ДЗ по дискретной математике на 15.10.2021

Кожевников Илья 2112-1

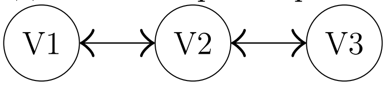
14 октября 2021 г.

№1

Заметим, что данный граф можно записать в следуюдем виде:
0 2 4 6 8 5 7 9 6 3 0 2 4 1 3 0
В данной записи пара соседних чисел x и Y означает, что существует ребро, исходящее из x и входящее в Y.
Заметим, что в данном ряду фигурируют все числа от 0 до 9, а ноль служит и началом ряда, и концом. Значит, из любого числа в строке можно попасть в любое другое. Значит, граф сильно связан. Значит, в нем 1 компонента связности.
Ответ: 1

№2

Для того, чтобы доказать неверность данного высказывания, достаточно привести пример, где имеется противоречие с требованиями в условии. Рассмотрим данный граф:



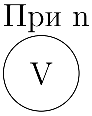
Заметим, что из $\forall$ вершины в графе в $\forall$ другую идет ровно один простой путь, а количество вершин $\geq$ 2. Но исходящая степень у вершины V2 равняется двум. Значит, контрпример приведен. Значит, высказывание неверно.
Ответ: нет, неверно.

№3

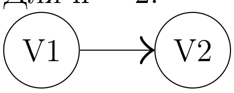
Докажем данное высказывание методом математической индукции.
Пусть n - количество вершин в графе.

База:

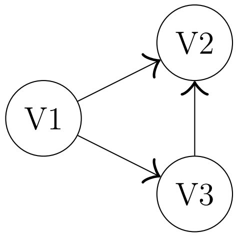
При n = 1:



Тогда вершина V достижима из самой себя.
Для n = 2:



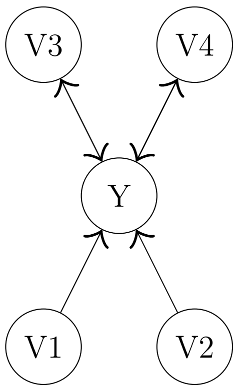
В данном случае искомая вершина - V1
Для n = 3:



В данном графе искомая вершина - V1.
База доказана.
Шаг:
Пусть при K вершин в графе высказывание верно. Тогда докажем, что высказывание также верно и для K + 1.
Заметим, что, по определению турнира, при добавлении новой вершины V в граф старый набор вершин и ребер не изменится, к нему лишь добавятся K ребер и 1 вершина.
Тогда будут возможны 2 случая:
1) Новая вершина V имеет исходящую степень K
2) Новая вершина V имеет исходящую степень, меньшую K
В 1) случае искомой вершиной будет сама вершина V. Во 2) случае также есть два случая: ($V^/$)
а) из $V^/$ есть ребро в V
б) из $V^/$ нет ребра в V
В случае а) искомой вершиной будет $V^/$. В случае б) искомой вершиной также будет $V^/$, ведь она имеет исходящие пути во все вершины из старого графа, а т.к. у V входящая степень не равна 0 (по построению суждения), то есть вершина, из которой исходит ребро в V. Но сама эта вершина связана с $V^/$. Значит, $V^/$ - искомая вершина.
Итак, во всех возможных случаях при добавлении в граф новой вершины искомая вершина все равно найдется. Значит, шаг индукции доказан.
Значит, высказывание верно.
Ч.Т.Д.

№4

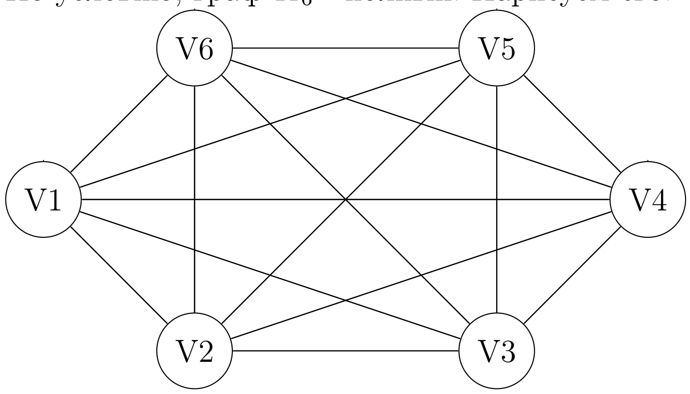
Докажем данное высказывание от противного.
Если данный граф G не сильно связный, то у него должна быть такая пара вершин x и Y, между которыми не существует пути в определенном направлении. Такое возможно в нескольких случаях:
1) в графе H присутствует висячая вершина, а в графе G у этой вершины входящая степень была равна 1, а исходящая - 0.
2) в множестве ребер и вершин M, которое исходит из Y, нет такой вершины, из которой был бы путь до Y или до вершин, из которых есть путь до Y.
В 1) случае возникает противоречие с тем, что исходящие и входящие степени должны быть равны.
Рассмотрим 2) случай.
Для того, чтобы из вершин множнества M был путь обратно до Y, необходимо, чтобы хотя бы одна из вершин, в которые идут ребра из Y, имела ребро, идущее из нее в Y. Тогда рассмотрим построение этой вершины, вершины Y и инцидентных им ребер. (V3, V4 - вершины, принадлежащие M и соседние с Y)



Пусть в Y входят n ребер (на рисунке n = 2). Значит, из Y должно выходить также n ребер. Но для того, чтобы существовал путь из V3 в Y, необходимо, чтобы в Y шло еще одно ребро. Тогда возникает противоречие с тем, что исходящие и входящие степени всех вершин равны. Значит, в обоих случаях мы приходим к противоречию. Значит, противное предположение невозможно, а значит высказывание верно.
Ч.Т.Д.

№6

По условию, граф K_6 - полный. Нарисуем его.



Заметим, что, так как степени всех вершин - 5, а за один проход через вершину, мы можем пройти максимум по 2 ребрам (через одно в вершину зайти, через другое выйти), то в каждой вершине мы побываем ровно 3 раза (2 раза зайдем и выйдем через 2 ребра и 1 раз зайдем и выйдем через одно и то же ребро). Тогда, так как вершин в графе 6, то мы побываем в $6 \cdot 3 = 18$ вершинах. Но так как длина пути на единицу меньше, чем количество вершин, то длина пути составит 17.
Ответ: 17