№ 1

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Число инверсий — 9.

Тогда знак перестановки $= (-1)^9 = -1$, а перестановка нечетная.

Ответ: 9, нечетная, -1.

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3n \\ 3 & 6 & \dots & 3n & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 1 \; 4 & \dots \; 3n-2 \end{pmatrix}$

Заметим, что у каждого числа $\sigma(i)$ (если представить нашу перестановку в виде $\begin{pmatrix} i & \dots \\ \sigma(i) & \dots \end{pmatrix}$) есть как минимум три числа $\sigma(i_b)$, меньше, чем $\sigma(i_a)$.

Тогда число инверсий будет равно $\sum_{i=1}^{n} (3i)$.

~~Тогда четность будет зависеть от n:~~ $\begin{cases} \text{четно, если } n \text{ четно} \\ \text{нечетно, если } n \text{ нечетно} \end{cases}$

И знак тогда также будет зависеть от n: $\begin{cases} +1, \text{ если } n \text{ четно} \\ -1, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$

Ответ: $\sum_{i=1}^{n} 3 \cdot i$, $\begin{cases} \text{четно, если } n \text{ четно} \\ \text{нечетно, если } n \text{ нечетно} \end{cases}$, $\begin{cases} +1, \text{ если } n \text{ четно} \\ -1, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$

№ 2

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \mapsto (1\ 5)(2\ 8\ 6\ 4)(3\ 9\ 7)$

$(1\ 5\ 3)(2\ 4) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $(1\ 4)(3\ 6\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \sigma$

τ — неизвестная обратная перестановка. σ^{-1}

$\sigma^{-1}\sigma = id$

$\sigma^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Ответ: $\sigma = (1\ 4)(3\ 6\ 5)$, $\sigma^{-1} = (1\ 4)(3\ 5\ 6)$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

№ 3

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 5\ 3)$

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 4)$

№ 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 6 & 7 & 5 & 9 & 3 & 2 & 11 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Заметим, что для того, чтобы σ^x стало равно id, x должно $\vdots\, 4$ (т.к. $1 \to 8 \to 2 \to 10 \to 1$) и $\vdots\, 6$ ($3 \to 6 \to 9 \to 11 \to 4 \to 7 \to 3$). Значит, минимальное $x = 12$.

1) Тогда $\sigma^{36} = id$ (т.к. $36 \vdots 12$)

2) $\sigma^{37} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 6 & 7 & 5 & 9 & 3 & 2 & 11 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (т.к. $\sigma^{37} = \sigma^{36} \cdot \sigma = id \cdot \sigma$)

3) $\sigma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 7 & 11 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Ответ: 12

№ 5.

$$(a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\ldots(a_{k-1}\ a_k) = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_k)$$

Заметим, что данное ~~всё~~ произведение может раскладываться из $\overbrace{}^{k-1}$ транспозиций, а знак транспозиции — -1. Значит, знак произведения будет $(-1)^{k-1}$

ч. т. д.

№ 6

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\sigma x \tau = \rho$ т.к. умножение перестановок ассоциативно, то верно будет уравнение:

$$\sigma x \tau \tau^{-1} = \rho \tau^{-1}$$

$$\sigma x = \rho \tau^{-1}$$

$$x = \sigma^{-1} \rho \tau^{-1} \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},\ \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

№ 7.

Заметим, что в перестановке $(3\ 5\ 7 \ldots 99)(2\ 4 \ldots 98)$ 3 цикла (+ незаписанный цикл (1)). Значит, перестановка четна, ведь $99-3=96$, а 96 - четное число. Значит, знак перестановки $+1$.

Ответ: $+1$.

№ 8.

Заметим, что цикл в X может быть только один, потому что если бы в X было больше одного цикла, то этот цикл длины 1 остался бы и в X^2, что противоречит условию. $\Rightarrow$ цикл в X только один.

Тогда единственным ответом будет $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

Ответ: $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

№ 9

Заметим, что любую перестановку можно разложить на транспозиции. Тогда если в $\sigma \in S_n$ k кол-во независимых циклов, то каждый из них можно разложить на $a-1$ транспозиций, где a - длина каждого цикла.

Тогда знак всей перестановки будет равняться произведению знаков всех циклов $\Leftrightarrow$

$Sgn(S_n) = Sgn(c_1) \cdot Sgn(c_2) \cdot \ldots \cdot Sgn(c_k)$ (где c_n - независимый цикл номер n) $=$

$= (-1)^{a_1-1} \cdot (-1)^{a_2-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{a_k-1} = (-1)^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1\cdot k} =$

$= (-1)^{n-k}$, где n — кол-во перестановок в S_n, а k — кол-во циклов.

ч.т.д.