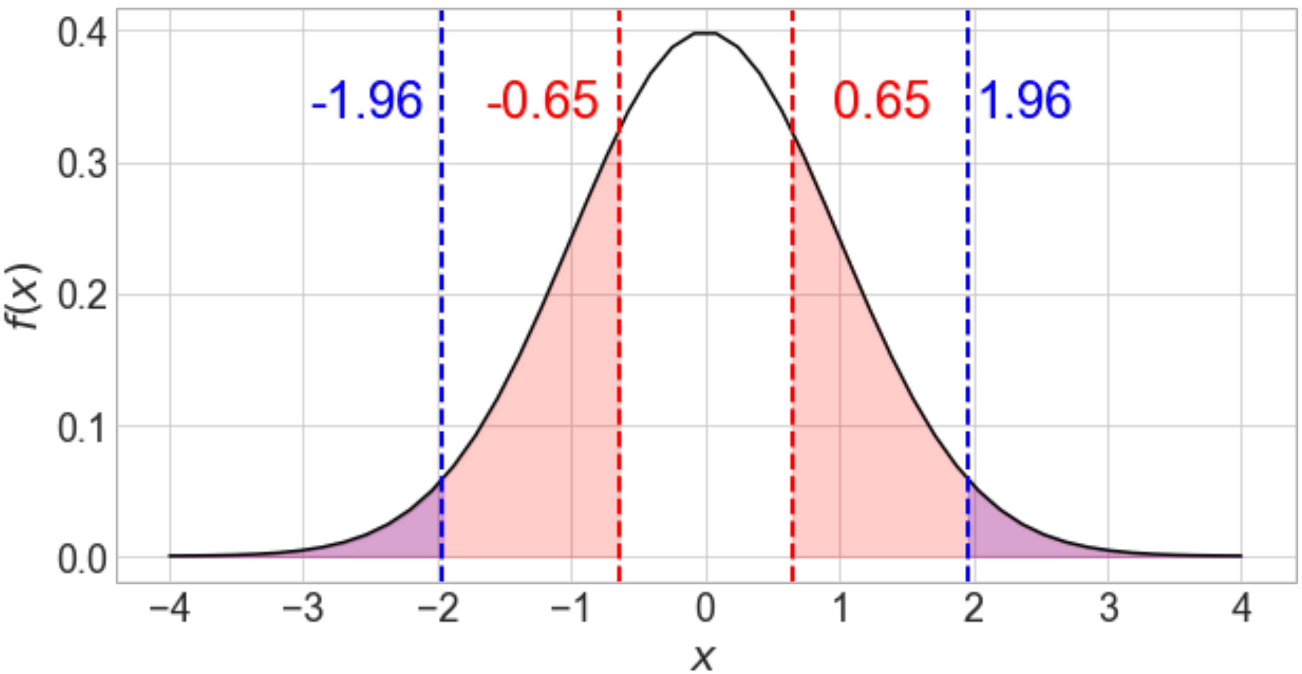
Вопрос: какой уровень значимости надо выбрать, чтобы гипотеза впервые отверглась?

Р-значение

Вопрос: какой уровень значимости надо выбрать, чтобы гипотеза впервые отверглась?

Ответ: равный Р-значению

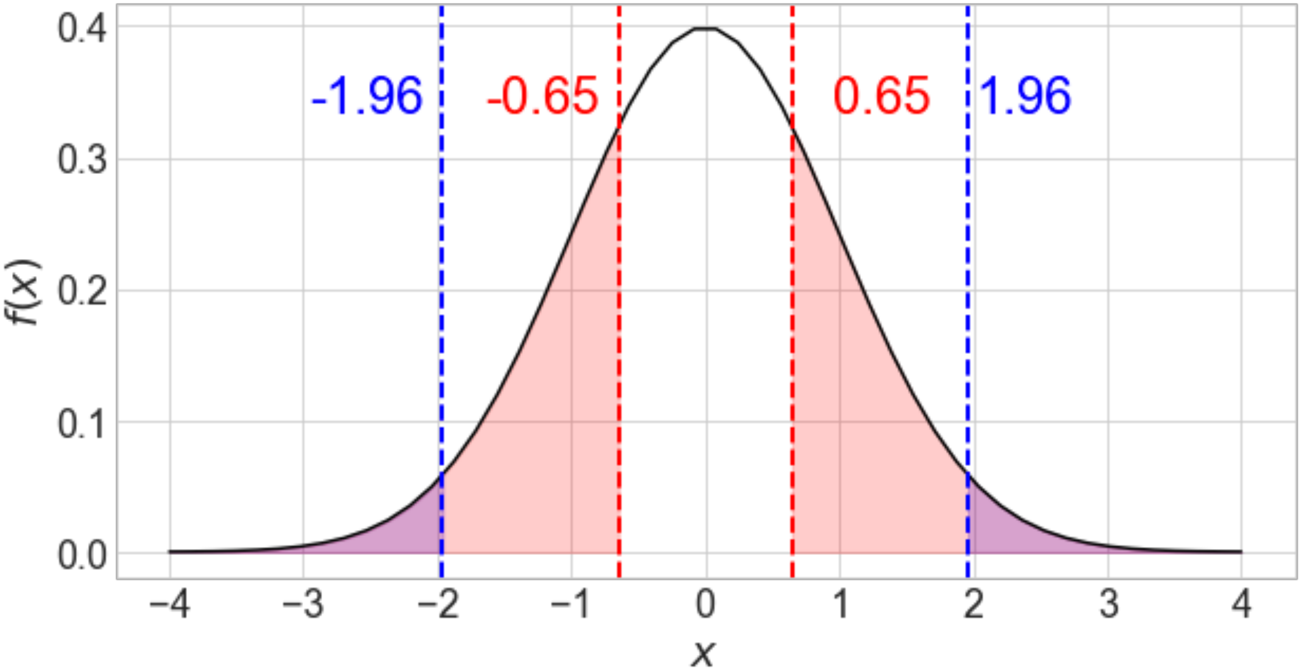
Из-за этого Р-значение также называют **достигаемым уровнем значимости**



P-значение

Достигаемый уровень значимости (**P-значение**) –
это вероятность при справедливости нулевой гипотезы получить такое же наблюдаемое значение статистики, как в эксперименте либо ещё более экстремальное

$$\text{p\_}value = \mathbb{P}(|z| > z_{\text{набл.}} \mid H_0)$$



P-значение

Достигаемый уровень значимости (**P-значение**) –
это вероятность при справедливости нулевой гипотезы получить такое же наблюдаемое значение статистики, как в эксперименте либо ещё более экстремальное

$$\text{p\_}value = \mathbb{P}(|z| > z_{\text{набл.}} \mid H_0)$$

В нашей ситуации $p\_value = 0.518$, то есть вероятность получить наше или ещё более экстремальное значение статистики, при верности H_0 высока, что говорит в пользу гипотезы

Резюме

- С помощью P-значения удобно проверять гипотезы
- Оно помогает не акцентировать внимание на том, как именно вычисляется критическое значение, и упрощает понимание статистических протоколов

Типичный протокол из статистического пакета:

	coef	std err	z	P>|z|	[0.025	0.975]
Intercept	-2.5988	1.918	-1.355	0.175	-6.358	1.161
y	0.4170	0.297	1.404	0.160	-0.165	0.999

p_*value*

Ошибки 1 и 2 рода

Ошибки, что мы совершаем

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 не отвергается	ok	β
H_0 отвергается	α	ok

ошибка 2 рода

ошибка 1 рода

$$\alpha = \mathbb{P}(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0 \text{ верна})$$

$$\beta = \mathbb{P}(H_0 \text{ не отвергнута} \mid H_0 \text{ не верна})$$

Величину $1 - \beta$ называют **мощностью** критерия

Ошибки, что мы совершаем

H_0: нет беременности — H_a: есть беременность

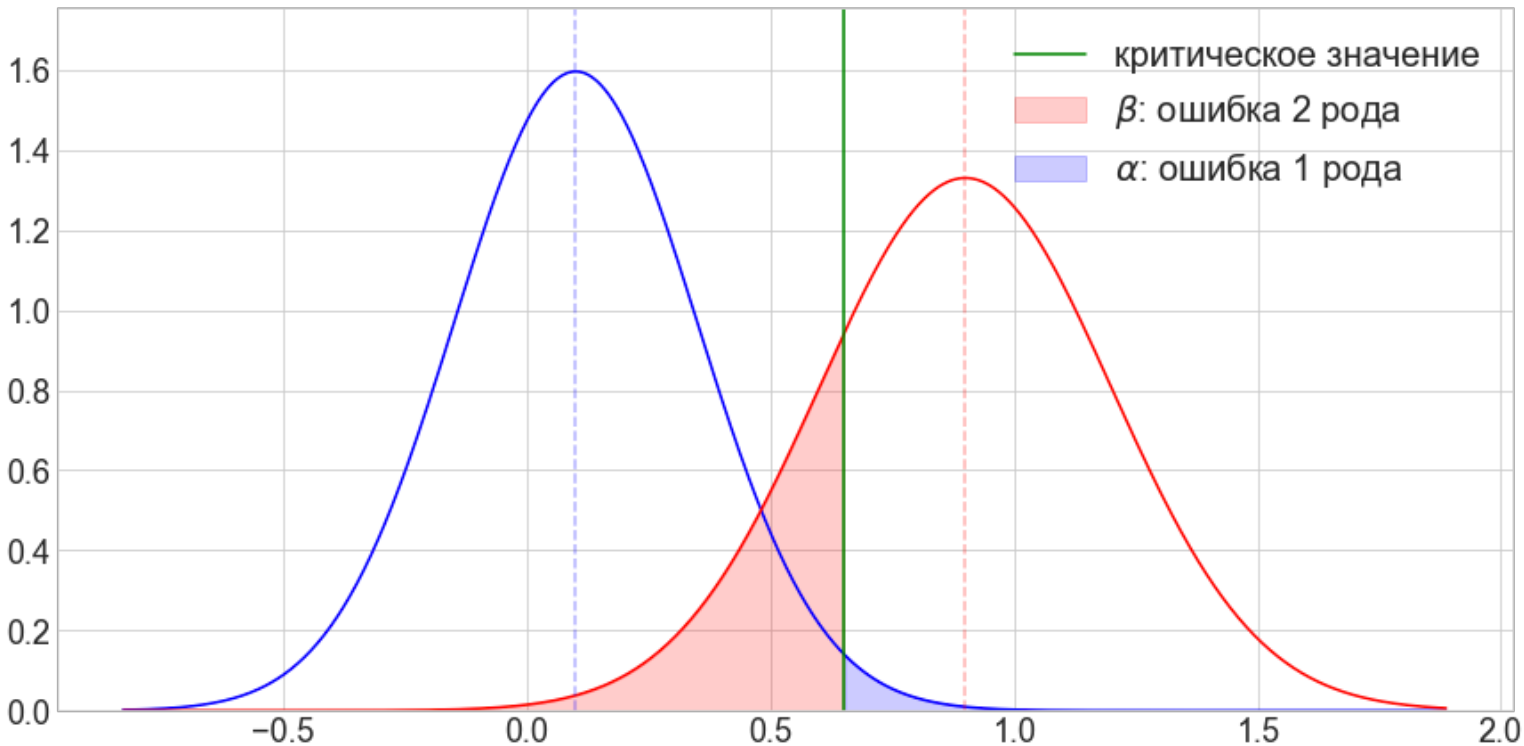
	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 не отвергается	 Вы не беременны	 Вы не беременны
H_0 отвергается	 Вы беременны	 Вы беременны

Ошибки, что мы совершаем

$H_0: p = p_0$

$H_a: p = p_a$

Ошибки первого и второго рода неравнозначны:
мы перед экспериментом фиксируем α,
а β минимизируется по остаточному принципу



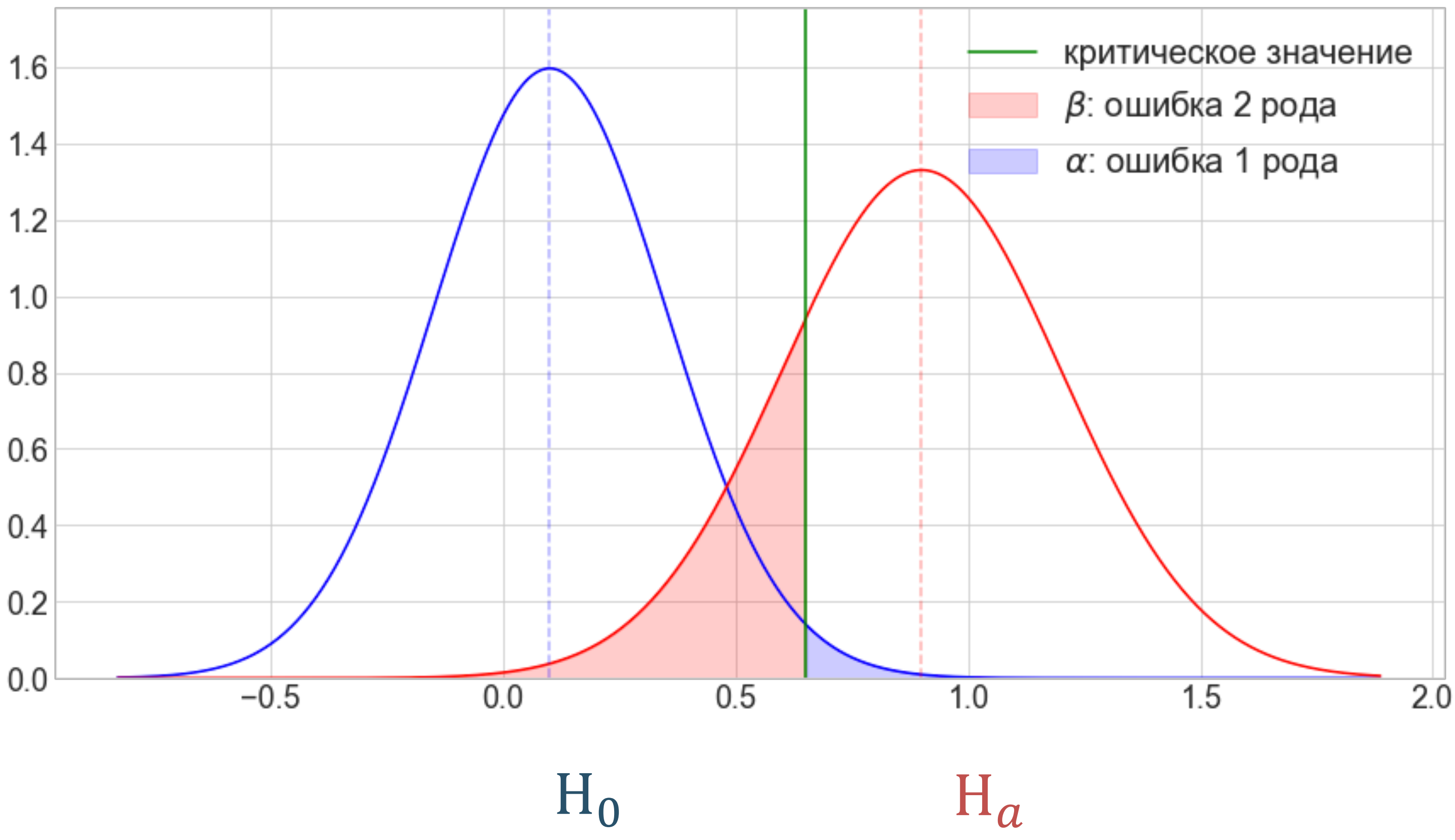
H_0 H_a

Ошибки, что мы совершаем

$H_0: p = p_0$

$H_a: p = p_a$

При уменьшении ошибки первого рода всегда возрастает ошибка второго рода



Аналогия с классификацией

	$y = 1$	$y = 0$
$\hat{y} = 1$	TP	FP
$\hat{y} = 0$	FN	TN

ошибка 2 рода

ошибка 1 рода

Пример: хотим, чтобы классификатор удалял спам и задел минимум хороших документов

Подбор порога: зафиксировать $FPR = \frac{FP}{FP+TN} \le 0.05$ (доля зря удалённых), а дальше максимизировать полноту

$$Recall = TPR = \frac{TP}{TP+FN} = 1 - \frac{FN}{TP+FN}$$

Наиболее мощный критерий

- **Статистический критерий** – способ посчитать расстояние между наблюдаемым значением и предполагаемым
- Подобные расстояния можно считать разными способами
- Хочется выбрать такой способ, который при фиксированном размере выборки и фиксированной ошибке первого рода будет давать наименьшую ошибку второго рода
- Такой критерий называется **наиболее мощным**

Резюме

- Ошибки первого и второго рода неравнозначны
- Имеется презумпция нулевой гипотезы
- Обычно нулевую гипотезу формулируют так, что нет значимого эффекта

Параметрические критерии

Какими бывают критерии

Критерии

Параметрические

Включают в себя расчёт параметров конкретного распределения

Непараметрические

Не завязаны на конкретное распределение

Согласия

Проверяется гипотеза о виде неизвестного закона распределения

Есть и другие группы критериев. Любое математически формализованное правило, по которому проверяется гипотеза, можно назвать критерием.

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta}$ → $f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Асимптотические критерии

Точные критерии

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Ответы на вопросы

проверка гипотез

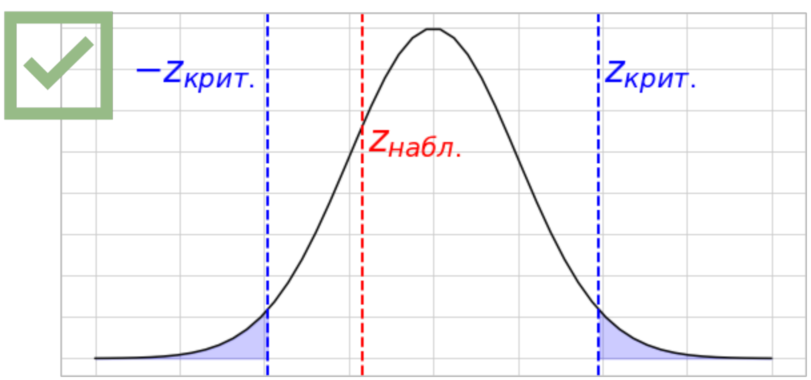
Гипотезы о долях

Z-критерий для доли

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$$

$$H_0\colon p = p_0$$

$$H_a\colon p \neq p_0$$



ЦПТ:

$$\hat{p} \underset{H_0}{\overset{asy}{\sim}} N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$

Критерий для проверки:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \underset{H_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1)$$

Критерий асимптотический, т.к. использует ЦПТ

Пример (дискриминация):

- В 70-х за участие в антивоенной демонстрации арестован педиатр, автор книг о воспитании детей, Бенджамин Спок
- Суд присяжных назначается сложной многоступенчатой процедурой отбора
- Отобрано 300 человек, из них 90 женщин
- Адвокаты протестуют на предвзятость выбора
- Проверяем гипотезу о предвзятости на уровне значимости 5%

Пример (дискриминация):

H_0: отбор беспристрастный

H_a: женщин дискриминируют

$\Leftrightarrow$

H_0: $p = 0.5$

H_a: $p < 0.5$

Левосторонняя альтернатива, так как нас интересует именно дискриминация женщин

Пример (дискриминация):

H_0: отбор беспристрастный $\Leftrightarrow$ H_0: $p = 0.5$

H_a: женщин дискриминируют $\quad$ H_a: $p < 0.5$

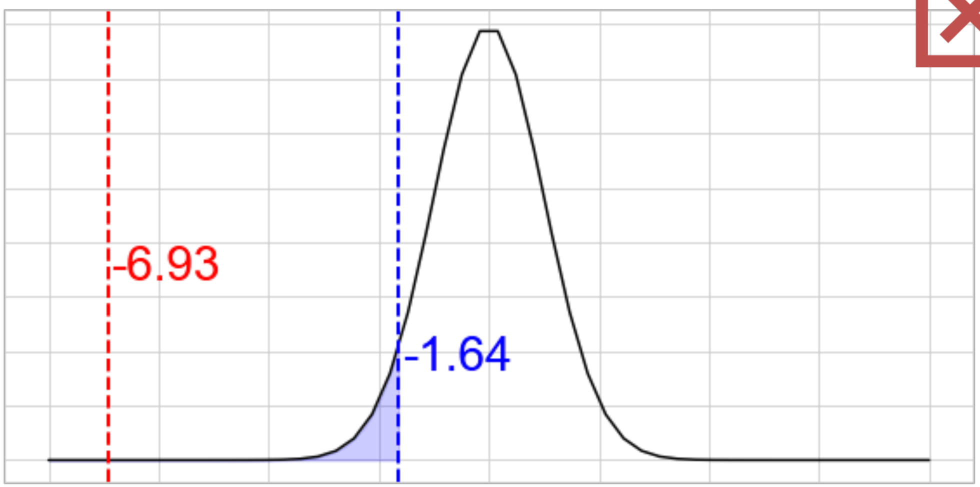
$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p)$

$X_i = 1$, если присяжный – женщина

$$\hat{p} = \frac{90}{300}$$

$$z_{obs} = \frac{0.3 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5\,(1 - 0.5)}{300}}}$$

$$z_{0.05} = -1.64$$



Гипотеза о беспристрастном отборе **отвергается**

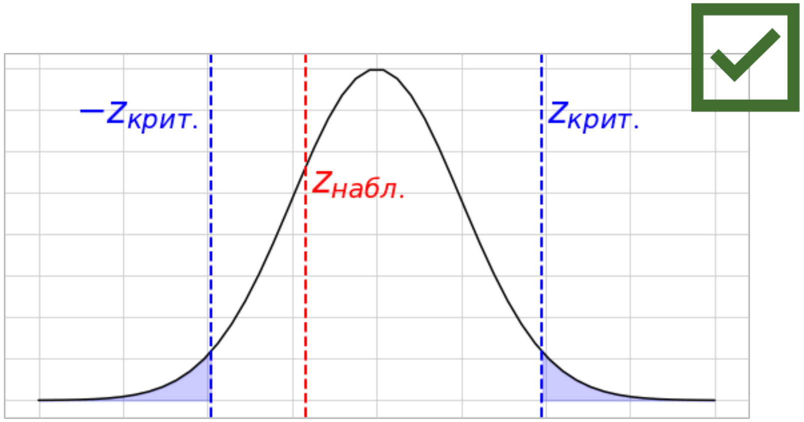
Z-критерий для разности независимых долей

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ Bern(p_x)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ Bern(p_y)$$

Выборки независимые

$H_0\colon p_x = p_y = P \quad H_a\colon p_x \neq p_y$



Критерий асимптотический, т.к. использует ЦПТ

Критерий для проверки:

$$z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{P(1-P) \cdot \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \underset{H_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1) \qquad P = \frac{m_x + m_y}{n_x + n_y}$$

m_i – число 1 в выборке

Пример (кофе):

H_0: кофе любят одинаково $\Leftrightarrow$ H_0: $p_П = p_М$

H_a: в Москве любят сильнее $\Leftrightarrow$ H_a: $p_П < p_М$

$X_1, \ldots, X_{100} \sim iid\ Bern(p_М)$

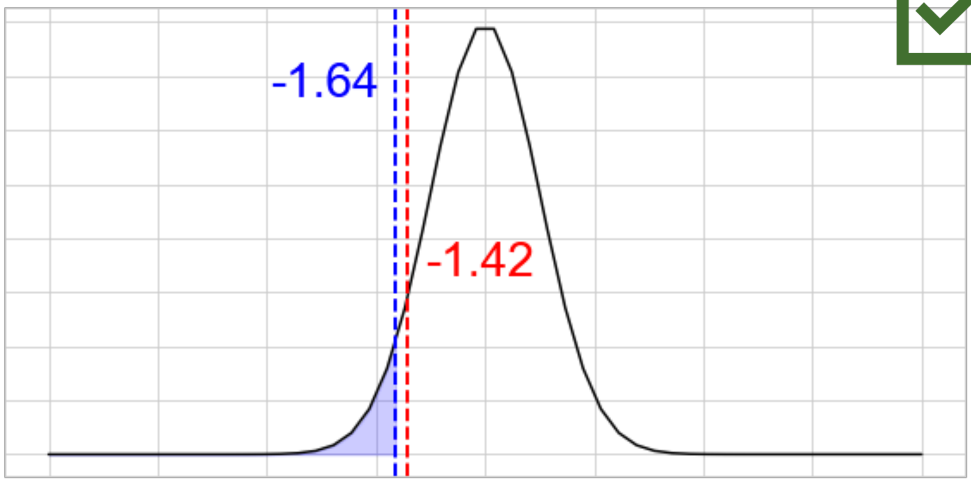
$Y_1, \ldots, Y_{100} \sim iid\ Bern(p_П)$

$\hat{p}_M = 0.6, \qquad \hat{p}_П = 0.5$

$$P = \frac{50+60}{200} = 0.55$$

$$z_{obs} = \frac{0.5 - 0.6}{\sqrt{0.55 \cdot 0.45 \cdot \frac{2}{100}}}$$

$z_{0.05} = -1.64$



Гипотеза об одинаковой любви **не отвергается**

Z-критерий для разности зависимых долей

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p_x)$

$Y_1, \dots, Y_n \sim iid\ Bern(p_y)$

Выборки зависимые

$\mathrm{H}_0\colon\ p_x = p_y$

$\mathrm{H}_a\colon p_x \neq p_y$

Критерий для проверки:

$$z = \frac{c-b}{\sqrt{c+b-\frac{(c-b)^2}{n}}} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0,1)$$

		X 0	1
Y	0	a	b
	1	c	d

Люди одни и те же, нас интересуют те, кто поменял мнение

Критерий асимптотический

Пример (кофе):

- В 2020 году в Москве сотню человек спросили, любят ли они кофе
- Через год у этих же ста человек снова спросили, любят ли они кофе по-прежнему
- Правда ли, что число любителей кофе изменилось?

		2020	
		0	1
2021	0	20	10
	1	20	50

Пример (кофе):

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Bern(p_x)$$

$$Y_1, \dots, Y_n \sim iid\ Bern(p_y)$$

Выборки зависимые

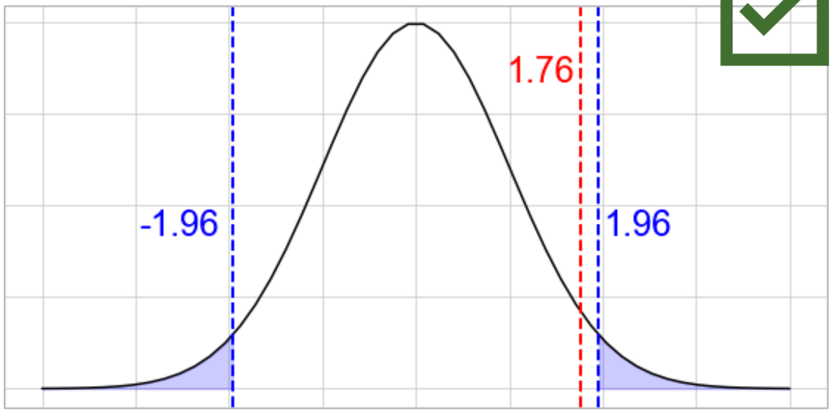
$$\mathrm{H}_0\colon\ p_x = p_y$$

$$\mathrm{H}_a\colon p_x \neq p_y$$

$$z_{obs} = \frac{20 - 10}{\sqrt{20 + 10 - \frac{(20-10)^2}{100}}}$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

		2020	
		0	1
2021	0	20	10
	1	20	50



Гипотеза о том, что люди не поменяли вкусовых предпочтений **не отвергается**

Резюме

- Для проверки гипотезы о долях используется z-тест, основанный на ЦПТ
- В случае независимых и зависимых выборок статистика считается немного по-разному, для зависимых мы акцентируем внимание только на изменениях
- Обе имеют асимптотически нормальное распределение

С помощью ровно этих же статистик мы до этого строили для долей асимптотические доверительные интервалы

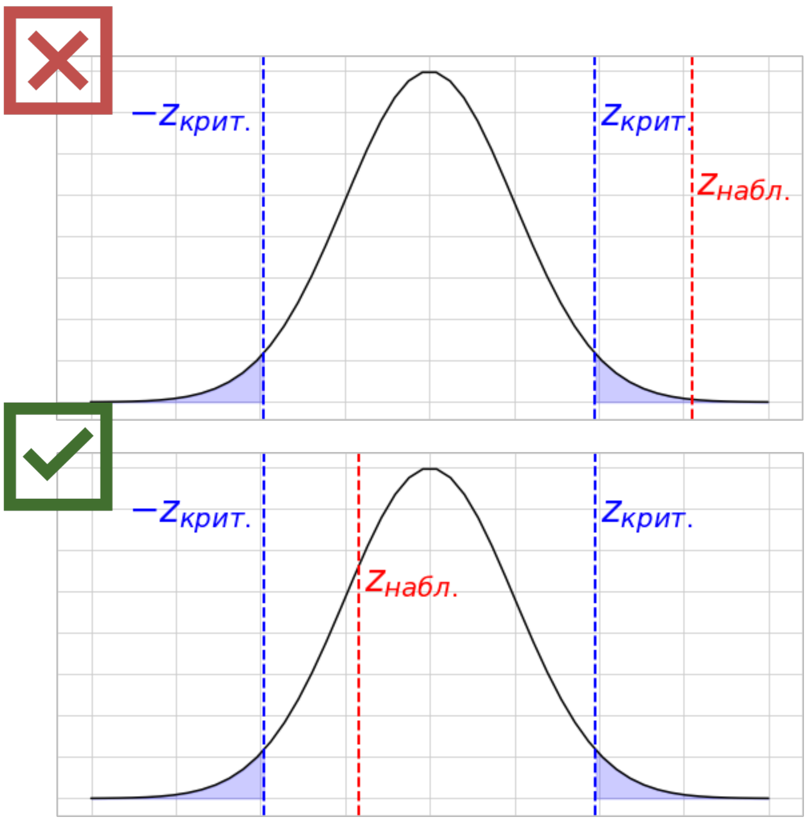
Гипотезы о средних

Z-критерий для среднего

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ (\mu, \sigma^2)$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$



ЦПТ:

$$\bar{X} \overset{asy}{\underset{H_0}{\sim}} N\left(\mu_0, \frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{n}}\right)$$

Критерий для проверки:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \overset{asy}{\underset{H_0}{\sim}} N(0, 1)$$

Критерий асимптотический, т.к. использует ЦПТ, применим для любых средних

t-критерий для среднего

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

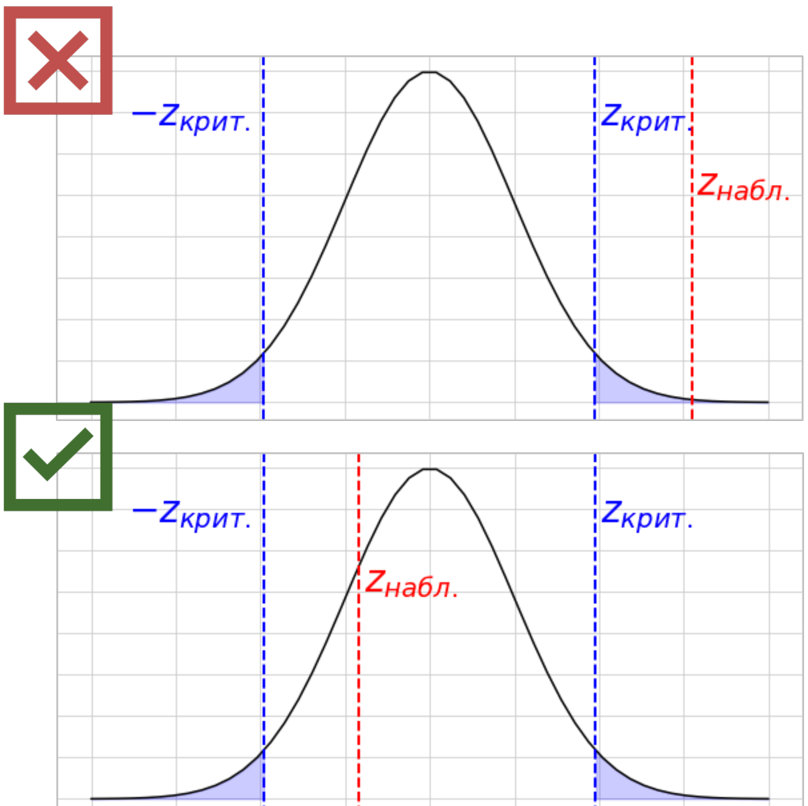
$$H_a: \mu \neq \mu_0 \qquad \sigma^2 - \text{известна}$$

ЦПТ:

$$\bar{X} \underset{H_0}{\overset{\cancel{asy}}{\sim}} N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$$

Критерий для проверки:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \underset{H_0}{\overset{\cancel{asy}}{\sim}} N(0, 1)$$



Критерий точный, используется предположение о нормальности выборки и известности σ^2

t-критерий для среднего

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

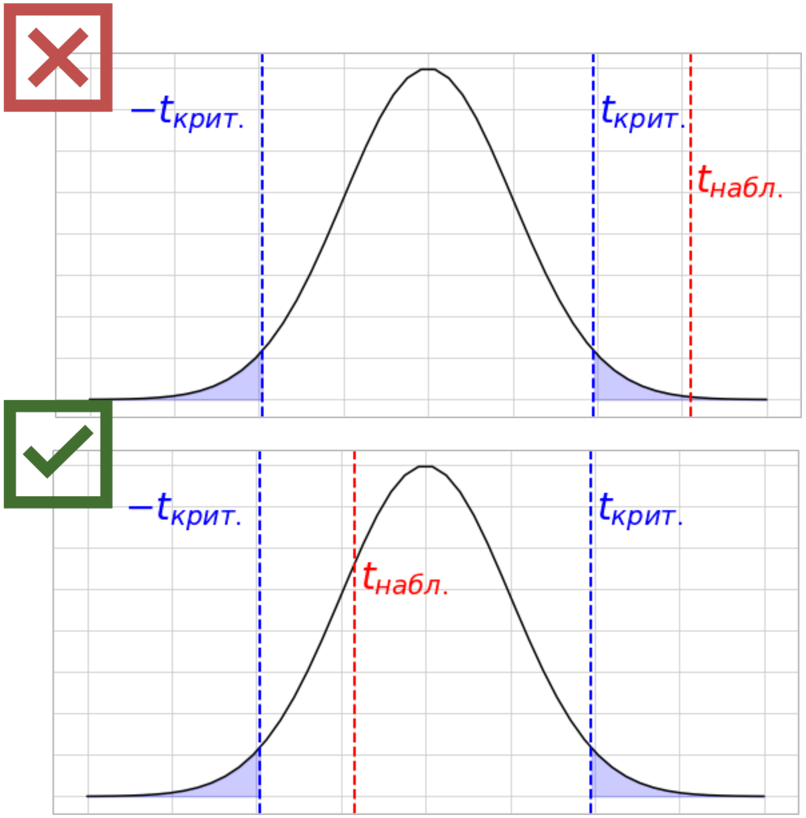
$$H_a: \mu \neq \mu_0 \quad \sigma^2 - \text{НЕизвестна}$$

ЦПТ:

$$\bar{X} \underset{H_0}{\sim} N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$$

Критерий для проверки:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \underset{H_0}{\sim} t(n-1)$$



Критерий точный, используется предположение о нормальности выборки

Пример (курсы подготовки):

- Каждый год люди сдают ЕГЭ по математике. В обычной ситуации средний результат составляет 65 баллов.
- Игорь открыл свои курсы подготовки к ЕГЭ, его группа из 100 человек получила в среднем 70 баллов, стандартное отклонение составило 20 баллов.
- Правда ли, что курсы Игоря помогают получить более высокий балл?
- Проверяем гипотезу на уровне значимости 5%

Пример (курсы подготовки):

H_0: курсы Игоря неэффективны $\Leftrightarrow$ $H_0: \mu = 60$

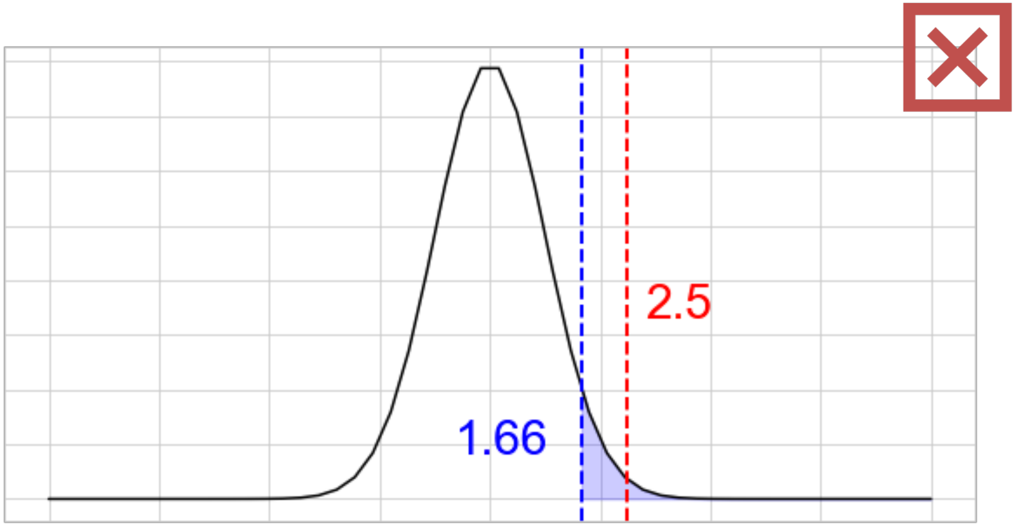
H_a: курсы помогают $\Leftrightarrow$ $H_a: \mu > 60$

Предположение:

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$

$$t_{obs} = \frac{70 - 60}{\frac{20}{\sqrt{100}}}$$

$$t_{0.95} = 1.66$$



Гипотеза о неэффективности курсов Игоря **отвергается**,
они помогают получить более высокий балл

Z-критерий для разности средних

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\,(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\,(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Выборки независимые

$\mathrm{H}_0\colon \mu_x = \mu_y$

$\mathrm{H}_a\colon \mu_x \neq \mu_y$

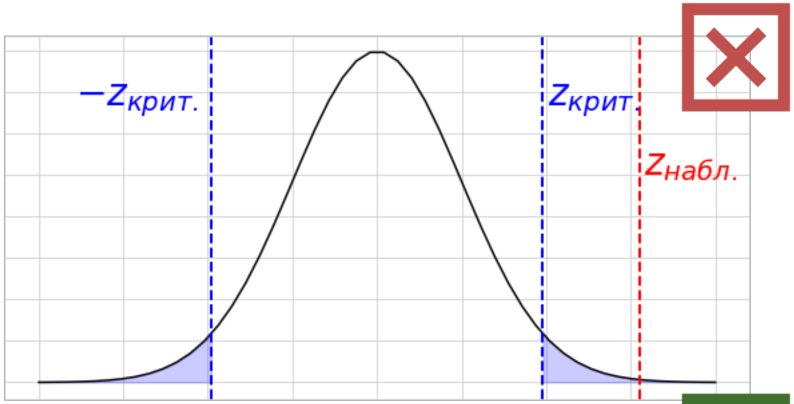
ЦПТ:

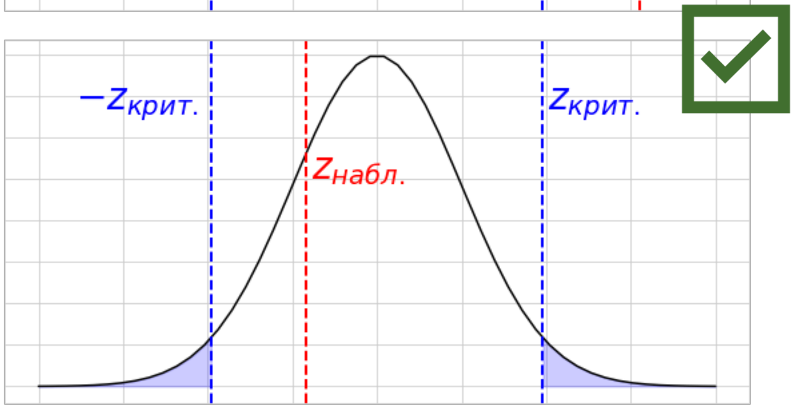
$$\bar{X} - \bar{Y} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N\left(0, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)$$

Критерий для проверки:

$$z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{asy}{\sim}} N(0, 1)$$

❗ Критерий асимптотический, т.к. использует ЦПТ





Точные критерии для разности средних

$X_1, \ldots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad$ $\mathrm{H}_0\colon \mu_x = \mu_y$

$Y_1, \ldots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad$ $\mathrm{H}_a\colon \mu_x \neq \mu_y$

Выборки независимые

Критерий для проверки:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

дисперсии известны

дисперсии неизвестны, но равны

дисперсии неизвестны, различаются

Точные критерии для разности средних

Критерий для проверки:

дисперсии известны

$$z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Нормальное распределение

дисперсии неизвестны, но равны

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_o^2}{n_x} + \frac{\hat{\sigma}_o^2}{n_y}}} \underset{H_0}{\sim} t(n + m - 2)$$

Распределение Стьюдента

дисперсии неизвестны

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n_x} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n_y}}} \underset{H_0}{\sim} t(\nu)$$

Распределение Уэлча

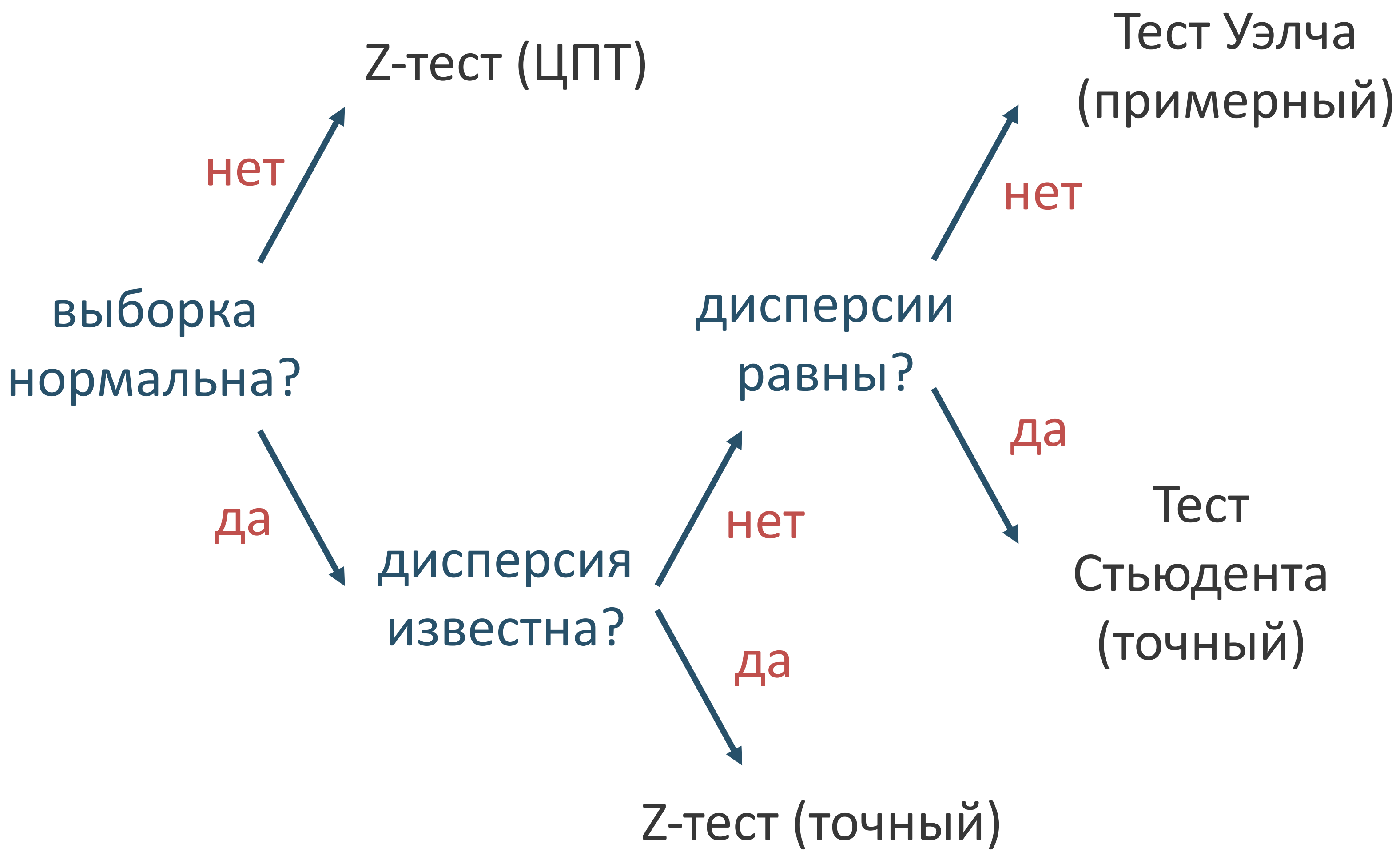
Пример (стоимость недвижимости):

- До коронакризиса один квадратный метр в Москве стоил 105 тыс. рублей при стандартном отклонении в 40 тыс.

- После коронакризиса один квадратный метр стоит 90 тыс. рублей при стандартном отклонении в 50 тыс.

- Упала ли стоимость, если $n_x = 20,\ n_y = 30$?

Пример (стоимость недвижимости):



Пример (стоимость недвижимости):

H_0: стоимость не поменялась $\quad\Leftrightarrow\quad$ $H_0: \mu_{2021} = \mu_{2020}$

H_a: стоимость упала $\quad\quad\quad\quad$ $H_a: \mu_{2021} < \mu_{2020}$

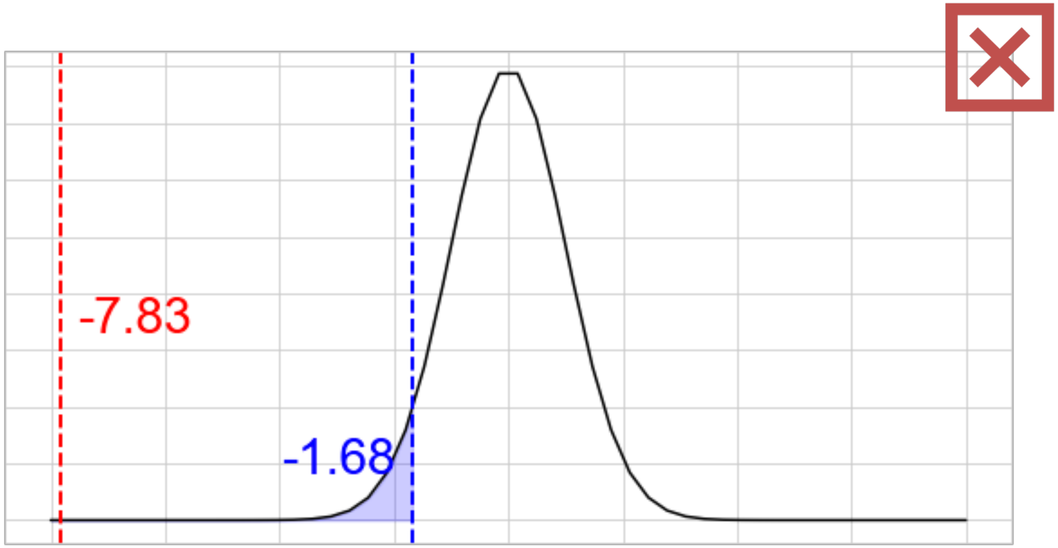
Предположение:

Выборки независимы, нормальны

$$t_{obs} = \frac{90 - 105}{\sqrt{\frac{40}{20} + \frac{50}{30}}}$$

$$\nu = 43.89$$

$$t_{0.95} = -1.67$$



Гипотеза о неизменности цен **отвергается**

Разность средних (зависимые выборки)

Выборки зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y_1, \dots, Y_n \sim iid\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

- Измерения делаются на одних и тех же объектах
- Можем посмотреть прирост на отдельных объектах

$$d_i = X_i - Y_i$$

- Используем распределение Стьюдента, дисперсию считаем по формуле:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2$$

Пример (польза лекарства):

- На 5 испытуемых сравнивают два лекарства против респираторных заболеваний
- Каждый вдыхает лекарство из ингалятора, а после принимает участие в упражнении на беговой дорожке
- Измеряется время достижения максимальной нагрузки
- Затем то же самое проделывается со вторым лекарством, правда ли что лекарства не отличаются?

Пример (польза лекарства):

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

Лекарство 1	50	40	45	45	35
Лекарство 2	60	30	30	35	30
d_i	10	-10	-15	-10	-5

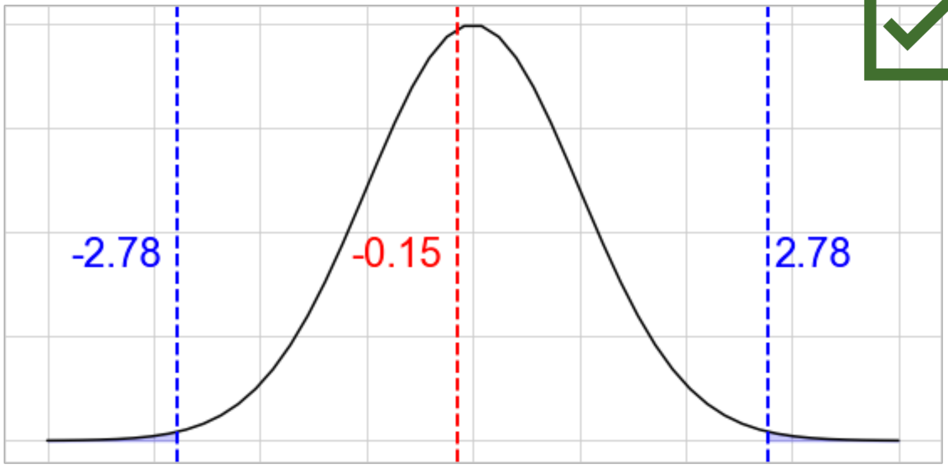
Предположение:

Выборки независимы, нормальны

$$\bar{d} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} d_i = -6$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(d_i - \bar{d})^2 = 92.5$$

$$t_{obs} = \frac{-6-0}{92.5/\sqrt{5}} \qquad t_{0.95} = 2.78$$



Гипотеза, что время достижения максимальной нагрузки не отличается **не отвергается**

Резюме

- Благодаря удобству ЦПТ, критерии основанные на ней широко распространены
- Для маленьких выборок бывает лучше использовать точные критерии
- Если эти критерии основаны на нормальном распределении, надо проверить выборку на нормальность
- Если предполагается равенство дисперсий, это тоже не помешает проверить

❗ С помощью ровно этих же статистик мы до этого строили для средних доверительные интервалы.

Гипотезы о дисперсиях

χ^2 – критерий для дисперсии

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$

μ – известно

$\mathrm{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$\mathrm{H}_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Критерий для проверки:

$$\frac{n \cdot \hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \underset{\mathrm{H}_0}{\sim} \chi_n^2$$

- Высокая дисперсия связана с риском и нестабильностью
- Мы хотим знать, принимает ли дисперсия своё значение ниже σ_0^2
- Из-за этого в качестве альтернативы обычно используют правостороннюю

χ^2 – критерий для дисперсии

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$

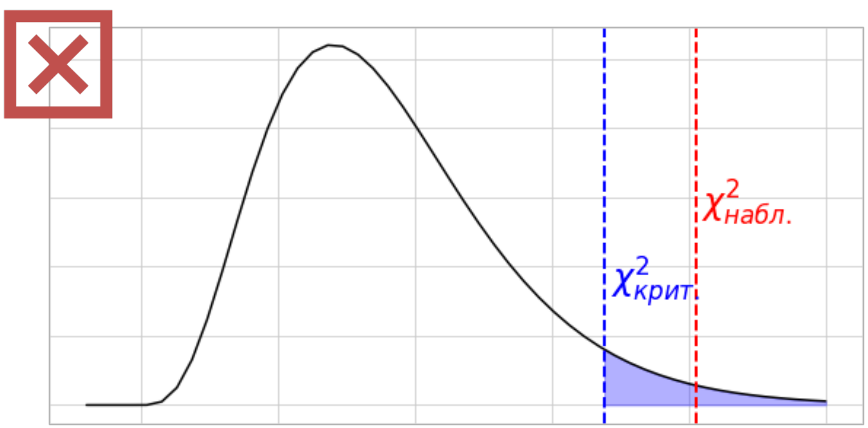
μ − известно

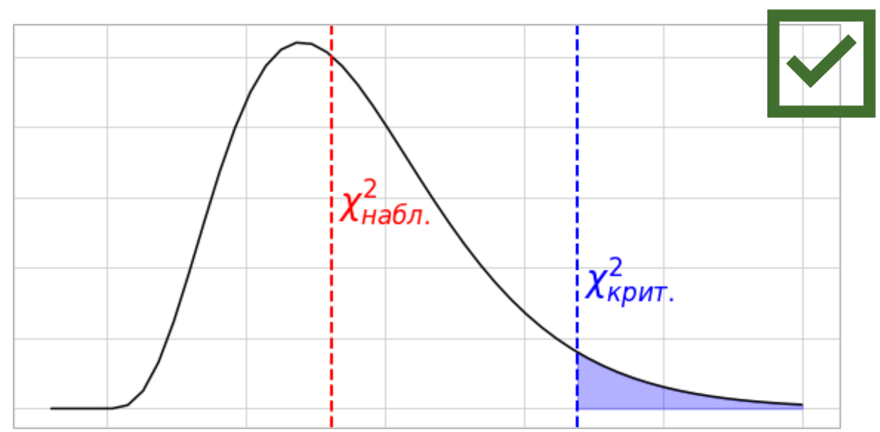
$\text{H}_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$

$\text{H}_a\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$

Критерий для проверки:

$$\frac{n \cdot \hat{s}^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \underset{\text{H}_0}{\sim} \chi_n^2$$





Критерий точный, используется предположение о нормальности выборки и известности μ

χ^2 – критерий для дисперсии

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$

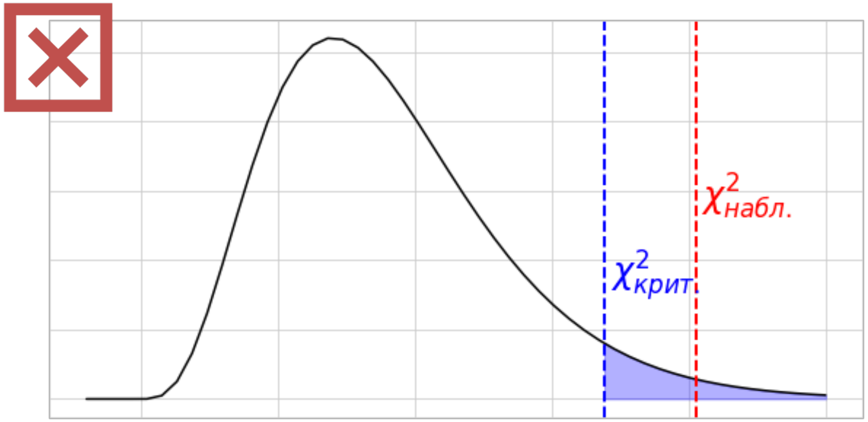
μ – НЕизвестно

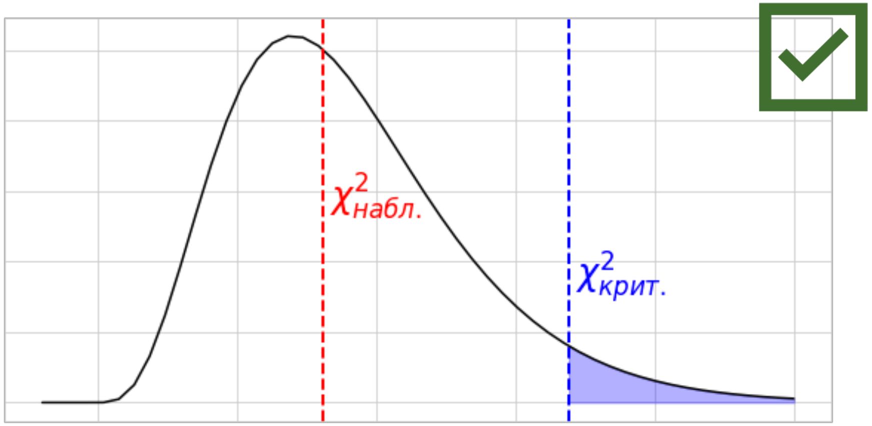
$\mathrm{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$\mathrm{H}_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Критерий для проверки:

$$\frac{(n-1)\cdot\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \underset{\mathrm{H}_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$$





Критерий точный, используется предположение о нормальности выборки

Пример (ценная бумага):

- Мистер Белфорд считает, что вкладываться в активы с дисперсией доходности выше 0.04 очень риксованно.
- За последний год дисперсия Chesapeake Energy составила 0.09. Следует ли вкладываться в эту бумагу? Решение принимается на уровне значимости 5%.

Пример (ценная бумага):

H_0: стоит вкладываться

H_a: лучше не надо

$\Leftrightarrow$

$\text{H}_0: \sigma^2 \leq 0.04$

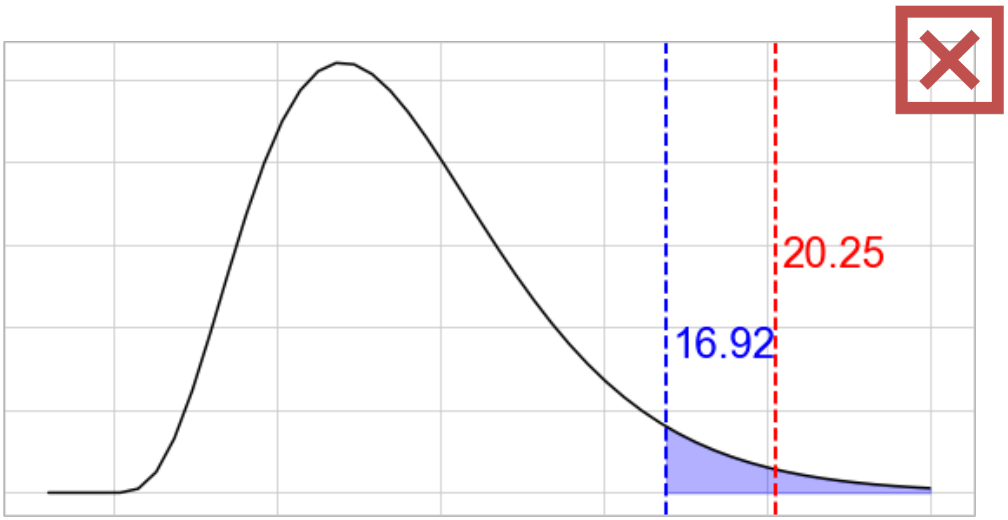
$\text{H}_a: \sigma^2 > 0.04$

Предположение:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(10-1) \cdot 0.09}{0.04}$$

$$\chi^2_9(0.95) = 16.92$$



Гипотеза о том, что риск бумаги устроит мистера Белфорда **отвергается**

Тест Фишера для отношения дисперсий

$$X_1, \ldots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_y^2)$$

$$Y_1, \ldots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

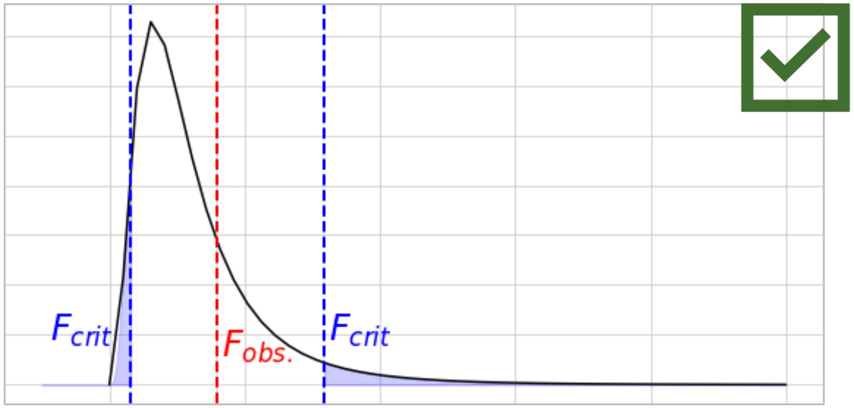
Выборки независимые

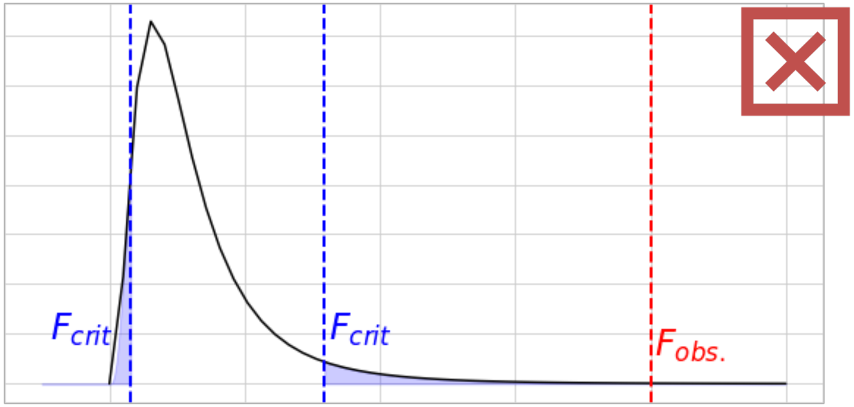
$\mathrm{H}_0\colon\ \sigma_x = \sigma_y$

$\mathrm{H}_a\colon \sigma_x \neq \sigma_y$

Критерий для проверки:

$$\frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \underset{\mathrm{H}_0}{=} \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2} \underset{\mathrm{H}_0}{\sim} F_{n_x-1,\, n_y-1}$$





Критерий точный, используется предположение о нормальности выборки

Пример (ценная бумага):

- Мистер Белфорд наблюдает за двумя бумагами.
  За последние десять лет выборочная дисперсия доходности для первой бумаги составила 0.05.
  Для второй бумаги 0.08.

- Есть ли основания полагать, что на уровне значимости 5% вложение во вторую бумагу более рискованно.

Пример (ценная бумага):

H_0: риск одинаковый $\Leftrightarrow$ $\text{H}_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

H_a: вторая бумага риксованнее $\Leftrightarrow$ $\text{H}_a: \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

Предположение:

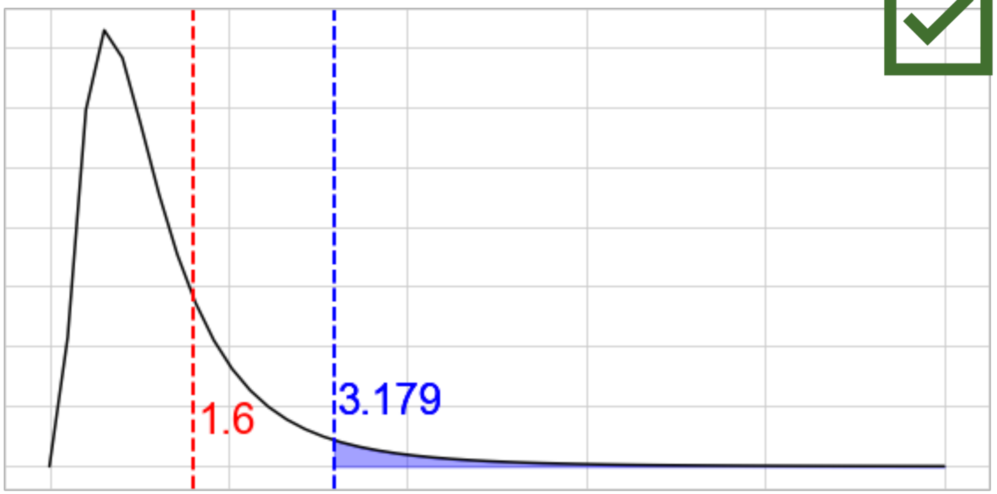
$$X_1, \ldots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_y^2)$$

$$Y_1, \ldots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Выборки независимые

$$F_{obs} = \frac{0.08}{0.05}$$

$$F_{9,9}(0.95) = 3.18$$



Гипотеза о том, что бумаги обладают одинаковой рискованностью **не отвергается**

Резюме

- Для нормальных выборок для проверки гипотез о дисперсиях можно использовать критерий Хи-квадрат
- Для случая двух нормальных выборок подойдёт тест Фишера
- Есть и другие способы проверять гипотезы о дисперсиях

❗ С помощью ровно этих же статистик мы до этого строили для дисперсий доверительные интервалы