ДЗ по алгебре на 29.04.2022

Кожевников Илья 2112-1

29 апреля 2022 г.

№1

1. Пусть элемент $g = (a, b, c) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$ имеет порядок p, тогда $(pa, pb, pc) = e$, (e - нейтральный элемент). Количество элементов, на порядок которых делится число p, – это число решений системы $\begin{cases} pa \equiv 0 \bmod 2 \\ pb \equiv 0 \bmod 6 \\ pc \equiv 0 \bmod 9 \end{cases}$

Если для этой системы подходит какой-то элемент $g = (a, b, c) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$, то порядок g является делителем p. Тогда для наших a, b, c $\mathrm{ord}(a)$, $\mathrm{ord}(b)$, $\mathrm{ord}(c)$ делят p, значит, и $\mathrm{ord}(g) = \text{НОК}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b), \mathrm{ord}(c))$ делит p(их НОК $\leqslant p$).

Теперь найдем все элементы, порядок которых равен 2. Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 2a \equiv 0 \bmod 2 \\ 2b \equiv 0 \bmod 6 \\ 2c \equiv 0 \bmod 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0, 1\} \\ b \in \{0, 3\} \\ c \in \{0\} \end{cases}$$

Теперь найдем все элементы, порядок которых равен 3. Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 3a \equiv 0 \bmod 2 \\ 3b \equiv 0 \bmod 6 \\ 3c \equiv 0 \bmod 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0\} \\ b \in \{0, 2, 4\} \\ c \in \{0, 3, 6\} \end{cases}$$

Теперь найдем все элементы, порядок которых равен 6. Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 6a \equiv 0 \bmod 2 \\ 6b \equiv 0 \bmod 6 \\ 6c \equiv 0 \bmod 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0, 1\} \\ b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ c \in \{0, 3, 6\} \end{cases}$$

Теперь найдем все элементы, порядок которых равен 9. Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 9a \equiv 0 \bmod 2 \\ 9b \equiv 0 \bmod 6 \\ 9c \equiv 0 \bmod 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0\} \\ b \in \{0, 2, 4\} \\ c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

Тогда у нас 3 элемента порядка 2, 8 элементов порядка 3, 12 $(2 \cdot 6 \cdot 3 - 1 - 3 - 8)$ элементов порядка 6 и $18(1 \cdot 3 \cdot 9 - 1 - 8)$ элементов порядка 9.

Ответ:
Порядок 2: 3
Порядок 3: 8
Порядок 6: 24
Порядок 9: 18

№2

Заметим, что если группа G конечная абелева, то она может быть разложена в прямое произведение примарных циклических групп.

$$\mathbb{Z}_{98} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_7$$

Значит, найдем подгруппы с $\mathrm{ord} = 7$ и 14. Они могут быть разложены на прямое произведение примарных циклических подгрупп, т.к. они будут конечными и абелевыми. Также подгруппы порядков 7 и 14 будут циклическими (т.к. они изоморфны примарной циклической подгруппе и произведению примарных подгрупп соответственно).

Тогда найдем количество подгрупп H таких, что ord(H) = 7. Для этого решим следующую систему:
$\begin{cases} 7a \equiv 0 \bmod 7 \\ 7b \equiv 0 \bmod 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \\ b \in \{0,2,4,6,8,10,12\} \end{cases}$
Значит, тогда у нас будет $7 \cdot 7 - 1 = 48$ элементов (без учета нейтрального).

Также найдем количество элементов порядка 2.
$\begin{cases} 2a \equiv 0 \bmod 7 \\ 2b \equiv 0 \bmod 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0\} \\ b \in \{0,7\} \end{cases}$

Значит, таких элементов ровно 1 (без учета нейтрального)
$\begin{cases} \text{Для 14:} \\ 14a \equiv 0 \bmod 7 \\ 14b \equiv 0 \bmod 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \\ b \in \{0,1,2,3,4,5,6,,78,9,10,11,12,13\} \end{cases}$
Значит, тогда у нас будет $98 - 48 - 1 - 1 = 48$ элементов порядка 14.

Найдем количество искомых подгрупп.

Заметим, что в подгруппе порядка 7 могут быть элементы только порядка 1 и 7 (т.к. делители 7 - 1 и 7, а т.к. группа конечна, ее порядок делится на порядки элементов). Т.к. порядок 1 у нейтрального элемента, в ней будет 6 элементов порядка 7. Значит, подгрупп будет $\frac{48}{6} = 8$.

Теперь рассмотрим группу порядка 14. Она конечна и абелева. Значит, она изоморфна $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_{14}$. Значит, порядок порождающего элемента равен 14. Получается, ее количество порождающих элементов будет равно количеству простых элементов до 14, то есть 6. Выходит, всего подгрупп порядка 14 также $\frac{48}{6} = 8$.
Ответ: порядка 7 - 8, порядка 14 - 8.

№3

Покажем, что наша группа $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ не является циклической. Заметим, что порядок нашей группы равен $10 \cdot 12 \cdot 15 = 1800$. Тогда порядок порождающего элемента также равен

1800. Но он не может быть больше НОК(10, 12, 15) = 60. Значит, наша группа нециклическая.

Но заметим, что для n = ml (m и l взаимно простые) выполняется $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$. Значит, верно будет следующее:
$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$

Тогда выходит, что произведение наших групп изоморфно произведению двух групп. При этом n меньше быть не может, иначе возникнет противоречие с доказанным в начале. Значит, ответом будет 2.
Ответ: 2.

№4

Пусть будет верно противное: пусть в A есть элемент a такой, что его порядок равен n и что оно не делит k. Но тогда если мы разложим n на простые множители, то ∃ такое простое число p, что степень вхождения p в n будет больше, чем p в k.

Пусть $n = p^\alpha s$, $k = p^\beta t$ при $0 \leqslant \beta < \alpha$ и НОД(s, p) = 1 и НОД(t, p) = 1. Но тогда в A обязательно будут элементы порядков p^α и t. Докажем это:
Пусть G содержит g порядка xy. Тогда, если мы рассмотрим g^x, то получим элемент порядка y.
Порядок x^x не меньше y, так как иначе, если $ord(g^x) =$ z < y, получим xz < xy, то есть $g^{xz} \neq e$ (xy - порядок g, следовательно наименьшее натуральное, такое что $g^x =$).
Аналогично, получаем, что элемент порядка x также найдётся в A.
Пусть a_1 будет элементом порядка p^α, а a_2 элемент порядка t. Но тогда порядок произведения этих элементов будет равен произведению их порядков (очев.).
Тогда порядок $a_1 a_2$ равен $p^\alpha t = kp^{\alpha - \beta}$. Но это будет больше k, что противоречит тому, что k - наибольший порядок элементов.
Итого, в конечной абелевой группе порядок каждого элемента делит наибольший порядок элементов.
Ч.Т.Д.