ДЗ по линейной алгебре на 29.09.2021

Кожевников Илья 2112-1

27 сентября 2021 г.

№1

Чтоб доказать, что $(A - A^T)$ кососимметрична для любой квадратной матрицы, необходимо доказать $(A - A^T)^T = -(A - A^T)^T$
$(A - A^T)^T = -(A - A^T)^T$
$A^T - A = -A + A^T$
$A^T - A = A^T - A$
Ч.Т.Д.

№2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 18 & 10 & -5 & 13 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 18 & 10 & -5 & 13 \\ 0 & -54 & -30 & 15 & -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 18 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 18 & 10 & -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{13}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{13}{18} \end{pmatrix} \text{ - УСВ.}$$

№3

3.1)

$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 & |3 \\ -6 & 4 & 2 & 3 & |2 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & |1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 & |3 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & |2 \\ -3 & 2 & -11 & -15 & |1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 & -15 & |1 \\ 0 & 0 & 40 & 55 & |0 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & |0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 & -15 & |1 \\ 0 & 0 & 40 & 55 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 & -15 & |1 \\ 0 & 0 & 40 & 55 & |0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 & -15 & |1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & |0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 15x_4 = -1 \\ 8x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}x_2 - \dfrac{11}{3}x_3 - 5x_4 - \dfrac{1}{3} \\ x_3 = \dfrac{11}{8}x_4 \end{cases}$$

3.2)

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 10 & |13 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & |3 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & |7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & |3 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & |7 \\ 12 & 9 & 3 & 10 & |13 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & |3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & |4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & |3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & |1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$. \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{4}x_2 - \dfrac{1}{4}x_3 + 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

3.3)

$$\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 10 & 3 & 7 & |7 \\ -4 & 7 & 1 & 3 & |5 \\ 7 & 5 & -4 & -6 & |3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 3 & 7 & 7 \\ -4 & 7 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 19 & -2 & 0 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -19 & 2 & 0 & -13 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -23 & 3 & 1 & -16 \\ 0 & 23 & -3 & -1 & 17 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Но $\begin{cases} -16 \neq 17 \\ 23x_2-3x_3-4x_4=23x_2-3x_3-4x_4 \end{cases}$ Значит, у системы нет решений.

3.4)

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -13 & -19 & -17 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -13 & -19 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & -13 & -19 & -17 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -13 & -19 & -17 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -13 & -19 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+8x_2-7x_3=12 \\ -13x_2+19x_3=-17 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$$

№4

ax^2+bx+c

$$\begin{cases} a+b+c=8 \\ a-b+c=2 \\ 4a+2b+c=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

Ответ: x^2+3x+4

№5

$$\begin{cases} ax+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+bz=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & -2 & b-\frac{2}{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 2 & \frac{2}{a}-b & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 2 & -\frac{5}{6}b & -2\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{a}-1\frac{5}{6}b & -3\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{a}z=\dfrac{2}{a} \\ 2y-\dfrac{5}{b}z=-2\dfrac{1}{3} \\ (\dfrac{2}{a}-1\dfrac{5}{6}b)z=-3\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{a}z \\ y=\dfrac{5}{2b}z-1\dfrac{1}{6} \\ z=-\dfrac{10}{3(\frac{2}{a}-1\frac{5}{6}b)} \end{cases}$$

Значит, при $a=0, b=0$ решений нет.

При всех остальных a и b решение у системы одно.