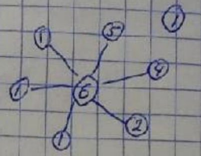
№ 2.

Заметим, что вершина со степенью 6 так или иначе всегда будет соединен с вершинами со степенями 5, 4, 2, 1, 1, 1. Но тогда у вершины со степенью 5 будет лишь 4 вершины, с которыми она может быть соединена (вершины со степенями 4, 2, 1, 6), а это значит, что степень этой вершины не может быть больше 4. Значит, ответ — нет, такого графа не существует.

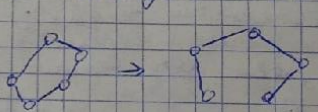


№ 6.

Докажем данное высказывание методом мат. инд.

База: при $n = 2$, $2n+1 = 5$.

($n = 2$, т.к. при $n = 1$, такого графа не существует)



Но заметим, что при удалении любого из ребер графа, он остается связным => ~~графр~~ база доказана.

Шаг: подставим $n+1$ вместо n

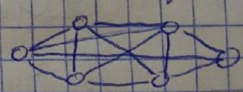
$2(n+1)+1 = 2n+3$. Заметим, что граф на $2n+3$ вершинах — тот же самый граф на $2n+1$ вершинах, но к которому присоединены еще две вершины. Но т.к. эти вершины неизолированы (по усл.), то если граф на $2n+1$ вершинах будет связен, то и граф на $2n+3$ вершинах будет связным. Но т.к. каждая точка связана с n соседями, то при удалении $< n$ ребер, точка все равно не будет изолирована => такой граф останется связным => => Шаг доказан => высказывание верно.

Ответ: нет.

№ 1.

$24 = r \cdot 2 \Rightarrow r = 12$, где r — кол-во ребер в графе.

Но по формуле $\frac{n(n-1)}{2} = r_{макс}$, в графе с 5 вершинами максимальное кол-во ребер — 10, но $10 < 12 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ вершин должно быть 6 ($15 > 12$). Одним из подходящих графов будет:

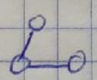
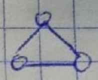


Ответ: 6

№5.

Докажем данное высказывание с помощью мат. индукции

Базa: $n = 1 \Rightarrow 2n+1 = 3$

Построим данный граф: 1)  2) 

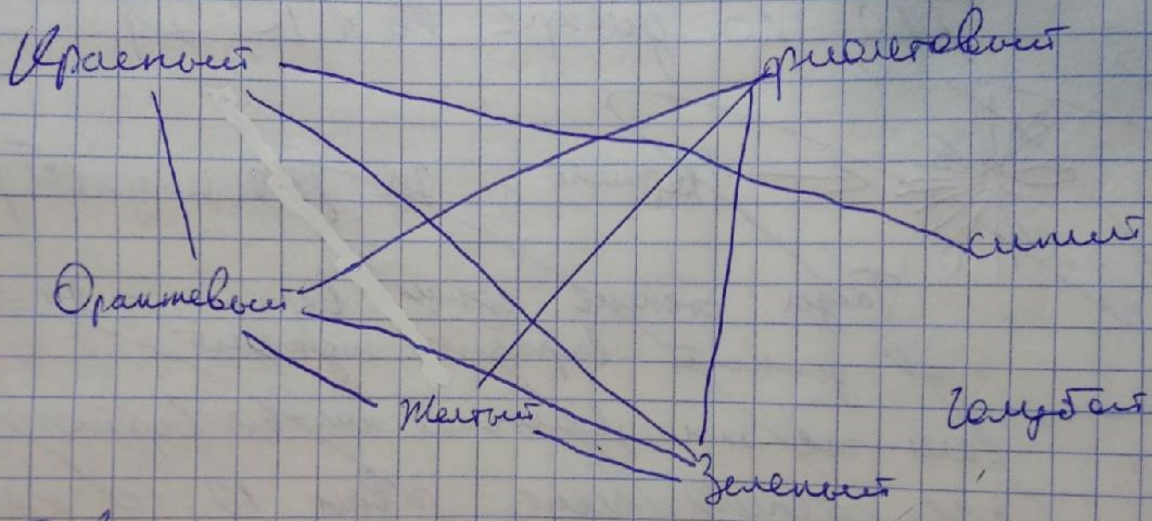
В обоих вариантах граф связен. База доказана.

Шаг: Тогда граф на $2(n+1)+1$ вершинах должен быть связен. докажем. $2(n+1)+1 = 2n+3$.

Заметим, что по предположению индукции, граф на $2n+1$ вершинах связен. Но тогда граф на $2n+3$ вершинах состоит из компоненты связности и еще двух вершин, каждая из которых, по условию, связана с, как минимум, $n+1$ другими вершинами, а значит, из любой вершины графа в них также существует путь $\Rightarrow$ граф связен. Шаг индукции доказан. Значит, утверждение доказано.

Ч.Т.Д.

№3.



Ответ: Да, например, с пересадкой в городе Оранжевый.