ДЗ по алгебре на 13.05.2022

Кожевников Илья 2112-1

12 мая 2022 г.

№1

Для начала заметим, что нейтральным элементом у нас будет единичная матрица 2x2, т.к. при умножении любой матрицы справа или слева на единичную получится она же.

1)

Теперь найдем все обратимые элементы нашего кольца. Из курса линейной алгебры известно, что матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен 0 (невырождена). Тогда докажем, что если у нас есть невырожденная матрица с элементами из $\mathbb{R}$, то обратная ей также будет иметь элементы из $\mathbb{R}$.

Т.к. наша матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, ее определитель будет равен ac. Тогда обратной матрицей будет $\frac{1}{ac} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$. Выходит, что в нашей обратной матрице будут элементы, получаемые обычным делением и умножением чисел из $\mathbb{R}$, а, значит, и они сами тоже будут из $\mathbb{R}$.

Итого, обратимыми элементами в нашем кольце будут невырожденные верхнетреугольные матрицы с коэффициентами из $\mathbb{R}$.

2)

Теперь найдем все делители нуля.

Т.к. делители нуля необратимы, то нам достаточно рассматривать только вырожденные матрицы, то есть матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

Рассмотрим все три вида матриц. Пусть у нас есть $x : x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ - правый делитель нуля.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ - левый делитель нуля.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ - левый делитель нуля.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ - правый делитель нуля.

Теперь покажем, что мы всегда сможем подобрать такие матрицы, умножая на которые наши матрицы трех видов с любой стороны, мы тоже сможем получить нули.

Докажем, что $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ - также левый делитель нуля: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Докажем, что $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ - также правый делитель нуля: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Значит, все ненулевые вырожденные матрицы являются делителями нуля как правыми, так и левыми.

3)

Т.к. нильпотент - делитель нуля, нильпотентами могут быть только наши матрицы трех видов. Тогда докажем, что $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ - нильпотент.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ - нильпотент.
Теперь докажем, что остальные матрицы не нильпотенты.
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^{n-1}b & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^{n-1}b & c^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Значит, единственный нильпотент - $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

№2

Пойдем от противного: пусть наш идеал главный. Тогда верно будет

$$(x, y-2) = \{f_1 x + f_2(y-2) \mid f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x,y]\} = (f), \text{ где } f \in \mathbb{R}[x,y]$$

Но тогда выходит, что степень многочлена f будет меньше или равна 1, потому что f будет делить y-2 и x, степени которых равны 1 (делить он их будет потому, что мы предположили, что наш идеал главный, а, значит, y-2 и x представимы в виде $y - 2 = h_1 f$ и $x = h_2 f$ при $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}[x,y]$).

Тогда предположим, что степень многочлена f равна 1. Выходит, что многочлен f представим в виде Cx, т.к. он делится на x. При этом он также представим в виде C(y-2), т.к. f делится на y-2. Но x не делится C(y-2), а, значит, степень f не равна 1.

Тогда степень f равна 0. Тогда заметим, что f будет константой. Но тогда у f будет обратный элемент, т.к. $f \neq 0$ (т.к. (0) $\neq$ (x, y-2)). Это означает, что (f) $=$ $\mathbb{R}[x,y]$

Докажем, что $\mathbb{R}[x,y] \neq (x, y-2)$. Так как $(x, y-2) = \{f_1 x + f_2(y-2) \mid f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x,y]\}$, нам достаточно будет найти такой элемент, что он не будет находиться в (x, y-2), но при этом будет находиться в $\mathbb{R}[x,y]\}$. Таким элементом будет 1, т.к. $1 \in \mathbb{R}[x,y]\}$ (очев.) и $1 \notin (x, y-2)$ (т.к. если мы подставим x $=$ 0 и y $=$ 2, то получим, что 1 $=$ 0). Значит, $\mathbb{R}[x,y] \neq (x, y-2)$

Тогда выходит, что (f) $=$ $\mathbb{R}[x,y]$, а $\mathbb{R}[x,y] \neq (x, y-2)$. Значит, $(f) \neq (x, y-2)$. Возникает противоречие. Значит, наш идеал не главный.
Ч.Т.Д.

№3

Для начала найдем нулевой элемент в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
Нулевым элементом будет $(0, 0)$, т.к. $(a, b)+(0, 0) = (a+0, b+0) = (0+a, 0+b) = (0, 0)+(a, b) = (a, b)$

Теперь покажем, что отображение $\varphi : \mathbb{C}_{[x]} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, f \to (f(0), f(\frac{1}{2}))$ будет гомоморфизмом. Для этого докажем два факта:
1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
$\varphi(a + b) = ((a + b)(0),(a + b)(\frac{1}{2})) = (a(0) + b(0), a(1) + b(\frac{1}{2})) =$
$= ((a(0), a(\frac{1}{2})) + (b(0), b(\frac{1}{2}))) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
$\varphi(a\cdot b) = ((a\cdot b)(0),(a\cdot b)(\frac{1}{2})) = (a(0)\cdot b(0), a(\frac{1}{2})\cdot b(\frac{1}{2})) = ((a(0), a(\frac{1}{2}))\cdot(b(0), b(\frac{1}{2}))) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$
Значит, данное отображение является гомоморфизмом.

Теперь найдем ядро и образ данного гомоморфизма.
1) Нам необходимо найти все такие многочлены f с коэффициентами из $\mathbb{C}$, что $\varphi(f) = (0, 0)$.
Значит, f(0) = 0 и f($\frac{1}{2}$) = 0. Тогда по Безу f делится на x-$\frac{1}{2}$ и на 2x.
Значит, если наш f находится в ядре отображения, то f делится на $2x^2 - x$, то есть представимы в виде $f(x) = g(x)(2x^2 - x)$. Но заметим, что все такие многочлены будут находиться в идеале $(2x^2 - x)$ кольца $\mathbb{C}_{[x]}$, а каждый элемент этого идеала будет находиться в ядре, т.к. будут равны 0 при x = $\frac{1}{2}$ или x = 0.
Значит, $ker(\varphi) = 2x^2 - x$
2) Докажем, что наше отображение сюръективно, т.е. $Im(\varphi) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
Тогда рассмотрим такой многочлен: $f(x) = -a(2x - 1) + 2bx$
Заметим, что $f(0) = a$, $f(\frac{1}{2}) = b$. Получаем, что $\varphi(f) = (a, b)$. Значит, φ сюръкктивно, а $Im(\varphi) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Тогда выходит, что по теореме о гомоморфизме колец верно следующее:

$$\mathbb{C}_{[x]}/ker(\varphi) \simeq Im(\varphi) \Rightarrow \mathbb{C}_{[x]}/(2x^2 - x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

Ч.Т.Д.

№4

Для начала заметим, что для факторколец верно: в R/I элемент a + I = 0 + I $\Leftrightarrow$ a $\in$ I. Докажем это:

Заметим, что если a + I - нулевой элемент, то он состоит только из элементов идеала (ведь если мы предположим противное: $a \notin I$, то получится, что элемент a будет находиться в a + I, потому что его можно будет сложить с нейтральным элементом, что приведет к противоречию, ведь тогда a + I $\neq$ 0 + I, т.к. в 0 + I все элементы принадлежат I, но a, которое принадлежит a + I, в I не лежит)

Теперь докажем, что если R/I - поле, то $I \neq R$ и $I \notin$ какому-то собственному идеалу R.

Очевидно, что если I = R, то R/I = R/R = R. Но при этом не всегда коммутативное кольцо - поле, а, значит, будем считать, что I $\neq$ R.

Также пойдем от противного: пусть I' - какой-нибудь собственный идеал R, $I \in I'$. Тогда возьмем такой элемент x, что $x \in I'$, $x \notin I$. Тогда элемент x + I обратим, т.к. он ненулевой (т.к. $x + I = 0 + I \Leftrightarrow x \in I$ - противоречие). Этим обратным элементом будет y + I такой, что $y \in I$, $(x + I)(y + I) = xy + I = yx + I = 1 + I$. Тогда заметим, что I' - идеал, а $x \in I'$, $y \in R \Rightarrow xy \in I'$. Из того, что $xy + I = 0 + I$ следует, что $xy - 1 = a \in I \subset I'$. Т.к. I' - подгруппа по сложению, верно будет $1 = xy - a \in I'$. Выходит, что $1 \in I'$, что ведет к противоречию, потому что тогда получается, что $I' = R$, что противоречит тому, что наш идеал I' - собственный.

Теперь докажем, что если $I \neq R,\ I \notin$ какому-либо собственному идеалу R, то R/I - поле.