ДЗ по мат. анализу на 26.01.2022

Кожевников Илья 2112-1

25 января 2022 г.

№4

а)

$f(x) = (x+1)(x-2)^2$

1)

Область определения: R

2)

$f(-x) = (-x+1)(-x-2)^2$
Ни условие четности, ни условие нечетности не выполняются, а, значит, функция общего вида.

3)

$x = 0 : y = 1 \cdot (-2)^2 = 4$
$y = 0 : x = -1, x = 2$
Значит, точки пересечения с осями таковы:
С Ox: (-1, 0), (2, 0)
С Oy: (0, 4)

4)

Точек разрыва нет, так что вертикальных асимптот нет.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+1)(x-2)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3x + \frac{4}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x+1)(x-2)^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 3x + \frac{4}{x} = +\infty$
Значит, асимптот нет.

5)

$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = x^2 - 4x + 4 + 2(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 6x$
$3x^2 - 6x = 0$
$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
см. приложение №1.
Значит, функция возрастает на промежутках $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ и убывает на $(0, 2)$.
Точки x = 0 и x = 2 - точки экстремума.
x = 0 - точка локального максимума
x = 2 - точка локального минимума.

6)

$f''(x) = 6x - 6$
$6x - 6 = 0$
$x = 1$
x = 1 - точка перегиба.
См. приложение №1.
Получается, функция выпуклая на $(-\infty, 1)$ и вогнутая на $(1, +\infty)$

График см. приложение №1.

b)

$f(x) = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$
1)

Область определения: $R \backslash \{-1\}$

2)

$f(-x) = \frac{-x^3(-3x+4)}{(-x+1)^3}$
Функция общего вида.

3)

$y = 0 : x = -\frac{4}{3}$
Значит, точки пересечения с осями таковы:
С Ox: $(-\frac{4}{3}$, 0)
С Oy: -

4)

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{3x^4+4x^3}{x^3+3x^2+3x+1}=\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}$$

Значит, x=-1 - вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(3x+4)}{x(x+1)^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+4x^2}{x^3+3x^2+3x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}-3x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+4x^2}{x^3+3x^2+3x+1}-3x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+4x^2-3x(x^3+3x^2+3x+1)}{x^3+3x^2+3x+1}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^3-9x^2-3x}{x^3+3x^2+3x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5-\frac{9}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=-5$$

Значит, уравнение наклонной асимптоты - $y=3x-5$

5)

$$f'(x)=\frac{(12x^3+12x^2)(x+1)^3-3(3x^4+4x^3)(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{3x^4+12x^3+12x^2}{(x+1)^4}$$

$$\frac{3x^4+12x^3+12x^2}{(x+1)^4}=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

См. приложение №2

Значит, функция возрастает на промежутке $(-\infty,+\infty)$

Точек экстремума нет.

6)

$$f''(x)=\frac{(12x^3+36x^2+24x)(x+1)^4-4(3x^4+12x^3+12x^2)(x+1)^3}{(x+1)^8}=\frac{12x^2+24x}{(x+1)^5}$$

$$\frac{12x^2+24x}{(x+1)^5}=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

См. приложение №2.

Значит, наша функция выпуклая на $(-\infty,-2)\cup(-1,0)$ и вогнутая на $(-2,-1)\cup(0,\infty)$, а точки x=-2 и x=0 и x=-1 - точки перегиба.

График см приложение №2.

c)

$$f(x)=\sqrt{x}ln(x)$$

1)

Область определения: $(0,+\infty)$

2)

Функция общего вида.

3)

$y = 0 : x = 1$
Пересечений с осью Oy нет, пересечение с осью Ox в точке (1, 0)

4)

Вертикальных асимптот нет.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x} ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$
Предела не существует, а, значит, и наклонных асимптот тоже нет.

5)

$f'(x) = \frac{ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$
$\frac{ln(x)+2}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$
См. приложение №3.
Значит, функция возрастает на $(e^{-2}, +\infty)$ и убывает на $(0, e^{-2})$
. Точка x $= e^{-2}$ - точка экстремума (точка локального минимума).

6)

$f''(x) = \frac{2\sqrt{x}(ln(x)+2)' - (ln(x)+2)(2\sqrt{x})'}{4x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{ln(x)+2}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-ln(x)}{4x\sqrt{x}}$
$\frac{-ln(x)}{4x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
См. приложение №3.
Значит, наша функция выпуклая на $(1, +\infty)$ и вогнутая на $(0, 1)$
График см. приложение №3.

d)

$f(x) = (x - 6)e^{-\frac{1}{x}}$
1)

Область определения - $R \setminus \{0\}$

2)

$f(-x) = (-x - 6)e^{\frac{1}{x}}$
Функция общего вида

3)

Пересечений с осью Оу нет.
$y = 0 : x = 6$
Пересечение с осью Ох в точке (6, 0)

4)

$\lim\limits_{x\to 0+0}(x-6)e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0}(x-6)\cdot \lim\limits_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0}(x-6)\cdot 0 = 0$
$\lim\limits_{x\to 0-0}(x-6)e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$
Значит, вертикальная асимптота существует, а именно на x=0.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x-6)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(1-\frac{6}{x})e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(1-\frac{6}{x})\cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1\cdot 1 = 1$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-6)e^{-\frac{1}{x}} - x = -7$
Значит, уравнение наклонной асимптоты имеет следующий вид: $y = x - 7$

5)

$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{(x-6)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x-6)}{x^2}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$
См. приложение №4.
Получается, функция возрастает на промежутках $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ и убывает на $(-3, 0) \cup (0, 2)$.
Точки x=-3, x=2 - точки экстремума.
Точка x=-3 - точка локального максимума, точка x=2 - точка локального минимума.

6)

$f''(x) = \frac{x^2(\frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x-6)}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}}(2x+1)) - e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x-6)2x}{x^4} = \frac{13e^{-\frac{1}{x}}x - 6e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(13x-6)}{x^4}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{13}$
См. приложение №4.
Получается, функция выпукла на $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{6}{13})$ и вогнута на $(\frac{6}{13}, +\infty)$
График см. приложение №4.

№3

а)

$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}, x > 0$
Посчитаем производные всех трех частей неравенства.

1)
$(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8})' = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}$
2)
$(\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$
3)
$(1+\frac{x}{2})' = \frac{1}{2}$
Сначала заметим, что при x=0 все три функции равны 0.
Очевидно, $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}$.
Тогда остается доказать, что $\frac{1}{2}-\frac{x}{4} < \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$
Для этого нарисуем графики обеих функций.
См. приложение №5. Заметим, что график $\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$ находится ниже, а, значит, $\frac{1}{2}-\frac{x}{4} < \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.
Ч.Т.Д.

b)

$e^{x-1}+ln(x)-2x+1 \geq 0, x \geq 1$
При x=1 вся функция становится равна 0.
Посчитаем производную функции.
$(e^{x-1}+ln(x)-2x+1)' = e^{x-1}+\frac{1}{x}-2$
Заметим теперь, что данное выражение всегда больше 0, т.к. $e^n > 2$ при любом n $\geq$ 1.
Тогда получается, что функция больше 0 при x=1, а далее она только возрастает (что следует из того, что производная всегда больше 0). Значит, неравенство верно.
Ч.Т.Д.