ДЗ по линейной алгебре на 19.01.2022

Кожевников Илья 2112-1

18 января 2022 г.

№1

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Запишем векторы в матрицу, и тогда, если определитель этой матрицы не равен нулю, это будет матрица перехода.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 0 + 10 + 12 - 0 = 28$

Значит, определитель не равен 0, а, значит, эта матрица - матрица перехода. Получается, матрица из векторов a, умноженная на матрицу перехода, дает новую матрицу из векторов b. Значит, векторы b - искомый базис (т.к. векторы a составляют базис). А матрица $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ - матрица перехода

№2

Координаты векторов e_1 и e_2 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда координаты e_1' и e_2'

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Тогда получается, что матрица $\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$ является матрицей перехода

Тогда при повороте векторов на $\frac{\pi}{3}$ координаты v' будут равны:

$\begin{pmatrix} -1 - 2\sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{3}) & -sin(\frac{\pi}{3}) \\ sin(\frac{\pi}{3}) & cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (-1 - 2\sqrt{3})\frac{1}{2} + (2 - \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} & (1 + 2\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} + (2 - \sqrt{3})\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$

№3

Заметим, что если в первом базисе поменять порядок векторов, то, по свойству матриц перехода, в ней так же изменится порядок строк. Если же изменить порядок во втором базисе, то изменится порядок столбцов. Поэтому если изменить и то, и то, то новая матрица будет представлять собой старую, в которой перевернут порядок строк, а затем столбцов (или наоборот).

№4

Запишем векторы e в матрицу A, а векторы e' в B.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -19 & 4 & 29 \\ -51 & 3 & 6 \\ 37 & -2 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 3 & 4 & -19 & 4 & 29 \\ -3 & -3 & 3 & -51 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & 37 & -2 & -34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Значит, векторы e - базис, а матрица, полученная в правой части СЛУ - матрица перехода. Но тогда, т.к. при умножении матрицы из векторов базиса на матрицу перехода получается матрица с векторами нового базиса, то и векторы e' - тоже базис.

Ч.Т.Д.

Ответ: матрица перехода: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

№5

5.1

Запишем наши векторы в столбцы матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

w_2 не содержит главной переменной, так что в базис данный вектор не входит. Значит, базис U + W таков: u_1, u_2, w_1, а его размерность равняется 3.

$dim(U \cup W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 1$

5.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	-2	3	0
2	-1	0	3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
3	6	1	0
6	13	0	1

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 3\\ 3 & 6 & 1 & 0\\ 6 & 13 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{5}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Ответ: $(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)^T$

5.3

Пусть существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, что $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Отсюда, ФСР - $(-1, 4, -3, 1)$.

$$-\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-5\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

№6

dim(U) + dim(W) = dim(U+W) + dim(U∩W)

Из условия следует, что dim(U) + dim(W) = 1. Но это означает, что одна из размерностей равна 0, а другая 1. Значит, dim(U+W) будет совпадать с тем подпространством, размерность которого равна 1 (т.к. сумма любого множества с пустым равняется самому этому множеству), а dim(U∩W) будет совпадать с тем подпространством, размерность которого равна 0 (т.к. пересечение пустого множества и любого другого - пустое множество).