ДЗ по линейной алгебре на 16.05.2022

Кожевников Илья 2112-1

16 мая 2022 г.

№1

Распишем по определению. Нам нужно доказать три утверждения:
1) Отображение идет в себя
2) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
3) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$
Первый пункт выполняется во всех данных случаях, поэтому опустим его и будем проверять только 2 и 3.

1.1)

$\varphi(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$
1) $\varphi((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)) = (x_1 + y_1 + 2, x_2 + y_2 + 5, x_3 + y_3) \neq$
$\neq (x_1 + y_1 + 4, x_2 + y_2 + 10, x_3 + y_3) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3) + (y_1 + 2, y_2 + 5, y_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) + \varphi(y_1, y_2, y_3)$
Значит, данное отображение не является линейным оператором.

1.2)

$\varphi(X) \to AXB$
1) $\varphi(X + Y) = A(X + Y)B = (AX + AY)B = AXB + AYB = \varphi(X) + \varphi(Y)$
2) $\varphi(\lambda X) = A(\lambda X)B = \lambda AXB = \lambda\varphi(X)$
Значит, данное отображение является линейным оператором

1.3)

$\varphi(x) \to f(x+1) - f(x)$
1) $\varphi(f(x) + g(x)) = (f + g)(x + 1) - (f + g)(x) = f(x + 1) - f(x) + g(x + 1) - g(x) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$
2) $\varphi(\lambda f(x)) = \lambda f(x + 1) - \lambda f(x) = \lambda(f(x + 1) - f(x)) = \lambda\varphi(f(x))$
Значит, данное отображение является линейным оператором

№2

Запишем в столбцы матрицы образы векторов базиса. Тогда по определению матрицы линейного оператора,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

№3

3.1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 2 \\ 5 & -3-t & 3 \\ -1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = -t^3 - 3t^2 - 3t - 1 = -(t+1)^3$$

$-(t+1)^3 = 0 \Rightarrow t = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +5(3) \\ \cdot -1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot -\frac{1}{2} \\ -3(1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(2) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	-1	1

Ответ: с.з.: -1, с.в.: $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

3.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$$

Дискриминант отрицательный, значит, в $\mathbb{R}$ с.з. и с.в. нет. Найдем их в $\mathbb{C}$.

$D = -4 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

Найдем $\sqrt{-4}$. Т.к. корень 2 степени, то значения у нас будет 2. Очевидно, что искомыми значениями будут 2i и -2i.

Тогда $t \in \{1+i, 1-i\}$

$t = 1+i : \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot i \\ \cdot -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

x_1	x_2
-i	1

$t = 1-i : \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot -i \\ \cdot -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

x_1	x_2
i	1

Ответ: с.з.: 1+i, 1-i, с.в.: $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

3.3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 1$$

$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

x_1	x_2
-1	1

Ответ: с.з.: 1, с.в.: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.4)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-t & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-t \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-t & -3 \\ -1 & 3 & -1-t \end{vmatrix} + (1-t) \cdot \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 3 & 5-t & -3 \\ 4 & 3 & -1-t \end{vmatrix} =$$

$= t^2 - 4t + 4 + (1-t)(-t^3 + 7t^2 - 16t + 12) = t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 = (t-2)^4$

$(t-2)^4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-2 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \\ -3(1) \\ -4(1) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot \frac{1}{3} \\ -(3) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	-1	1	0
0	1	0	1

Ответ: с.з.: 2, с.в.: $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

№5

5.1)

Проверим критерий диагонализуемости. Для этого найдем собственные векторы.

$\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}1-t & 2\\-1 & -t\end{vmatrix} = t^2 - t + 2$

$t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow t \in \emptyset$

Значит, собственных значений нет. Тогда и собственных векторов нет, а, значит, критерий диагонализуемости не выполняется.

Ответ: линейный оператор недиагонализуем.

5.2)

Проверим критерий диагонализуемости. Для этого найдем собственные векторы.

$\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & -2\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}2-t & 2\\-2 & -2-t\end{vmatrix} = t^2$

$t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Но заметим, что т.к. у нас вышло только одно собственное значение, собственный вектор у нас также будет один. Но при этом в базисе V у нас должно быть 2 вектора. Значит, критерий диагонализуемости не выполняется.

Ответ: линейный оператор недиагонализуем.

5.3)

Проверим критерий диагонализуемости. Для этого найдем собственные векторы.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}1-t & 1 & 1 & 1\\1 & 1-t & -1 & -1\\1 & -1 & 1-t & -1\\1 & -1 & -1 & 1-t\end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix}1-t & -1 & -1\\-1 & 1-t & -1\\-1 & -1 & 1-t\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1-t & -1\\1 & -1 & 1-t\end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1-t & -1\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1-t\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1-t & -1\\1 & -1 & 1-t\\1 & -1 & -1\end{vmatrix} = t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t - 4 - t^2 + 4t - 4 - t^2 + 4t - 4 - t^2 + 4t - 4 =$$

$t^4 - 4t^3 + 16t - 16 = (t+2)(t-2)^3$

$(t+2)(t-2)^3 = 0 \Leftrightarrow t \in \{\pm 2\}$

$$t = -2: \begin{pmatrix}1+2 & 1 & 1 & 1\\1 & 1+2 & -1 & -1\\1 & -1 & 1+2 & -1\\1 & -1 & -1 & 1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & -1 & -1\\1 & -1 & 3 & -1\\1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	1	1	1

$$t = 2: \begin{pmatrix}1-2 & 1 & 1 & 1\\1 & 1-2 & -1 & -1\\1 & -1 & 1-2 & -1\\1 & -1 & -1 & 1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1

Тогда получается, что у нас всего вышло 4 собственных вектора, а в базисе V должно быть как раз 4 вектора. При этом алгебраические и геометрические кратности для всех собственных значений совпадают. Значит, наш линейный оператор диагонализуем.

Тогда в базисе $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}. \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ диагональная матрица будет иметь такой вид: $\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,

а матрица C в уравнении $A' = C^{-1}AC$ будет равна $\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

5.4)

Проверим критерий диагонализуемости. Для этого найдем собственные векторы.

$$\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}-1-t&3&-1\\-3&5-t&-1\\-3&3&1-t\end{vmatrix} = -t^3+5t^2-8t+4 = -(t-2)^2(t-1)$$

$$-(t-2)^2(t-1) = 0 \Leftrightarrow t \in \{2,1\}$$

$t = 2 : \begin{pmatrix}-1-2&3&-1\\-3&5-2&-1\\-3&3&1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&3&-1\\-3&3&-1\\-3&3&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$

x_1	x_2	x_3
1	1	0
$-\frac{1}{3}$	0	1

$t = 1 : \begin{pmatrix}-1-1&3&-1\\-3&5-1&-1\\-3&3&1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&3&-1\\-3&4&-1\\-3&3&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$

x_1	x_2	x_3
1	1	1

Тогда получается, что у нас всего вышло 3 собственных вектора, а в базисе V должно быть как раз 3 вектора. При этом алгебраические и геометрические кратности для всех собственных значений совпадают. Значит, наш линейный оператор диагонализуем.

Тогда в базисе $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ диагональная матрица будет иметь такой вид: $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, а матрица C в уравнении $A' = C^{-1}AC$ будет равна $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{3}&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

№6

Заметим, что в 3.2 для каждого собственного значения алгебраическая и геометрическая кратности совпали, а количество собственных векторов равно размерности пространства. Значит, матрица оператора диагонализуема. Этим диагональным видом будет $\begin{pmatrix}1+i&0\\0&1-i\end{pmatrix}$, а матрицей C будет $\begin{pmatrix}-i&i\\1&1\end{pmatrix}$. Но нам известна формула $A' = C^{-1}AC$. Тогда верна будет следующая цепочка преобразований:

$$A' = C^{-1}AC \Rightarrow A = CA'C^{-1} \Rightarrow A^{21} = CA'C^{-1}CA'C^{-1}...CA'C^{-1}CA'C^{-1} = CA'^{21}C^{-1}$$

$$A'^{21} = \begin{pmatrix}1+i&0\\0&1-i\end{pmatrix}^{21} = \begin{pmatrix}-1024-1024i&0\\0&-1024+1024i\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}-i&i\\1&1\end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{i}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{-i}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$CA'^{21}C^{-1} = \begin{pmatrix}-1024&-1024\\1024&-1024\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-1024&-1024\\1024&-1024\end{pmatrix}$

№8

Применим тот же алгоритм, что и в предыдущих номерах.

$$\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&8&2\\-4&2&5\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix}5-t&2&-4\\2&8-t&2\\-4&2&5-t\end{vmatrix} = -t^3+18t^2-81t = -t(t-9)^2$$

$-\,t(t-9)^2 = 0 \Leftrightarrow t \in \{0, 9\}$

$$t=0:\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&8&2\\-4&2&5\end{pmatrix}\begin{array}{l}+(3)\\ \\+2(2)\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&4&1\\2&8&2\\0&18&9\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-2(1)\\\cdot\frac{1}{9}\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&4&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}-2(2)\\ \\ \\\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1&x_2&x_3\\\hline 1&-\frac{1}{2}&1\\\hline\end{array}$$

$$t=9:\begin{pmatrix}-4&2&-4\\2&-1&2\\-4&2&-4\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\+\frac{1}{2}(1)\\-(1)\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}-4&2&-4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1&x_2&x_3\\\hline \frac{1}{2}&1&0\\\hline -1&0&1\\\hline\end{array}$$

Значит, нашими собственными векторами будут $\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Теперь нам надо их ортонормировать. По известной нам теореме собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. Значит, достаточно будет ортогонализовать только последние два вектора.

$$f_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},, f_2 = e_2 - \frac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)}f_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$$

Теперь ортонормируем векторы $\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \rightarrow \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

Тогда эти векторы и будут искомым ортонормированным базисом.

Ответ: ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$, диагональный вид матрицы: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

№9

Сначала запишем матрицу квадратичной формы, а затем применим тот же алгоритм, что и в предыдущих номерах.

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\4&1&2\\2&2&-2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1-t&4&2\\4&1-t&2\\2&2&-2-t\end{vmatrix} = -t^3+27t+54 = -(t-6)(t+3)^2$$

$-\,(t-6)(t+3)^2 = 0 \Leftrightarrow t \in \{6, -3\}$

$$t=6:\begin{pmatrix}2&2&-8\\4&-5&2\\-5&4&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\cdot\frac{1}{2}\\-2(1)\\+(1)+(2)\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&-9&18\\1&1&-4\end{pmatrix}\begin{array}{c}-(2)\cdot(-\frac{1}{9})\\\cdot-\frac{1}{9}\\-(1)\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1&x_2&x_3\\\hline 2&2&1\\\hline\end{array}$$

$$t=-3:\begin{pmatrix}4&4&2\\4&4&2\\2&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1&x_2&x_3\\\hline -1&1&0\\\hline -\frac{1}{2}&0&1\\\hline\end{array}$$

Значит, нашими собственными векторами будут $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$. Теперь нам надо их ортонормировать. По известной нам теореме собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. Значит, достаточно будет ортогонализовать только последние два вектора.

$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = e_2 - \frac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

Теперь ортонормируем векторы $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{2\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

Тогда эти векторы и будут искомым ортонормированным базисом.

Ответ: ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$, канонический вид кв. формы: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$