ДЗ по мат. анализу на 15.09.2021

Кожевников Илья 2112-1

14 сентября 2021 г.

№1

a)

$\frac{1}{1*5}+\frac{1}{5*9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+1})=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4n+1})=\frac{4n+1-1}{4(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

b)

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}*\frac{1-2^{-n}}{\frac{1}{2}}+\_\_\_=1-2^{-n}+\_\_\_=\_\_\_\_\_$

№2

a)

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1}{6}$

1)

Пусть n $=1$, тогда $1=\frac{1*2*3}{6}=1$

2)

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
$(n^2+n)(2n+1)+6(n+1)^2=(n^2+3n+2)(2n+3)$
$2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6=2n^3+6n^2+4n+3n^2+9n+6$
$2n^3+9n^2+13n+6=2n^3+9n^2+13n+6$
Ч.Т.Д.

b)

$\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n>=2$

1)

Так как по условию $n>=2$, то система $\begin{cases}\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\\ n>=2\\ n=1\end{cases}$

не имеет решения

2)

$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n >= 2$

$\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ (1)

$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (2)

Заметим, что значения между заданными границами в выражениях (1) и (2) совпадают.

Тогда сравним ($\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \vee \sqrt{n+1}$) и ($2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \vee 2\sqrt{n+1}$)

1) $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \vee \sqrt{n+1}$

$\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \vee \sqrt{n+1}$

$\sqrt{n^2+n} \vee n$

$\begin{cases} \sqrt{n^2+n} \vee n \\ n >= 2 \end{cases}$

$\begin{cases} n^2+n \vee n^2 \\ n >= 2 \end{cases} => \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$

2) $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \vee 2\sqrt{n+1}$

$\frac{2\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \vee 2\sqrt{n+1}$

$2\sqrt{n^2+n} \vee 2n+1$

Как и в 1), т.к. $n >= 2$, то ограничения на подкоренное выражение можно не ставить

$4n^2+n \vee 4n^2+4n+1$

$n < 4n+1 => 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$

Следовательно, границы выражения (2) находятся внутри границ выражения (1) => предположение (1) верно

Ч.Т.Д.