ДЗ по мат. анализу на 27.10.2021

Кожевников Илья 2112-1

25 октября 2021 г.

№2

a)

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$
$a_n = \frac{1}{\frac{100}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$
$a_n = \frac{1}{(\frac{10}{\sqrt[4]{n}})^2+(\sqrt[4]{n})^2+20-20}$
$a_n = \frac{1}{(\frac{10}{\sqrt[4]{n}}-\sqrt[4]{n})^2+20}$
Так как формула a_n приняла вид дроби, ее максимальное значение будет достигаться при минимальном значении знаменателя.
Но так как знаменатель дроби представляет собой сумму квадрата и 20, то наименьшим знаменатель будет тогда, когда квадрат будет ближе всего к 0.
Тогда решим уравнение $\frac{10}{\sqrt[4]{n}} - \sqrt[4]{n} = 0$
Пусть t $= \sqrt[4]{n}$
$\frac{10}{t} - t = 0$
$10 - t^2 = 0$
$t = \sqrt{10}$
$\sqrt[4]{n} = \sqrt{10}$
$n = 100$
Значит, минимальное значение знаменателя принимается при n $=$ 100, а значит и максимальное значение a_n достигается при n $=$ 100. Там она равняется $\frac{1}{20}$
Ответ: $\frac{1}{20}$.

b)

$a_n = \frac{n^2-14}{2^n}$
Докажем, что последовательность возрастает при n $<$ 5 и убывает при n $>$ 6 при помощи математической индукции. Тогда максимальное значение a_n будет достигаться при n $=$ 5, n $=$ 6
1)
База:
$\frac{1^2-14}{2^1} < \frac{2^2-14}{2^2}$
$-6.5 < -2.5 \Rightarrow$ база доказана.
Шаг:
Пусть $a_k < a_{k+1}$. Докажем, что $a_{k+1} < a_{k+2}$

$\frac{(k+1)^2-14}{2^{(k+1)}} < \frac{(k+2)^2-14}{2^{(k+2)}}$
$2k^2+4k+2-28 < k^2+4k+4-14$
$k^2-16<0$
$(k-4)(k+4)<0$
Но так как мы доказываем, что посл-ть возрастает при k < 5, то выражение верно. Значит, шаг доказан. Значит, посл-ть возрастает при k < 5.
2)
База:
$\frac{7^2-14}{2^7} > \frac{8^2-14}{2^8}$
$\frac{35}{128} > \frac{25}{128} \Rightarrow$ база доказана.
Шаг:
Пусть $a_k > a_{k+1}$. Докажем, что $a_{k+1} > a_{k+2}$
$\frac{(k+1)^2-14}{2^{k+1}} > \frac{(k+2)^2-14}{2^{k+2}}$
$2(k^2+2k+1)-14 > (k^2+4k+4)-14$
$2k^2+4k-12 > k^2+4k-10$
$k^2-2>0$
Но так как мы рассматривем k > 6, то выражение верно, а значит, шаг доказан. Значит, посл-ть убывает при k > 6.

Из 1) и 2) следует, что посл-ть достигает своего максимума при n = 5 или n = 6, где она равняется $\frac{11}{32}$
Ответ: $\frac{11}{32}$

№3

а)

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(2^k)}{k^2}$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon$
$\forall m, n > N_\epsilon :$
$|a_m - a_n| < \epsilon$
$|\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{cos(2^k)}{k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{cos(2^k)}{k^2}| < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{cos(2^k)}{k^2} < \epsilon$
Заметим, что числители всех слагаемых ≥ 1, т.к. $-1 \leq cos \leq 1$. Заменим все числители на 1. Все же знаменатели k^2 заменим на k(k-1)
$\frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{k+1(k+1+1)} + ... + \frac{1}{(m-n)(m-n-1)} < \epsilon$
$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + ... - \frac{1}{m} < \epsilon$
$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} < \epsilon \leq \frac{1}{n-1}$
$\frac{1}{n-1} < \epsilon$
$n > \frac{1}{\epsilon} + 1$
Значит, последовательность сходится при $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon} + 1$

Ответ: посл-ть сходится при $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon} + 1$.

b)

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon$
$\forall m, n > N_\epsilon :$
$|a_m - a_n| < \epsilon$
$|\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}| < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k\sqrt{k}} < \epsilon$
Докажем, что $\frac{1}{k\sqrt{k}} < \frac{4}{\sqrt{k-1}} - \frac{4}{\sqrt{k}}$
$\frac{1}{k\sqrt{k}} < \frac{4(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}{\sqrt{k-1}\sqrt{k}}$
$\frac{1}{k} < \frac{4(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}{\sqrt{k-1}}$
$\sqrt{k-1} < 4k(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$
$\sqrt{k-1} + 4k\sqrt{k-1} < 4k\sqrt{k}$
$k - 1 + 8k(k-1) + 16k^2(k-1) < 16k^3$
$k - 1 + 8k^2 - 8k + 16k^3 - 16k^2 - 16k^3 < 0$
$-1 - 8k^2 - 7k < 0$
$8k^2 + 7k + 1 > 0$, что верно при k ≥ 1. Значит, $\frac{1}{k\sqrt{k}} < \frac{4}{\sqrt{k-1}} - \frac{4}{\sqrt{k}}$
Тогда заменим $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k\sqrt{k}} < \epsilon$ на $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{4}{\sqrt{k-1}} - \frac{4}{\sqrt{k}} < \epsilon$
$\frac{4}{\sqrt{n-1}} - \frac{4}{\sqrt{m}} < \epsilon < \frac{4}{\sqrt{n-1}}$
$\frac{4}{\sqrt{n-1}} < \epsilon$
$\frac{4}{\epsilon} < \sqrt{n-1}$
$\frac{16}{\epsilon^2} + 1 < n$
Значит, посл-ть сходится при $N_\epsilon > \frac{16}{\epsilon^2} + 1$
Ответ: посл-ть сходится при $N_\epsilon > \frac{16}{\epsilon^2} + 1$.

№4

a)

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon$
$\forall m, n > N_\epsilon :$
$|a_m - a_n| < \epsilon$
$|\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}| < \epsilon$

$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \epsilon < \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)}$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)} < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} < \epsilon$
$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} < \epsilon < \frac{1}{n-1}$
$\frac{1}{n-1} < \epsilon$
$n > \frac{1}{\epsilon} + 1$
Значит, посл-ть сходится при $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon} + 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1(1+1)} - \frac{1}{(1+1)(1+2)} + \frac{1}{2(2+1)} - \frac{1}{(2+1)(2+2)} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2}(\frac{1}{1(1+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})) = \frac{1}{4}$

Ответ: Сходится при $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon} + 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$.

b)

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon$
$\forall m, n > N_\epsilon :$
$|a_m - a_n| < \epsilon$
$|\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}| < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}} < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-k-1} < \epsilon$
$\sum\limits_{k=n+1}^{m} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \epsilon$
$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} + ... + \sqrt{m+1} - \sqrt{m} < \epsilon$
$\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1} < \epsilon$
$m > n, m = 16n + 15$
$\sqrt{16n+16} - \sqrt{n+1} = 3\sqrt{n+1} > \epsilon$
Значит, последовательность расходится.
Ответ: Последовательность расходится.