ДЗ по линейной алгебре на 26.01.2022

Кожевников Илья 2112-1

25 января 2022 г.

№1

Заметим, что все векторы из U и W принадлежат R^5. Значит, $U \subseteq R^5, W \subseteq R^5$. Тогда достаточно доказать, что

$$\begin{cases} dim(U) + dim(W) = dim(R^5) \\ dim(U+W) = dim(R^5) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -(1) \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -(2)\cdot\frac{3}{5} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +(3)\cdot\frac{5}{2} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, $\dim(\mathrm{U}) = 3$.

Аналогично найдем $\dim(\mathrm{W})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +(1) \\ -2\cdot(1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +\frac{1}{2}(2) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, $\dim(\mathrm{W}) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -(1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} +\frac{3}{5}(2) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} +\frac{5}{2}(3) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -(4)\frac{1}{4} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Значит, dim(U + W) = 5

$$\begin{cases} dim(U) + dim(W) = dim(R^5) \\ dim(U + W) = dim(R^5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Значит, $R^5 = U \oplus W$

Ч.Т.Д.

Заметим, что, когда мы искали dim(U), мы привели U к СВ. Но тогда в третьем векторе не было главной переменной, а, значит, он не входит в базис. Тогда запишем векторы из базиса U и вектор v в матрицу, приведем ее к

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2(3) \\ +(2)\frac{3}{5} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 & \frac{36}{5} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot -\frac{5}{4} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2(3) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -(4) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \cdot 8 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{7}{8}(5) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(4)\frac{5}{2} + \frac{5}{4}(5) \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +(3) - 4(4) - 2(5) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2(2) - 3(3) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Итого, проекцией вектора v на U будет следующий вектор:

$$3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\\6\end{pmatrix}$$

А проекцией на W будет

$$2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\8\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ответ: проекция на U: $\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\\6\end{pmatrix}$, проекция на W: $\begin{pmatrix}6\\2\\8\\0\\0\end{pmatrix}$

№2

1)

Заметим, что равенство $x_1 = x_2 = ... = x_n$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_n = 0 \\ x_2 - x_n = 0 \\ ... \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$$

Поэтому ФСР $x_1 + x_2 + .. + x_n = 0$ можно записать так:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\...\\0\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\...\\0\end{pmatrix}, ..., u_{n-1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\...\\-1\end{pmatrix}$$

U натянуто на эти векторы. W же натянуто на вектор w $=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\...\\1\end{pmatrix}$

Тогда найдем базис U+W

$$\begin{pmatrix}1&1&...&1&1\\-1&0&...&0&1\\0&-1&...&0&1\\...&...&...&...&...\\0&0&...&-1&1\end{pmatrix}+(1)\to\begin{pmatrix}1&1&...&1&1\\0&1&...&1&2\\0&-1&...&0&1\\...&...&...&...&...\\0&0&...&-1&1\end{pmatrix}+(2)\to\begin{pmatrix}1&1&...&1&1\\0&1&...&1&2\\0&0&...&1&3\\...&...&...&...&...\\0&0&...&-1&1\end{pmatrix}\to...\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 & 2 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & n \end{pmatrix}$$

Получается, $u_1, u_2, ..., u_n, w$ - базис U+W, а dim(U+W) = n. Также $U+W \subseteq R^n$, $U+W = R^n$. Значит, U+W $= R^n$. Значит,

$$\begin{cases} U+W = R^n \\ dim(U)+dim(W) = n \end{cases} \Leftrightarrow U \oplus W = R^n$$

Ч.Т.Д.

2)

Теперь припишем справа к матрице базиса U+W вектор a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 & a_1 \\ -1 & 0 & ... & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & ... & 0 & 1 & a_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 1 & a_n \end{pmatrix} \to ... \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & ... & 1 & 2 & a_1+a_2 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 3 & a_1+a_2+a_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & n-1 & a_1+...a_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & n & a_1+...+a_n \end{pmatrix} \begin{matrix} -(2) \\ -(3) \\ -(4) \\ ... \\ -(n) \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & -1 & -a_2 \\ 0 & 1 & ... & 0 & -1 & -a_3 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & -a_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & -1 & -a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 & n & a_1+...+a_n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{n} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & -1 & -a_2 \\ 0 & 1 & ... & 0 & -1 & -a_3 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & -a_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & -1 & -a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & \frac{a_1+...+a_n}{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} +(n) \\ +(n) \\ +(n) \\ ... \\ +(n) \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_2 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_3 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & \frac{a_1+...+a_n}{n} \end{pmatrix}$$

Значит, первые n-1 элементов последнего столбца будут коэффициентами перед соответствующими векторами базиса V, а последний n-ный элемент будет коэффициентом перед вектором w.

Значит, проекции на u вдоль w и на w вдоль u будут выглядеть так:

На U вдоль W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & -1 & ... & 0 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_2 \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_3 \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_4 \\ ... \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_n \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1(n-1)-a_2-a_3-...-a_n}{n} \\ \frac{-a_1+a_2(n-1)-a_3-...-a_n}{n} \\ \frac{-a_1-a_2+a_3(n-1)-...-a_n}{n} \\ ... \\ \frac{-a_1-a_2-a_3-...+a_n(n-1)}{n} \end{pmatrix}$$

На W вдоль U: $\begin{pmatrix} \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_n \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_n \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_n \\ ... \\ \frac{a_1+...+a_n}{n} - a_n \end{pmatrix}$

№3

1)

Для того, чтобы доказать, что $M_n(R) = Sym \oplus N$, необходимо доказать, что

$$\begin{cases} M_n(R) = Sym + N \\ Sym \cap N = 0 \end{cases}$$

Сначала докажем второе равенство.

Очевидно, что любая строго верхнетреугольная матрица несимметрична, а, значит, и объединение симметричных матриц и строго верхнетреугольных равняется пустому множеству.

Теперь докажем второе.

Представим, что нам необходимо получить матрицу A из суммы какой-то симметричной матрицы S и строго верхнетреугольной матрицы T. Тогда сделать это можно следующим образом:

Берем симметричную матрицу S, у которой нижняя треугольная часть и главная диагональ совпадают с нижней треугольной частью и главной диагональю искомой матрицы A. Тогда нижние части у A и S совпадают, а верхние - нет. Тогда к этой S прибавим матрицу T такую, что ее элемент из верхней треугольной части $t_{ij} = A_{ij} - S_{ij}$. Тогда в сумме S и T дают искомую матрицу A.

Таким образом, мы доказали, что любую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы определенных симметричных матриц S и строго верхнетреугольных матриц T. Значит, первое равенство также доказано.

Итого, система доказана, а, значит, $M_n(R) = Sym \oplus N$.

Ч.Т.Д.

2)

Таким образом, легко можно найти проекции на Sym вдоль N и на N вдоль Sym:

на Sym вдоль N: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & ... & -n+1 \\ -1 & 0 & -1 & ... & ... \\ -2 & -1 & 0 & ... & -2 \\ ... & ... & ... & ... & -1 \\ -n+1 & ... & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

на N вдоль Sym: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & ... & 2n-2 \\ 0 & 0 & 2 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 4 \\ ... & ... & ... & ... & 2 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

№4

Для того, чтобы доказать, что $U = N \oplus S \oplus Z$, необходимо доказать, что $N \cap S \cap Z = 0$, а их сумма равна U.

Докажем, что $N \cap S \cap Z = 0$.

Очевидно, что подпространство строго верхнетреугольных матриц не пересекается ни с подпространством скалярных, ни с подпространством диагональных матриц со следом 0. Значит, равенство доказано.

Теперь докажем, что U = N+S+Z.

Пусть у нас есть верхнетреугольная матрица A, которую надо представить в виде суммы

строго верхнетреугольной матрицы V, скалярной матрицы S и диагональной матрицы D со следом 0.
Тогда матрицу V надо выбрать такую, чтобы каждый ее элемент совпадал с соответствующим элементом матрицы A.
Затем выберем такую скалярную матрицу S, что ее след будет равен следу A. Тогда остается лишь прибавить такую матрицу D, что в сумме с двумя предыдущими матрицами получится матрица A. Заметим, что, т.к. след матрицы D равен 0, то при сложении с ней, след изначальной матрицы не меняется (т.к. tr(A+B) = tr(A) + tr(B), tr(B) в данном случае равен нулю). Тогда получается, что нам лишь надо найти такую матрицу D, где каждый элемент на i-той строке и i-том столбце будет равен $A_{ii} - S_{ii}$.
Итого, мы нашли все три матрицы, а в сумме они дают в точности искому матрицу A. Получается, мы доказали, что любую верхнетреугольную матрицу можно получить в виде суммы строго верхнетреугольной, скалярной и диагональной(со следом 0) матриц.
Значит, U = N+S+Z
Итого, оба утверждения доказаны. Значит, $U = N \oplus S \oplus Z$.
Ч.Т.Д.

№5

Заметим, что достаточно доказать следующую систему:
$$\begin{cases} dim(V) = dim(U) + dim(W) \\ U \cap W = 0 \end{cases}$$
Сначала докажем, что $U \cap W = 0$.
Наш многочлен можно записать в следующем виде: $ax + b = 0$. Тогда $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
Отсюда следует, что $U \cap W = 0$.
Теперь докажем, что $dim(V) = dim(U) + dim(W)$.
Для того, чтобы найти dim(U), подставим в многочлен x=3 и x=4 и найдем ФСР данной системы.
$$\begin{cases} a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + ... + a_1 3 + b = 0 \\ a_n 4^n + a_{n-1} 4^{n-1} + ... + a_1 4 + b = 0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1} & ... & 3 & b \\ 4^n & 4^{n-1} & ... & 4 & b \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{3^n} \\ \cdot\frac{1}{4^n} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & ... & \frac{1}{3^{n-1}} & \frac{b}{3^n} \\ 1 & \frac{1}{4} & ... & \frac{1}{4^{n-1}} & \frac{b}{4^n} \end{pmatrix} -(1) \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & ... & \frac{1}{3^{n-1}} & \frac{b}{3^n} \\ 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{3} & ... & \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} & \frac{b}{4^n} - \frac{b}{3^n} \end{pmatrix}$$
Получается, что у нас есть n-1 свободных переменных, а, значит, в ФСР n-1 векторов. Значит, dim(U) = n-1
dim(V) = n+1, dim(W) = 2 (что очевидно.)
Выходит, что $dim(U) + dim(W) = n - 1 + 2 = n + 1 = dim(V)$.
Значит, второе равенство в системе доказано. Значит, вся система доказана, а $V = U \oplus W$.
Ч.Т.Д.