ДЗ по дискретной математике на 18.02.2022

Кожевников Илья 2112-1

17 февраля 2022 г.

№1

Докажем, что последние две цифры следующей степени зависят от последних двух цифр текущей степени.
Число 99^n можно расписать следующим образом:
$99^n = ... + 10b + a$, где a и b - некоторые целые числа. Тогда 99^{n+1} будет равно $... + 990b + 99a$.
Тогда выходит, что последние две цифры числа 99^n будут зависеть только от последних двух цифр числа 99^{n-1}.
Распишм первые несколько степеней числа 99.
$99, 9801, 970299$.
Заметим, что последние две цифры проходят следующий цикл: $99 \rightarrow 01 \rightarrow 99$
Это означает, что в четных степенях последними двумя цифрами будут 01, а в нечетных - 99.
Значит, 99^{1000} будет оканчиваться на 01.
Ответ: 01.

№2

Распишем $a^2 - b^2$ в следующем виде: $(a-b)n + r - (a-b)k - l = (a-b)(n-k) + r - l = (a-b)(a+b)$.
Отсюда следует, остатки от деления a^2 и b^2 на (a-b) совпадают.
Ч.Т.Д.

№3

Заметим, что 4(x+10y) = 4x + 39y + y. Но 39y заведомо делится на 13, а, значит, x+10y будет делиться на 13 тогда и только тогда, когда на 13 будет делиться 4x+y.
Ч.Т.Д.

№4

$53x \equiv 1(mod 42)$
НОД (53, 42) = 1, т.к. 53 - простое число. Значит, у нас будет 1 решение.
Теперь с помощью расширенного алгоритма Евклида мы можем найти необходимое решение.

	a_i	x_i	y_i	q_i
0	53	1	0	
1	42	0	1	1
2	11	1	-1	3
3	9	-3	4	1
4	2	4	-5	4
5	1	-19	24	

42 - 19 $= 23$
Отсюда, $x \equiv 23(mod 42)$
Ответ: $x \equiv 23(mod 42)$

№5

$n^2 + 1 - (n^2 - n + 1) = n \Rightarrow$ НОД($n^2 + 1$, n) $= 1$, значит, НОД($n^2 + 1, n^2 - n + 1$) $= 1$. Значит, дробь несократима.
Ч.Т.Д.

№6

Заметим, что сумма цифр этого числа делится на 3. Но тогда, чтобы быть точным квадратом, это число также должно делиться и на 9. Но сумма его цифр на 9 не делится, а, значит, это число - не точный квадрат.
Ответ: нет.

№7

Заметим, что такое возможно лишь тогда, когда последняя цифра в числе - 9, ведь в противном случае новое число на 7 делиться не будет точно.
Значит, на конце нашего числа должно быть какое-то количество девяток, которые при прибавлении единицы превратятся в 0 и увеличат на 1 стоящий перед ними разряд.
Пусть a - количество девяток в нашем числе, а k - сумма цифр в изначальном числе.
Тогда сумма цифр в нашем числе уменьшится на 9a-1
Тогда решим сравнение $9a \equiv 1(mod 7)$.
НОД(7, 9) $= 1$. Значит, решение одно.
$1 = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9$
Значит, искомое количество девяток - 4.
Тогда минимальным подходящим числом будет 69999.
Ответ: 69999.