

Непараметрические тесты, критерии согласия, бутстррап

Непараметрические критерии

Непараметрические критерии

Параметрические критерии:

- Нулевая гипотеза формулируется о конкретных параметрах распределения
- Перед проведением теста на выборку накладываем предположения о распределении

Непараметрические критерии:

- Свойства распределения неизвестны
- Используют только информацию из выборки

Критерии знаков

Критерии знаков (одновыборочный)

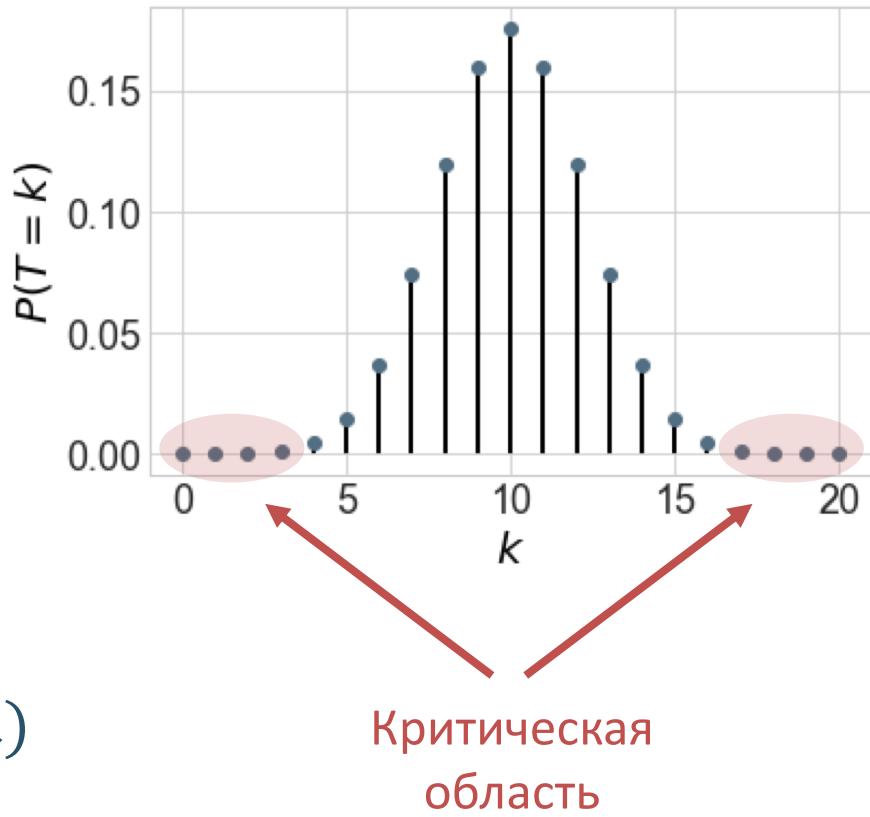
$X_1, \dots, X_n \sim iid$

$H_0: Med(X) = m_0$

$H_a: Med(X) \neq m_0$

Критерий для проверки:

$$T = \sum_{i=1}^n [X_i > m_0] \sim Bin(0.5, n)$$



Задача о попугаях

Пример: есть данные о говорливости попугаев (слов в день), правда ли, что в среднем попугай говорят больше 5 слов?

6, 4, 4, 7, 8

1, 0, 0, 1, 1

$$T_{\text{набл.}} = 3 \quad < \quad T_{\text{кр.}} = T_{1-\alpha} = 5$$

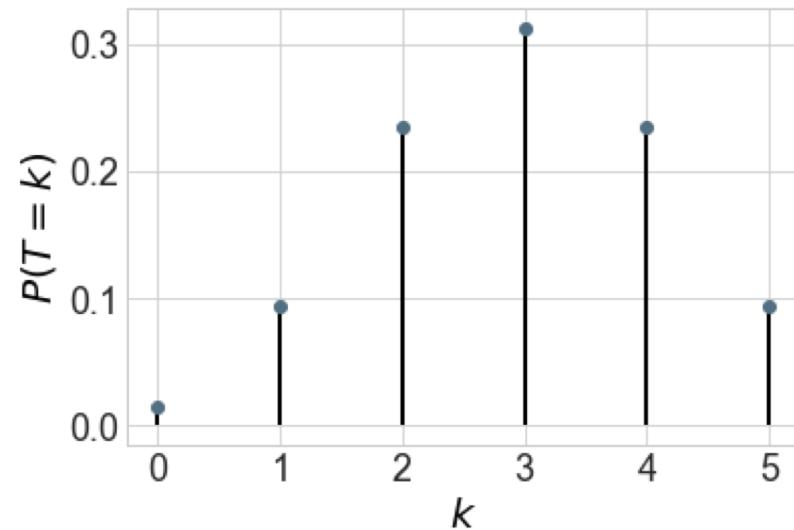
$$H_0: Med(X) = 5$$

$$H_a: Med(X) > 5$$

$$\alpha = 0.05$$



Гипотеза
не отвергается



Критерии знаков (двухвыборочный)

$X_1, \dots, X_n \sim iid$

$Y_1, \dots, Y_n \sim iid$

Выборки связанные

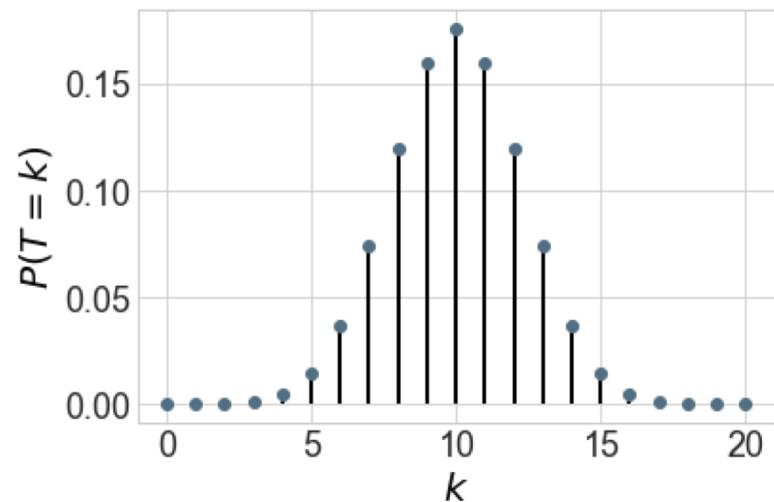
$H_0: \mathbb{P}(X > Y) = 0.5$

$H_a: \mathbb{P}(X > Y) \neq 0.5$

Критерий для проверки:

$$T = \sum_{i=1}^n [X_i > Y_i] \sim Bin(0.5, n)$$

! Снова превращаем выборки в нули и единицы, но немного другим способом



Задача про апелляцию

Пример: даны баллы студентов до и после апелляции.
Правда ли, что в среднем апелляция не повышает балл
за контрольную?

До: 48, 54, 67, 56, 55, 55, 90, 71, 72, 69

После: 47, 52, 60, 60 58, 60, 70, 81, 87, 60

0 0 0 1 1 1 0 1 1 0

$$T_{\text{набл.}} = 5$$

$$T_{\text{кр.}} = 8$$

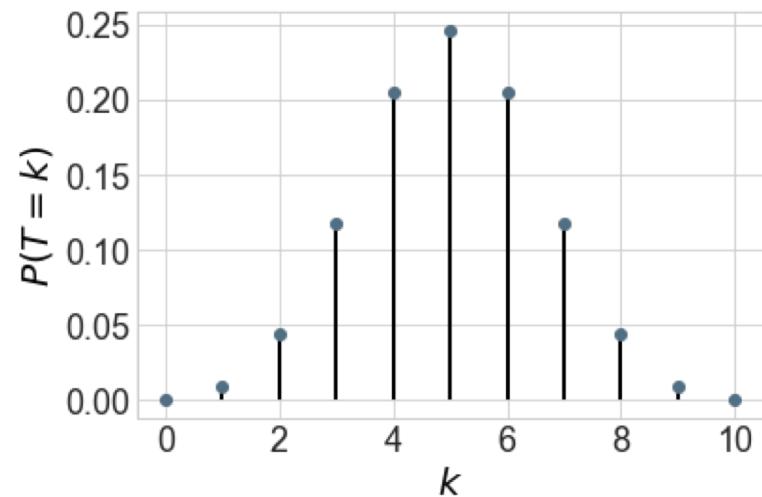
$$H_0: \mathbb{P}(X > Y) = 0.5$$

$$H_a: \mathbb{P}(X > Y) > 0.5$$

$$\alpha = 0.05$$



Гипотеза
не отвергается



Резюме

- Критерий знаков позволяет проверять гипотезу о равенстве медианы и отсутствии сдвига в связных выборках
- Критерий знаков игнорирует величину изменений и обращает внимание только на её направление
- Из-за этого происходит потеря части информации о выборке

Ранговые критерии

Идея критерия

- Критерии знаков превращают выборку в нули и единицы, из-за этого теряется информация
- Чтобы сохранить больше информации о выборке, можно превращать наблюдения в ранги

Ранг наблюдения

x_1, x_2, \dots, x_n – выборка

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ Упорядочим по возрастанию

Правила выставления ранга:

1. Порядковый номер наблюдения – ранг
2. Если встречаются несколько одинаковых значений, им присваивается одинаковое значение ранга, равное среднему арифметическому их порядковых номеров

Критерии Уилкоксона (одновыборочный)

$X_1, \dots, X_n \sim iid$

$F_X(x)$ симметрична
относительно медианы

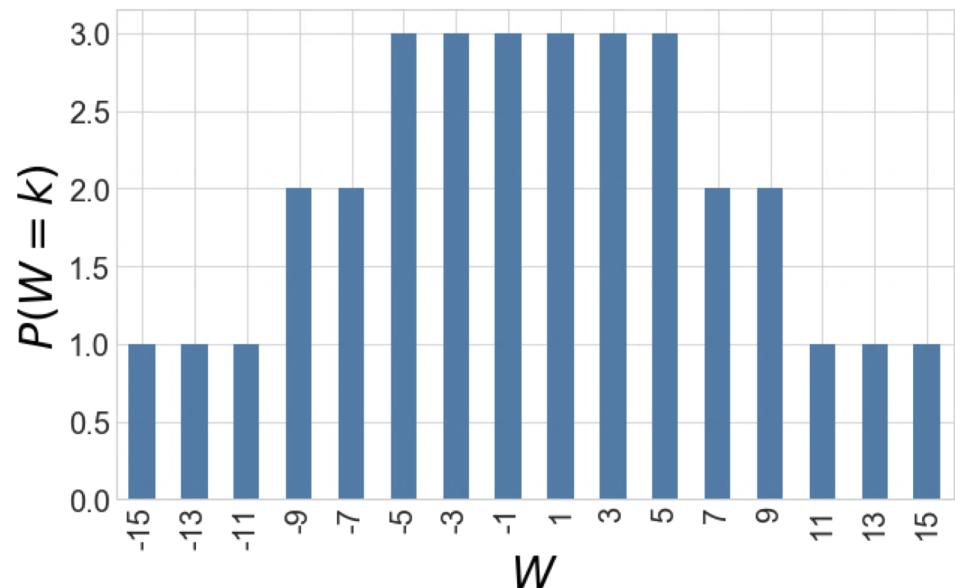
$H_0: Med(X) = m_0$

$H_a: Med(X) \neq m_0$



У статистики табличное
распределение

Распределение для $n = 5$



Критерий
для проверки:

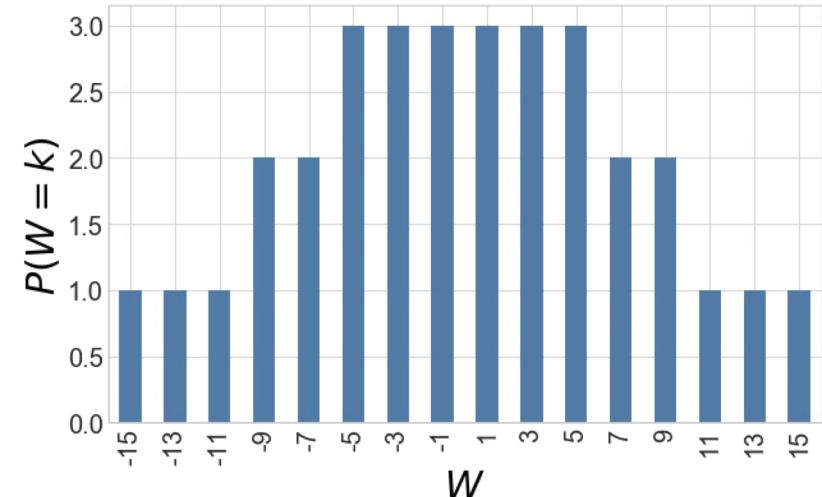
$$W = \sum_{i=1}^n rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

Распределение статистики

$$W = \sum_{i=1}^n rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$

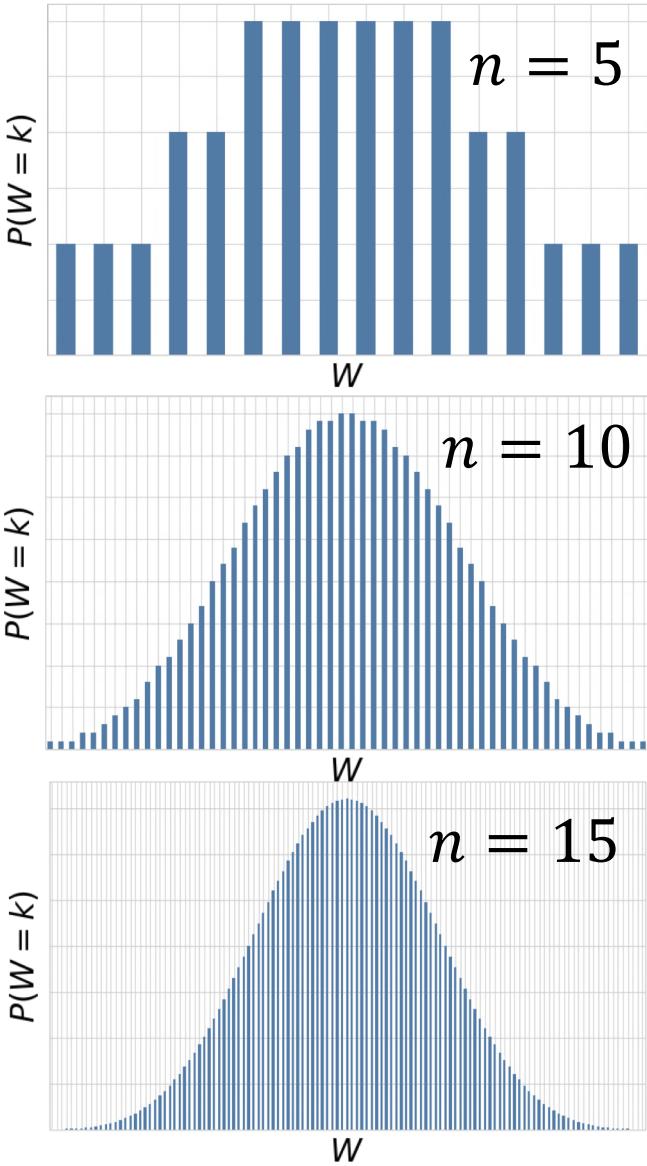
Пусть в выборке пять наблюдений:

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| — | — | — | — | — | -15 |
| + | — | — | — | — | -13 |
| — | + | — | — | — | -11 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| — | + | + | + | + | 13 |
| + | + | + | + | + | 15 |



Всего вариантов: 2^n

Апроксимация



При больших n пользуются нормальным приближением:

$$W \stackrel{asy}{\sim} N\left(0, \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}\right)$$

Задача о попугаях

Пример: есть данные о говорливости попугаев (слов в день), правда ли, что в среднем попугай говорит больше 5 слов?

| | | | | | | |
|---------------------|---|---|---|---|---|-----------|
| X_i | 6 | 4 | 4 | 7 | 8 | $m_0 = 5$ |
| $ X_i - m_0 $ | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | |
| $rank(X_i - m_0)$ | 2 | 2 | 2 | 4 | 5 | |
| $sign(X_i - m_0)$ | + | - | - | + | + | |

$$\Rightarrow W_{\text{набл.}} = 7 \quad W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 12$$



Гипотеза **не**
отвергается

$$W = \sum_{i=1}^n rank(|X_i - m_0|) \cdot sign(X_i - m_0)$$
$$\alpha = 0.05$$

Критерии Уилкоксона (двуихвыборочный)

$X_1, \dots, X_n \sim iid$

$Y_1, \dots, Y_n \sim iid$

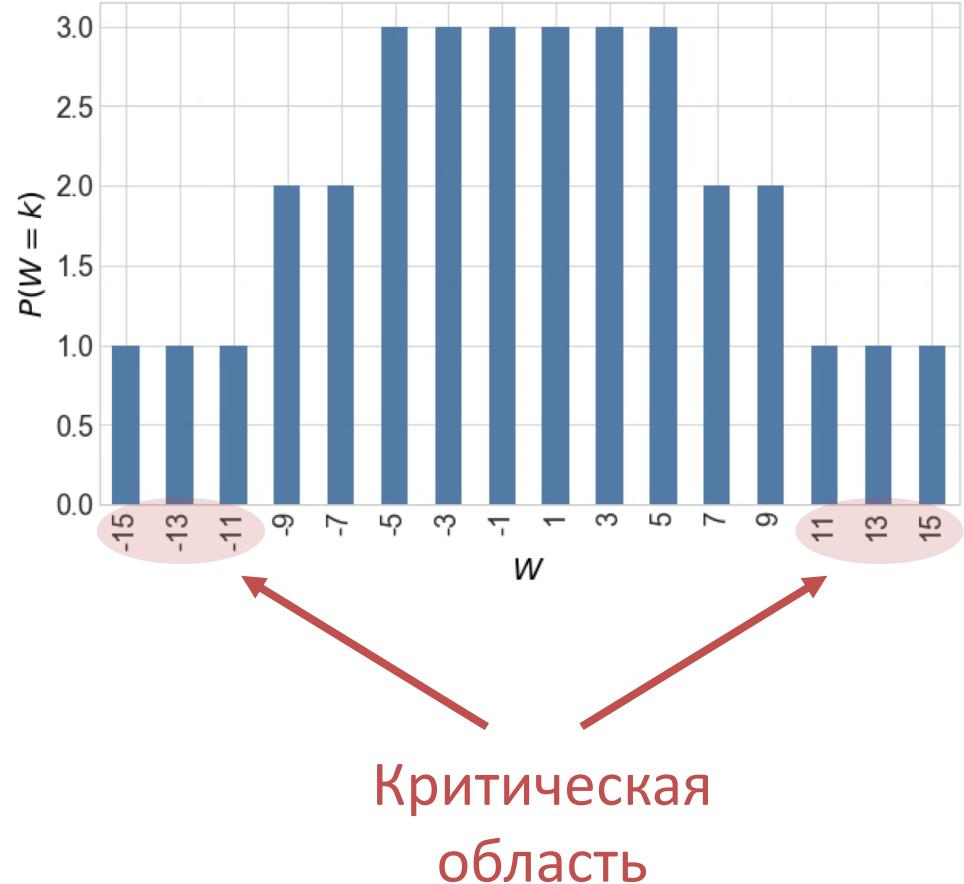
Выборки связанные

$H_0: Med(X - Y) = 0$

$H_a: Med(X - Y) \neq 0$

Критерий для проверки:

$$W = \sum_{i=1}^n rank(|X_i - Y_i|) \cdot sign(X_i - Y_i)$$



Критическая
область

Задача про апелляцию

Пример: даны баллы студентов до и после апелляции.
Правда ли, что в среднем апелляция не повышает балл
за контрольную?

До: 48, 54, 67, 56, 55, 55, 90, 71, 72, 69

После: 47, 52, 60, 60, 58, 60, 70, 81, 87, 60

| | | | | | | | | | | |
|---------------------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|---|
| $ X_i - Y_i $ | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 5 | 20 | 10 | 15 | 9 |
| $rank(X_i - Y_i)$ | 1 | 2 | 6 | 4 | 3 | 5 | 10 | 8 | 9 | 7 |
| $sign(X_i - Y_i)$ | + | + | + | - | - | - | + | - | - | + |

$$\Rightarrow W_{\text{набл.}} = -3 \quad W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 33$$



Гипотеза
не отвергается

$$W = \sum_{i=1}^n rank(|X_i - Y_i|) \cdot sign(X_i - Y_i)$$

Критерии Манна-Уитни (двуихвыборочный)

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid$$

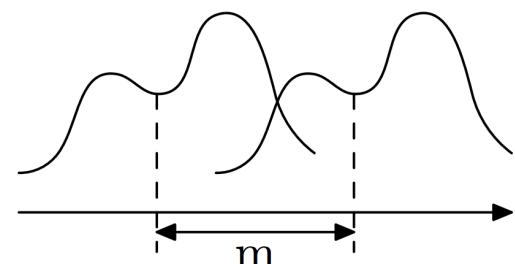
Распределения одинаковые по форме, различаются сдвигом

Выборки независимые

$$n_x \leq n_y$$

$$H_0: f_X(x) = f_Y(y)$$

$$H_a: f_X(x) = f_Y(y + m), m \neq 0$$



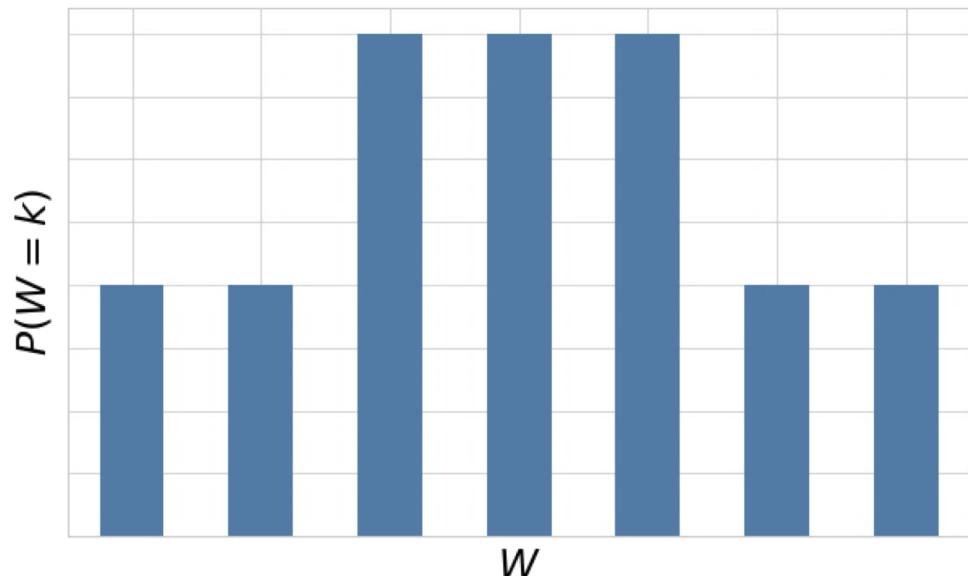
Объединим обе выборки в одну общую и посчитаем для всех чисел ранги

Критерий для проверки:

$$W = \sum_{i=1}^{n_x} rank(X_i)$$

Критерии Манна-Уитни (двуихвыборочный)

| $rank(X)$ | $rank(Y)$ |
|------------|---------------|
| $\{1, 2\}$ | $\{3, 4, 5\}$ |
| $\{1, 3\}$ | $\{2, 4, 5\}$ |
| $\{1, 4\}$ | $\{2, 3, 5\}$ |
| $\{1, 5\}$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $\{2, 3\}$ | $\{1, 4, 5\}$ |
| ... | ... |



Всего $C_{n_x+n_y}^{n_x}$ вариантов

- Распределение статистики снова оказывается табличным
- Для больших объёмов выборки можно использовать нормальное приближение

Задача про кофе

Пример: две группы людей принимают препарат перед забегом на сто метров

Кофеин: 12, 10

Плацебо: 13, 11, 14

12, 10, 13, 11, 14

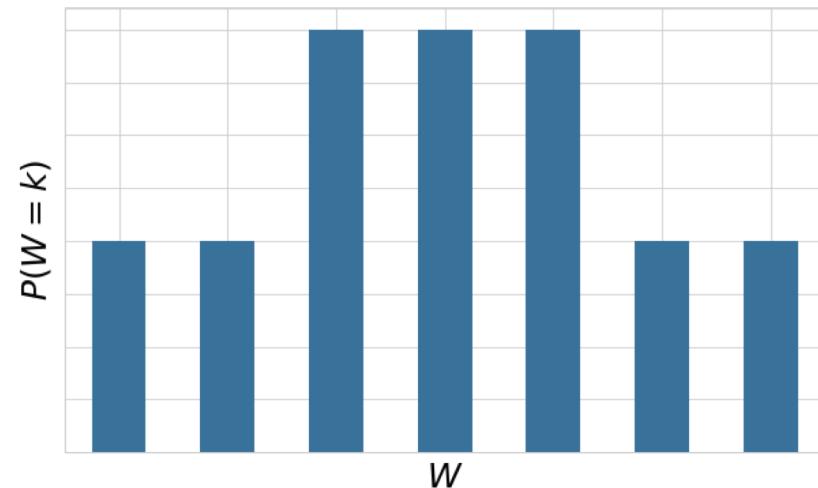
5 1 3 2 4

$$W_{\text{набл.}} = 5 + 1 = 6$$

$$W_{\text{кр.}} = W_{1-\alpha} = 8$$



Гипотеза,
что влияния
нет **не отвергается**



Резюме

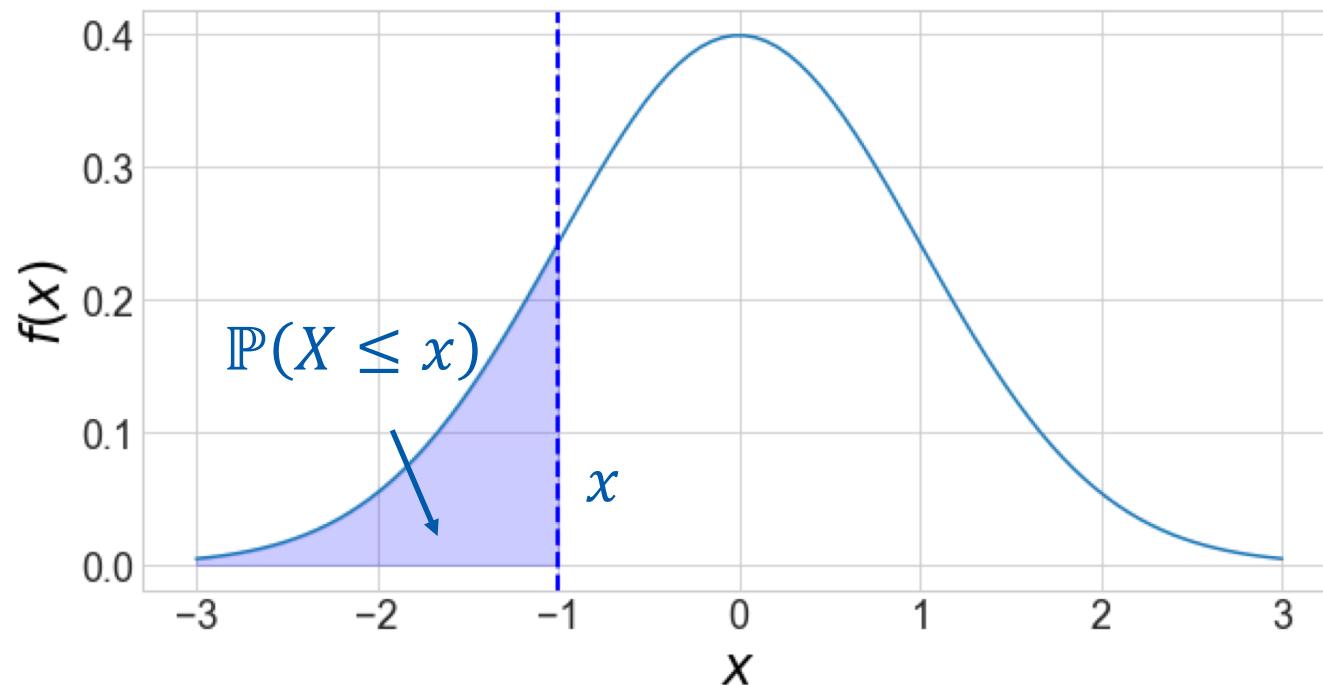
- Ранговые критерии превращают выборку в ранги наблюдений и позволяют сохранить больше информации
- Чтобы сохранить информацию, приходится делать дополнительные предположения
- Предположений о законе распределения, по-прежнему, не требуется

Эмпирическая функция распределения

Функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \leq x$, то есть

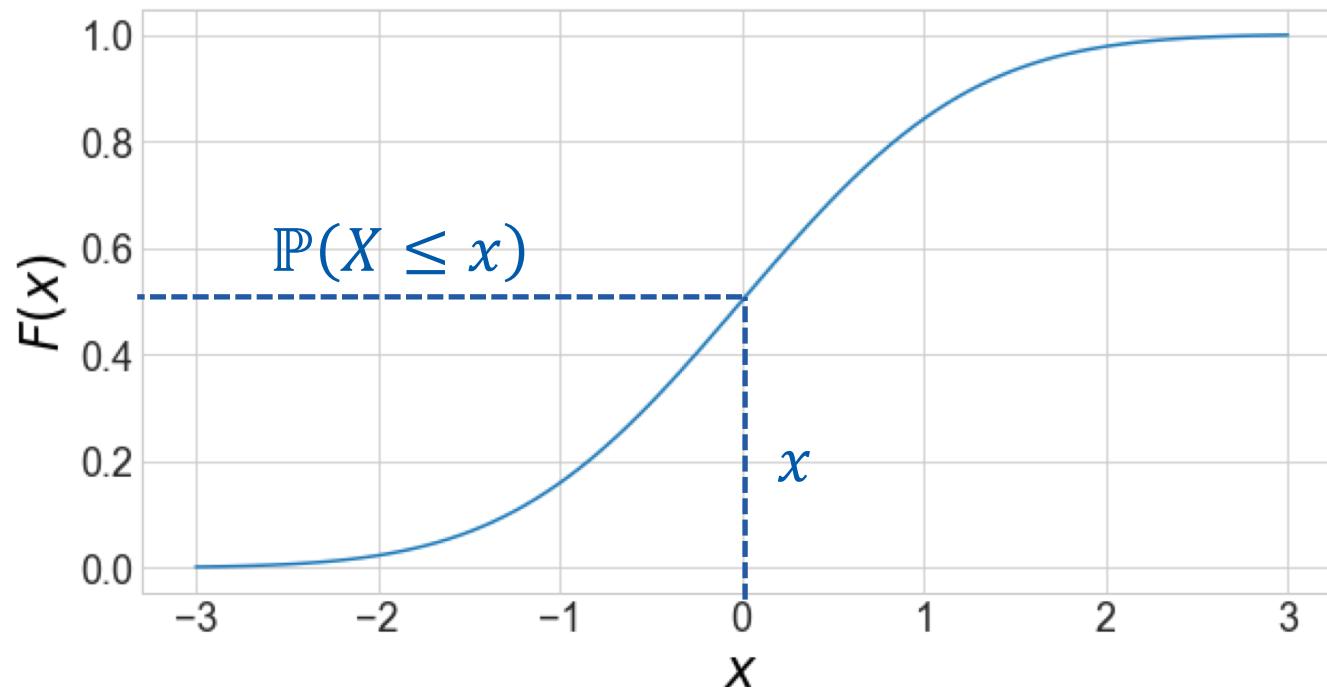
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt, f(t) \text{ – плотность}$$



Функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \leq x$, то есть

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt, f(t) \text{ – плотность}$$



Эмпирическая функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \leq x$, то есть

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Эмпирическая функция распределения – функция, которая определяет для каждого x частоту события $X \leq x$, то есть

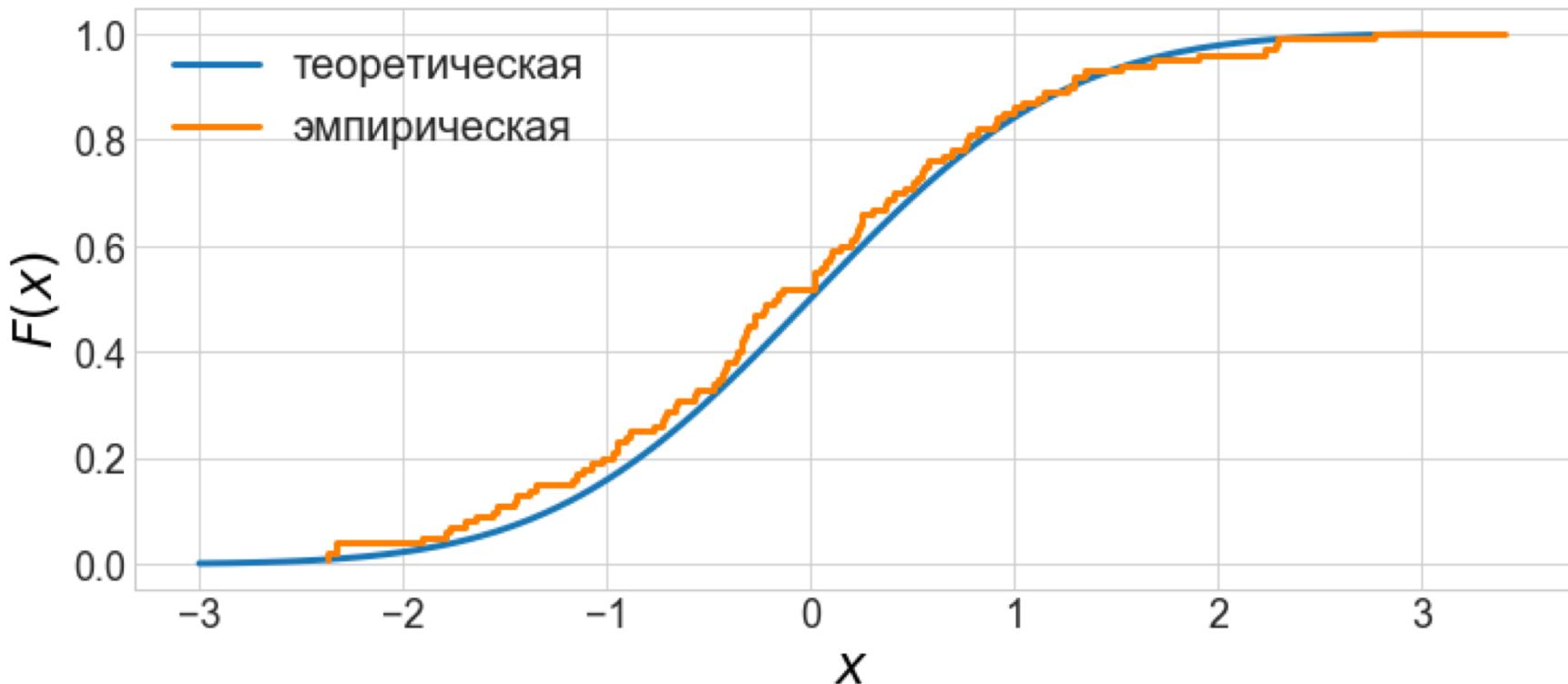
$$\hat{F}_n(x) = \widehat{\mathbb{P}}(X \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i \leq x],$$

где $[]$ – индикаторная функция, то есть:

$$[X_i \leq x] = \begin{cases} 1, & X_i \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения

Чем больше выборка, тем чаще ступеньки и тем больше эмпирическая функция распределения похожа на теоретическую.



Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения – статистика, оцениваемая по данным



Какими свойствами
она обладает?

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмешённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$

Эмпирическая функция распределения

$$\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}([X_i \leq x]) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 \cdot \mathbb{P}(X_i \leq x) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i > x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_X(x) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot F_X(x) = F_X(x)$$

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмешённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$
2. Состоятельность: $\operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x)$

Эмпирическая функция распределения

$$\hat{F}_n(x) = \widehat{\mathbb{P}}(X \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i \leq x] =$$
$$= \frac{[X_1 \leq x] + \cdots + [X_n \leq x]}{n} \xrightarrow{p} F_X(x) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

По ЗБЧ наша оценка состоятельна

Свойства эмпирической функции распределения

1. Несмешённость: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F_X(x)$

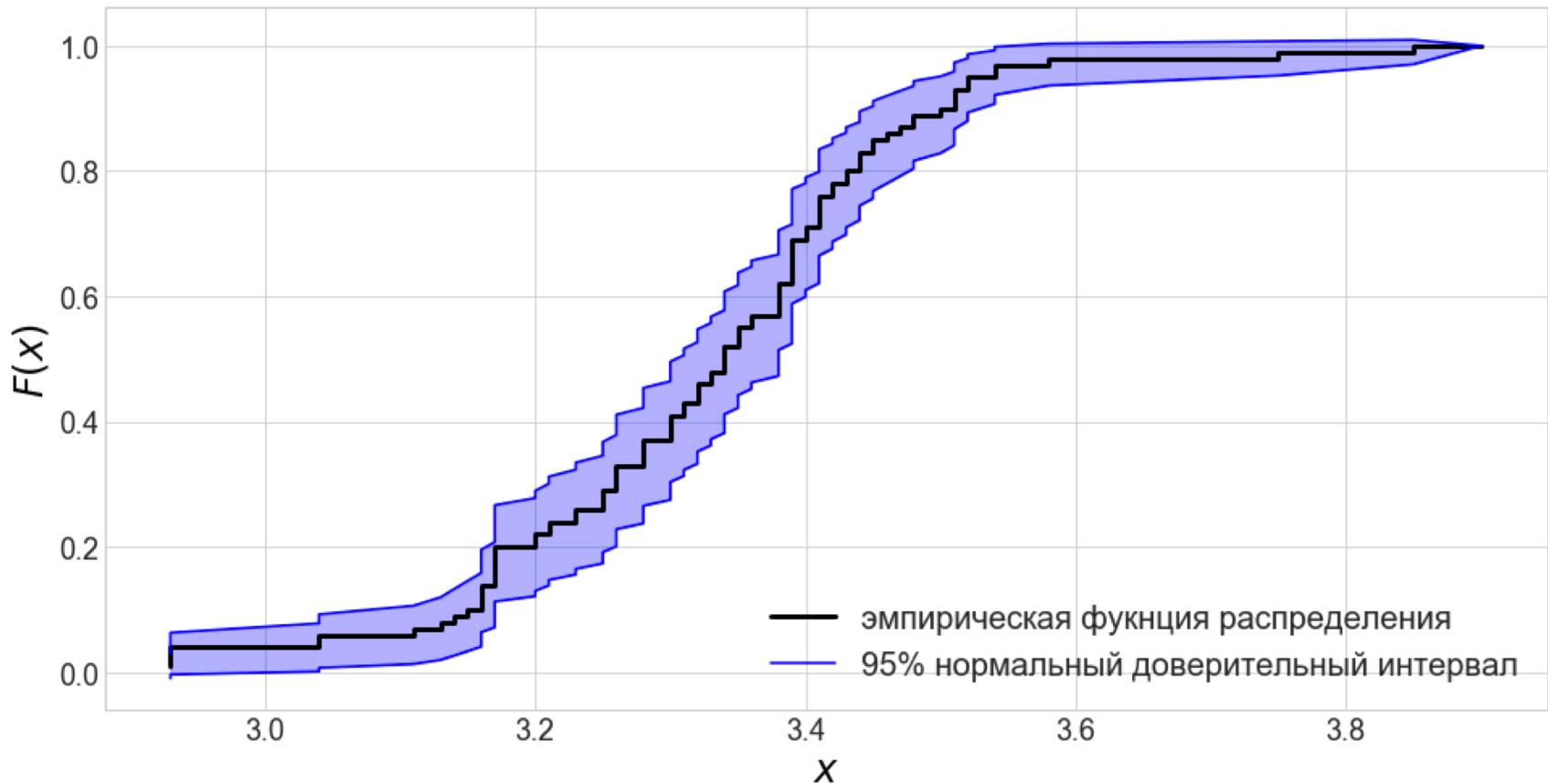
2. Состоятельность: $\operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x)$

3. Асимптотическая нормальность:

$$\hat{F}_n(x) \stackrel{asy}{\sim} N\left(F_X(x), \frac{\hat{F}_n(x) \cdot (1 - \hat{F}_n(x))}{n}\right)$$

Нормальный доверительный интервал

ЦПТ помогает построить доверительный интервал для эмпирической функции распределения в каждой точке



Критерий Колмогорова

Критерии согласия

- **Критерии согласия** – критерий о виде неизвестного закона распределения

$$H_0: X \sim F_X(x)$$

H_a : гипотеза H_0 неверна

- Распределение случайной величины описывается её функцией распределения

$$H_0: F_X(x) = F_0(x)$$

$$H_a: F_X(x) \neq F_0(x)$$

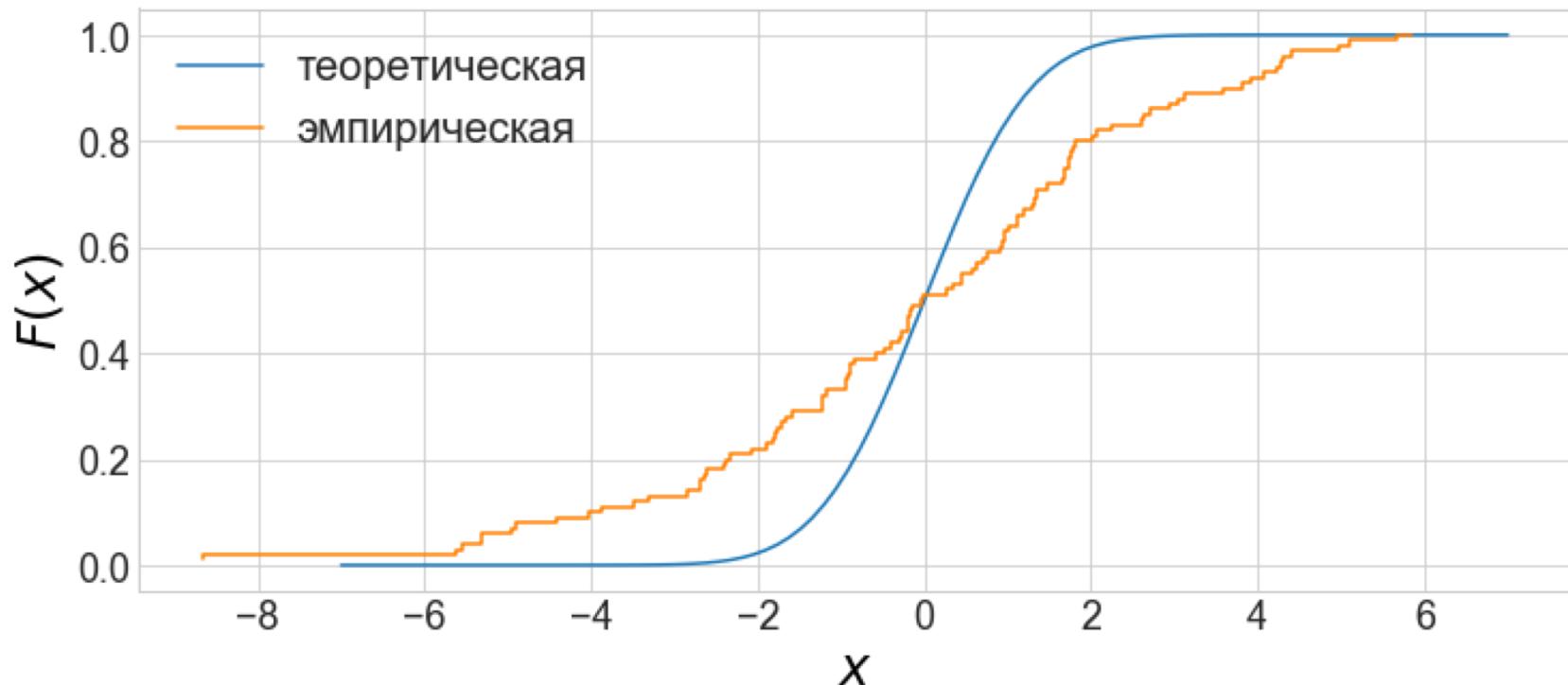
- Параметры неизвестного закона распределения мы фиксируем как нулевую гипотезу

Критерии согласия

- Критерии о неизвестных законах распределения строятся по аналогии с параметрическими
- У нас в распоряжении есть выборка, по ней мы оценили эмпирическую функцию распределения $\hat{F}_n(x)$
- Надо понять насколько она отличается от $F_0(x)$, то есть надо посчитать расстояние между функциями и узнать его распределение

Расстояние между функциями

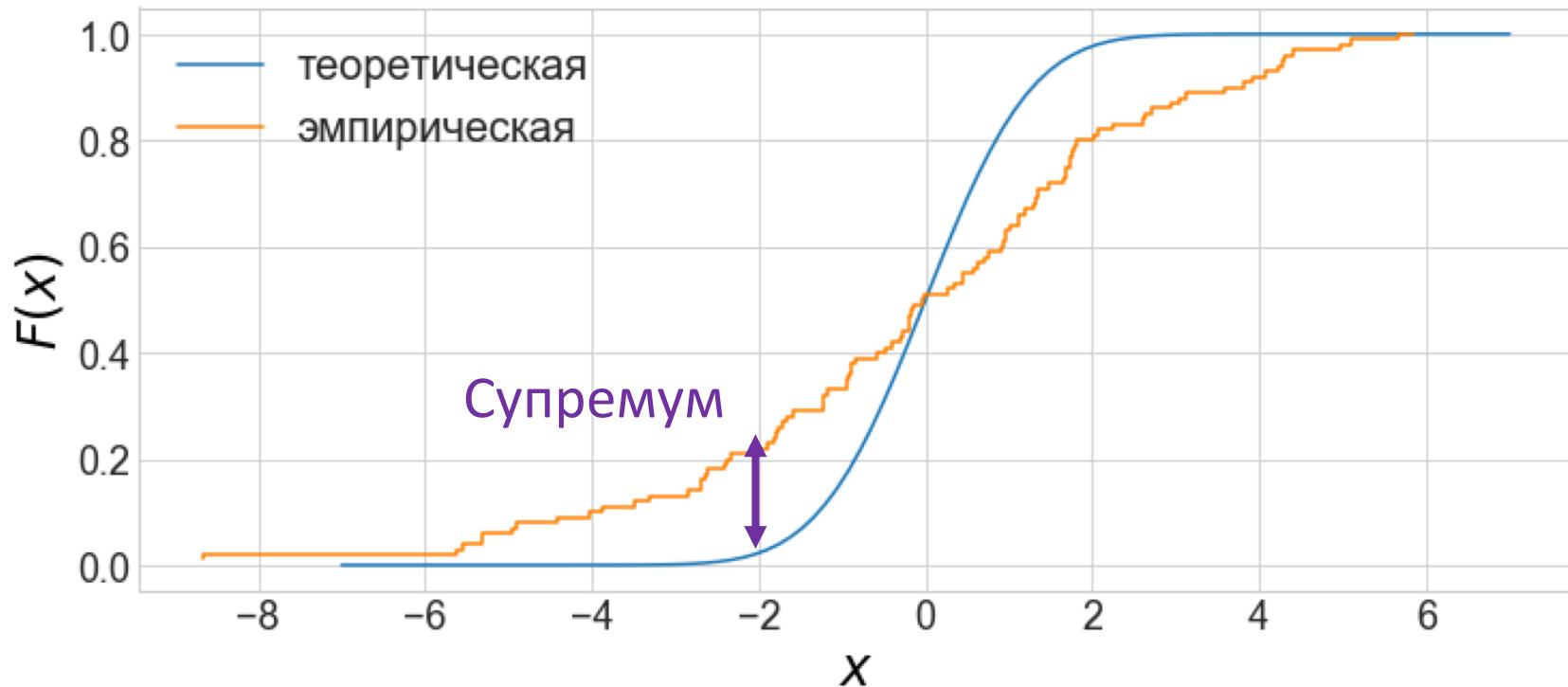
- Как измерить расстояние между двумя функциями?
- Разные способы сделать это \Rightarrow разные критерии



Критерий Колмогорова

- Можно найти между ними самое большое расстояние:

$$D_n(X_1, \dots, X_n) = \sup_x |F_0(x) - \hat{F}_n(x)|$$



Теорема Колмогорова

Статистика Колмогорова:

$$D_n(X_1, \dots, X_n) = \sup_x |F_0(x) - \hat{F}_n(x)|$$

При справедливости нулевой гипотезы, распределение статистики D_n одинаково для любых **непрерывных** распределений, при этом его функция распределения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n} \cdot D_n \leq z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$



Распределение Колмогорова –
наш новый союзник, на её основе
мы можем построить критерий

Критерий Колмогорова

$X_1, \dots, X_n \sim iid F_X(x)$

$H_0: F_X(x) = F_0(x)$

$H_a: F_X(x) \neq F_0(x)$

Критерий для проверки:

$$K_n = \sqrt{n} \cdot \sup_x |F_0(x) - \hat{F}_n(x)|$$

$K_n \underset{H_0}{\overset{asy}{\sim}}$ распределение Колмогорова



$K_{\text{набл.}} > K_{1-\alpha}$



Критерий применяется только для непрерывных распределений



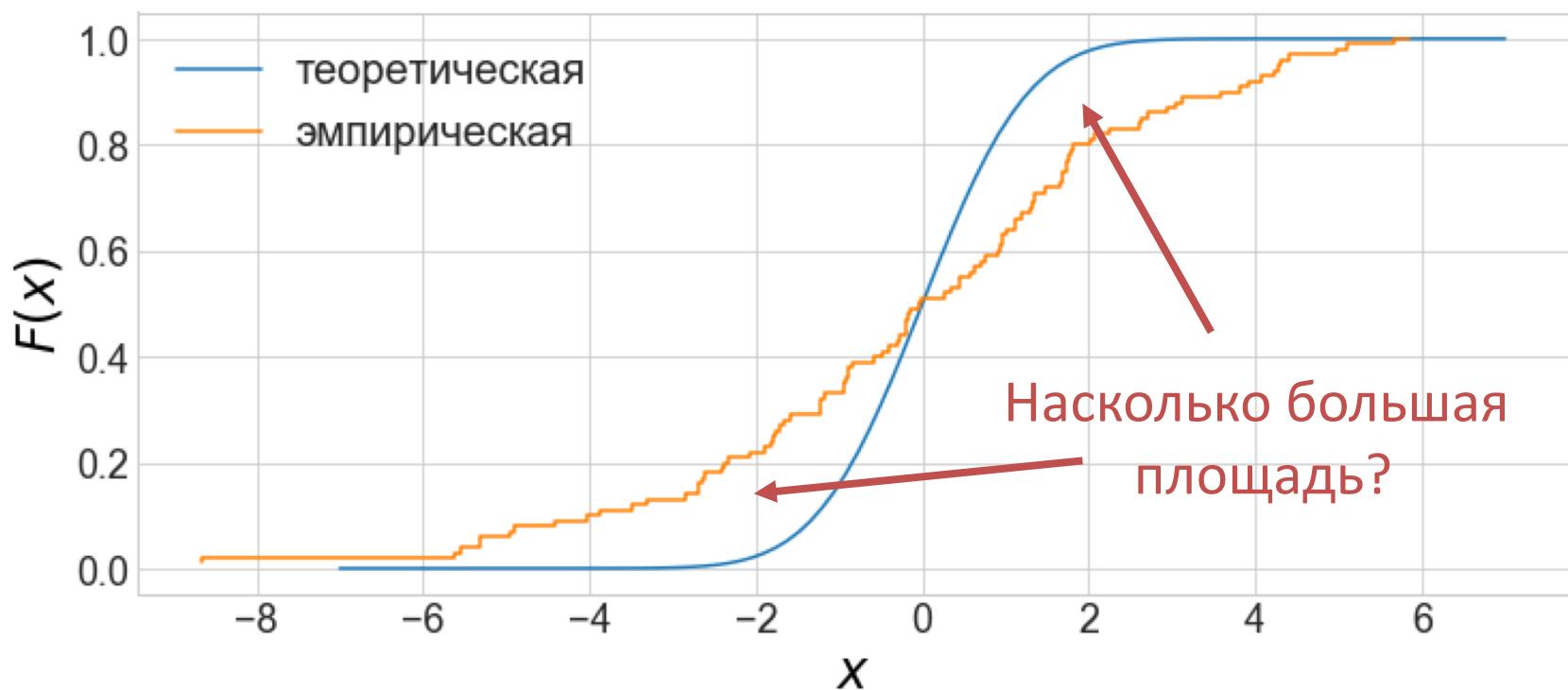
$K_{\text{набл.}} \leq K_{1-\alpha}$

- Критические значения рассчитываются по таблицам, составленным для распределения Колмогорова

Другие способы искать расстояние

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(F_0(x)) \cdot [F_0(x) - \hat{F}_n(x)]^2 \cdot f_0(x) dx$$

функция - вес
усредняем по распределению
чем больше разница,
тем выше штраф



Критерий Крамера-Мизеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot [F_0(x) - \hat{F}_n(x)]^2 \cdot f_0(x) dx$$

- Чем больше разница между функциями, тем выше штраф
- Разница усредняется по всем возможным значениям случайной величины
- Хорошо улавливает разницу в области “типовых значений” случайной величины

Критерий Андерсона-Дарлинга

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F_0(x)(1 - F_0(x))} \cdot [F_0(x) - \hat{F}_n(x)]^2 \cdot f_0(x) dx$$

- При $F_0(x) \rightarrow 1$ или $F_0(x) \rightarrow 0$ дополнительный множитель оказывается очень большим
- Получается, что основное внимание уделяется разнице “на хвостах” распределения
- Для подобных критериев также известны предельные распределения, которыми можно пользоваться для проверки гипотез

Гипотезы об однородности выборок

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid F_X(x)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid F_Y(x)$$

- Гипотезы о том, что выборки сделаны из одного и того же распределения

$$H_0: F_X(x) = F_Y(x)$$

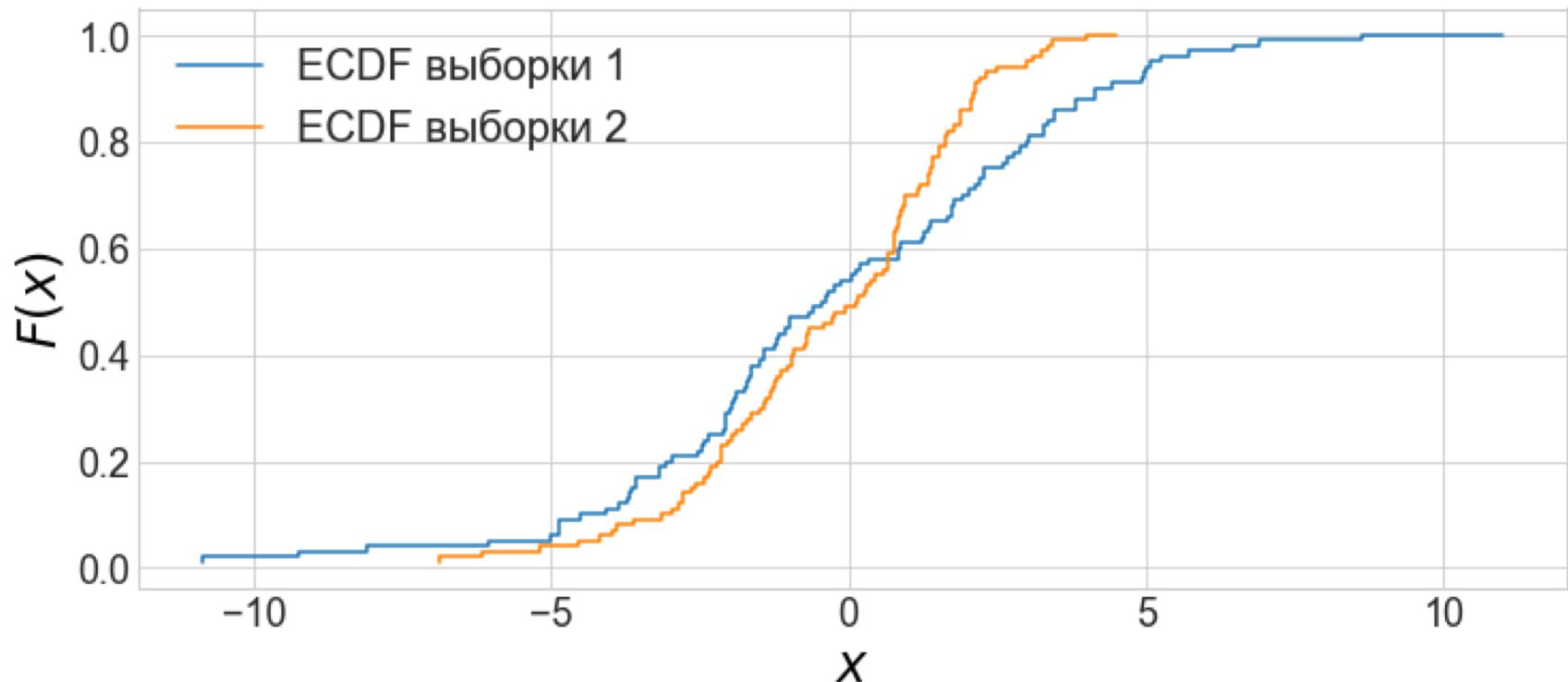
$$H_a: F_X(x) \neq F_Y(x)$$

- Для проверки этой гипотезы можно использовать ту же самую идею, но расстояние надо будет считать между эмпирическими функциями распределения

Критерий Колмогорова-Смирнова

Снова будем искать супремум, но уже между эмпирическими функциями

$$D_n = \sup_x | \hat{F}_X(x) - \hat{F}_Y(x) |$$



Критерий Колмогорова-Смирнова

Снова будем искать супремум, но уже между эмпирическими функциями

$$D_n = \sup_x | \hat{F}_X(x) - \hat{F}_Y(x) |$$

- Статистика

$$\sqrt{\frac{n_x \cdot n_y}{n_x + n_y}} \cdot D_n$$

при $n_x, n_y \rightarrow \infty$ имеет распределение Колмогорова

- Она используется для проверки гипотезы об однородности выборок

Резюме

- Чтобы проверять гипотезы о распределениях, нужно научиться считать между ними расстояния
- Критерий Колмогорова ищет расстояние как супремум и позволяет проверять гипотезы о распределении и однородности выборок
- Критерии Крамера-Мизеса и Андерсона-Дарлинга помогают специфицировать критерий либо для "средиземья" либо для "крайнеземья" (хвостов)

Резюме

- Эти критерии работают только для непрерывных распределений
- Неизвестные параметры распределения фиксируются в нулевой гипотезе
- Если мы оцениваем параметры по выборке, распределения Колмогорова не будет одинаковым для всех распределений
- Для различных распределений можно строить уточнения теста Колмогорова

Критерий Пирсона

Критерий Пирсона

- Критерий Колмогорова работает только для непрерывных распределений
- Для проверки гипотез о дискретных распределениях используется критерий Пирсона

$$H_0: F_X(x) = F_0(x)$$

$$H_a: F_X(x) \neq F_0(x)$$

- Критерий Пирсона считает расстояние между распределениями с помощью сверки теоретических и эмпирических частот между собой

Критерий Пирсона

- Выборка X_1, \dots, X_n из дискретного распределения
- Предполагаем, что случайная величина принимает s значений с какими-то вероятностями

| X | z_1 | z_2 | \dots | z_s | - возможные значения |
|---------------------|---------------|---------------|---------|---------------|-----------------------------|
| $\mathbb{P}(X = z)$ | $p_1(\theta)$ | $p_2(\theta)$ | \dots | $p_s(\theta)$ | - теоретические вероятности |
| $\#(X_i = z)$ | v_1 | v_2 | \dots | v_s | - эмпирические частоты |

- Нужно сравнить все эмпирические частоты с теоретическими
- $\hat{\theta}$ – состоятельная оценка параметров распределения
 k – их количество

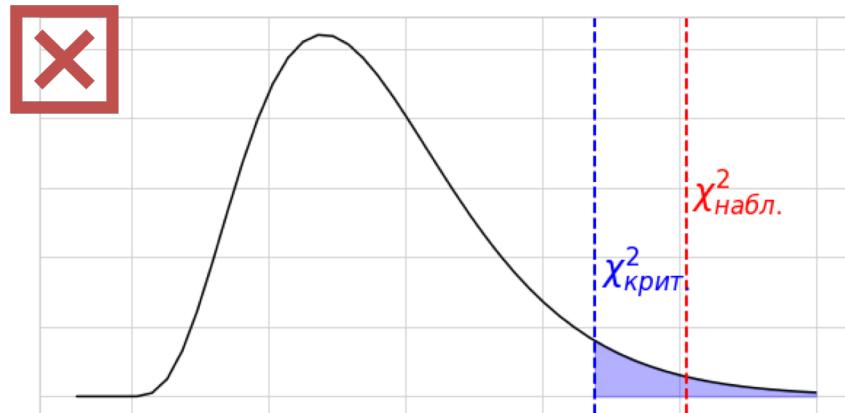
$$\sum_{j=1}^s \frac{(v_j - n \cdot p_j(\hat{\theta}))^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} \stackrel{\text{asy}}{\underset{H_0}{\sim}} \chi_{s-k-1}^2$$

Критерий Пирсона

$X_1, \dots, X_n \sim iid F_X(x)$

$H_0: F_X(x) = F_0(x)$

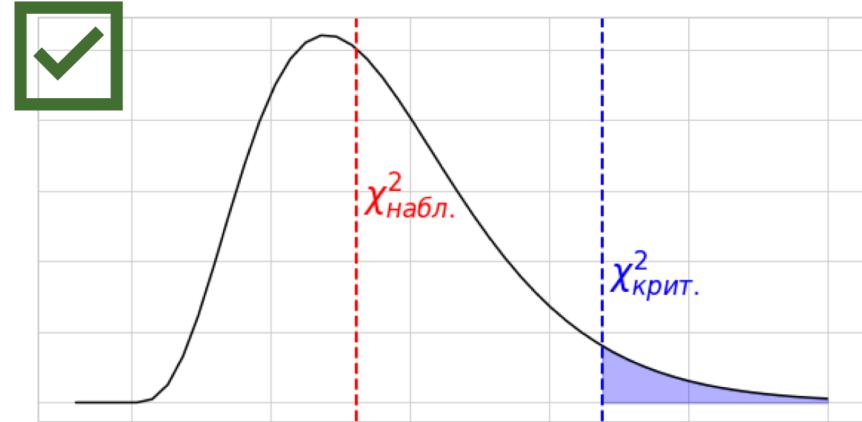
$H_a: F_X(x) \neq F_0(x)$



$$\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{s-k-1}(1 - \alpha)$$

Критерий для проверки:

$$\sum_{j=1}^s \frac{(v_j - n \cdot p_j(\hat{\theta}))^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} \stackrel{asy}{\underset{H_0}{\sim}} \chi^2_{s-k-1}$$



$$\chi^2_{\text{набл.}} \leq \chi^2_{s-k-1}(1 - \alpha)$$

! Критерий обычно применяют для дискретных распределений

Пример:

- X – Количество сделок на фондовой бирже за квартал для пятисот инвесторов

вместе, т.к. их мало

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------------------|------|------|------|------|---|---|------|---|
| $\mathbb{P}(X = z)$ | 0.37 | 0.37 | 0.18 | 0.06 | | | 0.02 | |
| $\#(x_i = z)$ | 199 | 170 | 87 | 31 | 9 | 2 | 1 | 1 |

$$H_0: X \sim Poiss(\lambda) \quad \hat{\lambda} = \bar{x} \approx 1 - \text{состоятельная оценка}$$

$$\sum_{j=1}^s \frac{(v_j - n \cdot p_j(\hat{\theta}))^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} = \frac{(199 - 500 \cdot 0.37)^2}{500 \cdot 0.37} + \dots = 3.85$$

$$\chi^2_{s-k-1}(1-\alpha) = \chi^2_{5-1-1}(1-0.05) = \chi^2_3(0.95) = 7.8$$



Гипотеза о распределении Пуассона **не отвергается**

Критерий Пирсона

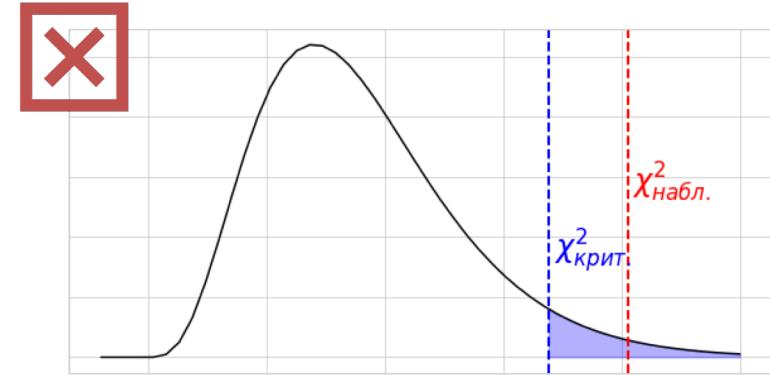
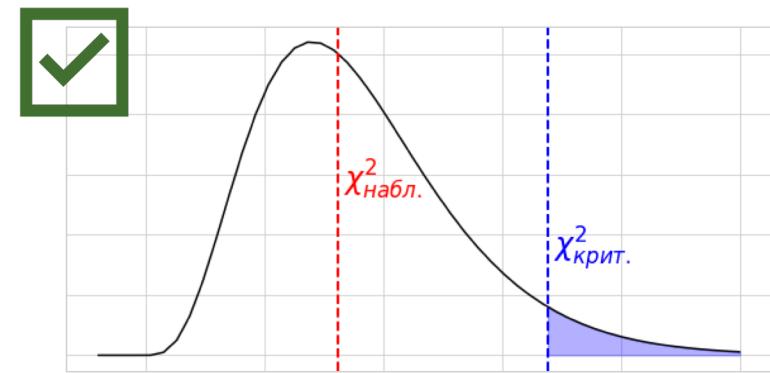
- Критерий Пирсона не состоятелен против всех альтернатив, т.е. бывают распределения, которые он не может отличить друг от друга
- Можно попробовать использовать критерий Пирсона для непрерывных распределений
- Для этого нужно будет разбить все возможные значения непрерывной случайной величины на бины (как на гистограмме)
- Результат работы теста будет зависеть от числа выбранных бинов \Rightarrow лучше пользоваться для непрерывных распределений другими критериями

Критерий Пирсона

- Нужно сравнивать эмпирические частоты между собой

| X, Y | z_1 | z_2 | ... | z_s |
|---------------|-------|-------|-----|-------|
| $\#(y_i = z)$ | w_1 | w_2 | ... | w_s |
| $\#(x_i = z)$ | v_1 | v_2 | ... | v_s |

$$\sum_{j=1}^s \frac{\left(\frac{v_j}{n_x} - \frac{w_j}{n_y}\right)^2}{\frac{n_x + n_y}{n_x}} \stackrel{\text{asy}}{\underset{H_0}{\sim}} \chi^2_{s-1}$$



- Можно использовать критерий для непрерывных распределений, но тогда придется дробить данные на бины

Резюме

- Критерий Пирсона позволяет проверять гипотезы о виде распределения для дискретных случайных величин
- Его можно использовать и для непрерывных величин, но результат будет зависеть от числа выбранных групп