ДЗ по дискретной математике на 19.11.2021

Кожевников Илья 2112-1

19 ноября 2021 г.

№1

Заметим, что любую прямую на плоскости можно задать уравнением ay = bx + c, где a, b, c $\in R$. Значит, каждая прямая на плоскости задается тройкой коэффициентов (a, b, c). Но т.к. все три коэффициента принадлежат действительным числам, то и множество таких троек равномощно множеству вещественных чисел. Но множество вещественных чисел континуально, а, значит, множество всех таких троек континуально, а, значит, множество всех прямых на плоскости континуально.
Ответ: Да, верно.

№2

Рассмотрим из множества всех неубывающих последовательностей такие, что каждый член в них больше предыдущего либо на 1, либо на 2. Тогда докажем, что такое множество имеет мощность континуум (1), а множество всех последовательностей также континуально(2). Тогда и множество всех неубывающих последовательностей будет континуально.
1) Тогда такое множество будет иметь мощность 2^N, а, значит, оно будет континуально.
2) Тогда множество всех последовательностей будет иметь мощность $N^N < 2^{N \cdot N}$, то есть 2^N, что означает, что мощность множества всех последовательностей не более, чем континуум.
Из 1) и 2) следует, что множество всех неубывающих последовательностей континуально.
Ч.Т.Д.

№3

Заметим, что, т.к. все последовательности состоят из натуральных чисел, то в каждой из них, начиная с какого-то номера, либо будут стоять одни единицы, либо будут повторяться другие одни и те же числа. Это означает, что фактически все такие последовательности конечны. Но нам известно, что не более чем счётное (конечное или счётное) объединение не более чем счётных множеств является не более чем счётным множеством. А, значит, все множество невозрастающих последовательностей счетно.
Ответ: Нет, оно счетно.

№4

Построим такую последовательность, что каждый ее элемент равен либо 10, либо 01. Тогда заметим, что в данной последовательности будет выполняться условие про почти равенство количества единиц и нулей (т.к. любой отрезок нечетной длины будет представлять собой четное и одинаковое количество нулей и единиц и еще одну цифру). Такое множество будет 2^N. Но это означает, что оно несчетно (по теореме Кантора). Но т.к. подмножество счетного множества конечно или счетно, то всего последовательностей, удоволетворяющих условию, несчетное множество.
Ответ: нет, оно несчетно.

№5

Расположим все точки, из которых исходят лучи, на каждой из точек на отрезке [0, 1]. Первый из лучей каждого угла направим вертикально вниз. Второй же луч будет проводить из каждой точки под следующими углами:
Начнем рисовать вторые лучи, начиная с точки на правой границе отрезка [0, 1], под следующим углом: $90^o - 90^o * t$, где t - координата x на плоскости.
Тогда получится, что ни один луч из верхней полуплоскости не будет пересекать никакой другой, каждый угол с точкой с большей координатой x будет находиться "внутри"предыдущего угла, а градусные меры всех углов будут различны.
Ответ: Да, можно.

№7

Рассмотрим множество всех горизонтальных прямых на плоскости. Заметим, что такое множество континуально. Значит, если на каждой такой прямой лежит хотя бы один элемент множества, например, A, то оно также континуально. Если же на какой-либо прямой нет ни одного элемента множества A, то получается, что вся эта прямая лежит в множестве B, а, значит, оно также континуально.
Итак, мы доказали, что хотя бы одно из множеств A и B обязательно континуальны.
Но это означает, что и множество $A \cup B$ также континуально.
Ч.Т.Д.