ДЗ по мат. анализу на 16.02.2022

Кожевников Илья 2112-1

22 марта 2022 г.

№1

a)

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{sin(x)}^{cos(x)} cos(\pi t^2)dt = \frac{d}{dx}(\int\limits_{sin(x)}^{0} cos(\pi t^2)dt) + \frac{d}{dx}(\int\limits_{0}^{cos(x)} cos(\pi t^2)dt) =$$
$$= \frac{d}{dx}(-\int\limits_{0}^{sin(x)} cos(\pi t^2)dt) + \frac{d}{dx}(-\int\limits_{cos(x)}^{0} cos(\pi t^2)dt) = \left\| \begin{matrix} u = sin(x) \\ v = cos(x) \end{matrix} \right\| =$$
$$= \frac{d}{du}(-\int\limits_{0}^{u} cos(\pi t^2)dt) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d}{dv}(-\int\limits_{v}^{0} cos(\pi t^2)dt) \cdot \frac{dv}{dx} =$$
$$= -cos(\pi sin^2(x)) \cdot \frac{d}{dx}sin(x) + cos(\pi cos(x)^2) \cdot \frac{d}{dx}cos(x) =$$
$$= -cos(\pi sin^2(x))cos(x) - cos(\pi cos(x)^2)sin(x)$$

Ответ: $-cos(\pi sin^2(x))cos(x) - cos(\pi cos(x)^2)sin(x)$

№2

a)

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{e^{ax}(1+x^2)}dx$$

По необходимому признаку сходимости интеграл сходится,
если $\frac{1}{e^{ax}(1+x^2)} \to 0$ при $x \to \infty$.
При $a \geq 0$: $\frac{1}{\infty} = 0$
При $a < 0$: $\frac{\infty}{\infty}$.
Значит, интеграл будет сходиться при $a \geq 0$ и не будет при $a < 0$

b)

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}dx$$

По необходимому признаку сходимости интеграл сходится,

если $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \to 0$ при $x \to \infty$.
$\frac{1}{\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
Значит, интеграл сходится.

d)

$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{2}}}{(1+x^2)^2}dx$
По необходимому признаку сходимости интеграл сходится,
если $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{(1+x^2)^2} \to 0$ при $x \to \infty$.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{(1+x^2)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1+2x^2+x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{2.5}}+2\sqrt{x}+x^{1.5}} = \frac{1}{\infty} = 0$
Значит, интеграл сходится.

e)

$\int\limits_0^\infty ln(1+sin(\frac{1}{x}))dx$
По необходимому признаку сходимости интеграл сходится,
если $ln(1+sin(\frac{1}{x})) \to 0$ при $x \to \infty$.
$\lim\limits_{x\to\infty} ln(1+sin(\frac{1}{x})) = ln(1+sin(0)) = ln(1) = 0$
Значит, интеграл сходится.

f)

$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}dx$
По необходимому признаку сходимости интеграл сходится,
если $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} \to 0$ при $x \to \infty$.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$
Значит, интеграл сходится.

g)

$\int\limits_0^\infty \frac{ln(1+x)}{x^p}dx$
По необходимому признаку сходимости интеграл сходится,
если $\frac{ln(1+x)}{x^p} \to 0$ при $x \to \infty$.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{x^p}$
При p $>$ 0: т.к. степенная функция растет быстрее ln, предел равен 0
При p $\leq$ 0: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{x^p} = \infty$
Значит, интеграл сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$

№4

b)

$y = asin(x), y = acos(x) \Rightarrow sin(x) = cos(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

На заданном промежутке подходят точки $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$

Посмотрев на график, можно понять, что искомая площадь $S = 4(S_1 + S_2)$, где

$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} asin(x) - acos(x)dx = (-acos(x) - asin(x))|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}a - a$

$S_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} asin(x)dx = a$

$S = 4(\sqrt{2}a - a + a) = 4\sqrt{2}a$

Ответ: $4\sqrt{2}a$

№5

$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t'(t))^2 + (y_t'(t))^2 + (z_t'(t))^2}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2}dt =$

$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 9}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} 6t^2 + 3dt = (2t^3 + 3t)|_{t_1}^{t_2}$

$\begin{cases} 3t = 0 \\ 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 0, \\ 2t^3 = 0 \end{cases} \begin{cases} 3t = 3 \\ 3t^2 = 3 \Rightarrow t = 1 \\ 2t^3 = 2 \end{cases}$

$(2t^3 + 3t)|_0^1 = 5$

Ответ: 5