ДЗ по мат. анализу на 24.11.2021

Кожевников Илья 2112-1

23 ноября 2021 г.

a)

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}=1$

b)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\frac{\sin 2x}{x})}{x(1+\frac{\sin 3x}{x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\sin 3x}{x}}=\left\|\begin{matrix}2x=y\\3x=z\\x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\end{matrix}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2\frac{\sin y}{y}}{1+3\frac{\sin z}{z}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2}{1+3}=$
$-\frac{1}{4}$

c)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+...+\operatorname{tg}nx}{\operatorname{arctg}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1\operatorname{tg}x}{1}+\frac{2\operatorname{tg}2x}{2}+...+\frac{n\operatorname{tg}nx}{n}}{\frac{\operatorname{arctg}x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2+...+n}{1}=\frac{n(n+1)}{2}$

d)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x\sin^2 x(1+\cos x)}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x\sin^2 x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x+\cos^2 x}=\frac{1}{2}$

e)

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=2\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\left\|\begin{matrix}\frac{x+a}{2}=y\\y\to 0\end{matrix}\right\|=$
$=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=$
$=\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$

f)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\ln\left(\left(x^2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right)=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{x}-1}=y\\ x=(1+\frac{1}{y})^2\\ y\to\infty\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\ln\left(\left((1+\tfrac{1}{y})^4+\cos\frac{\pi(1+\frac{1}{y})^2}{2}\right)^{y}\right)=\lim_{y\to\infty}\ln\left((1+\tfrac{1}{y})^{4y}\right)=$$

$$=\lim_{y\to\infty}4\ln\left((1+\tfrac{1}{y})^{y}\right)=\lim_{y\to\infty}4\ln e=4$$