ДЗ по линейной алгебре на 16.03.2022

Кожевников Илья 2112-1

15 марта 2022 г.

№1

Для начала установим, какие векторы из данных линейно независимы.

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&2&-2\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-2(1)\\-(1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\+2(2)\\-(2)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Значит, третий вектор (0, 1, -2, 1) не состоит в базисе.

Теперь найдем фср.

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2(1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-2	2	1	0
-1	-1	0	1

Значит, базис пространства $U^{\perp}$ составляют векторы $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

№2

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-4(1)\\-7(1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\cdot-\frac{1}{3}\\-2(2)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{matrix}-2(2)\\\\\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Решим ФСР.

x_1	x_2	x_3
1	-2	1

Теперь решим ФСР (1, -2, 1).

x_1	x_2	x_3
2	1	0
-1	0	1

Тогда базис будут составлять векторы $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

№3

Заметим, что нахождение ФСР - это есть нахождение базиса пространства решений СЛУ. Но т.к. в данном задании просят найти уравнения, а не базис пространства их решений, то применим алгоритм из предыдущего задания, в котором не будем находить вторую ФСР, ведь ответом будет решение первой ФСР.

$$\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\3&2&0&-2\\3&1&9&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot\frac{1}{2}\\-(3)\\\\\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-9&-1\\3&1&9&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-3(1)\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-9&-1\\0&-\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\cdot-2\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-9&-1\\0&1&-9&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-(2)\end{matrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-9&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}-\frac{1}{2}(2)\\\\\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&6&0\\0&1&-9&-1\end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-6	9	1	0
0	1	0	1

Ответ: $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

№4

Проверим векторы на ортогональность. Для этого проверим, является ли их скалярное произведение нулевым.

$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) = 1 + 2 + 3 - 6 = 0$

Значит, набор векторов ортогональный.

Теперь дополним до ортогонального базиса R^4

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Значит, дополним векторами e_3 и e_4 до базиса R^4

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Теперь ортогонализуем этот набор векторов методом Грама-Шмидта.

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{(0)}{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{44}{161} \\ -\frac{65}{161} \\ \frac{75}{161} \\ \frac{17}{161} \end{pmatrix}$

$f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(e_4, f_1)}{(f_1, f_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(e_4, f_2)}{(f_2, f_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{(e_4, f_3)}{(f_3, f_3)} \begin{pmatrix} -\frac{44}{161} \\ -\frac{65}{161} \\ \frac{75}{161} \\ \frac{17}{161} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-3}{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{17}{75} \begin{pmatrix} -\frac{44}{161} \\ -\frac{65}{161} \\ \frac{75}{161} \\ \frac{17}{161} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-3}{23} \\ \frac{-6}{23} \\ \frac{-9}{23} \\ \frac{9}{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{748}{12075} \\ -\frac{221}{2415} \\ \frac{17}{161} \\ \frac{289}{12075} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{75} \\ \frac{1}{15} \\ 0 \\ \frac{1}{75} \end{pmatrix}$

Значит, ортогональный базис будут составлять векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{44}{161} \\ -\frac{65}{161} \\ \frac{75}{161} \\ \frac{17}{161} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{7}{75} \\ \frac{1}{15} \\ 0 \\ \frac{1}{75} \end{pmatrix}$

№5

Запишем векторы e_1, e_2, e_3, e_4

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Теперь применим к данным векторам алгоритм Грама-Шмидта.

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(e_3,f_1)}{(f_1,f_1)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(e_3,f_2)}{(f_2,f_2)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{(e_4,f_1)}{(f_1,f_1)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(e_4,f_2)}{(f_2,f_2)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(e_4,f_3)}{(f_3,f_3)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{5}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{5}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$