ДЗ по линейной алгебре на 30.05.2022

Кожевников Илья 2112-1

15 июня 2022 г.

№1

1.1)

$6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$
Т.к. квадратичная форма уже приведена к главным осям, перейдем сразу к выделению полных квадратов.
$6(x+1)^2 - 5(y+1)^2 + 30 = 0$
Значит, сделаем замену $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+1 \end{cases}$
$6x'^2 - 5y'^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{\sqrt{5}^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{6}^2} = -1$
Но при этом нам также необходимо еще поменять местами x и y. Тогда сделаем вторую замену:
$\begin{cases} x'' = y' \\ y'' = x' \end{cases}$
Тогда наше выражение примет вид $\frac{x''^2}{\sqrt{6}^2} - \frac{y''^2}{\sqrt{5}^2} = 1$
Мы получили уравнение **гиперболы**
Тогда нашей общей заменой будет $\begin{cases} x = y'' - 1 \\ y = x'' - 1 \end{cases}$, а выражение старых координат через новые будет таковым:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.2)

$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
Приведем квадратичную форму к главным осям.
Матрица квадратичной формы, очевидно, будет такой: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t \Rightarrow t \in \{2, 0\}$
$t = 2:$
$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда собственным вектором будет $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ортонормируем его: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
$t = 0:$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Значит, собственным вектором будет $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Ортонормируем его: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
Тогда $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$

Подставив в изначальное уравнение, получаем:
$(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y')^2-2(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y')(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y')+(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y')^2-10(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y')-6(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y')+25 =$
$= 2x'^2 + 2\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' + 25 = 0$
Теперь пойдем по тому же алгоритму: выделим полные квадраты и т.д.:
$2(x'+\frac{1}{\sqrt{2}})^2-8\sqrt{2}y'^{+24=0}$ Теперь сделаем следующую замену: $\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y'' = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'' \end{cases}$

$2x''^2 - 8\sqrt{2}y'' + 24 = 0$
$x''^2 - 4\sqrt{2}y'' + 12 = 0$
$x''^2 - 4\sqrt{2}(y'' + \frac{3}{\sqrt{2}}) = 0$
Теперь сделаем такую замену: $\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y''' - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$
Отсюда, $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y''' - 1 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y''' - 2 \end{cases} \to x'''^2 = 4\sqrt{2}y'''$
Так же, как и в 1 пункте с помощью замены поменяем местами x''' и y''':
$\begin{cases} x'''' = y''' \\ y'''' = x''' \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'''' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'''' - 1 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'''' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'''' - 2 \end{cases} \to y''''^2 = 2 \cdot 2\sqrt{2}x''''$ - мы получили уравнение **параболы**.
Выражение же старых координат через новые будет таким:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'''' \\ y'''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

№2

2.1)

$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$
Т.к. квадратичная форма уже приведена, выделим квадраты:
$(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 9(z-2)^2 - 49 = 0$
Тогда сделаем такую замену: $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \\ z' = z - 2 \end{cases}$
$x'^2 + 4y'^2 + 9z'^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{7^2} + \frac{y'^2}{(\frac{7}{2})^2} + \frac{z'^2}{(\frac{7}{3})^2} = 1$ - канонический вид эллипсоида.
Искомое выражение координат:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.3)

$x^2 = 12y + z - 39$
Т.к. квадратичная форма уже приведена, а квадраты уже выделены, то сразу начнем искать замену:
$x^2 + \sqrt{145}(-\frac{12}{\sqrt{145}}y - \frac{1}{\sqrt{145}}z + \frac{39}{\sqrt{145}}) = 0$
Тогда сделаем такую замену:
$\begin{cases} x' = x \\ y' = -\dfrac{12}{\sqrt{145}}y - \dfrac{1}{\sqrt{145}}z + \dfrac{39}{\sqrt{145}} \\ z' = \dfrac{12}{\sqrt{145}}y - \dfrac{1}{\sqrt{145}}z \end{cases} \to x^{12} + \sqrt{145}y' = 0$

Тогда сделаем вторую замену: $\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} \rightarrow y''^2 = 2\sqrt{\frac{145}{4}}x''$ - канонический вид параболического цилиндра

Искомое выражение:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{12}{\sqrt{145}} & \frac{1}{\sqrt{145}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{145}} & -\frac{1}{\sqrt{145}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{39}{\sqrt{145}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.4)

$3x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 + 2z^2 - 3y - 6z - 3 = 0$

Приведем квадратичную форму:

Очевидно, матрица квадратичной формы будет иметь следующий вид: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-t & 2 & -2 \\ 2 & 4-t & 0 \\ -2 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t-3)(t-6) \Rightarrow t \in \{6, 3, 0\}$$

$t = 6:$

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 2 & -2 \\ 2 & 4-6 & 0 \\ -2 & 0 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, собственным вектором, очевидно, будет $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Ортонормировав, получаем $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$t = 3:$

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 2 & -2 \\ 2 & 4-3 & 0 \\ -2 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, собственным вектором, очевидно, будет $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ортонормировав, получаем $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$t = 0:$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, собственным вектором, очевидно, будет $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Ортонормировав, получаем $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Значит, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Отсюда следует замена $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ y = -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' \\ z = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \end{cases}$

Тогда, подставив в изначальное выражение, получаем:

$3(-\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z')^2 + 4(-\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z')(-\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z') - 4(-\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z')(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z') + 4(-\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z')^2 + 2(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z')^2 - 3(-\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z') - 6(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z') - 3 = 6x'^2 + 3y'^2 - 6y - 3z - 3 = 0$

Теперь выделим квадраты:

$6x'^2 + 3(y'-1)^2 - 3z - 6 = 0$. Тогда сделаем следующую замену: $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 1 \\ z'' = z' \end{cases} \rightarrow 2x''^2 + y''^2 - (z''+2) = 0.$

Теперь сделаем еще одну замену:

$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = y'' \\ z''' = \frac{1}{2}z'' - 1 \end{cases} \rightarrow \frac{x''^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + y'''^2 = 2z'''$ - канонический вид эллиптического параболоида.

Искомое выражение:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

№4

4.1)

Применим алгоритм с семинара:

$$\begin{pmatrix} -14 & -16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -14-t & -16 \\ 9 & 10-t \end{vmatrix} = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2 \Rightarrow t \in \{-2\}$$

$$\begin{pmatrix} -14+2 & -16 \\ 9 & 10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -16 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rk(A) = 1, d_1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ всего у нас будет одна жорданова клетка и ЖНФ будет такой:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Цепочка: $0 \leftarrow f_1 \leftarrow f_2$
Также по алгоритму с семинара найдем и жорданов базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда f_1 и f_2 - наш искомый базис, где $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $f_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$

4.2)

Применим алгоритм с семинара:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 4-t & 2 & -2 \\ 3 & 5-t & -3 \\ 5 & 5 & -3-t \end{vmatrix} = -t^3 + 6t^2 - 12t + 8 = -(t-2)^3 \Rightarrow t \in \{2\}$$

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 & -2 \\ 3 & 5-2 & -3 \\ 5 & 5 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rk(A) = 1, d_1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ всего у нас будет две жордановы клетки

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rk(A) = 0, d_2 = 3 - 0 = 3 \to d_2 - d_1 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ всего у нас будет одна жорданова клетка

Искомая ЖНФ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Цепочка: $0 \leftarrow f_1 \leftarrow f_2$
$\uparrow$

f_3

Также по алгоритму с семинара найдем и жорданов базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Тогда $f_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$, а $f_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Теперь за f_3 возьмем вектор $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, т.к. он линейно независим с f_1 и f_2 и при этом переходит в 0.

Тогда f_1, f_2, f_3 - искомый Жорданов базис.

4.3)

Применим алгоритм с семинара:

$$\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0 & -1\\-4 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & -3 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}-4-t & 1 & 0 & -1\\-4 & -t & 1 & -1\\0 & 0 & -3-t & -1\\0 & 0 & 1 & -1-t\end{vmatrix} = t^4+8t^3+24t^2+32t+16 = (t+2)^4 \Rightarrow t \in \{-2\}$$

$$\begin{pmatrix}-4+2 & 1 & 0 & -1\\-4 & 0+2 & 1 & -1\\0 & 0 & -3+2 & -1\\0 & 0 & 1 & -1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & -1\\-4 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rk(A) = 2, d_1 = 4-2 = 2 \Rightarrow \text{всего у нас будет две жордановы клетки}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & -1\\-4 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rk(A) = 0, d_2 = 4-0 = 4 \to d_2 - d_1 = 4-2 = 2 \Rightarrow \text{всего у нас будет две жордановы клетки}$$

Искомая ЖНФ:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Цепочка: $0 \leftarrow f_1 \leftarrow f_2$
$\uparrow$
$f_3 \leftarrow f_4$

Также по алгоритму с семинара найдем и жорданов базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Тогда $f_1 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\\0\end{pmatrix}$, а $f_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Тогда $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а $f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Значит, f_1, f_2, f_3, f_4 - наш искомый Жорданов базис.

4.4)

Применим алгоритм с семинара:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -12 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1-t & 4 & -12 \\ -1 & -3-t & 7 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t-1)(t+1)^2 \Rightarrow t \in \{\pm 1\}$$

$$t = 1:$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow g_1 = 1 \Rightarrow \text{У нас будет одна клетка 1 на 1}$$

$$t = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 4 & -12 \\ -1 & -3+1 & 7 \\ 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -12 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rk(A) = 2, d_2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \text{всего у нас будет одна жорданова клетка}$$

Искомая ЖНФ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Цепочка: $0 \leftarrow f_2 \leftarrow f_3$

$\uparrow$

f_1

Также по алгоритму с семинара найдем и жорданов базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Теперь за f_1 возьмем вектор линейно независимый с f_3 и f_2 и при этом переходящий в 0. Подбором его найти сложно, так что решим ФСР для А - Е: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 \\ -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Решением ФСР будет $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Этот вектор и возьмем за f_1.

Тогда f_1, f_2, f_3 - искомый Жорданов базис.

№5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -t & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-t & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3-t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-t \end{vmatrix} = -t^5 \Rightarrow t \in \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} 0-0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3-0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, rk(A) = 2, d_1 = 5-2 = 3 \Rightarrow$$

всего у нас будет три жордановы клетки

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk = 0 \Rightarrow d_2 = 5-0 = 5 \to 5-3 = 2 \Rightarrow$$

всего у нас будет две жордановы клетки

Т.к. у нас две клетки размера $\geqslant 2 \times 2$, получается, что в нашей ЖНФ будет две клетки размера 2×2 и одна 1×1.

Тогда искомой ЖНФ будет $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Цепочка:

$f_1 \leftarrow f_2$

$\downarrow$

$0 \leftarrow f_3 \leftarrow f_4$

$\uparrow$

f_5

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда f_1 и f_2 будут векторы $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответственно.

$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда f_3 и f_4 будут векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответственно.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда f_5 будет вектором $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 - искомый жорданов базис.