ДЗ по дискретной математике на 25.02.2022

Кожевников Илья 2112-1

24 февраля 2022 г.

№1

Заметим, что из условия следует, что наше число a можно представить в виде $a = 2k$, где k - нечетное число. Но тогда мы можем разложить число k на множители, а каждому множителю k будет соответствовать множитель a, просто умноженный на 2. Значит, количество четных и нечетных делителей a равно.
Ч.Т.Д.

№2

$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$
Рассмотрим последовательность чисел p-1, p, p+1
Заметим, что среди трех подряд идущих чисел хотя бы одно должно делиться на 3. Но это точно не p, т.к. оно простое по условию
Также заметим, что p-1 и p+1 - числа четные, т.к. p нечетное (что следует из того, что оно простое), и при этом одно из них делится на 4. Значит, (p-1)(p+1) делится на 8.
Тогда (p-1)(p+1) делится и на 8, и на 3. Значит, оно делится на 24.
Ч.Т.Д.

№3

Заметим, что из теоремы Эйлера следует, что $3^{\varphi(10000) \equiv 1 (mod\ 10000)}$
Тогда найдем $\varphi(10000)$
$\varphi(10000) = 2^3(2 - 1) \cdot 5^3(5 - 1) = 8 \cdot 500 = 4000$
Но это означает, что $3^{4000} \equiv 1$, из чего следует, что 3^{4000} оканчивается на 0001.
Ч.Т.Д.

№4

Представим наше число n в следующем виде:
$n = p(1)^{k(1)} \cdot p(2)^{k(2)} \ldots.$
Тогда докажем делимость n на $p(i)^{k(i)}$, где p(i) нечётно.
Из теоремы Эйлера следует, что $2^{\varphi(p(i)^{k(i)})} - 1$ делится на $p(i)^{k(i)}$. Тогда докажем, что n! делится на $\varphi(p(i)^{k(i)})$. Но т.к. $\varphi(p(i)^{k(i)}) < p(i)^{k(i)} \leq n$, n на $\varphi(p(i)^{k(i)})$ делится. Значит, наше утверждение доказано.
Ч.Т.Д.

№5

Заметим, что числа 7, 8 и 9 - взаимно простые. Это означает, что если мы прибавим единицу к искомому числу, то оно будет делиться на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Но т.к. наше искомое число трехзначное, оно равно 503.
Ответ: 503.

№6

a)

$19^{10} \equiv x(mod\ 66)$
$19^{10} = 361^5 = (66 \cdot 5 + 31)^5 \equiv 31^5 = 31 \cdot 961^2 = 31 \cdot (66 \cdot 14 + 37)^2 \equiv 31 \cdot 37^2 = 31 \cdot 1369 = 31 \cdot (66 \cdot 20 + 49) \equiv 31 \cdot 49 = 1519 = 66 \cdot 23 + 1$
Ответ: $19^{10} \equiv 1(mod\ 66)$

b)

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
$\varphi(105) = (3-1)(5-1)(7-1) = 48$
Из теормеы Эйлера следует, что $2^{\varphi(105)} \equiv 1(mod 105)$
Также заметим, что $2022 = 48 \cdot 42 + 6$
Тогда получается, что $2^{2022} = 2^6 \cdot 2^{48} \cdot 2^{42} \equiv 2^6 = 64$
Ответ: $2^{2022} \equiv 64(mod\ 105)$

№7

$n^2 + 3n + 1 \equiv n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2(mod\ 5)$
$n^2 + 3n + 1 \equiv n^2 - 8n + 16 - 4 = (n-4)^2 - 2^2 = (n-6)(n-2)(mod\ 11)$.
Значит, нам подходят числа, для которых выполняется
$(n \equiv 1(mod\ 5) \cap (n \equiv 2(mod\ 11) \cup n \equiv 6(mod\ 11)))$.
Отсюда следует, что нам подходят числа, для которых выполняется
$n \equiv 6(mod\ 55) \cup n \equiv 46(mod\ 55)$
Ответ: $n \equiv 6(mod\ 55) \cup n \equiv 46(mod\ 55)$