ДЗ по линейной алгебре на 10.11.2021

Кожевников Илья 2112-1

9 ноября 2021 г.

№1

Пусть $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$
Тогда
$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$
Тогда
$A \cdot X_{11} = E$
$A \cdot X_{12} + B \cdot X_{22} = 0$
$C \cdot X_{22} = E$
Значит,
$X_{11} = A^{-1}$
$X_{22} = C^{-1}$
$X_{12} = A^{-1} \cdot (-B \cdot C^{-1})$
Тогда
$X = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$
Ответ: $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$

№2

$\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} = \frac{41-23i}{3+i} = \frac{(41-23i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{100-110i}{10} = 10 - 11i$

№3

Рассмотрим n, делящиеся на 4.
Тогда i^n можно будет представить в виде $i^4 \cdot i^4 \cdot ... \cdot i^4 = (-1)^2 \cdot ... \cdot (-1)^2 = 1$
Если же n четно, но не делится на 4, то i^n можно будет представить в виде $i^2 \cdot i^2 \cdot ... \cdot i^2$, где будет нечетное количество множителей, а, значит, произведение будет равно -1.
Если же n нечетно, то i^n будет равно $i^{n-1} \cdot i$, а i^{n-1} будет считаться по вышеописанному алгоритму для четных чисел.

№4

1)

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi)-(c+di)(c-di) = a^2+b^2-c^2-d^2$$

2)

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) - 1 =$$
$$= \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-1\cdot(1+i)\cdot(1-i)-0-i\cdot(-i)\cdot 1 = 1-2-1 = -2$$

№5

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & | & 1+i \\ 1-i & 1+i & | & 1+3i \end{pmatrix} -(1)\cdot\tfrac{1-i}{1+i} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & | & 1+i \\ 0 & 1+i-\frac{(1-i)^2}{1+i} & | & 1+3i-\frac{(1+i)(1-i)}{1+i} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & | & 1+i \\ 0 & 1+i+\frac{(1-i)2i}{(1+i)(1-i)} & | & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & | & 1+i \\ 0 & 2+2i & | & 4i \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{1+i} \\ \cdot\frac{1}{2+2i} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{1+i} & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{4i}{2+2i} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{4i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & | & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{8i+8}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & | & 1 \\ 0 & 1 & | & i+1 \end{pmatrix} +(2)\cdot i =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & i \\ 0 & 1 & | & i+1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = i+1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = i+1 \end{cases}$

№6

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & | & 1+i \\ 1-i & 1+i & | & 1+3i \end{pmatrix}$

$det_A = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2 - (1-i)^2 = 2i + 2i = 4i$

$det_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+3i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2 - (1-i)(1+3i) = 2i - 1 - 2i + 3i^2 = -4$

$det_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & 1+3i \end{vmatrix} = (1+i)(1+3i) - (1+i)(1-i) = (1+i)(1+3i-1+i) =$
$(1+i)4i = 4i - 4$

$z_1 = \frac{-4}{4i} = i$

$z_2 = \frac{4i-4}{4i} = i + 1$

Ответ: $\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = i + 1 \end{cases}$

№7

1)

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \psi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ \psi = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \psi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ \psi = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Значит, $\psi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $\psi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

2)

$|w| = \sqrt{3}, \psi = \frac{4\pi}{3}$

$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

$w = \sqrt{3}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$

Ответ: $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$