№1

1) $X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-5&6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&5\\-2&-4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1&-5\\2&6\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}3&5&-1&-5\\-2&-4&2&6\end{array}\right)_{+(1)}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&5&-1&-5\\1&1&1&1\end{array}\right)^{-3\cdot(2)}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\0&2&-4&-8\end{array}\right)\cdot\frac{1}{2}=$

$=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\0&1&-2&-4\end{array}\right)^{-(2)}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&5\\0&1&-2&-4\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3&5\\-2&-4\end{pmatrix}^{T}=$

$=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}$

$\exists\ \begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}=A,\ \begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=B,\ \begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}=C,\ XB=Y$

$AY=C$

$\left(\begin{array}{cc|cc}3&-1&14&16\\5&-2&9&10\end{array}\right)_{-(1)}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&-1&14&16\\2&-1&-5&-6\end{array}\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&-3\\3&-1&14&16\end{array}\right)_{-3\cdot(1)}=$

$=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&-3\\0&\frac{1}{2}&\frac{43}{2}&25\end{array}\right)\cdot 2=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&-3\\0&1&43&50\end{array}\right)^{+\frac{1}{2}\cdot(2)}=$

$=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&19&22\\0&1&43&50\end{array}\right)\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$

$XB=Y$

$B^TX^T=Y^T\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}5&7&19&43\\6&8&22&50\end{array}\right)_{-(1)}=\left(\begin{array}{cc|cc}5&7&19&43\\1&1&3&7\end{array}\right)^{-5\cdot(2)}=$

$=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3&7\\0&2&4&8\end{array}\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3&7\\0&1&2&4\end{array}\right)^{-(2)}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&1&2&4\end{array}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow X^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

3) $\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times2}{X} = \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \overset{-(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -(2) \\ -3\cdot(2) \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 9 & 7 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -(2) \end{matrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot\frac{1}{5} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{7}{5} \end{array}\right)^{+2\cdot(2)} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{7}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_3 \end{cases}, \ x_3 \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x_3 & \frac{14}{5} - \frac{3}{5}y_3 \\ \frac{9}{5} + \frac{x_3}{5} & \frac{y_3}{5} + \frac{7}{5} \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{14}{5} - \frac{3}{5}y_3 \\ y_2 = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}y_3 \end{cases}, \ y_3 \in \mathbb{R}$$

Овет: $\begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5}x_3 & \frac{14}{5} - \frac{3}{5}y_3 \\ \frac{9}{5} + \frac{x_3}{5} & \frac{y_3}{5} + \frac{7}{5} \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$

4) $A^T X + X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$(A^T + E)X = B \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right)_{-2\cdot(1)} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\cdot\frac{1}{6}} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{+(2)} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_2 = x_2 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_2 + 0 \\ y_2 = y_2 + 0 \end{cases}, \ x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} z_1 = z_2 + 3 \\ z_2 \ \ z_2 + 0 \end{cases}$$

Отв.: $\begin{pmatrix} x_2 + 2 & y_2 & z_2 + 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$

№ 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & & & & \vdots & \dots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Для перевода левой матрицы к У.С.В. необходимо сначала вычесть из всех строк, кроме последней, последнюю строку. Затем из всех, кроме последних двух, нужно вычесть предпоследнюю строку. Так, повторяя данные действия и пробегаясь по всем строкам снизу вверх, мы получим У.С.В. Тогда наше уравнение примет след. вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & n-f(n) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & n-1-f(n-1) \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2-f(n-2) \\ \dots & & & & \dots & \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Для удобства} \\ \exists \sum_{i=1}^{x} i = f(x)\end{array}}$$

$$\begin{cases} a^1_1 = a^1_2 + 1 \\ a^1_2 = a^1_2 \\ a^1_3 = a^1_2 \\ \dots \\ a^1_n = a^1_n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2_1 = a^2_3 + 1 \\ a^2_2 = a^2_3 + 1 \\ a^2_3 = a^2_3 \\ \dots \\ a^2_n = a^2_3 + 1 \end{cases}$$

$$\dots$$

$$\begin{cases} a^n_1 = a^n_2 + n - f(n) \\ a^n_2 = a^n_2 + n - 1 - f(n-1) \\ a^n_3 = a^n_2 + n - 2 - f(n-2) \\ \dots \\ a^n_n = a^n_2 + 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} a^1_2+1 & a^2_3+1 & \dots & a^n_2+n-f(n) \\ a^1_2 & a^2_3+1 & \dots & a^n_2+n-1-f(n-1) \\ a^1_2 & a^2_3 & \dots & a^n_2+n-2-f(n-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^1_n+1 & a^2_3+1 & \dots & a^n_2+1 \end{pmatrix}$

№3.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $\det A = 5-8=-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3}\cdot M^{T} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $\det A = 84+96+45-72-48-105=225-225=0$

$\Rightarrow$ определителя не существует $\Rightarrow$ обратной матрицы нет.

Ответ: нет.

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $\det A = 54+28+45-27-63-40=$

$=127-130=-3$

$m_{11} = \begin{vmatrix}9 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix} = 27-20=7$ $\qquad m_{23} = \begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 5\end{vmatrix} = -3$

$m_{12} = \begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -5$ $\qquad m_{31} = \begin{vmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{vmatrix} = 1$

$m_{13} = \begin{vmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{vmatrix} = 6$ $\qquad m_{32} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 1$

$m_{21} = \begin{vmatrix}7 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix} = -6$ $\qquad m_{33} = \begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix} = -3$

$m_{22} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 3$

Значит, $M=\begin{pmatrix}7 & -5 & 6\\ -6 & 3 & -3\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{3}\cdot M^{T} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

№4

$\left(\begin{array}{ccc|cc}2 & 10 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)^{-2\cdot(2)} = \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 5 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2\end{array}\right)\cdot -\frac{1}{5} =$

$= \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 5 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{array}\right)^{-4\cdot(2)} = \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 5 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{array}\right)$

$\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 10 & 3\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ч.т.д.

Ответ: $\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$