**Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Школа № 1532»**

**Сравнение непараметрических методов моделирования с параметрическим и исследование их эффективности**

10 класс, ГБОУ Школа №1532,

Гришин Илья Андреевич

Руководитель: учитель информатики, ГБОУ Школа №1532,

Сергиенко Антон Борисович

Москва, 2024

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc33143531)

1. [Актуальность работы 3](#_Toc33143534)

2. [Цели и задачи проекта 4](#_Toc33143532)

3. [Методика выполнения работы 4](#_Toc33143533)

3.1. [Подготовка эксперементальных данных 4](#_Toc33143533)

3.2. [Парамметрические методы 7](#_Toc33143533)

3.3. [Непараметрические методы 9](#_Toc33143533)

3.4. [Сравнение и итоги 12](#_Toc33143533)

4. [Результаты 16](#_Toc33143534)

5. [Выводы 17](#_Toc33143535)

6. [Список используемой литературы 0](#_Toc33143536)

7. [Приложения 0](#_Toc33143533)

**Введение**

В работе рассмотрены методы статистического моделирования, на различных выборках. Для поставленных задач применяются регрессионная модель, основанная на непараметрической оценке Надарая-Ватсона [4], а также аппроксимация с подгонкой по функции.

Современные методы моделирования данных предлагают широкий выбор инструментов для анализа и прогнозирования поведения значений. Среди них мы рассмотрим параметрические и непараметрические методы, каждый из которых имеет свои особенности и актуален в различных ситуациях.

Мы проведём сравнительный анализ эффективности данных методов на различных выборках данных. В ходе сравнительного анализа мы постараемся обеспечить понимание того, какие методы моделирования следует применять при различных условиях.

**Актуальность работы**

Область анализа данных и статистики стремительно развивается, и поэтому исследования по сравнению методов моделирования остаются актуальными. В ходе данного проекта, где внимание уделяется сравнению статистических методов моделирования, существует моменты, которые делают данное актуальным:

1. Гибкость и адаптивность методов: выявить закономерность и зависимость методов от структуры данных, сложные данные с высокой погрешностью могут поддаваться более успешному моделированию непараметрическими методами, в то время как параметрические методы могут быть эффективнее в случаях, когда структура данных более предсказуема.

2. Разнообразие областей применения: методы моделирования широко используются в различных областях, таких как экономика, медицина, биология и социальные науки. Сравнение методов на разнообразных выборках позволит сделать исследование более универсальным для различных областей.

3. Оптимизация ресурсов: эффективное использование ресурсов, таких как вычислительная мощность, время и данные, является важным вопросом в современных исследованиях. Понимание, какие методы более эффективны для различных ситуаций, может сэкономить ресурсы и повысить эффективность аналитических процессов.

При наличие всех этих факторов, данное исследование представляет собой актуальный вклад в развивающуюся область анализа данных и статистики.

**Цель и задачи проекта**

Провести сравнительный анализ между непараметрическими и параметрическими методами моделирования с целью выявления их преимуществ, недостатков и областей применения. Исследование направлено на определение эффективности каждого метода в различных контекстах и создание основы для рекомендаций по выбору подходящего метода в зависимости от конкретных задач и данных.

Были поставлены следующие задачи работы:

1. Создание экспериментальных данных.
2. Реализовать параметрический метод моделирования на языке Python.
3. Реализовать непараметрические методы моделирования на языке Python.
4. Рассмотреть каждый метод для определённой выборки и провести анализ эффективности.
5. Подвести итоги проделанной работы.

# Методика выполнения исследования

**Первый этап – Подготовка экспериментальных данных**

Создадим имитации выборок с различным процентом шума как для двумерного, так и для трёхмерного моделирования и запишем их в отдельный файл. Мы начнем с генерации некоторых случайных точек двумерных данных. Каждый пример будем записывать в отдельный .txt файл с соответствующим названием.

Шум будем рассчитывать по следующей формуле:

,

где P – процент шума, a – новое значение с шумом для y i-го, – максимальный в массиве, – минимальный в массиве.

Реализуем программу:

*# импортируем необходимые модули***import** numpy **as** np  
**import** random  
  
*# сгенерируем 100 случайных точек где Y - синус X*X = np.linspace(-10, 10, 100)  
Y = np.sin(X)  
  
*# пройдёмся циклом по коэффициентам процентов***for** proc **in** range(0, 160, 10):  
 *# процент шума = proc  
 # добавим шум в данные по формуле* Y2 = [Yi + random.uniform(-(((max(Y) - min(Y)) \* proc / 100) / 2),  
 (((max(Y) - min(Y)) \* proc / 100) / 2)) **for** Yi **in** Y]  
 data = np.array([X, Y2]).T  
 *# добавим данные в файл, в название укажем процент шума* **with** open(**f'dataXY\_{**round(proc)**}.txt'**, **'w'**) **as** f:  
 [print(i, j, file=f) **for** i, j, **in** data]

Листинг 1 – Скрипт для генерации данных в 2D пространстве

Теперь аналогично сгенерируем точки в 3D пространстве:

*# импортируем необходимые модули***import** numpy **as** np  
**import** random  
**import** math  
  
*# генерация 100 случайных точек*X = [random.uniform(-10, 10) **for** \_ **in** range(100)]  
Y = [random.uniform(-10, 10) **for** \_ **in** range(100)]  
Z = [(math.sin(X[i]) \* math.sin(Y[i])) **for** i **in** range(100)]  
  
*# пройдёмся циклом по коэффициентам процентов***for** proc **in** range(0, 160, 10):  
 *# процент шума = proc  
 # добавим шум в данные* Z1 = [Zi + random.uniform(-(((max(Y) - min(Y)) \* proc / 100) / 2),  
 (((max(Y) - min(Y)) \* proc / 100) / 2)) **for** Zi **in** Z]  
 data = np.array([X, Y, Z1]).T  
 *# добавим данные в файл, в название укажем процент шума* **with** open(**f'dataXYZ\_{**round(proc)**}.txt'**, **'w'**) **as** f:  
 [print(i, j, z, file=f) **for** i, j, z **in** data]

Листинг 2 – Скрипт для генерации данных в трёхмерном пространстве

У нас получилось множество файлов с различным уровнем шума, для дальнейшего исследования. Теперь реализуем функции для удобного получения данных из файла.

**def** get\_data2D(name\_file):  
 **with** open(name\_file) **as** f:  
 a = f.readlines()  
 x, y = [], []  
 **for** i **in** a:  
 a, b = i.split()  
 x.append(a)  
 y.append(b)  
 **return** x, y  
*# get\_data2D(name\_file)[0] - X  
# get\_data2D(name\_file)[1] – Y*

**def** get\_data3D(name\_file):  
 **with** open(name\_file) **as** f:  
 a = f.readlines()  
 x, y, z = [], [], []  
 **for** i **in** a:  
 print(i)  
 a, b, c = i.split()  
 x.append(float(a))  
 y.append(float(b))  
 z.append(float(c))  
  
 **return** x, y, z  
*# get\_data3D(name\_file)[0] - X  
# get\_data3D(name\_file)[1] - Y  
# get\_data3D(name\_file)[2] - Z*

Листинг 3 – Программа для получения данных

Пример того, что мы получим вызван функцию «get\_data3D» с уровнем шума 30%/

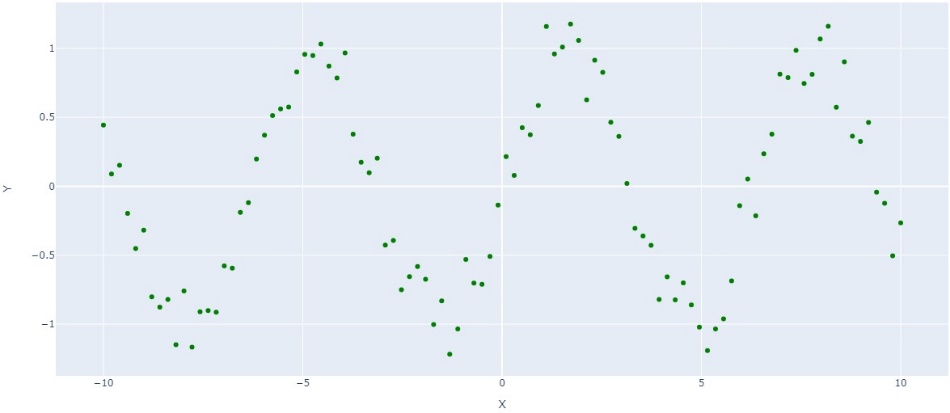


Рисунок 1 – пример выборки с уровнем шума – 30%

Здесь реализовано две функции для получения двумерных и трёхмерных данных. На вход принимается название файла и возвращается массивы с данными для каждой оси, которые можно получить, вызвав функцию и указав индекс необходимого массива, данные для X находятся под индексом 0, для Y под индексом 1.

**Второй этап – Параметрические методы**

Параметрические методы моделирования — это методы, основанные на использовании параметров и переменных, которые могут быть настроены или изменены в зависимости от моделей или представлений объектов. Эти методы менее устойчивы к шуму в отличие от непараметрических, но показывают более высокую точность при правильном выборе параметров и данных.

Нам необходимо создать функции, которые будет удобно применить к каждому из примеров.Реализуем аппроксимацию для двумерного пространства*:*

*# импортируем необходимые модули***import** numpy **as** np  
**from** scipy.optimize **import** curve\_fit  
  
  
**def** approx\_2D(x, y):  
 **def** func(t, A, w, p, c):  
 **return** A \* np.sin(w \* t + p) + c  
  
 popt, \_ = curve\_fit(func, np.array(x), np.array(y))  
 x\_approx = np.linspace(x.min(), x.max(), 100)  
 y\_approx = func(x, \*popt)  
 **return** x\_approx, y\_approx

Листинг 4 – Функция для аппроксимации в двумерном пространстве.

Мы реализовали функцию для аппроксимации в 2D «approx\_2D». На вход принимается два массива x и y. Выводится график с данными точками и аппроксимируемой кривой. Кривая подгоняется с помощью библиотеки *SciPy*, функции *curve\_fit*. Функция, генерирующая тестовую выборку заданная нами, представляет собой синусоидальную функцию.

Теперь приступим к реализации аппроксимации для трёхмерного пространства. Создадим, аналогичную прошлой, функцию с некоторыми нюансами.

*# импортируем необходимые модули***import** numpy **as** np  
**from** scipy.optimize **import** curve\_fit  
  
**def** approx\_3D(x, y, z):  
 **def** func(xy, a):  
 x, y = xy  
 **return** a \* np.sin(x)

*# def func(x, a, b):*

*# return b + a / x*

popt, pcov = curve\_fit(func, (np.array(list(x)), np.array(list(y))), np.array(list(z)))  
 x\_range = np.linspace(-10, 10, 100)  
 y\_range = np.linspace(-10, 10, 100)  
 X, Y = np.meshgrid(x\_range, y\_range)  
 Z = func((X, Y), \*popt)  
 **return** X, Y, Z

Листинг 5 – Функция для аппроксимации в трёхмерном пространстве.

На вход принимается уже три массива x, y и z. Возвращаются матрицы X, Y и Z. Подгоняется с помощью библиотеки *SciPy* функции *curve\_fit*. Функция, генерирующая тестовую выборку предположенная нами, представляет собой гиперболическую функцию для первого эксперимента, и предположим уже известная нам – синусоидальная, для второго.

**Третий этап – Непараметрические методы**

Непараметрические методы моделирования — это статистические методы, которые не требуют предположения о распределении данных или наличия определенных параметров. В отличие от параметрических они основываются на анализе самих данных и являются более гибкими и универсальными, но зачастую показывают меньшую точность. Эти методы используются для изучения связей между переменными, обнаружения шаблонов и трендов в данных, предсказания будущих значений и других аналитических задач.

В данном случае детально рассмотрим непараметрическую оценку регрессии Надарая-Ватсона.Формула для непараметрической оценки регрессии Надарая-Ватсона следующая:

,

где в данном случае, — коэффициент размытия, — для которого мы предсказываем значение по , — i-тый в массиве абсцисс, а — колоколообразная ядерная функция, равная следующему значению:

Но в данной формуле присутствует неизвестный нам коэффициент , он задаёт диапазон области, точки которой будут участвовать в подсчёте среднего арифметического. Чтобы определить его оптимальное значение вводится критерий ошибки - Е, который определяется средним арифметическим расстояния между «безупречной» функцией и найденной оценкой регрессии. Но при поиске ошибки обычным среднеквадратическим методом коэффициент при наименьшей ошибке будет стремиться к нулю, из-за чего регрессия будет захватывать все точки, а при их отсутствии ноль. Чтобы этого избежать, искать ошибку мы будет с помощью скользящего экзамена, по следующей формуле.

,

где — модельный который рассчитывается по следующей формуле

,

где — функция от двух аргументов, равна следующему значению:

Реализуем непараметрический метод моделирования, который будет возвращать обновлённые значения для X и Y:

*# импортируем необходимые модули***import** numpy **as** np  
  
*# колоколообразная ядерная функция***def** bell\_shaped\_kernel\_parabola(p):  
 **if** p \*\* 2 <= 5: **return** 0.335 - 0.067 \* p \*\* 2  
 **return** 0

*# функция для вычисления модельного y***def** nonparametric\_for\_e(x\_dop, c, x, y):  
 s1, s2 = 0, 0  
 **for** i **in** range(len(y)):  
 mu = 1 **if** x\_dop != x[i] **else** 0  
 s1 += y[i] \* bell\_shaped\_kernel\_parabola((x\_dop - x[i]) / c) \* mu  
 s2 += bell\_shaped\_kernel\_parabola((x\_dop - x[i]) / c) \* mu  
 **if** s2 != 0: **return** s1 / s2  
 **return** 0  
  
*# функция для вычисления ошибки***def** E(x, y, c):  
 e = 0  
 **for** i **in** range(len(x)):  
 ym = nonparametric\_for\_e(x[i], c, x, y)  
 e += (y[i] - ym) \*\* 2  
 **return** (e / len(x)) \*\* 0.5  
  
*# функция реализующая формулу Надарая-Ватсона***def** nonparametric(x\_dop, c, xi\_list, yi\_list):  
 numerator, denominator = 0, 0  
 **for** i **in** range(len(xi\_list)): *# вычисление весов точек* phi\_value = bell\_shaped\_kernel\_parabola((x\_dop - xi\_list[i]) / c)  
 numerator += yi\_list[i] \* phi\_value  
 denominator += phi\_value  
 **if** denominator != 0: **return** numerator / denominator *# оценка значения в заданной точке* **return** 0  
  
*# функция выполняющая непараметричскую регрессию***def** nep\_regression\_2D(x, y):  
 c\_best, e\_best = **None**, **None  
 for** c **in** np.arange(0.001, 5, 0.01):  
 e = E(x, y, c)  
 **if** e\_best **is None or** e < e\_best:  
 e\_best, c\_best = e, c  
 x\_nep, y\_nep = [], []  
 *# Вычисляем оценки значений в заданных точках* **for** x\_dop **in** np.arange(min(x), max(x), 0.1):  
 y\_dop = nonparametric(x\_dop, c\_best, x, y)  
 x\_nep.append(x\_dop)  
 y\_nep.append(y\_dop)  
 **return** x\_nep, y\_nep

Листинг 6 – Непараметрической регрессии в двумерном пространстве

Реализуем непараметрические методы моделирования для трёхмерного пространства. Немного видоизменив функцию для формулы Надарая-Ватсона.

Функция для многомерной непараметрической оценки:

,

где…

*# импортируем необходимые модули***import** numpy **as** np  
**import** plotly.graph\_objs **as** go  
  
*# Функция для вычисления оценки Надарая-Ватсона***def** nadaraya\_watson(X, Z, x\_query, h):  
 weights = np.exp(-np.sum((X - x\_query) \*\* 2, axis=1) / (2 \* h \*\* 2))  
 weighted\_sum = np.sum(weights \* Z)  
 sum\_of\_weights = np.sum(weights)  
 **return** weighted\_sum / sum\_of\_weights  
  
*# функция для построения непараметрической регрессии***def** nep\_regression\_3D(x, y, z):  
 X = np.array([x, y, z]).T  
 *# Задание сетки для построения непараметрической регрессии по координате Z* grid\_size = 0.1  
 x\_range, y\_range = np.arange(-10, 10, grid\_size), np.arange(-10, 10, grid\_size)  
 X\_grid, Y\_grid = np.meshgrid(x\_range, y\_range)  
 Z\_grid = np.zeros\_like(X\_grid)  
  
 *# Вычисление значений по координате* **for** i **in** range(X\_grid.shape[0]):  
 **for** j **in** range(X\_grid.shape[1]):  
 x\_query = [X\_grid[i, j], Y\_grid[i, j], 0] *# Поиск координаты по Z* Z\_grid[i, j] = nadaraya\_watson(X, np.array(z), np.array(x\_query),  
 h=0.5) *# Вычисление значения на поверхности* **return** X\_grid, Y\_grid, Z\_grid

Листинг 7 – Функция для непараметрического моделирования в трёхмерном пространстве.

В данном коде мы создаём функцию по формуле Надарая-Ватсона, далее проходимся по каждой точке и с помощью функции вычисляем значения, по которым далее строим график.

**Четвёртый этап – Сравнение методов**

Применим методы к каждому из примеров и выявим их особенности и область применения.

Для каких-то выводов нам надо провести анализ над нашими моделями.

Один из способов оценить точность регрессионной модели – вычислить среднеквадратическую ошибку, которая является показателем, показывающим нам среднее расстояние между предсказанными значениями из модели и полученными ранее. Формула для нахождения среднеквадратической ошибки (RMSE) следующая:

,

где - прогнозируемое значение для i -го наблюдения в наборе данных, - наблюдаемое значение для i -го наблюдения в наборе данных, n - размер выборки.

Напишем функцию для вычисления RMSE в двумерном пространстве:

def E(X, Y, c=None):  
 e = 0  
 for i in range(len(X)):  
 y\_new = nonparametric(X[i], c, X, Y)  
 e += (Y[i] - y\_new) \*\* 2  
 return round((e / len(X)) \*\* 0.5, 5)

Листинг 10 – Программа для запуска подсчёта RMSE

В данном случае predictions — массив предсказанных значений, targets — список или массив известных значений.

Создадим таблицу для удобства, с процентом шума выборки, и показателем RMSE для каждого метода:

Таблица 1 – Таблица результатов для 2D

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Файлы | Процент шума, % | RMSE для параметрических методов с известной функцией распределения | RMSE для параметрических методов с неизвестной(предполагаемой) функцией распределения | RMSE для непараметрических методов |
| dataXY\_0 | 0 | 0.08623 | 1.10445 | 0.66291 |
| dataXY\_10 | 10 | 0.09324 | 1.112 | 0.65848 |
| dataXY\_20 | 20 | 0.13163 | 1.1116 | 0.64067 |
| dataXY\_30 | 30 | 0.16328 | 1.11155 | 0.61644 |
| dataXY\_40 | 40 | 0.20026 | 1.08361 | 0.65477 |
| dataXY\_50 | 50 | 0.25187 | 1.08599 | 0.65837 |
| dataXY\_60 | 60 | 0.27899 | 1.08905 | 0.65733 |
| dataXY\_70 | 70 | 0.32705 | 1.11142 | 0.6231 |
| dataXY\_80 | 80 | 0.40089 | 1.09773 | 0.55322 |
| dataXY\_90 | 90 | 0.39569 | 1.17015 | 0.58468 |
| dataXY\_100 | 100 | 0.41591 | 1.11204 | 0.54373 |
| dataXY\_110 | 110 | 0.50329 | 1.09068 | 0.49676 |
| dataXY\_120 | 120 | 0.46464 | 1.12963 | 0.72627 |
| dataXY\_130 | 130 | 0.62491 | 1.18392 | 0. 57454 |
| dataXY\_140 | 140 | 0.67622 | 1.11715 | 0.4698 |
| dataXY\_150 | 150 | 0.85393 | 1.19022 | 0.78325 |

Также для более наглядного представления рассмотрим некоторые графики с 0, 50 и 120 процентами шума:

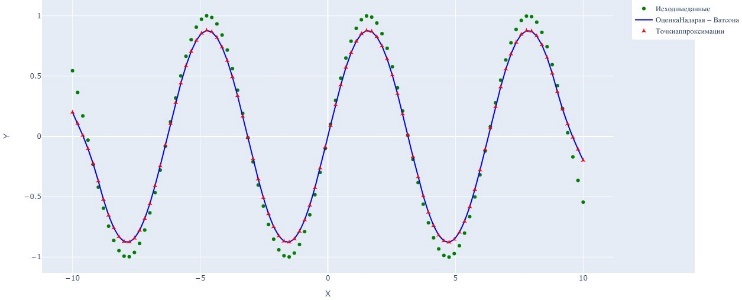
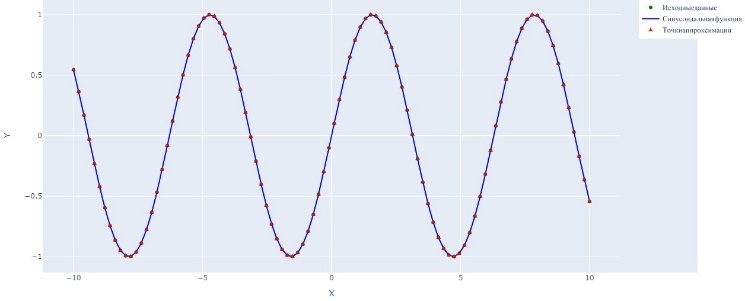


Рисунок 2 – Аппроксимация двумерной выборки с 0% шума

Рисунок 3 – Непараметрическая двумерная регрессия с 0% шума

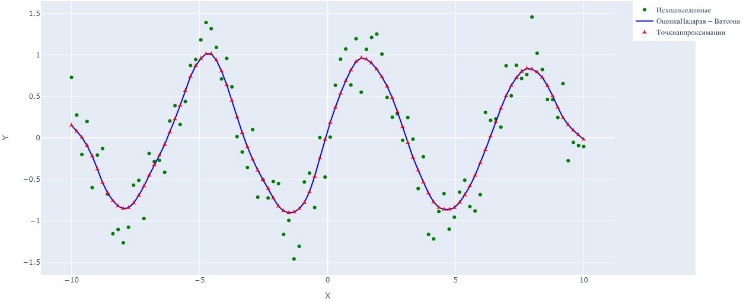
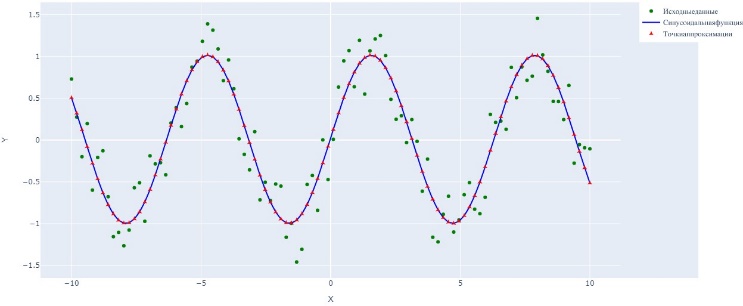


Рисунок 4 – Аппроксимация двумерной выборки с 50% шума

Рисунок 5 - Непараметрическая двумерная регрессия с 50% шума

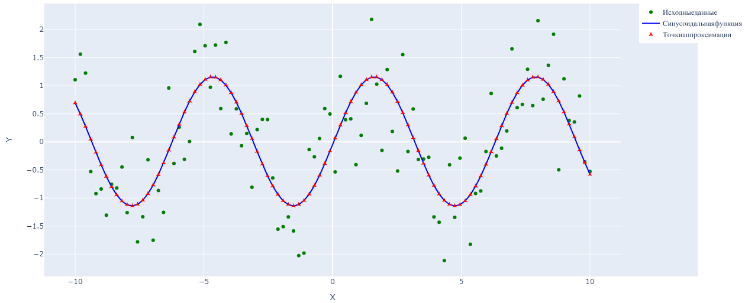
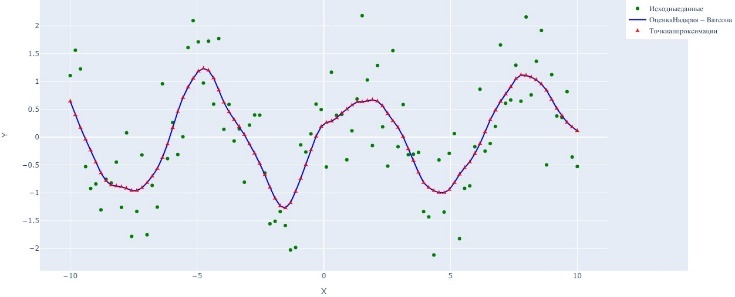
 

Рисунок 6 – Аппроксимация двумерной выборки с 120% шума

Рисунок 7 - Непараметрическая двумерная регрессия с 120% шума

Теперь рассмотрим трёхмерные методы.

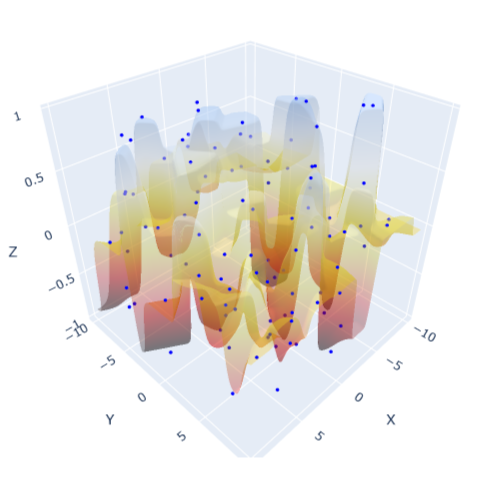
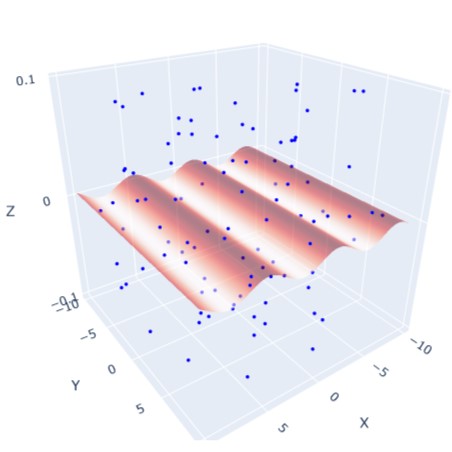


Рисунок 8 – Аппроксимация трёхмерной выборки с 50% шума

Рисунок 9 - Непараметрическая трёхмерная регрессия с 50% шума

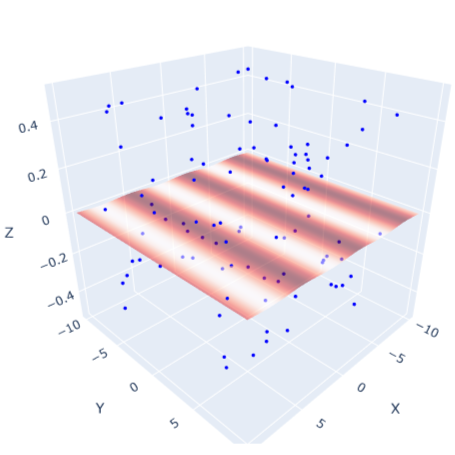
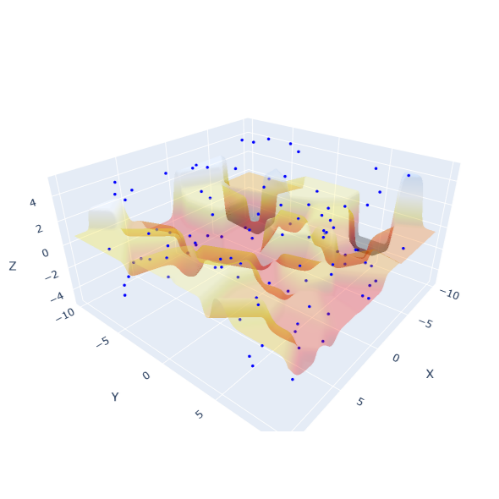
 

Рисунок 8 – Аппроксимация трёхмерной выборки с 50% шума

Рисунок 9 - Непараметрическая трёхмерная регрессия с 50% шума

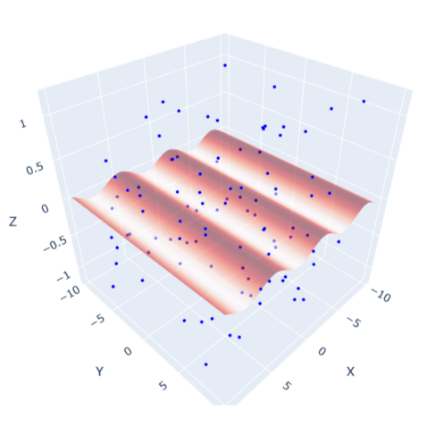
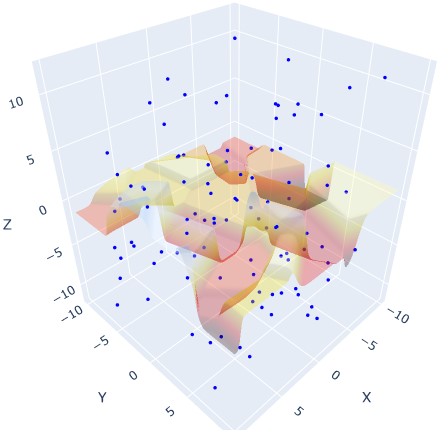
 

Рисунок 8 – Аппроксимация трёхмерной выборки с 120% шума

Рисунок 9 - Непараметрическая трёхмерная регрессия с 120% шума

Можем сказать, в трёхмерном пространстве параметрическая оценка регрессии бессильна, а непараметрическая оценка регрессии показывает хорошие результаты.

# Результаты

Отличия параметрического и непараметрического моделирования:

1. Предположения о распределении данных:

• Параметрическое моделирование: Основано на предположении о конкретной функциональной форме или распределении данных, например, нормальном или экспоненциальном.

• Непараметрическое моделирование: не требует никаких предположений о структуре данных, что делает его более универсальным.

2. Число параметров модели:

• Параметрическое моделирование: имеет фиксированное число параметров, которые нужно оценить, основываясь на данных.

• Непараметрическое моделирование: Количество параметров модели зависит от размера выборки, что позволяет модели адаптироваться к различным формам данных.

3. Устойчивость к выбросам и аномалиям:

• Параметрическое моделирование: может быть чувствительным к выбросам в данных, особенно если выбранная функциональная форма недостаточно гибка.

• Непараметрическое моделирование: более устойчиво к выбросам, так как не предполагает конкретной формы данных и может лучше адаптироваться к аномальным наблюдениям.

4. Интерпретируемость:

• Параметрическое моделирование: часто более легко интерпретируемо, так как параметры модели имеют конкретные смысловые интерпретации.

• Непараметрическое моделирование: может быть менее интерпретируемым из-за отсутствия явных параметров, хотя некоторые методы, такие как ядерная регрессия, могут предоставлять некоторую интерпретируемость.

5. Сложность модели:

• Параметрическое моделирование: более простое в понимании и реализации, так как требует определения некоторой функциональной формы.

• Непараметрическое моделирование: может быть более сложным и требовать более высокого уровня алгоритмического понимания для его применения.

Выбор между параметрическим и непараметрическим моделированием зависит от конкретной, характера данных и требований к модели.

# Выводы

В данном проекте было проведено исследование эффективности непараметрических методов моделирования, таких как регрессия, основанная на оценке Надарая-Ватсона, с параметрическими методами, например, аппроксимация с подгонкой по функции.

Цель исследования заключалась в выявление преимуществ конкретного метода для определённой структуры данных на основе сравнения этих методов на различных выборках. Для этого были сгенерированы наборы данных с разной структурой и характером. Далее к ним были применены непараметрические и параметрические методы, и произведено сравнение результатов.

Результаты исследования показали, что эффективность непараметрических методов значительно различается в зависимости от выборки. В некоторых случаях непараметрические методы показали более устойчивые и стабильные результаты, особенно если выборка имела сложную структуру или сильные выбросы. Однако в других случаях с маленьким процентом шума, параметрические методы показали более точные результаты.

Таким образом, выбор между непараметрическими и параметрическими методами моделирования должен основываться на характеристиках конкретной выборки и целях исследования. Непараметрические методы предпочтительны в случаях, когда исследуются многомерные данные или же данные имеющие сложную структуру с большим количеством шума и непредсказуемое распределение, в то время как параметрические методы подходят для двумерных данных с известным характером или предсказуемой функцией распределения.

Также необходимо отметить, что эффективность методов может зависеть не только от выборки, но и от других факторов, например объем выборки, точность измерений. Поэтому для получения результатов с более точным и ёмким выводом следует провести дополнительные исследования и сравнения на большем объеме данных.

# Список используемой литературы

1. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 720с.
2. Бесстремянная, Г. Е. Применение ядерных и параметрических регрессий для оценки влияния страховых медицинских организаций на качество региональных систем здравоохранения [Текст] / Г. Е. Бесстремянная, 2015. - 18 c.
3. Математический энциклопедический словарь [Текст] / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. - М.: Советская энциклопедия, 1988. - 847 с.
4. Хиценко, В. Е. Непараметрическая статистика в задачах защиты информации. Конспект лекций [Текст] / В. Е. Хиценко, 2012. ­­- 196 c.
5. Политехнический словарь [Текст] / Под ред. А. Ю. Ишлинский. – М.: Советская энциклопедия, 1989. - 656 с.
6. Математический энциклопедический словарь [Текст] / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. - М.: Советская энциклопедия, 1988. - 847 с.
7. Мышкис, А. Д. Математика для втузов. Специальные курсы [Текст] А. Д Мышкис - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. - 632с.