ДЗ по мат. анализу на 22.09.2021

Кожевников Илья 2112-1

21 сентября 2021 г.

№42

а)

$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$, докажем
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)} :$
$|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0| < \epsilon$
$\frac{1^{n+1}}{n} < \epsilon$
$\frac{1}{n} < \epsilon$
$n > \frac{1}{\epsilon}$
$N_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon}] \Rightarrow$ при n $> \frac{1}{\epsilon}, |x_n| < \epsilon$

ϵ	0.1	0.001	0.0001	...
N	>10	>1000	>10000	...

Ч.Т.Д.

в)

$x_n = \frac{1}{n!}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, докажем
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)} :$
$|\frac{1}{n!} - 0| < \epsilon$
$\frac{1}{n!} < \epsilon$
$\frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * ... * \frac{1}{n-1} * \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$
Заменим знаменатели всех множителей на 1. Тогда получтся выражение $\frac{1}{n}$.
Заметим, что, т.к. мы уменьшили все знаменатели, то произведение увеличилось, а значит, что $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$. Тогда если $\frac{1}{n} \to 0$, то и $\frac{1}{n!} \to 0$, ведь тогда выражение будет зажато между нулем (т.к. n > 0) и большим пределом, стремящимся к 0.. Докажем, что $\frac{1}{n} \to 0$.
Аналогично $\frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow$ при $n > \frac{1}{\epsilon}, \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ при $n > \frac{1}{\epsilon}, \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ $N_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon}] \Rightarrow$ при n $> \frac{1}{\epsilon}, |x_n| < \epsilon$

ϵ	0.1	0.001	0.0001	...
N	>10	>1000	>10000	...

Ч.Т.Д.

г)

$x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$
$\lim_{x\to\infty}(-1)^n \cdot 0.999^n = 0$, докажем
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)} :$
$|(-1)^n \cdot 0.999^n - 0| < \epsilon$

$0.999^n < \epsilon$
$\frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * ... * \frac{1}{n-1} * \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$
$n < \log_{0.999} \epsilon$
$N_\epsilon = [\log_{0.999} \epsilon] \Rightarrow$ при n $> \log_{0.999} \epsilon, |x_n| < \epsilon$

ϵ	0.1	0.001	0.0001	...
N	$> \frac{-1}{lg999-3}$	$> \frac{-3}{lg999-3}$	$> \frac{-4}{lg999-3}$	...

Ч.Т.Д.

№59

$\lim_{x\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, докажем $\forall\epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)}$:
$|\frac{2^n}{n!} - 0| < \epsilon$
$\frac{2^n}{n!} < \epsilon$
$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot ... \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n} < \epsilon$
Заменим все знаменатели на 2. Тогда произведение станет больше, т.к. знаменатели будут уменьшены. Но получившееся выражение равняется $\frac{4}{n}$. Значит, $\frac{4}{n} > \frac{2^n}{n!} \Rightarrow$ если $\frac{4}{n} \to 0$, то и $\frac{2^n}{n!} \to 0$, ведь тогда выражение будет зажато между нулем (т.к. n > 0) и большим пределом, стремящимся к 0.
Аналогично, $|\frac{4}{n} - 0| < \epsilon$
$n > \frac{4}{\epsilon} \Rightarrow$ при $n > \frac{4}{\epsilon}, \lim_{x\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$
$N(\epsilon) = [\frac{4}{\epsilon}] \Rightarrow$ при $n > \frac{4}{\epsilon}, |x_n| < \epsilon$
Ч.Т.Д.

№51

$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{(n-1)(\frac{n}{2})}{n^2}) =$
$= \lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{2n^2}) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{n}}{2}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
По определению предела, $\forall\epsilon > 0 \quad \exists N_{(\epsilon)} : \forall n > N_{(\epsilon)}$:
$|\frac{1-\frac{1}{n}}{2} - \frac{1}{2}| < \epsilon$
$\frac{1}{2n} < \epsilon$
$1 < 2\epsilon n$
$n > \frac{1}{2\epsilon}$
$N_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon}$
Ответ: $\frac{1}{2}, N_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon}$

№55

$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n})$
Упростим последовательность:
$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n} = S$
$2S = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + ... + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$
$S = 2S - S = (1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + ... + \frac{2n-1}{2^{n-1}}) - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n}) =$
$= 1 + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) + ... + (\frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n-3}{3^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{2}{2} + ... + \frac{2}{2^{n+1}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}} = 1 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^n} =$
$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} =$ (по форм. суммы геом. прогр.) $1 + 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} =$
$2 + 1 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{4}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$
Вернемся к пределу.
$\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{2n+3}{2^n}) = 3 - \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}(3 - \frac{2+\frac{3}{n}}{\frac{2^n}{n}}) = 3$
Ответ: 3

№56

$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n(n+1)}]$
Упростим последовательность:
$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$
Вернемся к пределу.
$\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{n+1}]=\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{\infty}]=1$
По определению предела, $\forall\epsilon>0 \quad \exists N_{(\epsilon)}:\forall n>N_{(\epsilon)}:$
$|1-\frac{1}{n+1}-1|<\epsilon$
$\frac{1}{n+1}<\epsilon$
$1<\epsilon n+\epsilon$
$n>\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$
$N_{(\epsilon)}=\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$
Ответ: $1, N_{(\epsilon)}=\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$