ДЗ по линейной алгебре на 22.09.2021

Кожевников Илья 2112-1

20 сентября 2021 г.

№1

$$A^6, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \overset{(1)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{(2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \overset{(3)}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Заметим, что $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $A^6 = (1)(2)(3)(1)(2)...(2)(3)$, где $(3)(1) =$ единичной матрице $\Rightarrow A^6 = (1)(2)^6(3)$

$$(2)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(2)^6 = ((2)^3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$(1)(2)^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -64 \end{pmatrix}$$

$$(1)(2)^6(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 63 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 63 & 0 & 64 \end{pmatrix}$

№2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ac + dc - ab - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (a+d)(b-c) \\ (a+d)(c-b) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 - c^2 & 2d(c-b) \\ 2a(c-b) & c^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} b^2-c^2 & 2d(c-b) \\ 2a(c-b) & c^2-b^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & (a+d)(b-c) \\ (a+d)(c-b) & 0 \end{pmatrix}$
Тогда верной формулой будет $A^2 - B^2 = (A - B^T)(A + B^T)$
Ответ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T$. Правильная формула: $A^2 - B^2 = (A - B^T)(A + B^T)$

№3

$A = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
$ABC = \begin{pmatrix} 639 & 742 \\ 516 & 600 \end{pmatrix}, BAC = \begin{pmatrix} 293 & 338 \\ 711 & 822 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(ABC) = 1239, tr(BAC) = 1115 \Rightarrow$ данные матрицы подходят.
Ответ: $A = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

№4

4.1)
Если верно высказывание, что $A + A^T$симметрична, то должно быть верным высказывание $A + A^T = (A + A^T)^T$. Докажем.
$A + A^T = (A + A^T)^T$
$A + A^T = A^T + (A^T)^T$
$A + A^T = A^T + A$
$A + A^T = A + A^T \Rightarrow$ высказывание верно
Ч.Т.Д.
4.2)
Если A и B кососимметричны, то матрица AB - BA также кососимметрична. Докажем.
$A^T = -A, B^T = -B, (AB - BA)^T = -(AB - BA)$
$(AB)^T - (BA)^T = -AB + BA$
$B^T A^T - A^T B^T = -AB + BA$
$BA - AB = -AB + BA$
$BA - AB = BA - AB \Rightarrow$ высказывание верно
Ч.Т.Д.
4.3)
$tr((AB)^n) = tr((BA)^n)$. Докажем.
$tr(A^n B^n) = tr(B^n A^n)$
Но $tr(AB) = tr(BA) \Rightarrow tr(A^n B^n) = tr(A^n B^n) \Rightarrow$ высказывание верно
Ч.Т.Д.

№5

5.1)
$((A+E)(B+E))^T - (A+B)^T = (B+E)^T(A+E)^T - A^T - B^T = (B^T + E^T)(A^T + E^T) - A^T - B^T = (B^T + ET)A^T + (B^T + E^T)E^T - A^T - B^T = (AB)^T + A^T + B^T + E^T - A^T - B^T = (AB)^T + E^T = (AB + E)^T$
5.2
$tr((6AB^T - 3BA^T)^T C + C^T(2AB^T - 4BA^T))$
C симметрична $\Rightarrow C^T = C$
$tr(C(6AB^T - 3BA^T)) + tr(C(2AB^T - 4BA^T)) = tr(C(6AB^T - 3BA^T + 2AB^T - 4BA^T)) = tr(C(8AB^T - 7BA^T))$

№8

$1)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, докажем.

Известно, что при умножении нулевой матрицы (в данном случае A) на любую другую матрицу получится нулевая матрица, а значит ее след будет равен $0 \Rightarrow$ нулевая матрица является решением.