ДЗ по линейной алгебре на 26.01.2022

Кожевников Илья 2112-1

30 января 2022 г.

№1

Для начала выделим базис среди данной системы векторов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 10 \\ 5 & 11 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1)\cdot 2 \\ -(1)-(2) \\ -(2)\cdot 2 \\ -(1)-(4) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +(5)\cdot \frac{3}{2} \\ +(5) \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итого, в СВ матрицы в последних двух столбцах нет главных переменных, а, значит, базис пространства, порожденного векторами v_1, v_2, v_3 и v_4, - это v_1 и v_2.

Теперь запишем эти два вектора в строки матрицы и привеем ее к СВ. Тогда в те столбцы, где не будет главных переменных, надо будет добавить новые векторы, чтобы дополнить до базиса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ -(1)\cdot\frac{3}{2} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Значит, для того, чтобы дополнить данные векторы до базиса пространства R^5, необходимо добавить векторы из стандартного базиса e_2, e_4 и e_5. Они-то и будут порождать искомое пространство W. При этом из алгоритма поиска следует, что $U + W = R^5$ и $U \cap W = 0$, что означает, что $U \oplus W = R^5$. Значит, найденное W подходит.

Ответ: $\mathrm{W} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

№2

Для того, чтобы доказать линейность отображения, необходимо доказать следующую систему:

$$\begin{cases} \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \\ \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) \end{cases}$$

Докажем первое равенство. Пусть $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$

$$\begin{pmatrix} g(2) \\ g'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(2) + f_2(2) \\ (f_1(1) + f_2(1))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(2) + f_2(2) \\ f_1'(1) + f_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(2) \\ f_1'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2(2) \\ f_2'(1) \end{pmatrix}$$

Значит, первое равенство доказано. Докажем второе.
$\begin{pmatrix} \lambda f_2(2) \\ \lambda f_2'(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_2(2) \\ f_2'(1) \end{pmatrix}$(это равенство верно, т.к. мы можем умножить нашу матрицу на $\frac{1}{\lambda}$)
Тогда второе равенство также доказано, а, значит, доказана и линейность отображения φ.
Ч.Т.Д.
Теперь найдем матрицу в базисах $(1, x, x^2, x^3)$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Значит, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - искомая матрица.
Для проверки возьмем многочлен $f(x) = x^2 + 4x - 3$
Тогда $\varphi(f(x)) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$
Значит, должно выполняться следующее равенство:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+8+4+0 \\ 0+4+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$
Значит, матрица подобрана правильно.

№3

Рассмотрим по порядку все элементы базиса.
Если $f(x) = 1$, то и $f(S) = 1$. Значит, если
$1 = x_1E_{11} + x_2E_{12} + x_3E_{21} + x_4E_{22}$, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Если же $f(x) = x$, то $f(S) = S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Тогда $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$, а $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
Если же $f(x) = x^2$, то $F(S) = S^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$
Тогда $\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = (a^2+bc)E_{11} + (ab+bd)E_{12} + (ac+cd)E_{21} + (bc+d^2)E_{22}$, а

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc \\ ab+bd \\ ac+cd \\ bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Значит, искомая матрица будет иметь следующий вид: $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b & ab+bd \\ 0 & c & ac+cd \\ 1 & d & bc+d^2 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b & ab+bd \\ 0 & c & ac+cd \\ 1 & d & bc+d^2 \end{pmatrix}$

№4

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_1+e_2) & \varphi(e_1+e_2+e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_1+f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} f_1 & f_1+f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3f_2 & f_1+7f_2 & 3f_1+12f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_1+f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a_1+a_4)f_1 + a_4 f_2 = 3f_2 \\ (a_2+a_5)f_1 + a_5 f_2 = f_1 + 7f_2 \\ (a_3+a_6)f_1 + a_6 f_2 = 3f_1 + 12f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ a_4 = 3 \\ a_2 + a_5 = 1 \\ a_5 = 7 \\ a_3 + a_6 = 3 \\ a_6 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_4 = 3 \\ a_2 = -6 \\ a_5 = 7 \\ a_3 = -9 \\ a_6 = 12 \end{cases}$$

Значит, матрица $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ - искомая.

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

№5

$$\left(\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)\quad\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\3&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)\quad\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}11&2\\3&0\\14&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}11\\3\\14\end{pmatrix}\\ \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\end{cases}$$

Но заметим, что $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Значит, $\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=5\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)-8\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)=5\begin{pmatrix}11\\3\\14\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39\\15\\46\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}39\\15\\46\end{pmatrix}$