ДЗ по линейной алгебре на 24.11.2021

Кожевников Илья 2112-1

23 ноября 2021 г.

№1

1)

$0 \cdot x = \overline{0}$
$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$
Заметим, что если из обоих частей равенства вычесть 0x, то:
$0 \cdot x - 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x - 0 \cdot x$
$0 = 0 \cdot x$
Отсюда,
$0 = \overline{0}$
Ч.Т.Д.

2)

$-\alpha \cdot x = -(\alpha \cdot x)$
Заметим, что минус перед выражением означает, что оно умножается на -1
$(-1 \cdot \alpha) \cdot x = -1 \cdot (\alpha \cdot x)$
Но из ассоциативности умножения следует, что данное выражение верно.
Ч.Т.Д.

№2

Для того, чтоб U было подпространством необходимо доказать, что:
1) $0 \in$ U
2) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$

1)

a)

$\{(x, 2y, x + y)^T \in R^3 \mid x, y \in R\}$
1) Т.к. $x, y \in R$, то $0 \in U$
2) Это условие также будет выполняться, потому что:

Элемент на первой позиции будет рациональным числом, которое всегда представимо в виде суммы двух другие рациональных чисел.

Второй элемент будет иметь вид 2a + 2b, что также будет представимо в виде 2y

Аналогично с элементом на 1 позиции, число представимо в виде двух других рациональных чисел. 3) Т.к. $\beta \cdot x$ и $\beta \cdot y$ также принадлежат множеству рациональных чисел, то

$\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$.
Значит, данное U - подпространство.

b)

$\{(x, y, x, y, ...)^T \in R^n \mid x, y \in R\}$
1) Т.к. $x, y \in R$, то $0 \in U$
2) Т.к. x, y $\in$ R, то каждое из них представимо в виде суммы двух чисел. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Т.к. x, y $\in$ R, то каждое из них представимо в виде произведения двух чисел. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$.
Значит, данное U - подпространство.

2)

a)

$\{(x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, ..., x_n \neq 0\}$
Заметим, что ни один элемент не может быть нулем, а, значит, нарушается требование $0 \in$ U.
Значит, U - не подпространство.

b)

$\{(x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n \mid x_1 \geq x_2 \geq, ..., \geq x_n\}$
1) Если все элементы будут равны 0, то условие будет выполняться, а, значит, $0 \in U$
2) Т.к. x $\in$ R, то x представимо в виде суммы двух чисел. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Т.к. x $\in$ R, то x представимо в виде произведения двух чисел. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$.
Значит, данное U - подпространство.

3)

a)

$\{(x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n \mid x_1, x_2, ..., x_n \in Z\}$
Заметим, что по услови операция умножения происходит на поле R, а, значит, β может не быть целым числом, а, значит, $\beta \cdot x$ может быть нецелым числом. Отсюда следует нарушение 3 требования.
Значит, данное U - не подпространство.

b)

$\{(x, x^3, x^5, ..., x^{2n-1})^T \in R^n \mid x \in R\}$
Заметим, что если рассмотреть такие столбцы, где x = 1 и 2, то получится следующее:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ ... \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ ... \\ 1 + 2^n \end{pmatrix}$$

Но тогда $x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$ - иррациональное число. Значит, условие нарушено.
Значит, данное U - не подпространство.

c)

$\{(x, \pm x) \mid x \in R\}$
1) Если все элементы будут равны 0, то условие будет выполняться, а, значит, $0 \in U$
2) Т.к. x $\in$ R, то x представимо в виде суммы двух чисел. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Т.к. x $\in$ R, то x представимо в виде произведения двух чисел. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$.
Значит, данное U - подпространство.

№3

Аналогично с 2 номером, необходимо доказать три утверждения:
1) 0 $\in$ U
2) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
, чтобы U было подпространством V.

1)

1) Т.к. нулевая матрица симметрична, то $0 \in U$.
2) Заметим, что если к каждому элементу в симметричной матрице прибавить соответствующий элемент другой матрицы, то симметричность сохранится. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a+b \in U$
3) Если все элементы симметричной матрицы умножить на одно и то же число β, то симметричность также сохранится (потому что нам даны два элемента матрицы, и нам надо доказать, что если a = b, то и $\beta a = \beta b$, что очевидно).
Отсюда следует, что множество симметричных матриц - подпространство V.
Ч.Т.Д.
С кососимметричными матрицами каждый пункт доказательства аналогичен.

2)

1) Т.к. след нулевой матрицы равен 0, то $0 \in U$.
2) Заметим, что при складывании двух матриц след их суммы будет равен следам этих двух матриц. Но они равны нулям, а, значит, и след их суммы будет равен 0. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Заметим, что $det(\beta A) = \beta det(A)$. Отсюда следует, что если мы умножим матрицу с нулевым следом на β, то след все равно будет равен 0.
Отсюда следует, что множество матриц с нулевыми следами - подпространство V.
Ч.Т.Д.

3)

невырожденные:
Приведем контрпример, в котором не выполняется второе требование:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -7 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$
$det(A) = 3,\ det(B) = -3,\ det(C) = 0.$
Значит, множество невырожденных матриц - не подпространство V.

вырожденные:
Приведем контрпример, в котором не выполняется второе требование:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 8 \\ 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 15 \\ 10 & 18 & 11 \\ 11 & 19 & 17 \end{pmatrix},$
$det(A) = 0,\ det(B) = 0,\ det(C) = 19.$
Значит, множество вырожденных матриц - не подпространство V.

№4

Запишем наш многочлен f в следующем виде:
$f = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + ... + k_1 x + k_0$
Аналогично с 2 и 3 номерами, необходимо доказать три утверждения:
1) $0 \in$ U
2) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
, чтобы U было подпространством V(т.к. подпространство - тоже пространство).

1)

1) Если все коэфиициенты будут равны 0, то f = 0 $\Rightarrow 0 \in$ U
2) Если у нас есть два многочлена f_1 и f_2, то мы можем получить их сумму попарно складывая каждое слагаемое f_1 с соответствующим по степени x слагаемым f_2. Тогда получится f_3 следующего вида:
$f_3 = (k_{1n} + k_{2n})x^n + (k_{1n-1} + k_{2n-1})x^{n-1} + ... + (k_{11} + k_{21})x + (k_{10} + k_{20})$
Но каждый такой коэффициент будет существовать в том же поле, а степень многочлена останется той же. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3)Если у нас есть f_1 и множитель β, то мы можем получить их произведение попарно умножая каждое слагаемое f_1 на β. Тогда получится f_2 следующего вида:
$f_2 = \beta k_n x^n + \beta k_{n-1} x^{n-1} + ... + \beta k_1 x + \beta k_0$
Но каждый такой коэффициент будет существовать в том же поле, а степень многочлена останется той же. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
Значит, данное множество - пространство.
Ч.Т.Д.

2)

Каждый пункт доказательства полностью аналогичен первой части задания с теми лишь поправками, что степени x в многочлене будут четны.
Ч.Т.Д.

№5

Аналогично с 2-4 номерами, необходимо доказать три утверждения:
1) $0 \in$ U
2) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
, чтобы U было подпространством V.

1)

a)

1) Ноль будет лежать в данном множесте. Например, в функции $f(x) = 0 \cdot x$. Значит, $0 \in$ U
2) Если у нас есть две функции $f_1(5) = 0$ и $f_2(5) = 0$, то их сумма в точке 5 также должна быть равна нулю. Тогда $f_1(5) + f_2(5) = 0 + 0 = 0$. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Если $f(5) = 0$, то и $\beta f(5)$ также должно быть равно нулю. Домножим обе части на β.
$\beta f(5) = 0\beta \Rightarrow \beta f(5) = 0$. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
Отсюда следует, что множество таких функций будет подпространством.
Ч.Т.Д.

b)

Заметим, что не будет выполняться второе требование, т.к. $f_1(5) + f_2(5) = 1 + 1 = 2 \neq 1$. Значит, такое множество функций не будет подпространством.
Ч.Т.Д.

2)

Положим $f(x) = f(-x) = a$
1) Тогда нулевая функция будет включена в множество. Например, $f(x) = f(-x) = 0 * x$. Значит, $0 \in$ U
2) Если есть $f_1(x) = f_1(-x) = a_1$ и $f_2(x) = f_2(-x) = a_2$, то и $f_1(x) + f_2(x) = f_1(-x) + f_2(x) = f_1(x) + f_2(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = a_1 + a_2$. Заметим, что в каждом из случаев сумма фнукций независимо от знака при x будет равняться $a_1 + a_2$. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Если есть $f(x) = f(-x) = a$, то тогда и $\beta f(x) = \beta f(-x) = \beta a$. Но опять же если мы домножим обе части на β, то четность функции сохранится. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
Отсюда следует, что множество таких функций будет подпространством.
Ч.Т.Д.

3)

a)

Заметим, что в таком множестве функций не будет нуля, ведь строго возрастающая функция обеспечивает, что в области значений будет больше одного значения.
Значит, такое множество не будет подпространством.
Ч.Т.Д.

b)

1) Ноль будет включен в такое множество. Например, f(x) = 0x. Значит, $0 \in$ U
2) Если есть $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то их сумма также должна быть неубывающей. Заметим, что если $f_1(n) \leq f_1(n+1)$ и $f_2(n) \leq f_2(n+1)$, то $f_1(n) + f_2(n) \leq f_1(n+1) + f_2(n+1)$. Значит, $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
3) Также если есть $f(x) \leq f(x+1)$, то и $\beta f(x) \leq \beta f(x+1)$, что подтверждается, если мы сократим второе неравенство на β. Значит, $\beta \in F, a \in U \Rightarrow \beta \cdot a \in U$
Отсюда следует, что множество таких функций будет подпространством.
Ч.Т.Д.

4)

Заметим, что про сложении двух монотонных функций не всегда будет получаться монотонная функций. Например, если мы сложим $-log_2(x)$ и x, то сначала их сумма будет убывать, а потом возрастать.
Значит, множество таких функций не будет подпространством.
Ч.Т.Д.