ДЗ по дискретной математике на 04.02.2022

Кожевников Илья 2112-1

3 февраля 2022 г.

№1

Сначала найдем мат. ожидание выигрыша. Т.к. билет стоит 40 рублей, а вероятность выигрыша - 0.25, мат ожидание будет равно 10 рублям. Тогда если у нас есть n участников лотереи, то всего на выдачу выигрышей уйдет 10n рублей. Тогда по неравенству Маркова будет верно следующее:
$Pr[\text{Выигрыш} > 1000 \text{ рублей}] \leq \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$
Получается, что вероятность выигрыша размером не менее 1000 рублей не больше 0.01.
Ч.Т.Д.

№2

Вероятности выпадения каждого числа от 0 до 99 одинаковы и равняются $\frac{1}{100}$. Поэтому мат ожидание будет равно
$\frac{1}{100} \cdot 0 + \frac{1}{100} \cdot 1 + ... + \frac{1}{100} \cdot 99 = 49.5$
Но т.к. покупатель взял 20 товаров, это значение надо умножить на 20.
$49.5 \cdot 20 = 990$
Ответ: 990 копеек (9 рублей 90 копеек)

№3

Найдем мат ожидание того, что отдельно взятый элемент не изменит своей позиции. Т.к. всего у нас перестановок $n!$ а при одной фиксированной позиции $(n-1)!$, то такое мат ожидание будет равно $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Тогда если считать изначально искомое мат ожидание, то оно будет равно сумме мат ожиданий того, что каждый отдельный элемент не поменяет позицию. А эта величина равна $\frac{1}{n} \cdot n = 1$
Ответ: 1

№5

Найдем оценку снизу:
Заметим, что $P[x > 6] = 1/6 \leq E[x]/6 \Rightarrow E[x] > 1$
Также из того, что с вероятностью $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ X принимает значения от 3 до 6, следует то, что в сумме $E[x] \geq 2.5$
Верхней оценки нет, т.к. с вероятностью $\frac{1}{6}$ число может быть сколь угодно большим.
Значит, $E[x] \in [2.5, +\infty)$
Ответ: $E[x] \in [2.5, +\infty)$

№6

Переберем все варианты.
Пускай наибольшее число - 1. Тогда всего вариантов бросков костей 1 - (1, 1, 1)
Если наибольшее число - 2, то всего вариантов 7 $(|\{1,2\}^3| - 7)$
Если наибольшее число - 3, то всего вариантов 19 $(|\{1,2,3\}^3| - 19)$
Если наибольшее число - 4, то всего вариантов 37 $(|\{1,2,3,4\}^3| - 37)$
Если наибольшее число - 5, то всего вариантов 61 $(|\{1,2,3,4,5\}^3| - 61)$
Если наибольшее число - 6, то всего вариантов 91 $(|\{1,2,3,4,5,6\}^3| - 91)$
Тогда искомое мат ожидание будет равно $1 \cdot \frac{1}{6^3} + 2 \cdot \frac{7}{6^3} + 3 \cdot \frac{19}{6^3} + 4 \cdot \frac{37}{6^3} + 5 \cdot \frac{61}{6^3} + 6 \cdot \frac{91}{6^3} \approx 4.96$
Ответ: 4.96

№7

Введем индикаторную функцию такую, что она равна 1, если выбранное число a не встречалось до него в слове, и равна 0, если a встречалось. Тогда общее искомое мат ожидание равняется сумме мат ожиданий для каждого отдельно взятого числа a. Найдем каждое такое мат ожидание. Для этого нам надо найти вероятность того, что фиксированное число ни разу не встречалось в слове длины a-1. Такая вероятность будет равна $(\frac{n-1}{n})^{a-1}$. Теперь просуммируем их, подставляя вместо a числа от 1 до n.
$(\frac{n-1}{n})^{1-1} + (\frac{n-1}{n})^{2-1} + (\frac{n-1}{n})^{3-1} + ... + (\frac{n-1}{n})^{n-1} = (\frac{n-1}{n})^{1-1} \cdot \frac{1-(\frac{n-1}{n})^n}{1-\frac{n-1}{n}} = \frac{1-(\frac{n-1}{n})^n}{1-\frac{n-1}{n}}$
Ответ: $\frac{1-(\frac{n-1}{n})^n}{1-\frac{n-1}{n}}$