ДЗ по линейной алгебре на 17.04.2022

Кожевников Илья 2112-1

17 апреля 2022 г.

№1

$a = \{8, 4, 1\}, b = \{2, -2, 1\}$

1.1)

$cos(\alpha) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{9}{\sqrt{64+16+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{9\cdot 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = arccos(\frac{1}{3})$
Ответ: $\alpha = arccos(\frac{1}{3})$

1.2)

Посчтаем векорное произведение a и b.
$[a, b] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6x - 6y - 24z$
Но нам нужен единичный вектор. Поэтому умножим координаты на $\frac{1}{\sqrt{|[a,b]|}}$
$|[a, b]| = 36 + 36 + 576 = 648$
$c = \frac{6}{\sqrt{648}}x - \frac{6}{\sqrt{648}}y - \frac{24}{\sqrt{648}}z = \frac{1}{3\sqrt{2}}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}y - \frac{4}{3\sqrt{2}}z$
Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

1.3)

Заметим, что векторы c и b сонаправлены, если $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a \\ b \\ d \end{vmatrix}$ совпадают по знакам.

Найдем их (возьмем c из 1.2).
$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 18\sqrt{2}$
$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48$
Знаки разные, а, значит, чтобы они были сонаправлены, c необходимо умножить на -1.
$-c = -\frac{1}{3\sqrt{2}}x + \frac{1}{3\sqrt{2}}y + \frac{4}{3\sqrt{2}}z$
Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

1.4)

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \\ 8f_1 + 4f_2 + 1f_3 = 0 \\ \sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6f_1 - 6f_2 - 24f_3 = 0 \\ 8f_1 + 4f_2 + 1f_3 = 0 \\ f_1^2+f_2^2+f_3^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = f_2 + 4f_3 \\ f_3 = -8(f_2+4f_3) - 4f_2 \\ f_1^2+f_2^2+f_3^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = -\frac{15}{33}f_2 \\ f_3 = -\frac{12}{33}f_2 \\ (-\frac{15}{33}f_2)^2 + f_2^2 + (-\frac{12}{33}f_2)^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{15}{33}f_2 \\ f_2 = -\frac{11}{\sqrt{2}} \\ f_3 = -\frac{12}{33}f_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f_1 = -\frac{15}{33}f_2 \\ f_2 = \frac{11}{\sqrt{2}} \\ f_3 = -\frac{12}{33}f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \\ f_2 = -\frac{11}{\sqrt{2}} \\ f_3 = \frac{4}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f_1 = -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ f_2 = \frac{11}{\sqrt{2}} \\ f_3 = -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Теперь, чтобы найти вектор, который образует тупой угол с вектором b, найдем косинусы углов между этими векторами и b.

$cos(\alpha_1)\frac{\overline{f1b}}{|\overline{f1}||\overline{b}|} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}}+\frac{22}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{25}{2}+\frac{121}{2}+\frac{16}{2}}\sqrt{4+4+1}} = \frac{36}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{27} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

Но т.к. $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ - почти 1, наш угол α_1 будет острым. Это означает, что тупой угол с b будет образовывать вектор f2 с координатами $f2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

№2

2.1)

Обозначим за α плоскость, которая будет проходить через прямую l и которая будет перпендикуляра прямой l_2. Тогда пусть точка T - точка пересечения l и l_1.

Тогда напишем уравнение α, взяв точку P.

$1(x-2) + 1(y-0) + 1(z-1) = 0$

$x + y + z = 3$

Теперь мы можем найти координаты точки T.

$$\begin{cases} x+y+z = 3 \\ 4x - 3z = 1 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{cases}$$

Теперь найдем уравнение l, зная координаты двух точек, через которые она проходит: P(2, 0, 1) и T(4, -6, 5)

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -6t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -6t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

2.2)

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=4 \\ x=2-\dfrac{y}{3} \\ z=1-\dfrac{2}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=12 \\ z=-7 \end{cases}$$

Ответ: (-2, 12, -7)

2.3)

Составим уравнение плоскости по трем точкам:
$P(2,0,1), T(4,-6,5), S(1,-1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-1 \\ 4-2 & -6-0 & 5-1 \\ 1-2 & -1-0 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$4x-4y-8z=0$

$x-y-2z=0$

Ответ: x - y - 2z = 0