# ДЗ по дискретной математике на 04.03.2022

Кожевников Илья 2112-1

3 марта 2022 г.

## №1

Заметим, что если мы применим алгоритм Евклида к числам $F_n$ и $F_{n-1}$, то $F_n$ заменится на $F_n - F_{n-1}$, то есть на $F_{n-2}$. То есть пара $F_n$ и $F_{n-1}$ после одной итерации алгоритма превратится в $F_{n-1}$ и $F_{n-2}$. Значит, в конце алгоритма мы получим $F_2$ и $F_1$, но их НОД равен 1, а, значит, любые $F_n$ и $F_{n-1}$ взаимно просты.

Ч.Т.Д.

## №2

$$\begin{cases} x \equiv 3\ (mod\ 15) \\ x \equiv 4\ (mod\ 21) \\ x \equiv 5\ (mod\ 35) \end{cases}$$

Перепишем первые два выражения в следующем виде:
$15a + 3$ и $21b + 4$
Но заметим, что первое выражение всегда кратно 3, а второе - нет.
Но это означает, что система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

## №3

По малой теореме Ферма, если число n кратно 13, то $n^1 2$ при делении на 13 дает остаток 0, в противном же случае - 1. Но заметим, что сумма шести при делении на 13 дает остаток 0 только тогда, когда все шесть чисел дают остаток 0. Значит, все шесть чисел a, b, c, d, e, и f делятся на 13, а, значит, их произведение делится на $13^6$.

Ч.Т.Д.

## №5

$\varphi(x) = x(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{4} = x(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{4} = (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)}{p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k}$
Но заметим, что среди множителей в знаменателе может быть максимум одно четное число, и то равное 2. Но это означает, что знаменатель не кратен 4. А, значит, возникло противоречие. Решений нет.

Ответ: решений нет.

# №6

Заметим, что прообраз какого-нибудь простого n состоит из таких элементов x, что $x^2 < n \Leftrightarrow |x| < \sqrt{n}$. Но множество таких значений конечно, а это означает, что прообраз элемента множества конечен. А это, в свою очередь, означает, что прообраз множества конечен (т.к. прообраз множества есть множество прообразов элементов множества, а они конечны).
Ч.Т.Д.

# №7

Рассмотрим следующую последовательность:
$a_i = p + in!$, где p - какое-то простое число, большее n (а оно всегда существует).
Во-первых, она является арифметической, т.к. каждый член последовательности отличается от следующего на n!.
Во-вторых, любые два члена последовательности взаимно простые. Докажем это.
Пойдем от противного. Пусть у нас есть два элемента $a_i$ и $a_j$. Тогда пусть НОД($a_i$, $a_j$) $\neq 1$.
Это означает, что у $a_i$ и $a_j$ существует такой общий делитель k, что он $> 1$.
Тогда и ($a_i$ - $a_j$) делится на k.
$a_i - a_j = p + in! - p - jn! = (i - j)n!$
Также заметим, что n! делится на k, т.к. (i-j) делится на k, а в разложении n! на множители всегда будет число i-j. Значит, in! и jn! делятся на k. Но т.к. p + in! и p + jn! делятся на k, а p - простое, то p = k.
Тогда получается, что n! делится на p, что невозможно, т.к. p - простое число, которое больше n.
Значит, возникло противоречие, а, значит, НОД($a_i$, $a_j$) = 1. Тогда получается, что данная последовательность удовлетворяет обоим необходимым условиям, а, значит, искомая последовательность существует.
Ч.Т.Д.