ДЗ по мат. анализу на 29.09.2021

Кожевников Илья 2112-1

26 сентября 2021 г.

№3

a)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n^2+6}{n^2-10n+26} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{6}{n^2}}{1-\frac{10}{n}+\frac{26}{n^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1$
Ответ: 1

b)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a n}{n}, a > 1$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{lg_n}{nlg_a} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{lg_n}{n}}{lg_a} =^*$
Заметим, что $\frac{lg_n}{n} = \frac{2lg_{\sqrt{n}}}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$, что $\to 0$
$* = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{0}{lg_a} = 0$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)} :$
$|\frac{\log_a n}{n} - 0| < \epsilon$
$\frac{\log_a n}{n} < \epsilon$
$\frac{2\log_a \sqrt{n}}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ при $\frac{2}{\sqrt{n}} < \epsilon, \frac{\log_a n}{n} < \epsilon$
$\sqrt{n} > \frac{\epsilon}{2}$
$n > \frac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow$ при $n > \frac{\epsilon^2}{4}, \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$
$N_{(\epsilon)} = [\frac{\epsilon^2}{4}]$
Ответ: 0, $N_{(\epsilon)} = [\frac{\epsilon^2}{4}]$

c)

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$
$lg(\lim\limits_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}}) = \lim\limits_{x\to\infty} lg(n^{\frac{1}{n}}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} lg(n) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{lg(n)}{n}$
Заметим, что lg(n) растет куда медленнее при больших n, чем n $\Rightarrow$ при $n \to \infty \frac{lg(n)}{n} = 0$
$10^{lg(\lim\limits_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}})} = 10^0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)} :$
$|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$
$\sqrt[n]{n} < \epsilon + 1$
$(1+\epsilon)^n > n$
Используем формулу бинома Ньютона
$n < 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}\epsilon^2 + ... + \frac{n!}{n!(n-n)!}\epsilon^n$
Отбросим все слагаемые кроме второго
$n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$

$\frac{n-1}{2}\epsilon^2 > 1$
$\epsilon^2(n-1) > 2$
$n > \frac{2}{\epsilon^2+1}$
Но т.к. мы отбросили все слагаемые кроме второго, данное значение будет меньше изначального $\Rightarrow$ если $n > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$, то и изначальное выражение будет верно.
$N_{(\epsilon)} = [\frac{2}{\epsilon^2} + 1]$
Ответ: $1, N_{(\epsilon)} = [\frac{2}{\epsilon^2} + 1]$

d)

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+2+...+n-1}{n^2}) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{n-1}{2n} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{n}{2n} - \frac{1}{2n}) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2} - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)} :$
$|\frac{n(n-1)}{2n^2} - \frac{1}{2}| < \epsilon$
$|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}| < \epsilon$
$\frac{1}{2n} < \epsilon$
$n > \frac{1}{2\epsilon} \Rightarrow N_{(\epsilon)} = [\frac{1}{2\epsilon}]$
Ответ: $\frac{1}{2}, N_{(\epsilon)} = [\frac{1}{2\epsilon}]$

№4

a)

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4+n^2} - \sqrt{n^2+1})$ Умножим на сопряженное.
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4+n^2}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{4+n^2}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{4+n^2}+\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+n^2-n^2-1}{\sqrt{4+n^2}+\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+n^2}+\sqrt{n^2+1}} = 0$
Ответ: 0

b)

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+4} - \sqrt{n^2-n+1})$ Умножим на сопряженное.
$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{n^2+2n+4-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2-n+1}}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3n+3}{\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2-n+1}}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}) = \frac{3}{2}$
Ответ: $\frac{3}{2}$

№1

$a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+9}{2n-1}$
1)
Заметим, что произведение первых 10 чисел при продолжении умножения на следующие члены последовательности будет только уменьшаться, ведь при n > 10 $\frac{n+9}{2n-1} < 1 \Rightarrow$ после n = 10 a_n убывает (т.к. умножение числа на дробь, меньшую 1, уменьшает число). Тогда распишем первые 10 членов последовательности:
$\frac{10}{1}, \frac{11}{3}, \frac{12}{5}, \frac{13}{7}, \frac{14}{9}, \frac{15}{11}, \frac{16}{13}, \frac{17}{15}, \frac{18}{17}, \frac{19}{19}$. Также заметим, что среди первых 10 членов последовательности каждое число меньше предыдущего. Итого, первые 10 членов a_n убывают, но и, начиная с 11 члена последовательности, числа убывают. Значит, вся последовательность a_n монотонно убывает.
2)
Заметим, что $\frac{n+9}{2n-1}$ всегда > 0, потому что: 1)n > 0 $\Rightarrow$ n + 9 > 0, 2)2n - 1> 0, потому что n $\geq$ 1.
Значит, каждый член последовательности a_n - положительное число. Значит, a_n ограничена

снизу нулем.
Тогда из **1)** и **2)** следует, что по теореме Вейерштрасса последовательность a_n сходится.
Ч.Т.Д.