ДЗ по линейной алгебре на 15.09.2021

Кожевников Илья 2112-1

13 сентября 2021 г.

№1

Доказать: $\lambda(\mu * A) = (\lambda\mu) * A$
Представим λ в виде нулевой матрицы, умноженной на λ. Аналогично представим в виде матрицы μ. Тогда наше выражение с тремя перемноженными матрицами примет вид $\lambda\mu * A$. Но по правилу ассоциативности $\lambda(\mu * A) = (\lambda\mu) * A$. Следовательно, изначальное выражение верно при любых λ и μ.
Ч.Т.Д.

№2.1

$$\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3 & 29\\ 2 & 18\\ 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

№2.2

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

№2.3

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

№2.4

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$

№3

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 9\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-10 & 10\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-10 & 10\end{pmatrix}$

№4

Найти: F(A), где $F(x) = x^3 - 3x + 2$, A $= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$A^3 - 3A + 2$

1) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 5 & 5\\ 5 & 6 & 5\\ 5 & 5 & 6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22 & 21 & 21\\ 21 & 22 & 21\\ 21 & 21 & 22\end{pmatrix}$

2) $3A = 3 * \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 3 & 3\\ 3 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}22 & 21 & 21\\ 21 & 22 & 21\\ 21 & 21 & 22\end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix}6 & 3 & 3\\ 3 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16 & 18 & 18\\ 18 & 16 & 18\\ 18 & 18 & 16\end{pmatrix}$

4)$2 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}16 & 18 & 18\\ 18 & 16 & 18\\ 18 & 18 & 16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\end{pmatrix}$

№5

1) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

№6

Доказать: $X^2 - (a+d)X + ad - bc = 0$, где X $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$

2) $(a+d)x = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$

3) $ad - bc = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

4) $x^2 - (a+d)x = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Ч.Т.Д.

№7

а)

Каждый элемент матрицы A будет умножаться на λn, где n - номер столбца в матрице Λ. Например:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda 1 & b\lambda 2 & c\lambda 3 \\ d\lambda 1 & e\lambda 2 & f\lambda 3 \\ g\lambda 1 & h\lambda 2 & i\lambda 3 \end{pmatrix}$$

б)

В таком случае при умножении A на Λ всегда будет получаться A, ведь тогда Λ - единичная матрица. Например:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

8

При умножении A на E получится матрица, где на j-том столбце каждый элемент равен соответствующему элементу из матрицы A (1), а при умножении E на A получится матрица, где на i-той строке каждый элемент равен соответствующему элементу из матрицы A (2).

$$(1)\ \begin{pmatrix} a11 & a12 & ... & a1j & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2j & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ai1 & ai2 & ... & aij & ... & ain \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ am1 & am2 & ... & amj & ... & amn \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & a1j & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a2j & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & aij & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & amj & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a11 & a12 & ... & a1j & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2j & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ai1 & ai2 & ... & aij & ... & ain \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ am1 & am2 & ... & amj & ... & amn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ai1 & ai2 & ... & aij & ... & ain \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

9

а)

Пусть $a_{ij} = a_{kl} = 1$
Т.к. все строки и столбцы в обеих матрицах за исключением тех, в которых содержатся a_{ij} и a_{kl}, нулевые, то все элементы произведения матриц будут равны 0 кроме тех, у которых столбец равен i, а строка - l. Тогда значение a_{il} будет равно $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & ... & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{kl} \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} =$ $a_{ij} * a_{kl} = 1 * 1 = 1$
Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Ч.Т.Д.

б)

В противном случае аналогично, все строки и столбцы нулевые кроме i-тых и j-тых => при их перемножении будут получаться нули, а при перемножении строки и столбца с единицами выражение примет следующий вид: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & a_{ij} & ... & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ a_{kl} \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, где $j \neq k$ => произведение будет равно $0 * 0 + 0 * 0 + a_{ij} * 0 + ... + 0 * a_{kl} + ... + 0 * 0$, что будет равно 0. Следовательно, все элементы произведения матриц будут равны нулю => матрица будет нулевая.
Ч.Т.Д.