ДЗ по мат. анализу на 06.04.2022

Кожевников Илья 2112-1

5 апреля 2022 г.

№3

c)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{ln(k)^{ln(k)}}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ln(k)^{-ln(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{ln(ln(k)^{-ln(k)})} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-ln(k)(ln(ln(k)))} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{ln(ln(k))}}$
Но заметим, что $ln(ln(k)) > 1$ при $k \to \infty$.
Значит, ряд сходится.

d)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{k^{2k}}{(k!)^2})$
По необходимому признаку сходимости ряд сходится,
если $(\frac{k^{2k}}{(k!)^2}) \to 0$ при $k \to \infty$.
$\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{k^{2k}}{(k!)^2}) \geq \lim\limits_{k\to\infty}(\frac{(k!)^2}{(k!)^2})(\text{т.к.} k^k = k \cdot k \cdot ... \cdot k \geq k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot = k!) = 1.$
Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{(k!)^2}{(k!)^2})$ расходится. Но из этого следует, что и больший ряд также расходится.
Значит, изначальный ряд расходится.

e)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{k!(2k+1)!}{(3k)!})$
Применим признак Даламбера
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{(k+1)!(2k+3)!}{(3k+3)!}}{\frac{k!(2k+1)!}{(3k)!}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!(2k+3)!(3k)!}{(3k+3)!k!(2k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(2k+2)(2k+3)}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} < 1$ (очев.)
Значит, ряд сходится.

f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\int\limits_{0}^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx)$$

Применим признак Даламбера.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{0}^{\frac{1}{k+1}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx}{\int\limits_{0}^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{0}^{\frac{1}{k+1}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx}{\int\limits_{0}^{\frac{1}{k+1}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx + \int\limits_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx}$$

Но т.к. общий член ряда принял вид $\frac{a}{a+b}$, то он очевидно меньше единицы, а, значит, ряд сходится.