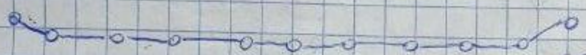
№ 1.



Заметим, что сумма степеней данного графа равна 20.

Рассмотрим данный граф. Заметим, что это дерево, т.к. удаление любого из ребер увеличит кол-во комп. св.

Если мы добавим к этому графу еще одну вершину, то:

1) если она будет изолирована, то граф перестанет быть связным => такой вариант не подходит

2) если она будет соединена с другими вершинами, тогда сумма степеней станет > 20 => такой вариант также не подходит.

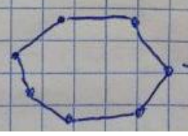
Значит, добавлять новые вершины уже нельзя =>

=> в данном графе максимальное кол-во вершин при выполнении необходимых требований. Значит данный граф искомый. Кол-во вершин в нем — 11.

Ответ: 11

№ 2.

Заметим, что если в графе нет мостов, то в нем нет висячих вершин (т.к. ребро, инц. висячей вершине, - мост). Значит, минимальная степень каждой вершины в графе - 2. Также заметим, что по теореме, минимальное кол-во ребер в связном графе на n вершинах - $n-1$. Но заметим, что это число достигается лишь тогда, когда граф становится деревом, т.е. когда все ребра - мосты. Значит, чтобы граф не был деревом, необходимо добавить еще одно ребро. Тогда кол-во ребер станет n.



— 7 вершин
7 ребер

Ответ: n

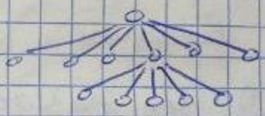
№3.

Докажем, что ответ – да, следует.

1) Построим вершину со степенью 6.

1) 

2) Тогда присоединить следующие вершины мы можем только к нижним вершинам. Присоединим вершину степени 6.

2) 

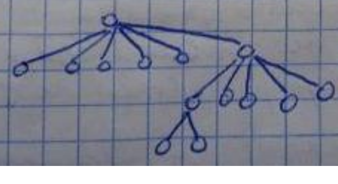
3) Тогда из ~~[illegible]~~ второй вершины степени 6 исходит еще 5 вершин.

Но т.к. в нашем графе уже 12 вершин, то 13-ую мы можем добавить в граф несколькими способами:

1) добавить изол. вершину. Но тогда граф перестанет быть деревом => не подходит

2) присоединить к одной из вершин степени 6. Но тогда возникнет противоречие условию, т.к. степень этой вершины станет 7.

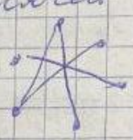
Значит, остается присоединить данную вершину к одной из висячих вершин, что сделает ее степень равной 2. Значит, ответ – да. ч.т.д.

Ответ: да, следует; 

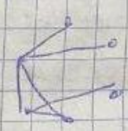
№ 4.

Давайте рассмотрим случаи, при которых связный граф может перестать таковым быть:

1) при удалении ребра, инцидентного висячей вершине



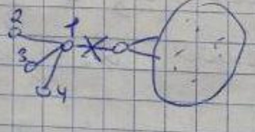
2) при удалении ребра, связывающего компоненты связности.



1) вариант невозможен потому, что у висячей вершины степень равна 1, что противоречит условию о четности всех степеней.

2) вариант невозможен потому, что в таком случае в каждой из разделенных компонент связностей из вершины, инцидентной удаленному ребру, будет исходить нечетное кол-во ребер. Тогда невозможно будет построить удовлетворяющий условию граф, потому что:

Построим подобный граф:



тогда в нем левая и правая части будут строиться по одной и той же логике. Тогда рассмотрим построение левой части графа. Из вершины 1 исходит нечетное кол-во ребер. Тогда есть 2 варианта:

1) соединить 3 и 4 вершины ребром. тогда останется вершина № 2, которая будет повторять сценарий вершины № 1.

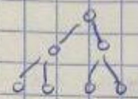
2) провести из каждой из вершин 2, 3 и 4 по нечетному кол-ву ребер. тогда также повторится сценарий вершины № 1.

Значит, построить такой граф невозможно. Значит, ни 1), ни 2) варианты в данной задаче невозможны

=> такой граф при удалении любого из ребер все равно останется связным.

ч. т. д.

№6

Докажем, что в графе вида 
(где у верхней вершины степень a, а у всех остальных вершин — $a+1$. Тогда такой граф — дерево).

$\exists\, n$ — кол-во вершин в графе, a — степень всех вершин кроме верхней -1.

Тогда необходимо будет доказать следующее неравенство:

$$n^a > \frac{n^a + n^{a-1} + \ldots + n^1}{2}$$

$$2n^a > n^a + n^{a-1} + \ldots + n^1$$

$$n^a > n^{a-1} + \ldots + n^1$$

Используем метод мат. инд.:

База: $n^1 > n^0$ => база доказана при $n > 1$. (но в нашей задаче $n > 1$ всегда)

Шаг: $n^a > n^{a+1} + \ldots + n^1$, док-ть: $n^{a+1} > n^a + \ldots + n^1$

$n^{a+1} > n^a + n^{a-1} + \ldots + n^1$. Подставим $n^a = n^{a-1} + \ldots + n^1$

$n^{a+1} > n^a + n^a$

$n^{a+1} > 2n^a$. Но при $a > 2$ это нер-во верно =>

=> при $a > 2$ шаг доказан.

Заметим, что при $a = 2$ возникает противоречие условию, а при $a = 1$ граф принимает вид •—•—•…—•, что также противоречит условию. Значит, шаг доказан для всех a в данной задаче.

Из доказанной индукции следует, что верность выражения $n^a > n^{a-1} + \ldots + n^1$ не зависит от значения a.

Тогда подставим $a = 2$.

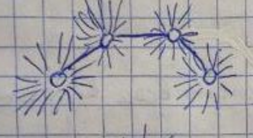
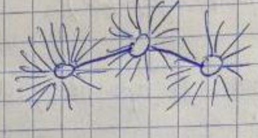
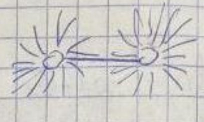
$n^2 > n^1$. Но это выражение верно при $n > 1$, что верно в нашей задаче. Значит, выражение $n^a > n^{a+1} + \ldots + n^1$ верно.

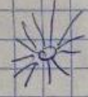
ч. т. д.

верно

№ 7.

Заметим, что в графе с 2021 вершинами, где нет путей длины 6, обязательно должен выглядеть следующим образом: *

1)  2)  3) 

4) 

1) в данном случае на 4 вершины в сумме 2021 соединения с ними вершин. Но тогда если степени каждой из вершин ≤ 32, то в сумме максимально в графе могло бы быть 128, что < 2021 => в дереве есть вершина степени ≥ 33.

Аналогично и с 2), 3) и 4) случаями, невозможно будет распределить вершины так, чтобы граф был деревом и степень каждой из вершин была ≤ 32.

* Пояснение: Возьмем 1) случай, где максимальная длина простого пути = 5. Если мы добавим хоть одну вершину к любой из уже существующих, то длина максимального пути станет 6, что противоречит условию.
Из 2), 3) и 4) случаев при добавлении вершин получится тот же 1) случай, а значит для этих случаев отдельное пояснение не нужно.

Значит, так или иначе в графе всегда будет вершина со степенью ≥ 33.

Ч.т.д.