№ 3.

в) $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n+1})$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt{n+1})$. Значит, a_n и b_n имеют одинаковый предел. Но т.к. a_n не возрастает, а b_n не убывает, то a_n стремится к этому пределу сверху, а b_n — снизу. Отсюда следует, что $a_k > b_m \ \forall\, k, m \in \mathbb{N}$. Также отсюда следует, что обе посл-ти ограничены.

ч.т.д.

№2.

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

$$\frac{n^n}{e^n} \le n! \le \frac{e n^n}{2^n}$$

Докажем нер-во методом мат. инд.

База: $\frac{1}{e} \le 1 \le \frac{e}{2}$

$\frac{2}{e} \le 1 \le e$

т.к. $e \approx 2{,}7$, то (V).

Шаг: Дано: $\frac{n^n}{e^n} \le n! \le \frac{en^n}{2^n}$ (1)

Док-ть: $\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \le (n+1)! \le \frac{e(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$\frac{(n+1)^n}{e^{n+1}} \le n! \le \frac{e(n+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \le n! \le \frac{e}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (2)$$

Докажем, что $\left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$. Тогда $\frac{(n+1)^{n+1}\cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)e^n}{e^{n+1}\cdot n^n} =$
$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{<e} \cdot \frac{n+1}{e} < \frac{e(n+1)}{e}$. Значит, $\left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

Докажем, что $\frac{e}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant \frac{en^n}{2^n} \quad / \cdot 2^n$

$$e\cdot 2^{n-1}(n+1)^n \geqslant e n^n$$

$$2^{n-1}(n+1)^n \geqslant n^n$$

Значит, границы (2) шире, чем (1), а (1) находится в внутри (2) => шаг индукции доказан => изначальное выражение доказано.

ч.т.д.