ДЗ по дискретной математике на 29.10.2021

Кожевников Илья 2112-1

28 октября 2021 г.

№1

Докажем данное высказывание методом математической индукции, где n - количество вершин в графе.
База: При n = 1 и n = 2 и нарушается высказывание о том, что подобных способов раскраски 3 (т.к. одну вершину в два цвета можно раскрасить двумя способами, а 2 вершины - двумя).
Рассмотрим n = 3.
Тогда граф примет следующий вид: Одна вершина имеет степень 2, а две другие - 1. Тогда первый способ раскраски будет такой, что вершина со степенью 2 будет раскрашена в k, а две другие - в l. Второй способ - наоборот. Но третий способ будет возможен лишь тогда, когда хотя бы одна из вершин будет изолирована, ведь в противном случае получится, что вершины одной раскраски будут смежными, что противоречит условию о том, что граф 2-раскрашиваемый. Значит, база доказана.
Шаг: Пусть высказывание верно при k. Докажем его верность для k+1.
Тогда рассмотрим два случая при добавлении в граф новой вершины:
1) Новая вершина изолирована
2) Новая вершина неизолирована
В 1 случае старый граф на k вершинах сохраняется, а, значит, и верность высказывания также сохраняется.
Рассмотрим 2 случай. Тогда, т.к., по предположению индукции, высказывание верно для графа на k вершинах (то есть в нем есть как минимум 2 компоненты связности), то новая вершина соединена с какой-либо компонентой связности (т.к. если новая вершина будет соединена с ними обоими, то граф нельзя будет раскрасить тремя способами). Значит, каждую из компонент связности можно раскрасить минимум двумя способами, а это значит, что весь граф можно раскрасить как минимум тремя способами, когда он несвязен. Значит, шаг доказан.
Значит, высказывание верно.
Ч.Т.Д.

№2

Заметим, что граф на 2n вершинах 2-раскрашиваемый. Отсюда следует, что его он двудольный (т.к. левой долей будут вершины цвета a, а вершины правой доли будут цвета b). Но это означает, что граф несвязен.
Ч.Т.Д.

№3

Заметим, что между тремя подряд идущими вершинами будет три ребра, образующие треугольник. Это означает, что, если такой граф и 3-раскрашиваемый, то в этом треугольнике все вершины раскрашены по-разному.

Тогда начнем раскрашивать вершины по кругу. Пусть первую раскрасим в 1. Тогда следующая пусть будет 2, а следующая после 2 будет 3. Тогда вершина, следующая за 3, будет соединена и с 3, и с 2. Значит, она будет раскрашена в 1. И так будем раскрашивать все вершины по кругу в 1, 2, 3, а затем снова 1 и т.д. Но тогда 16 вершину мы также раскрасим в 1. Но она смежна с первой, которая имеет раскраску 1. Значит, возникает противоречие. А так как то, с какого цвета мы начнем раскраску или какую вершину раскрасим первой, ничего не меняет, то такой раскраски в данном графе не существует.
Ответ: нет.

№4

Составим двудольный граф таким образом, что в левой доле находятся все синие фишки, а в правой - все красные.
Тогда проведем ребра между теми фишками, сумма цветов которых ≥ 101.
Докажем, что такой граф возможен.
Соединим синюю фишку с цветом 1 и красную фишку с цветом 100. Затем соединим синюю фишку с цветом 2 и красную фишку с цветом 99. И так далее, пока не соединим синюю фишку с цветом 100 и красную фишку с цветом 1. Тогда в каждой паре смежных вершин сумма их цветов будет 101. Значит, такой граф возможен, а пар смежных вершин в этом графе 100.
Тогда если враг возьмет 99 любых фишек, то в любом случае найдется еще хоть одна пара смежных вершин, сумма цветов которых 101 (т.к. если он возьмет 99 красных фишек, то останется пара из последней красной фишки и смежной ей и т.д.).
Значит, высказывание доказано.
Ч.Т.Д.

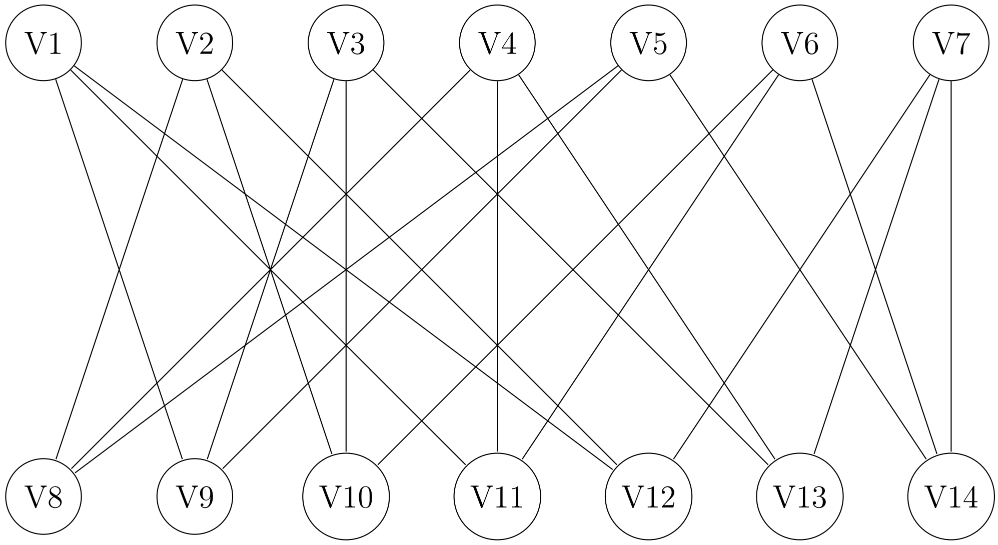
№5

Если в графе 30 вершин, ты мы мысленно можем разбить его на 10 графов на 3 вершинах.
Тогда из условия следует, что в нем либо есть одна вершина со степенью 2 и две со степенями 1, либо три вершины со степенями 2.
Тогда составим множество ребер и вершин, куда добавим по 2 ребра из каждого такого подграфа на 3 вершинах. В этом множестве получатся две доли и 20 ребер, соединяющие вершины из двух долей. Значит, паросочетание из 15 ребер возможо.
Ч.Т.Д.

№6

Заметим, что, по условию, все записанные множества длины 12 различны. Это означает, что если взять два любых множества, то обязательно найдется такой элемент первого множества, которого нет во втором множестве. Но это означает, что если мы добавим к каждому из множеств один и тот же элемент, то это различие останется. Это значит, что при добавлении одного и того же элемента во все записанные множества все еще в любой случайной паре найдется элемент, который есть в первом множестве и которого нет во втором.
Итого, если мы добавим один и тот же элемент во все записанные множества, то среди новых 13-элементных множеств одинаковых также не будет.
Ч.Т.Д.

№7



№8

Докажем данное высказывание от противного.
Тогда в нашем графе нет ни клики размера 3, ни независимого множества размера 4.
Заметим, что если в графе нет клики размера 3, то это означает, что в любой тройке вершин может быть не более двух ребер. Это означает, что, если мы захотим выбрать в графе независимое множество, то из такого подграфа на 3 вершинах мы сможем взять две вершины. Но изначальный гарф был на 9 вершинах, а это означает, что таким образом мы сможем выбрать независимое множество размера 4. Противоречие. Значит, в графе на 9 вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 4.
Докажем, что 9 - минимальное количество вершин в графе для выполнения условий
Также пойдем от противного. Тогда в графе на $n \leq 8$ вершинах есть либо клика размера 3, либо независимое множество размера 4.
Допустим, в нем есть клика размера 3. Тогда остаются еще ≤ 5 вершин. Но тогда в нем не должно быть независимого множества размера 4, а оно есть. Противоречие.
Тогда допустим, что есть независимое множество размера 4. Тогда все остальные вершины должны быть связаны. Но тогда есть клика размера 3, а ее быть не должно. Противоречие.
Значит, $R(3, 4) = 9$.
Ч.Т.Д.