ДЗ по алгебре на 20.05.2022

Кожевников Илья 2112-1

26 мая 2022 г.

№1

Т.к. нам даны два члена цепочки, то искомая длина $\geqslant 2$. Но при этом верхней границы нет, т.к. для любого a > 3 верно неравенство $x_1x_2^3x_3^2 > x_1x_2^2x_3^a > x_1x_2^2x_3^3$. Значит, мы можем брать сколько угодно таких одночленов, чтобы они были меньше $x_1x_2^3x_3^2$, но больше $x_1x_2^2x_3^3$. Значит, верхней границы нет.
Ответ: $\geqslant 2$

№2

Редуцируем наш многочлен g:

$$x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^5 \qquad (-x_1f)$$

$$\downarrow$$

$$2x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^5 \qquad (-x_2^2x_3f)$$

$$\downarrow$$

$$2x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^3 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 \qquad (-2x_2x_3^3f)$$

$$\downarrow$$

$$2x_1^2x_2x_3^2 + 4x_1x_2^2x_3^5 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 \qquad (-4x_3^5f)$$

$$\downarrow$$

$$2x_1^2x_2x_3^2 + 8x_1x_2x_3^7 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6$$

Заметим, что полученный многочлен нельзя больше редуцировать относительно системы $\{f\}$, т.к. в нем нет одночленов, которые делились бы на старший член f. Но при этом заметим, что $\{f\}$ - система Грёбнера, т.к. $S(f_1, f_2) = 0,\ f_1, f_2 \in \{f\}$. Значит, остаток g относительно $\{f\}$ однозначно определен и не зависит от того, как мы его редуцируем. Значит, найденный многочлен - искомый.
Ответ: $2x_1^2x_2x_3^2 + 8x_1x_2x_3^7 + x_2^4x_3^5 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6$

№3

Пусть $F = \{f_1, f_2, f_3\} = \{2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2, 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4, x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3\}$

Воспользуемся критерием Бухбергера. Если S-полином от любых g и $h \in \{f_1, f_2, f_3\}$ редуцируется к 0 относительно F, то наша система является системой Грёбнера.

Заметим, что будет достаточно проверить на редуцируемость к 0 только три S-полинома: $S(f_1, f_2)$, $S(f_2, f_3)$, $S(f_1, f_3)$, т.к. все остальные либо равны нашим, помноженным на -1, либо имеют вид $S(g, g)$, что также редуцируется к 0. Значит, проверим, редуцируются ли наши три S-полинома к 0.

$S(f_1, f_2)$:

m = НОК$(L(f_1), L(f_2))$ = НОК$(2x_1x_2, 4x_1x_3^2) = 4x_1x_2x_3^2$

$S(f_1, f_2) = 2x_3^2 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2 = 2x_3^2(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - x_2(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4) =$

$= 4x_1x_2x_3^2 + 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - 4x_1x_2x_3^2 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 = 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2$

Теперь проделаем ряд элементарных редукций:

$$8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2$$

$$\downarrow -2x_3f_2$$

$$-x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3$$

$$\downarrow +f_3$$

$$0$$

Значит, $S(f_2, f_3)$ редуцируем к 0

$S(f_2, f_3)$:

m = НОК$(L(f_2), L(f_3)) = 4x_1x_2^2x_3^2$

$S(f_2, f_3) = x_2^2 \cdot f_2 - 4x_1 \cdot f_3 = x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3$

Теперь проделаем ряд элементарных редукций:

$$x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3$$

$$\downarrow -x_2x_3f_3$$

$$8x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3$$

$$\downarrow -8f_1$$

$$0$$

Значит, $S(f_2, f_3)$ редуцируем к 0

$S(f_1, f_3)$:

m = НОК$(L(f_1), L(f_3)) = 2x_1x_2^2x_3^3$

$S(f_1, f_3) = x_2x_3^3 \cdot f_1 - 2x_1 \cdot f_3 = 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3$

Теперь проделаем ряд элементарных редукций:

$$4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3$$

$$\downarrow -x_2x_3^2f_2$$

$$8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2$$

$$\downarrow -4f_1$$

$$0$$

Значит, $S(f_1, f_3)$ редуцируем к 0

Итого, наши три S-полинома редуцируемы к 0 относительно F. Значит, F является системой Грёбнера.

Ч.Т.Д.

№4

Докажем данное утверждение в две стороны:

1) Заметим, что если в F есть такой многочлен, что он делит все остальные многочлены F, то $S(f_1, f_2)$ (где $f_1, f_2 \in F$) делится на f (т.к. $S(f_1, f_2) = m_1 f_1 - m_2 f_2$, а $m_1 f_1$ и $m_2 f_2$ делятся на f). Но тогда существует такой многочлен h, что $S(f_1, f_2) = hf$. Но тогда с помощью вычетания hf мы можем его редуцировать к 0 относительно F.

Значит, по критерию Бухбергера, F - система Грёбнера.

2)