ДЗ по линейной алгебре на 01.12.2021

Кожевников Илья 2112-1

12 декабря 2021 г.

№1

Необходимо доказать, что $\langle 2x^2+x+1, x^2-x+1, x\rangle = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$. Но любой многочлен степени ≤ 2 представим в виде ax^2+bx+c, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Значит, если мы покажем, что каждое из слагаемых ax^2, bx, c может быть получено в виде линейной комбинации системы векторов $2x^2+x+1, x^2-x+1, x$, то высказывание будет доказано.
Тогда пронумеруем все векторы из нашей системы:
$2x^2+x+1-(1)$
$x^2-x+1-(2)$
$x-(3)$
Тогда распишем, как мы можем получить каждое из слагаемых ax^2, bx, c:
$ax^2 = a\cdot((1)-(2)-2\cdot(3)) = ax^2$
$bx = b\cdot(3) = bx$
$c = c\cdot(-(1)+2\cdot(2)+3\cdot(3)) = c\cdot 1 = c$

Значит, мы любой многочлен вида ax^2+bx+c мы можем получить с помощью суммы вышеописанных слагаемых, умноженных на необходимые коэффициенты a, b, c.
Ч.Т.Д.

№2

1)

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+2x_4=0 \\ -x_1+2x_2+2x_3-7x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +(1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} +(1) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
2	1	0	0
3	0	5	1

Ответ: $(2,1,0,0)^T, (3,0,5,1)^T$

2)

$$\begin{cases} 12x_1+9x_2+3x_3+10x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+1x_3+2x_4=0 \\ 8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(2)\cdot 3 \\ \\ -(2)\cdot 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{4} \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(2)\cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
$-\frac{3}{4}$	1	0	0
$-\frac{1}{4}$	0	1	0

Ответ: $(-\frac{3}{4},1,0,0)^T, (-\frac{1}{4},0,1,0)^T$

3)

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3+3x_4+x_6=0 \\ 3x_4+2x_5+17x_6=0 \\ 2x_1-4x_2+8x_3+2x_5-5x_6=0 \\ 3x_4-2x_5-x_6=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(1)\cdot 2 \\ -(2) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(2)\cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot\frac{1}{6} \\ +(3), \cdot\frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 3\cdot(2) \\ -\frac{2}{3}\cdot(3) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} +2\cdot(3) \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	1	0	0	0	0
-4	0	1	0	0	0
7	0	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{9}{2}$	1

Ответ: $(2,1,0,0,0,0)^T, (-4,0,1,0,0,0)^T, (7,0,0,-\frac{8}{3},-\frac{9}{2},1)^T$

4)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(2) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
-1	$\frac{5}{4}$	1

Ответ: $(-1,\frac{5}{4},1)^T$

5)

$\left\{ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right.$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

x_1	x_2	x_3
-2	1	0
-3	0	1

Ответ: $(-2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T$

6)

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ \quad 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	0
0	0	$-\frac{2}{5}$	1

Ответ: $(1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, -\frac{2}{5}, 1)^T$

7)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что количество векторов в ФСР равняется количеству свободных переменных. Но тут свободных переменных не будет, т.к. количество строк больше количества столбцов. Значит, в ФСР не будет векторов.

№3

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0 \\ 3\alpha_3 + 2\alpha_2 + \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) -(1)\cdot 3 \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

α_1	α_2	α_3	α_4
1	-2	1	0
2	-3	0	1

Тогда базис будут составлять многочлены $(\alpha_3 x^3, -2\alpha_2 x^2, \alpha_1 x, 0)^T, (2\alpha_3 x^3, -3\alpha_2 x^2, 0, \alpha_0)^T$, а размерность будет 2.

Ответ: $(\alpha_3 x^3, -2\alpha_2 x^2, \alpha_1 x, 0)^T, (2\alpha_3 x^3, -3\alpha_2 x^2, 0, \alpha_0)^T$, 2

№4

Докажем три свойства:
1) в множестве есть нулевой элемент
2) Если есть x и y, то x + y также принадлежит множеству
3) Если есть x и скаляр λ, то λx также принадлежит множеству.
1) При x, являющейся, нулевой матрицей, выполняется $tr(XY) = 0$. Значит, 1) свойство выполняется.
2) Т.к. $tr(X_1Y) = 0$ и $tr(X_2Y) = 0$, то $tr(X_1Y) + tr(X_2Y) = 0 + 0 = 0$. Значит, 2) свойство выполняется.
3) Т.к. $tr(\lambda XY) = \lambda tr(XY) = \lambda \cdot 0 = 0$. Значит, 3) свойство выполняется.
Из выполнения всех трех свойств следует, что множество таких матриц составляет подпространство.

Запишем нашу матрицу Y и X в виде векторов: $(2, 3, 5, 4)^T, (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$
Тогда $XY = (2x_1 + 5x_2, 3x_1 + 4x_2, 2x_3 + 5x_4, 3x_3 + 4x_4)$
Тогда $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \to (1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2)$

x_1	x_2	x_3	x_4
$-\frac{5}{2}$	1	0	0
$-\frac{3}{2}$	0	1	0
-2	0	0	1

Тогда базис будет состоять из $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а размерность будет равна 3.

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, размерность - 3.

№5

Запишем векторы в строки матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \cdot 2 \\ -(1) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(2) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда базис будут составлять векторы $(1, 0, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 1, 2, 1)^T, (0, 0, 0, 1, 3)^T$
Ответ: $(1, 0, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 1, 2, 1)^T, (0, 0, 0, 1, 3)^T$