ДЗ по линейной алгебре на 30.05.2022

Кожевников Илья 2112-1

30 мая 2022 г.

№1

1.1)

Используем двойственный алгоритм с семинара:
Для начала найдем AA^T:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 17-t & 8 \\ 8 & 17-t \end{vmatrix} = t^2 - 34t + 225$

$t^2 - 34t + 225 = 0 \Leftrightarrow t \in \{25, 9\}$

Значит, $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 3$

$t = 25:$

$\begin{pmatrix} 17-25 & 8 \\ 8 & 17-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$t = 9:$

$\begin{pmatrix} 17-9 & 8 \\ 8 & 17-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline \text{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Теперь найдем ОНБ:

$v_i = \frac{A^T u_i}{\sigma_i}$

$v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Длины векторов равны 1, а векторы ортогональны. Значит, они ортонормированы.
Теперь дополним $v_1 v_2$ с помощью нахождения ФСР.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \text{-2} & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \to \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Итого, $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Значит, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Усеченный вариант: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

1.2)

Теперь используем обычный алгоритм.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-t & 0 \\ 0 & 2-t \end{vmatrix} = 4t^4 - 4t - 4$$

$$4t^4 - 4t - 4 = (2-t)^2 = 0 \Leftrightarrow \{2\}$$

$$t = 2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Значит, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем u_1 и u_2.

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sqrt{2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{Av_1}{\sqrt{2}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Дополним u_1 и u_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Значит, $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Значит, искомомое разложение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Усеченное: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9-t & -12 \\ -12 & 9-t \end{vmatrix} = t^2 - 25t = t(t-25) \Rightarrow t \in \{25, 0\}$$

$t = 25 :$

$$\begin{pmatrix} 9-25 & -12 \\ -12 & 16-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline -\frac{3}{4} & 1 \\ \hline \end{array} \to \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$t = 0 :$

$$\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline \frac{4}{3} & 1 \\ \hline \end{array} \to \frac{3}{5}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$u_1 = \frac{Av_1}{5} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Дополним, очевидно, векторами из стандартного базиса.

Тогда $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда искомым разложением будет

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Усеченный вариант:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

№2

Пусть наша матрица имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix}$. Тогда, т.к. в ней больше столбцов, чем строк, воспользуемся двойственным алгоритмом.

$AA^T = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + ... + x_n^2 \end{pmatrix}$. Для удобства обозначим $x_1^2 + ... + x_n^2$ за a. Тогда, очевидно, единственным собственным значением будет t = a. Значит, $\sigma_1 = \sqrt{a}$

$(a - a) = (0) \Rightarrow u_1 = (1)$

$v_1 = \frac{A^T u_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}(1)}{\sqrt{a}} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{a}} \\ ... \\ \frac{x_n}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$. Т.к. $\frac{x_1^2+...+x_n^2}{a} = 1$, данный вектор уже ортонормированный.

Значит, искомое усеченное разложение:

$A = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{a}} & ... & \frac{x_n}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$

№3

3.1)

По алгоритму с семинара найдем сначала усеченное сингулярное разложение для A двойственным алгоритмом, а затем, u_1 с σ_1 и v_1^T, получим искомую B. $A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 14 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, AA^T = \begin{pmatrix} 333 & -144 \\ -144 & 117 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 333 - t & -144 \\ -144 & 117 - t \end{vmatrix} = t^2 - 450t + 18225 = (t - 405)(t - 45) \Rightarrow t \in \{405, 45\}$

$t = 405:$

$\begin{pmatrix} 333 - 405 & -144 \\ -144 & 117 - 405 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 & -144 \\ -144 & -288 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline -2 & 1 \\ \hline \end{array} \to u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$t = 45:$

$\begin{pmatrix} 333 - 45 & -144 \\ -144 & 117 - 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288 & -144 \\ -144 & 72 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & x_2 \\ \hline \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \end{array} \to u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$v_1 = \frac{A^T u_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 14 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}{9\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{A^T u_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 14 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}{3\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Тогда нашим искомым усеченным разложением будет

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -4 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Значит, искомой матрицей B будет $\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} 9\sqrt{5} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

3.2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4 = -(t-4)(t-1)^2 \Rightarrow t \in \{4, 1\}$$

$t = 4:$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

x_1	x_2	x_3
1	1	1

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$t = 1:$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

x_1	x_2	x_3
-1	1	0
-1	0	1

Ортогонализуем полученные векторы методом Грама-Шмидта:

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь ортонормируем их:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{A^T u_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{A^T u_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{A^T u_3}{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, искомым разложением будет

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

А искомой матрицей B будет

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

№4

Заметим, что, т.к. $\text{rkA} = 2$, верно будет следующее равенство:
$A = U\Sigma V^T = u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T$. Также заметим, что данная нам формула очевидным образом раскладывается в следующее произведение:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{60}.$$

Но $B = u_1\sigma_1 v_1^T$. А, значит, матрица А будет равна $B + u_2\sigma_2 v_2^T$. Тогда нам надо найти такие u_2 и v_2, что $u_1 \perp u_2$ и $v_1 \perp v_2$, u_2 и v_2 ортонормированы, а также $\sigma_2 \leqslant \sigma_1$.

Такие векторы несложно находятся подбором: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Значит, в нашем случае $u_2\sigma_2 v_2^T$ будет равна $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \sqrt{30} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Отсюда, $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$