ДЗ по алгебре на 15.04.2022

Кожевников Илья 2112-1

15 апреля 2022 г.

№1

1)

Докажем, что наша формула является бинарной операцией
Из определения бинарной операции следует, что наша формула $m \circ n = 2mn - 2m - 2n + 3$ будет являться бинарной операцией, если она будет брать значения из $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ и возвращать значение также из $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Тогда нам надо доказать два пункта:

1)

Возвращаемое значение $\in \mathbb{R}$
Док-во: очевидно, что умножение, сложение и разность действительных чисел дают действительные числа. Значит, 1) выполняется.

2)

Возвращаемое значение $\neq 1$
Док-во: $2mn - 2m - 2n + 3 = 1 \Leftrightarrow 2(n-1)(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} n = 1 \\ m = 1 \end{matrix}\right.$. Но т.к. $n \neq 1$ и $m \neq 1$, то и наша формула тогда также $\neq 1$. Значит, 2) тоже выполняется.

Тогда получается, что оба пункта доказаны, а наша формула является бинарной операцией на $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
Ч.Т.Д.

2)

Теперь докажем, что $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, \circ)$ - группа
По определению группы, нам надо доказать три утверждения:
1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2) Существует нейтральный элемент е такой, что $a \circ e = e \circ a = a$
3) Для a существует обратный элемент b такой, что $a \circ b = b \circ a = e$
Доказательство:
1) Распишем данные выражения:
$(a \circ b) \circ c = (2ab - 2a - 2b + 3) \circ c =$
$= 2(2ab - 2a - 2b + 3)c - 2(2ab - 2a - 2b + 3) - 2c + 3 = 4abc - 4ab - 4ac - 4bc + 4a + 4b + 4c - 3$
$a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc - 2b - 2c + 3) =$
$= 2a(2bc - 2b - 2c + 3) - 2a - 2(2bc - 2b - 2c + 3) + 3 = 4abc - 4ab - 4ac - 4bc + 4a + 4b + 4c - 3$
Отсюда, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
Ч.Т.Д.

2)
$a \circ e = 2ae - 2a - 2e + 3 = a$
$e \circ a = 2ea - 2e - 2a + 3 = a$
Значит, $a \circ e = e \circ a$. Найдем e.
$2ae - 2a - 2e + 3 = a$
$(2e - 3)(a - 1) = 0$
Но т.к. $a \neq 1$, то $e = \frac{3}{2}$
Значит, нейтральный элемент e существует, и он равен $\frac{3}{2}$.
Ч.Т.Д.
3)
$a \circ b = 2ab - 2a - 2b + 3 = e$
$b \circ a = 2ba - 2b - 2a + 3 = e$
Значит, $a \circ b = b \circ a = e$. Найдем b.
$2ab - 2a - 2b + 3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2a - \frac{3}{2}}{2a - 2} \\ \quad a \neq 1 \end{cases}$
Но т.к. $a \neq 1$, то $b = \frac{2a - \frac{3}{2}}{2a-2}$. При этом $b \neq 1$, т.к. $\frac{3}{2} \neq 2$
Значит, обратный элемент b существует, и он равен $\frac{2a - \frac{3}{2}}{2a-2}$.
Ч.Т.Д.

Значит, все три условия выполнены. Получается, $(\mathbb{R} \backslash \{1\}, \circ)$ - группа.
Ч.Т.Д.

№2

Для начала найдем нейтральный элемент e.
$(a + bi)e = e(a + bi) = a + bi$
Данным числом будет 1, т.к. $(a + bi) \cdot 1 = 1 \cdot (a + bi) = a + bi$

Тогда нам необходимо решить уравнение $z^{20} = 1$
$z^{20} = 1$
$|z| = \sqrt[20]{1} = 1$
$z = 1(cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{20}) + isin(\frac{\varphi + 2\pi k}{20})),\ k \in \{0, 1, ..., 19\}$
$1 = cos(0) + isin(0) = 1 + 0 = 1$
Значит, $z = cos(\frac{\pi k}{10}) + isin(\frac{\pi k}{10}),\ k \in \{0, 1, ..., 19\}$
Теперь нам надо убрать все такие k, что $z_k^n = e$ для $n \in \mathbb{N}, n < 20$.
Заметим, что если у нас есть $z^q = 1, z^{20} = 1$, то q - делитель 20.
Значит, искомые степени $n \in \{1, 2, 4, 5, 10\}$
Теперь найдем подходящие k.
n = 1:
$\begin{cases} cos(\dfrac{\pi k}{10}) = 1 \Rightarrow k = 20a, a \in \mathbb{Z} \\ sin(\dfrac{\pi k}{10}) = 0 \Rightarrow k = 10b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$k = 20t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0\}$
n = 2:
$\begin{cases} cos(\dfrac{\pi k}{5}) = 1 \Rightarrow k = 10a, a \in \mathbb{Z} \\ sin(\dfrac{\pi k}{5}) = 0 \Rightarrow k = 5b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$k = 10t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 10\}$

n = 4:
$$\begin{cases} cos(\dfrac{2\pi k}{5}) = 1 \Rightarrow k = 5a, a \in \mathbb{Z} \\ sin(\dfrac{2\pi k}{5}) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{5}{2}b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$k = 5t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 5, 10, 15\}$

n = 5:
$$\begin{cases} cos(\dfrac{\pi k}{2}) = 1 \Rightarrow k = 4a, a \in \mathbb{Z} \\ sin(\dfrac{\pi k}{2}) = 0 \Rightarrow k = 2b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$k = 4t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 4, 8, 12, 16\}$

n = 10:
$$\begin{cases} cos(\pi k) = 1 \Rightarrow k = 2a, a \in \mathbb{Z} \\ sin(\pi k) = 0 \Rightarrow k = b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$k = 2t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
Значит, искомыми k будут являться числа 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

Ответ: $z = cos(\frac{\pi k}{10}) + isin(\frac{\pi k}{10}),\ k \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

№3

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
Для начала найдем все элементы множества $\langle \sigma \rangle$:
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$
Тогда $\langle \sigma \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, id \right\}$
Так как у нас в группе 12 элементов, а в $\langle \sigma \rangle$ 3 элемента, то у нас будет 4 левых и 4 правых смежных классов. Найдем их.
Для начала найдем левые смежные классы:
Для удобства будем писать так, что $\sigma\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\} = \{\sigma\pi_1, \sigma\pi_2, \sigma\pi_3\}$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, id \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, id \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, id \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, id \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\right\}$

6) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\right\}$

7) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\right\}$

8) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\right\}$

9) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}$

10) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$

11) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$

12) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$

Тогда, если мы оставим по одному экземпляру каждого из классов, то получится, что левыми смежными классами будут следующие множества:

$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$

Теперь найдем правые смежные классы:

1) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}$

2) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\right\}$

3) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\right\}$

4) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\right\}$

5) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\right\}$

6) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\right\}$

7) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\right\}$

8) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\right\}$

9) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}$

10) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$

11) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$

12) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},id\right\}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$

Тогда, если мы оставим по одному экземпляру каждого из классов, то получится, что левыми смежными классами будут следующие множества:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}$$

Ответ:
Левые:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

Правые:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}$$

№4

Пусть у нас есть циклическая группа G с образующим элементом g. Также у нас есть подгруппа $H \subseteq G$.
Тогда докажем наше утверждение следующим образом:
Сначала рассмотрим случай, когда подгруппа тривиальна (состоит из одного элемента - нейтрального). Такая группа, во-первых, будет подгруппой, что легко проверяется по определению. Но тогда, очевидно, все элементы этой подгруппы будут порождаться элементом e. Значит, в таком случае подгруппа циклическая. **Ч.Т.Д.**
Теперь рассмотрим случай, когда подгруппа нетривиальна.
Возьмем такое положительное n, что g^n - минимальное из H.
1) Докажем, что $\langle g^n \rangle \subseteq H$
Пусть какое-то a $= \langle g^n \rangle$. Тогда для какого-то $k \in \mathbb{Z}$ верно $a = g^{kn}$. Но тогда если $g^n \in H$, то и $g^{nk} \in H$. Значит, $a \in H$.
Получается, $\langle g^n \rangle \subseteq H$
2) Докажем, что $H \subseteq \langle g^n \rangle$
Возьмем $h \in H$. Но тогда $h \in G \Rightarrow h = g^x$
Но x можно представить в виде $x = qn + r$, где $0 \leqslant r < n$.
Тогда $h = g^x = g^{qn+r} = g^{qn} \cdot g^r \Rightarrow g^r = hg^{n-q}$. Но т.к. h и $g^n \in H$, то и $g^r \in H$.
Но из того, что $0 \leqslant r < n$, a n - наименьшее положительное для $g^n \in H$, следует, что r $= 0$.
Тогда $g^{qn+r} = g^{qn} \in \langle g^n \rangle$

Получается, $H \subseteq \langle g^n \rangle$.

Итого, мы доказали два факта: $\langle g^n \rangle \subseteq H$ и $H \subseteq \langle g^n \rangle$. Но из этого следует, что $H = \langle g^n \rangle$
Значит, подгруппа циклической группы циклическая.
Ч.Т.Д.