ДЗ по линейной алгебре на 26.02.2022

Кожевников Илья 2112-1

26 февраля 2022 г.

№1

Для того, чтобы доказать, что функция является билинейной формой, необходимо доказать четыре равенства:
1)$\beta(x_1+x_2,y_1)=\beta(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_1)$
2)$\beta(\lambda x_1,y_1)=\lambda\beta(x_1,y_1)$
3)$\beta(x_2,y_1+y_2)=\beta(x_2,y_1)+\beta(x_2,y_2)$
4)$\beta(x_1,\lambda y_1)=\lambda\beta(x_1,y_1)$

1.1)

$\beta(A,B)=tr(AB^T)$

1)
$\beta(A_1+A_2,B)=tr((A_1+A_2)B^T)=tr(A_1B^T+A_2B^T)=tr(A_1B^T)+tr(A_2B^T)=\beta(A_1,B)+\beta(A_2,B)$
2)
$\beta(\lambda A,B)=tr(\lambda AB^T)=\lambda tr(AB^T)=\lambda\beta(A,B)$
3)
$\beta(A,B_1+B_2)=tr(A(B_1+B_2)^T)=tr(AB_1^T+AB_2^T)=\beta(A_1,B)+\beta(A_2,B)$
4)
$\beta(A,\lambda B)=tr(\lambda AB^T)=\lambda tr(AB^T)=\lambda\beta(A,B)$

Значит, функция является билинейной формой.

1.2)

$\beta(A,B)=tr(AB-BA)$

1)
$\beta(A_1+A_2,B)=tr((A_1+A_2)B-B(A_1+A_2))=tr(A_1B+A_2B-BA_1-BA_2)=$
$=tr(A_1B-BA_1)+tr(A_2B-BA_2)=\beta(A_1,B)+\beta(A_2,B)$
2)
$\beta(\lambda A,B)=tr(\lambda AB-\lambda BA)=\lambda tr(AB-BA)=\lambda\beta(A,B)$
3)
$\beta(A,B_1+B_2)=tr(A(B_1+B_2)-(B_1+B_2)A)=tr(AB_1+AB_2-B_1A-B_2A)=$
$=tr(AB_1-B_1A)+tr(AB_2-B_2A)=\beta(A,B_1)+\beta(A,B_2)$
4)
$\beta(A,\lambda B)=tr(\lambda AB-\lambda BA)=\lambda tr(AB-BA)=\lambda\beta(A,B)$

Значит, функция является билинейной формой.

1.3)

$\beta(A,B)=tr(A+B)$

1)

$\beta(A_1+A_2,B)=tr(A_1+A_2+B)\neq tr(A_1+B)+tr(A_2+B)$
Значит, функция не является билинейной формой.

1.4)

$\beta(A,B)=det(AB)$

1)
$\beta(A_1+A_2,B)=det(A_1B+A_2B)\neq det(A_1B)+det(A_2B)$
Значит, функция не является билинейной формой.

№2

Аналогично с 1 номером, докажем 4 равенства:
$\beta(f,g)=f(2)g'(1)$

1)
$\beta(f_1+f_2,g)=(f_1(2)+f_2(2))g'(1)=f_1(2)g'(1)+f_2(2)g'(1)=\beta(f_1,g)+\beta(f_2,g)$
2)
$\beta(\lambda f,g)=\lambda f(2)g'(1)=\lambda\beta(f,g)$
3)
$\beta(f,g_1+g_2)=f(2)(g_1'(1)+g_2'(1))=f(2)g_1'(1)+f(2)g_2'(1)=\beta(f,g_1)+\beta(f,g_2)$
4)
$\beta(f,\lambda g)=\lambda f(2)g'(1)=\lambda\beta(f,g)$

Значит, все четыре равенства выполняются, а, значит, функция является билинейной формой.
Ч.Т.Д.
В матрице на ij-том месте будет стоять значение, равное $\beta(e_i,e_j)$
Значит, в базисе $(1,x,x^2,x^3)$ матрица будет иметь следующий вид:
$$\begin{pmatrix}1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 4\cdot 0 & 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3\\ 8\cdot 0 & 8\cdot 1 & 8\cdot 2 & 8\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & 8 & 16 & 24\end{pmatrix}$$

№3

Найдем матрицу перехода C.
Т.к. мы зафиксируем стандартный базис, то искомой матрицей перехода будет матрица координат в новом базисе $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$
Тогда новую матрицу билинейной формы можно будет найти по следующей формуле: C^TBC
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -6 & -9\\ -2 & 20 & 30\\ -3 & 30 & 45\end{pmatrix}$$
Ответ: $\begin{pmatrix}0 & -6 & -9\\ -2 & 20 & 30\\ -3 & 30 & 45\end{pmatrix}$

№4

Используем формулу для вычисления значения билинейной формы в координатах:

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (-43)$

Ответ: -43

№5

$\beta(x, y) = x_1y_1 + 5x_1y_2 + 4x_1y_3 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 6x_2y_3 + 2x_3y_1$

$Q_\beta(x) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_1 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3$

$\beta_0(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$

Значит, матрицы указанных форм примут следующий вид:

$\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_\beta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \beta_0(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$