ДЗ по алгебре на 20.05.2022

Кожевников Илья 2112-1

19 мая 2022 г.

Все вычисления будут приложены в отдельном файле (т.к. техать деление уголком - вещь не из приятных).

№1

а)

$K = \mathbb{R}, f = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1, g = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$

Заметим, что НОД легко находится с помощью алгоритма Евклида, а линейное выражение - с помощью обратного хода алгоритма Евклида через многочлены.
Найдем НОД:

Вычисления из приложенного файла

Значит, НОД(f, g) $= -\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$
Теперь найдем линейное выражение:

Вычисления из приложенного файла

Значит, линейное выражение будет таким:
$f(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}) + g(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4})$
Ответ: НОД: $-\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$, линейное выражение: $f(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}) + g(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4})$

б)

$K = \mathbb{Z}_5, f = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4, g = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$
Аналогично пункту а) найдем НОД и линейное выражение, но теперь каждое число мы будем заменять на его остаток от деления на 5.
Найдем НОД:

Вычисления из приложенного файла

Значит, НОД(f, g) $= x + 2$
Теперь найдем линейное выражение:

Вычисления из приложенного файла

Значит, линейное выражение будет таким:
$f(2x + 1) + g(x^3 + 2x^2 + x + 3)$
Ответ: НОД: $x + 2$, линейное выражение: $f(2x + 1) + g(x^3 + 2x^2 + x + 3)$

№2

а)

$K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, f = x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12$
Сначала разложим в $\mathbb{R}$.
$x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12 = x^3(x^2+2) - 6(x^2+2) = (x^2+2)(x^3-6) = (x^2+2)(x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36})$
Степень второго множителя равна 1, так что он неприводим. У первого же и третьего множителей нет корней в $\mathbb{R}$, поэтому они также неприводимы.
Теперь разложим в $\mathbb{C}$.
$x^5+2x^3-6x^2-12 = x^3(x^2+2)-6(x^2+2) = (x^2+2)(x^3-6) = (x^2+2)(x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36}) =$
$= (x-\sqrt{-2})(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36}) =$
$= (x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})(x-\sqrt[3]{6})(x+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{4}})(x+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{4}})$
Все множители также степени 1. Значит, искомое разложение найдено.
Ответ: искомые разложения:
В $\mathbb{R}$: $(x^2+2)(x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36})$
В $\mathbb{C}$: $(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})(x-\sqrt[3]{6})(x+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{4}})(x+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+i\frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{4}})$

б)

$K = \mathbb{Z}_5, f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3$
Данный многочлен приведем делением уголком. Заметим, что у него есть корни 2 (т.к. f(2) = 95 = 0), 3 (т.к. f(3) = 525 = 0) и 4 (т.к. f(4) = 1875 = 0). Тогда найдем искомое разложение:

Вычисления из приложенного файла

Значит, $f = (x+3)(x+2)(x+1)(x^2+2x+3)$. При этом заметим, что $(x^2+2x+3)(0) = 3, (x^2+2x+3)(1) = 1, (x^2+2x+3)(2) = 1, (x^2+2x+3)(3) = 3, (x^2+2x+3)(4) = 2$. Значит, последний многочлен неприводим. Значит, искомое разложение найдено.
Ответ: $f = (x+3)(x+2)(x+1)(x^2+2x+3)$

№3

Для начала докажем, что F - поле. С лекций известно, что $F = K_{[x]}/(h)$ будет полем тогда и только тогда, когда h неприводим. Тогда докажем, что $z^3 - z^2 - 1$ неприводим в $\mathbb{Q}$.

Единственными рациональными корнями нашего многочлена могут быть ± 1 (потому что любое рациональное число представимо в виде $\frac{p}{q}$. Но p натуральное, q целое, а рациональные корни являются делителями свободного члена). Но при этом $f(1) = -3 \neq 0, f(-1) = -1 \neq 0$. Значит наш многочлен неприводим, а F - поле.

Заметим, что любой элемент из $\mathbb{Q}_{[z]}$ представим в виде $k(z^3 - z^2 - 1) + r$, где r - остаток от деления на $z^3 - z^2 - 1$. При этом $r = az^2 + bz + c$. Значит, $\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = A\alpha^2 + B\alpha + C$, где $A, B, C \in \mathbb{Q}$. Этот многочлен и будет искомым. Также в этом кольце выполняется $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + 1$

$$\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = A\alpha^2 + B\alpha + C$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (\alpha^2 - 3\alpha + 1)(A\alpha^2 + B\alpha + C)$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = A\alpha^4 + B\alpha^3 + C\alpha^2 - 3A\alpha^3 - 3B\alpha^2 - 3C\alpha + A\alpha^2 + B\alpha + C$$

$$A\alpha^4 = A\alpha(\alpha^2 + 1) = A\alpha^3 + A\alpha = A\alpha^2 + A\alpha + A$$

$$B\alpha^3 = B\alpha^2 + B$$

$$3A\alpha^3 = 3A\alpha^2 + 3A$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = A\alpha^2 + A\alpha + A + B\alpha^2 + B + C\alpha^2 - 3A\alpha^2 - 3A - 3B\alpha^2 - 3C\alpha + A\alpha^2 + B\alpha + C$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (A + B + C - 3A - 3B + A)\alpha^2 + (A - 3C + B)\alpha + (A + B - 3A + C)$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (-A - 2B + C)\alpha^2 + (A + B - 3C)\alpha + (-2A + B + C)$$

$$\begin{cases} -A - 2B + C = 3 \\ A + B - 3C = -12 \\ -2A + B + C = 7 \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью метода Гаусса приведения матрицы к УСВ:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -3 & | & -12 \\ -2 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -12 \\ 0 & -1 & -2 & | & -9 \\ 0 & 3 & -5 & | & -17 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -12 \\ 0 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 0 & -11 & | & -44 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что искомый многочлен таков: $-\alpha^2 + \alpha + 4$

Ответ: $-\alpha^2 + \alpha + 4$

№4

Рассмотрим какой-нибудь ненулевой необратимый элемент f + (h) $\in K_{[x]}/(h)$. Т.к. f $\not\vdots$ h, то рассмотрим два случая: НОД(f, h) = 1, НОД(f, h) $\neq$ 1

1)

НОД(f, h) = 1

По китайской теореме об остатках, у нас всегда найдутся такие два элемента u и v, что uf + vh = 1. Тогда верно будет следующее:

$$1+(h) = uf+vh+(h) = (uf+(h))+(vh+(h)) = (uf+(h))+(0+(h)) = uf+(h) = (u+(h))(f+(h))$$

Но тогда выходит, что $1 + (u + (h))(f + (h))$. Значит, элемент f обратим по определению. Но мы предполагали обратное. Противоречие.

2)

НОД(f, h) $\neq$ 1

Тогда пусть p: f = p·НОД(f, h), q: h = q·НОД(f, h).

Т.к. $q \not\vdots\ h, q + (h) \neq 0$, то верно будет следующее:

$$(f + (h))(q + (h)) = fq + (h) = p \cdot \text{НОД}(f, h)q + (h) = ph + (h) = 0 + (h)$$

Отсюда, f + (h) - делитель нуля по определению.

Ч.Т.Д.