ДЗ по дискретной математике на 3.12.2021

Кожевников Илья 2112-1

5 декабря 2021 г.

№1

Представим A в виде суммы множеств натуральных чисел: N+N, , а B в виде одного множества N. Значит, тогда A+B можно представить в виде N+N+N, что также будет равно B+A, то есть они будут давать изоморфные порядки. Но заметим, что A и B порядково неизоморфны (т.к. в N есть один элемент, не имеющий предыдущего, а в N+N - два). Отсюда следует, что A не $\cong B$, т.к. получается, что не существует необходимой биекции.
Ч.Т.Д.

№2

Для начала выпишем:
Все делители числа 42: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
Все подмножества $\{1, 2, 3\}$: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\varnothing$.
Тогда рассмотрим подобную биекцию:
f(1) = $\varnothing$, f(2) = $\{1\}$, f(3) = $\{2\}$, f(6) = $\{3\}$,f(7) = $\{1, 2\}$, f(14) = $\{2, 3\}$, f(21) = $\{3, 1\}$, f(42) = $\{1, 2, 3\}$
Заметим, что в данной биекции из x | y следует, что f(x) < f(y). Значит, мы нашли подходящую биекцию. Значит, порядки изоморфны.
Ответ: Да, они изоморфны.

№3

Пусть (1,1) из N $\times$ Z соответствует (m,n), тогда (1,0) будет соответствовать (m,n-1) и т.д. Тогда в какой-то момент для пары (m-1,n) из Z $\times$ Z места в N $\times$ Z не найдется, т.к. оба элемента должны быть ≥ 0. Значит, невозможно составить необходимую биекцию. Значит, порядки неизоморфны.
Ч.Т.Д.

№4

В произведении данных цепей будет (n - 1)(n - 1) элементов вида (a, b), выделим среди них некоторое количество цепей, а затем воспользуемся теоремой Дилуорса о том, что максимальная длина антицепи равна минимальному количеству непересекающихся цепей. Приведем пример, как можно разделить выражение на n цепей. Разеделим всевозможные элементы на цепи вида (0, 0), (0, 1), ..., (0, n-1), (1, 0), (1, 1), ..., (1, n-1). Данные цепи удовлетворяют условию задания, ведь все элементы в них упорядочены покоординатно. Таких цепей будет ровно n, ведь каждая из них начинается с элемента от 0 до n-1, а таких элементов n. Тогда, по теореме Дилуорса, максимальный размер антицепи и есть n.
Ответ: n

№5

Допустим, что у нас нет цепи длины n + 1, тогда максимальная длина возможной цепи будет n. В данном случае рассмотрим наш порядок элементов.
По теореме Дилуорса максимальная длина антицепи равна минимальному количеству непересекающихся цепей. Тогда заметим, что минимальным количеством непересекающихся цепей будет их количество при максимальной длине каждой из цепей. Таким образом, будем считать, что длина каждой цепи ровно n.
Так как у нас mn + 1 элементов в отношении, то мы можем выделить m таких цепей и останется еще один элемент. Мы знаем, что он не включен ни в одну цепь, так как иначе длина цепи будет n + 1.
Тогда применим теорему Дилуорса. Минимальное возможное количество цепей в разбиении будет m + 1, как мы уже выяснили, а значит максимальная возможная длина антицепи будет равна m+1.
Ч.Т.Д.

№7

Пусть количество единиц в нашей последовательности - n. Тогда можно записать в следующем виде все индексы, под которыми в последовательности стоят единицы:
$i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_n$. Но заметим, что от каждой замены 01 на 10...0 слово $i_1 i_2 ... i_n$ уменьшается в лексикографическом порядке (т.к. индекс единицы из группы 01 уменьшится). Но очевидно, что бесконечно такое слово уменьшаться не может, а, значит, такие шаги невозможно выполнить бесконечное количество раз.
Ч.Т.Д.