2б задача: 1.5-приближение задачи коммивояжёра

3 модуль, 2 семестр

ФИВТ МФТИ, 2019

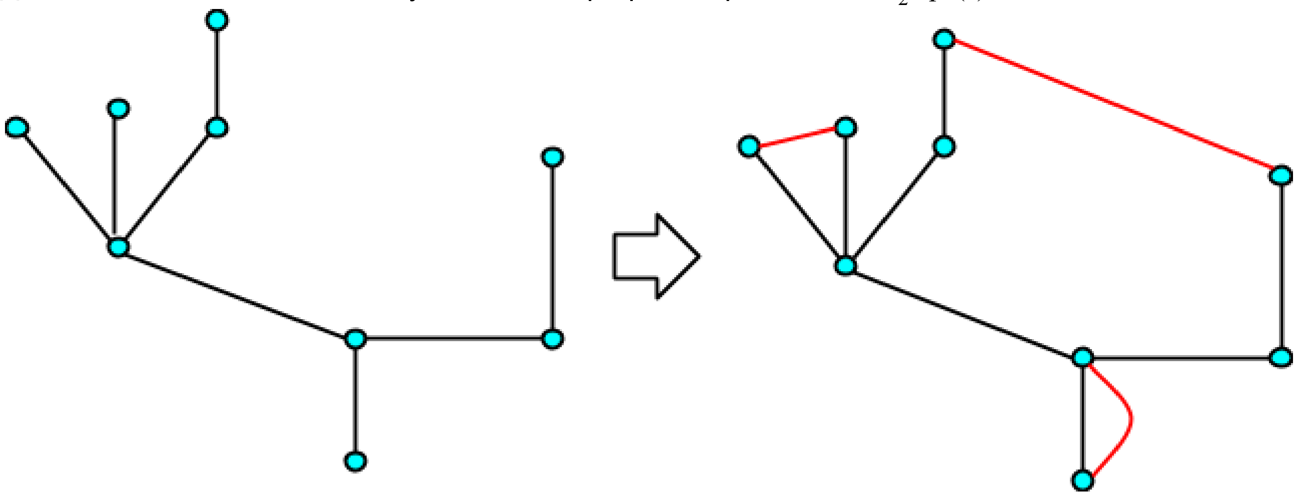
Описание by Илья Белов

1. Текст задачи

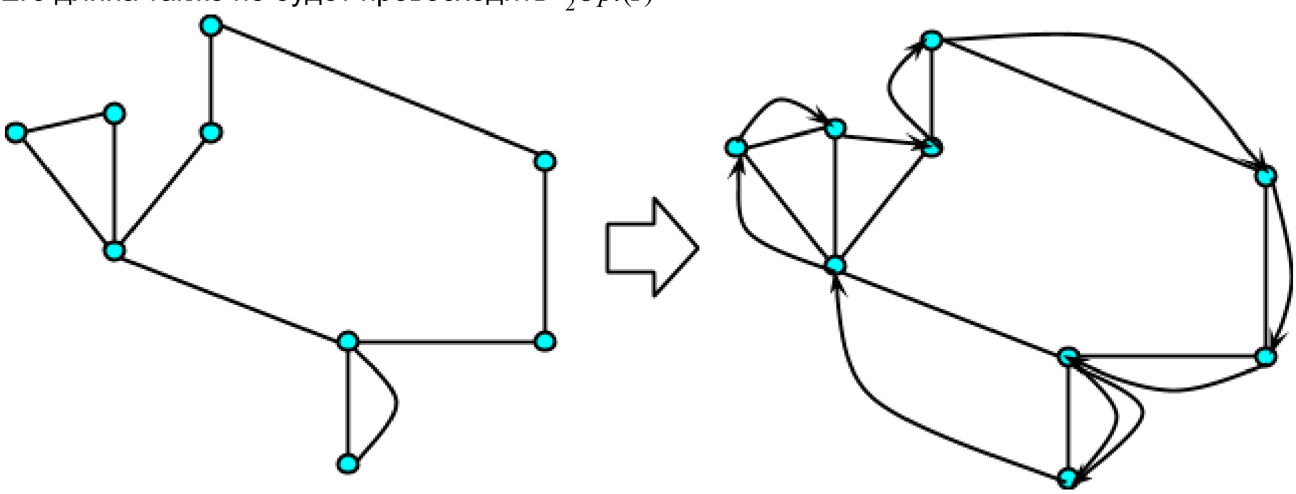
То же, что и задача 2а), но сделать приближение не хуже, чем в 1,5 раза от идеального.

2. Описание алгоритма[1]

Ищем MST с помощью алгоритма Крускала. Далее преобразовываем MST в эйлеров граф по следующему правилу: ищем совершенное минимальное паросочетание E' на $V' \subset V$ - множестве вершин чётной степени. Вес такого паросочетания не превосходит $\frac{1}{2}Opt(I)$. Добавляем E' к MST, вес получившегося графа не превосходит $\frac{3}{2}Opt(I)$.



Потом строим эйлеров цикл, который перестраиваем в гамильтонов цикл старым способом. Его длина также не будет превосходить $\frac{3}{2}Opt(I)$



3. Доказательство корректности[2]

Докажем, что вес добавленного паросочетания не будет превосходить $\frac{1}{2}Opt(I)$ и что при его добавлении граф действительно станет эйлеровым

---

[1] www.math.nsc.ru/LBRT/k5/OR-MMF/TSPr.pdf

[2] Аналогично

Итак, V' - множество вершин нечетной степени. Их число четно, $|V'| = 2k$, так как сумма всех степеней вершин графа должна быть четной. На множестве находится совершенное паросочетание минимального веса: ребёр, имеющие минимальный суммарный вес и покрывающие все вершины. Эта задача полиномиально разрешима[3]. Более того, вес такого паросочетания не превосходит половины длины любого гамильтонова цикла. Действительно, гамильтонов цикл в исходном графе легко переделать в гамильтонов цикл для подграфа на вершинах из V'. Этого можно добиться, исключив вершины не принадлежащие V'. В силу неравенства треугольника получим гамильтонов цикл не большей длины, чем исходный цикл. Он задает на множестве V' два паросочетания. Они получаются, если брать ребра через одно. Наименьший из весов этих паросочетаний не превосходит половины длины гамильтонова цикла. Добавим это паросочетание E' к остовному дереву. Получим эйлеров граф, так как степени всех вершин станут чётными

4. Время работы и дополнительная память

$T = O(V!)$

$M = O(V + E)$

5. Доказательство времени работы и дополнительной памяти

Совершенное минимальное паросочетание ищется полным перебором $\Rightarrow T = O(V!)$, факториал перебивает DFS алгоритм поиска MST

Докажем доп память. $O(V + E)$ необходимо для хранения DSU в алгоритме поиска MST

---

[3] но алгоритм, работающий за полиномиальное время, слишком крут для этого курса, поэтому в данном решении для поиска совершенного минимального паросочетания используется полный перебор