ДЗ по линейной алгебре на 23.03.2022

Кожевников Илья 2112-1

20 марта 2022 г.

№1

Для начала найдем базис подпространства U.
$(1, 2, 3, 4)$

x_1	x_2	x_3	x_4
-2	1	0	0
-3	0	1	0
-4	0	0	1

Значит, в формуле $pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$ матрицей A будет

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем $A^T, A^T A, (A^T A)^{-1}, A(A^T A)^{-1} A^T$:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \\ 8 & 12 & 17 \end{pmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 26 & -6 & -8 \\ -6 & 21 & -12 \\ -8 & -12 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix},$$

$$A(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \\ \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix},$$

$$A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \\ \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{30} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix},$$

$$pr_S v = \begin{pmatrix} \frac{29}{30} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$ort_S v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \\ 7 \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: $pr_S v = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, ort_S v = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \\ 7 \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$

№2

Возьмем из прошлого дз ортогональный базис данного подпространства:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{5}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем $pr_S v$ по формуле $pr_S v = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)} e_i$:

$$pr_s v = \frac{v,e_1}{e_1,e_1}e_1 + \frac{v,e_2}{e_2,e_2}e_2 + \frac{v,e_3}{e_3,e_3}e_3 + \frac{v,e_4}{e_4,e_4}e_4 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{12}{49}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{4}{49}\\0\\\frac{12}{49}\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{78}{245}\\0\\\frac{12}{49}\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ответ: $pr_S v = \frac{78}{245} + \frac{12}{49}x^2$

№3

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{1}{|a_1|}a_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$f_2 = a_2 - \frac{(a_2,f_1)}{(f_1,f_1)}f_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{|f_2|}f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$A = QR$

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, R = Q^T A = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

№4

a)

Заметим, что $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{13}{36}$

Но определитель ортогональной матрицы равен ±1, а, значит, данная матрица неортогональная.

b)

Заметим, что $\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0$
Но определитель ортогональной матрицы равен ± 1, а, значит, данная матрица неортогональная.

c)

Проверим два условия: 1) $C^T C = E$ и 2) $CC^T = E$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, $C^T C = CC^T = E$. Значит, матрица ортогональна.

№5

Заметим, что при перемножении А на A^T у нас должна получаться единичная матрица. Но это означает, что при перемножении любой строки на любой столбец у нас должна получиться 1 только тогда, когда $pm1$ у нас стоят на одинаковых позициях (только в таком случае на ii-тых позициях в произведении матриц будут стоять 1, а на всех ij-тых, где $i \neq j$, - 0). Из этого следует, что в искомых матрицах в каждой строке и в каждом столбце должно быть ровно по одной ± 1. Тогда произведение этой матрицы на ее же транспонированную будет давать единичную матрицу.
Ответ: матрицы, у которых на всех столбцах и строках есть только одна ± 1.