ДЗ по алгебре на 22.04.2022

Кожевников Илья 2112-1

21 апреля 2022 г.

№1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$
Докажем два факта:
1) Такие матрицы порождают подгруппу.
2) Эта подгруппа нормальная

1) Для этого проверим три критерия:
1) $x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$.
2) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$
3) $e \in H$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix}$
Т.к. определитель такой матрицы будет равен лишь тогда, когда b или d будут равны 0, что невозможно (т.к. тогда одна из матриц в произведении будет вырождена), такая матрица будет невырождена. Также она нижнетреугольная. Значит, она подходит.

2)Такой элемент всегда будет, т.к. матрицы невырожденные. Найдем его.
$X^{-1} = \frac{1}{det(X)} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$
Итого, обратная матрица будет нижнетреугольной и невырожденной, а, значит, $x^{-1} \in H$
3) Нейтральным элементом будет единичная матрицы 2×2, то есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. При умножении на нее слева и справа матрицы A будет получаться та же матрица A, что очевидно. Также она нижнетреугольная, а, значит, она подходит.
Итого, все три критерия выполнены, а, значит, все такие матрицы порождают подгруппу.
Ч.Т.Д.

2) Тогда проверим следующее требование: $gHg^{-1} \subseteq H$ (т.к. $H \triangleleft G \Leftrightarrow gHg^{-1} \subseteq H$).
Пусть $ac \neq 0, ik \neq 0$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+cd & cf \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+cd & cf \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b+cd-bf}{a} & f \end{pmatrix}$
Но т.к. $f \neq 0$ (иначе матрица посередине была бы вырождена), то наша матрица нижнетреугольная и невырожденная. Значит, она подходит под условия.
Ч.Т.Д.
Итого, оба наших пункта доказаны. Значит, такие матрицы порождают нормальную подгруппу в G.
Ч.Т.Д.

№2

Пусть у нас есть такое отображение φ, что:
$0 \longrightarrow 0$
$1 \longrightarrow x$
Но тогда заметим, что любое число n мы можем представить в виде суммы n единиц. Но по определению гомоморфизма, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Значит, будет верно и
$2 = 1 + 1 \longrightarrow x + x = 2x$
$3 = 1 + 1 + 1 \longrightarrow x + x + x = 3x$
...
$0 \overset{mod 15}{=} 15 = 1 + ... + 1 \longrightarrow x + ... + x = 15x$
Тогда выходит, что $15x = 0 \Rightarrow x \,\vdots\, 4$(т.к. $15 \cdot 4 = 60$ - наименьшее число, делящееся и на 15, и на 20).
Из чисел, делящихся на 4 и меньших 20, есть 0, 4, 8, 12, 16. Тогда запишем в таблицу все искомые гомоморфизмы:

	0	4	8	12	16
$0 \longrightarrow$	0	0	0	0	0
$1 \longrightarrow$	0	4	8	12	16
$2 \longrightarrow$	0	8	16	4	12
$3 \longrightarrow$	0	12	4	16	8
$4 \longrightarrow$	0	16	12	8	4

Ответ: 0, 4, 8, 12, 16

№4

Докажем данную равносильность в две стороны:
1) Если m и n взаимно просты, то $A \cap B = \{e\}$
2) Если $A \cap B = \{e\}$, то m и n взаимно просты.

1) Для начала докажем, что $A \cap B$ является подгруппой.
Для этого докажем три критерия:
1)$e \in H_1 \cap H_2$
2)$x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x \circ y \in H_1 \cap H_2$
3)$x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x^{-1} \in H_1 \cap H_2$
1) Т.к. подгруппа обязана содержать e, то пересечение подгрупп также содержит e. Значит, 1) выполняется.
2) Т.к. подгруппа, содержащая x и y, обязана содержать $x \circ y$, то пересечение подгрупп также содержит $x \circ y$. Значит, и 2) выполняется
3) Если x содержится и в H_1, и в H_2, то и в их пересечении содержится x. Значит, 3) выполняется
Значит, пересечение подгрупп также является подгруппой.
Тогда теорема Лагранжа гласит, что для конечной группы G и подгруппы $H \subseteq G$ выполняется $|G| = |H| \cdot [G : H]$. Значит,

$$\begin{cases} |A| = |A \cap B| \cdot [A : A \cap B] \\ |B| = |A \cap B| \cdot [B : A \cap B] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| \,\vdots\, |A \cap B| \\ |B| \,\vdots\, |A \cap B| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \,\vdots\, |A \cap B| \\ n \,\vdots\, |A \cap B| \end{cases}$$

Но заметим, что m и n делится на $|A \cap B|$ и при этом остаются взаимно простыми тогда и только тогда, когда $|A \cap B| = 1$. Но т.к. $A \cap B$ - подгруппа, что означает, что в ней есть нейтральный элемент, получается, что $A \cap B = \{e\}$.

В одну сторону утверждение доказано.

2) Докажем, что если $A \cap B = \{e\}$, то m и n взаимно просты.

Пойдем от противного: пусть $A \cap B = \{e\}$, но $\exists d : m \vdots d, n \vdots d, d \neq 1$

Тогда рассмотрим циклическую группу G такую, что у ее порождающего элемента a порядок $m \cdot n$. Также пусть у нас есть подгруппы $A = \langle a^n \rangle$ и $B = \langle a^m \rangle$

Заметим, что порядки наших A и B равны m и n соответственно (по построению G). Но порядок группы A равен порядку $a^n = min(s) : a^{sn} = e$. Минимум мы можем получить при $s \cdot n = m \cdot n \Rightarrow m = s$. Аналогично, $|B| = ord(a^m) = n$

Теперь найдем все общие элементы. Заметим, что если a^v лежит и в A, и в B, то $a^v = a^{pn}$ и $a^v = a^{qm}$. То есть если элемент лежит и в A, и в B, то для него выполняется $a^{pn} = a^{qm}, p, q \in \mathbb{Z}$.

$p = \alpha \frac{m}{\text{НОД(m, n)}}, q = \alpha \frac{n}{\text{НОД(m, n)}}$

В $A \cap B$ лежат элементы вида $a^{\alpha \frac{mn}{\text{НОД(m,n)}}} = a^{\alpha \text{НОК(m,n)}}$

Значит, $A \cap B = \langle a^{\text{НОК(m, n)}} \rangle$. Порядок этой группы равен порядку образующей, который равен $\frac{mn}{\text{НОК(m,n)}} = \text{НОД(m,n)} > 1$.

Но тогда выходит, что $|A \cap B| > 1 \Rightarrow A \cap B \neq \{e\}$. Противоречие. Значит, наше утверждение верно.

Итого, мы доказали утверждение в обе стороны.

Значит, m и n взаимно простые $A \cap B = \{e\}$

Ч.Т.Д.