ДЗ по линейной алгебре на 09.02.2022

Кожевников Илья 2112-1

8 февраля 2022 г.

№1

Для нахождения ядра запишем нашу матрицу линейного отображения и найдем ее ФСР.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1)\cdot 2 \\ -(1)\cdot 3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

x_1	x_2	x_3	x_4
-2	1	0	0
-3	0	1	0
-3	0	0	1

Тогда базис ядра будут составлять векторы $-2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, -3e_1 + e_4$
Теперь найдем базис образа линейного отображения.
Для этого воспользуемся УСВ матрицы линейного отображения, найденным выше. В нем главная переменная есть только в первом столбце, а, значит, в базисе образа линейного отображения будет стоять лишь один вектор, а его коэффициентами будут 1, 2 и 3. Тогда ответом будет $f_1 + 2f_2 + 3f_3$
Ответ: $\textbf{1)} - 2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, -3e_1 + e_4, \textbf{2)} f_1 + 2f_2 + 3f_3$

№2

1)

Запишем вектор базиса $im\varphi$ в столбцы матрицы и дополним недостающими векторами из стандартного базиса.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Тогда получается, что искомый базис будут составлять векторы $f_1 + 2f_2 + 3f_3, f_2 и f_3$.
То же самое сделаем с векторами базиса $ker\varphi$. В нашей ФСР не было главной переменной в первом столбце, а, значит, для дополнения базиса нам нужен вектор e_1. Значит, искомым базисом будет $e_1, -2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, -3e_1 + e_4$
Ответ: $\textbf{1)} e_1, -2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, -3e_1 + e_4 \textbf{2)} f_1 + 2f_2 + 3f_3, f_2, f_3$

2)

$rk(A) = 1$, а, значит, размер единичной матрицы в левом верхнем углу будет равен 1. То есть в углу будет просто стоять одна единица. Тогда искомая матрица будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3\\2&4&6&6\\3&6&9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

№3

Аналогично первому номеру, найдем ФСР.

$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&4&5\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\to\begin{pmatrix}1&\frac{4}{3}&\frac{5}{3}\\0&1&2\end{pmatrix}-(2)\cdot\frac{4}{3}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$

x_1	x_2	x_3
1	-2	1

$e_1-2e_2+e_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Тогда базис ядра будет состоять из вектора $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Базисом $im\varphi$ же будут векторы $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

Тогда чтобы дополнить базис пространства R^3 необходимо добавить векторы e_2 и e_3. Базис же R^2 дополнять не надо.

Тогда искомыми базисами будут $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

rk(A) равняется 2. Значит, в углу будет единичная матрица размера 2x2. Остальные позиции будут заполнены нулями.

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

№4

Найдем матрицу линейного отображения. Для этого необходимо каждый из элементов стандартного базиса умножить на матрицу А.

$\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\9&0\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&9\end{pmatrix}$

Тогда выходит, что матрица линейного отображения имеет следующий вид:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ Теперь найдем ее ФСР.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(1)\cdot 3 \\ -(2)\cdot 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-3	0	1	0
0	-3	0	1

Значит, переписав векторы обратно в матричный вид, мы получим базис ядра линейного отображения:

$ker(\varphi) = \langle \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

Теперь найдем базис $im(\varphi)$

Заметим, что в УСВ матрицы линейного отображения главные переменные есть только в первых двух столбцах. Значит, в базисе $im(\varphi)$ будут только две матрицы (векторы из первого и второго столбцов в матричном виде).

$im(\varphi) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rangle$

№6

Возьмем пространство V с одним нулевым вектором. Тогда при его линейном отображении в себя этот нулевой вектор будет переходить в себя же, а, значит, он и будет представлять собой ядро. Также очевидно, что он будет и образом. Но заметим, что подпространство также может совпадать с пространством, а, значит, в качестве подпространства V мы можем взять само пространство V. Тогда все необходимые условия будут выполняться. Значит, ответ - да.
Ответ: Да, может. Например, если пространство V состоит из одного нулевого вектора.