ДЗ по мат. анализу на 10.11.2021

Кожевников Илья 2112-1

7 ноября 2021 г.

№1

$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

a)

1) При четном n (т.е. n = 2k) выполнено $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{1}{2k} + \frac{1+1}{2}$
$= \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{1}{2k} + \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} 1 = 0 + 1 = 1$
2) При нечетном n (т.е. n = 2k+1) выполнено $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{-1}{2k+1} + \frac{0}{2} = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{-1}{2k+1} + \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{0}{2} = 0 + 0 = 0$
Значит,
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$
$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_n = 0$

b)

$a_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}$
Т.к. sin^2 принимает значения от 0 до 1, то для верхнего и нижнего частичных пределов рассмотрим sin = 1 и sin = 0 соответственно. (sin = -1 рассматривать необязательно, т.к. для нахождения частичного предела достаточно одной подпоследовательности)
1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_n = ?$
$\sin \frac{\pi n}{4} = 1$
$\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$n = 2 + 8k, k \in Z$
$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{n}{n+1} \cdot 1 = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} 1 = 1, n = 2 + 8k, k \in Z$
2) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_n = ?$
$\sin \frac{\pi n}{4} = 0$
$\frac{\pi n}{4} = \pi k, k \in Z$
$n = 4k, k \in Z$
$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{n}{n+1} \cdot 0 = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} 0 = 0, n = 4k, k \in Z$

Значит,
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$
$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_n = 0$

3)

$a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
Заметим, что $3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ принимает максимальное значение 3 тогда, когда $n(n-1)$ можно представить в виде 4k + 1, где k - целое число. Минимальное же - когда делится на 2, но не делится на 4.
Тогда рассмотрим для верхнего и нижнего частичных пределов подпоследовательности, в которых n можно представить в виде 4k + 1, где k - целое число и n делится на 2, но не делится на 4 соответственно.
1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} 1 + 2 + 3 = 6, n = 4k + 1, k \in Z$
2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} 1 - 2 - 3 = -4, n = 2k, n \neq 4k, k \in Z$

№2

a)

1) $a_n = 1 + \frac{\sin n}{n^2}$
Тогда верхний и нижний пределы будут совпадать, а
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$
Но т.к. оба предела равны 0, то, по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$
Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{\sin n}{n^2} = 1$

2)

$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$
Тогда верхний и нижний пределы будут совпадать, а
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + 0 = 1$

b)

$a_n = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2} + (-1)^n \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2} + \frac{\pi}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}$
Тогда верхний и нижний пределы будут достигаться при четном и нечетном n соответственно.
$n = 2k, k \in R$
$\overline{\lim\limits_{2k\to\infty}} \frac{(1+\frac{1}{2k})^{2k}}{2} + (-1)^{2k}\frac{(1+\frac{1}{2k})^{2k}}{2} + \frac{\pi}{2} + (-1)^{2k-1}\frac{\pi}{2} = \overline{\lim\limits_{2k\to\infty}} (1 + \frac{1}{2k})^{2k} = e$

$n = 2k+1, k \in R$

$$\varliminf_{2k+1\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{2k+1})^{2k+1}}{2} + (-1)^{2k+1}\frac{(1+\frac{1}{2k+1})^{2k+1}}{2} + \frac{\pi}{2} + (-1)^{2k}\frac{\pi}{2} = \varliminf_{2k+1\to\infty} \pi = \pi$$

№3

Если множество частичных пределов лежит на от-ке [0, 1], то это означает, что наибольший верхний частичный предел подпоследовательности - 1, а наименьший нижний - 0, а из теоремы о том, что все частичные пределы лежат между $\varliminf\limits_{n\to\infty}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty}$ следует, что достаточно лишь найти последовательность с наибольшим частичным пределом, равным 1, и наименьшим, равным 0.

Рассмотрим последовательность $a_n = \sin^2 n$

1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sin^2 n$

$$\sin^2 n = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\sin n = 1 \\ &\sin n = -1 \end{aligned}\right.$$

Но т.к. нам достаточно рассмотреть одну подпоследовательность, то пусть $\sin n = 1$

$\sin n = 1$

$n = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Значит, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sin^2 n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} 1 = 1, n = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sin^2 n$

$\sin^2 n = 0 \Leftrightarrow \sin n = 0$

$n = \pi k, k \in Z$

Значит, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sin^2 n = \varliminf\limits_{n\to\infty} 0 = 0, n = \pi k, k \in Z$

Ответ: $a_n = \sin^2 n$