

5 задача: Флойд

2 модуль, 2 семестр

ФИВТ МФТИ, 2019

Описание by Илья Белов

1. Текст задачи

Полный ориентированный взвешенный граф задан матрицей смежности. Постройте матрицу кратчайших путей между его вершинами. Гарантируется, что в графе нет циклов отрицательного веса.

Формат входного файла

В первой строке вводится единственное число N ($1 \leq N \leq 100$) — количество вершин графа. В следующих строках по N чисел задается матрица смежности графа (j -ое число в i -ой строке — вес ребра из вершины i в вершину j). Все числа по модулю не превышают 100. На главной диагонали матрицы — всегда нули.

Формат выходного файла

Выведите N строк по N чисел — матрицу расстояний между парами вершин, где j -ое число в i -ой строке равно весу кратчайшего пути из вершины i в j .

Пример:

| in | out |
|-------------|-----------|
| 4 | 0 5 7 13 |
| 0 5 9 100 | 12 0 2 8 |
| 100 0 2 8 | 11 16 0 7 |
| 100 100 0 7 | 4 9 11 0 |
| 4 100 100 0 | |

2. Описание алгоритма

Алгоритм решает задачу APSP. Обозначим длину кратчайшего пути между вершинами u и v , содержащего, помимо u и v , только вершины из множества $\{1..i\}$ как $d^{(i)}_{uv}$,
 $d^{(0)}_{uv} = \omega_{uv}$

На каждом шаге алгоритма, мы будем брать очередную вершину (пусть её номер — i) и для всех пар вершин u и v вычислять $d^{(i)}_{uv} = \min(d^{(i-1)}_{uv}, d^{(i-1)}_{ui} + d^{(i-1)}_{iv})$. То есть, если кратчайший путь из u в v , содержащий только вершины из множества $\{1..i\}$, проходит через вершину i , то кратчайшим путем из u в v является кратчайший путь из u в i , объединенный с кратчайшим путем из i в v . В противном случае, когда этот путь не содержит вершины i , кратчайший путь из u в v , содержащий только вершины из множества $\{1..i\}$ является кратчайшим путем из u в v , содержащим только вершины из множества $\{1..i-1\}$.

3. Доказательство корректности

Доказательство см. на Викиконспектах (https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Алгоритм_Флойда)

4. Время работы и дополнительная память

$$T = O(V^3)$$

$$M = O(V^2)$$

5. Доказательство времени работы и дополнительной памяти

В алгоритме используются 3 вложенных цикла от 0 до $V-1 \Rightarrow O(T^3)$, извлечение начальной матрицы смежности - за $O(V^2)$. Итого $T = O(V^3)$