ДЗ по линейной алгебре на 27.10.2021

Кожевников Илья 2112-1

24 октября 2021 г.

№1

1.1

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2!} (-1)^{N_k} a_{1\sigma_1(k)} \cdot a_{2\sigma_2(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n(k)} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 4 = -13$$

Ответ: -13

1.2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3!} (-1)^{N_k} a_{1\sigma_1(k)} \cdot a_{2\sigma_2(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n(k)} = 2\cdot3\cdot3+5\cdot4\cdot3+1\cdot1\cdot2-1\cdot3\cdot3-5\cdot1\cdot3-4\cdot2\cdot2 =$$

$18 + 60 + 2 - 9 - 15 - 16 = 40$

Ответ: 40

1.3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3!} (-1)^{N_k} a_{1\sigma_1(k)} \cdot a_{2\sigma_2(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n(k)} = 0\cdot0\cdot0+2\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot2-2\cdot2\cdot0-2\cdot2\cdot0-2\cdot2\cdot0 = 16$$

Ответ: 16

1.4

$$\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2!} (-1)^{N_k} a_{1\sigma_1(k)} \cdot a_{2\sigma_2(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n(k)} = (n+1)\cdot(n-1) - n^2 = n^2 - 1 - n^2 = -1$$

Ответ: -1

№2

Рассмотрим две возможные перестановки:

$1)\begin{pmatrix} i=1 & 2 & 3 & 4 & k=5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $2)\begin{pmatrix} k=1 & 2 & 3 & 4 & i=5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

В 1) перестановке число инверсий равно 8 $\Rightarrow$ в формуле определителя это произведение будет со знаком $+$.

Во 2) же перестановке число инверсий будет равно 7 $\Rightarrow$ знак перед слагаемым в определителе будет -. Значит, единственный подходящий вариант существует, когда i = 5, k = 1.

Ответ: i = 5, k = 1

№3

Пусть n - число столбцов в матрице, // - целочисленное деление.
По свойству определителя, при перестановке двух столбцов местами знак определителя меняется.
Тогда докажем, что при перестановке столбцов в обратном порядке знак определителя будет меняться, только если n // 2 четно.
Т.к. при перестановке двух столбцов знак определителя меняется, то для того, чтобы он не изменился необходимо, чтобы число перестановок было четным. Но т.к. в перестановке задействованы два столбца, а если n нечетно, то средний столбец не будет перестановлен, то число перестановок будет n // 2. Из этого следует, что знак определителя не изменится тогда и только тогда, когда n // 2 четно.
Ответ: если n // 2 четно, то знак определителя не изменится. В противном случае определитель умножится на -1.

№4

Заметим, что при перевороте матрицы на $90°$ и последующем ее транспонировании, в матрице строки встанут в обратном порядке. Но т.к. транспонирование матрицы не меняет определитель, а при перестановке строк или столбцов знак определителя действует по правилу, описанному в №3, то если n // 2 четно, то знак определителя не изменится. В противном случае определитель умножится на -1, где n - число столбцов в матрице.
Ответ: если n // 2 четно, то знак определителя не изменится. В противном случае определитель умножится на -1

№5

Заметим, что все описанные действия - элементарные преобразования 1-го типа, где $\lambda = 1$. Но элементарные преобразования не меняют определитель матрицы, а, значит, после описанных действий определитель не изменится.
Ответ: Определеелитель не изменится.

№6

6.1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -11 & 7 \\ 10 & 80 & -20 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +5 \cdot (2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & -11 & 7 \\ 0 & 25 & 15 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-2 \cdot 25 \cdot 4) = -200$$

Ответ: -200

6.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \cdot (1) \\ -7 \cdot (1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \cdot (2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$$

Ответ: 0

6.3

$$\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -(1) \cdot 1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -(3) \cdot 1 \\ -(4) \cdot 1 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(2)\cdot 1 \\ -(1)\cdot 1001 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3000 & 3001 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +(2)\cdot 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3002 & 3006 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(3)\cdot 3002 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 18016 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 18016 = -18016$$

Ответ: -18016

№7

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Но т.к. $det(A) = det(A^T)$, а $det(AB) = det(A)det(B)$, то $det(A) = \sqrt{det(AA^T)} =$
$= \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)^4} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 =$
$= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + c^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + d^4 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$

Ответ: $a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + c^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + d^4 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$

№8

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 3 & 4 & 137 & -91 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} -(1)\cdot 3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 0 & -2 & -388 & 23 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(3)\cdot\frac{3}{5} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 175 & -38 \\ 0 & -2 & -388 & 23 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-2)\cdot 5\cdot(-\tfrac{7}{5}) = 14$$

Ответ: 14

№9

По свойству определителя, если в матрице A есть хотя бы одна строка или столбец, состоящая только из нулей, то det(A) = 0. Значит, чтобы определитель был максимальным, в каждой строке или столбце должно быть ровно по одной единице. Тогда возможными вариантами будут:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В каждой из этих матриц определитель равен 1 и максимален (т.к. в других случаях он будет равен либо 0, либо -1)

Ответ: 1.

№10

$$\begin{pmatrix} \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что мы всегда можем получить с помощью элементарных преобразований строку с двумя нулями и ± 2. Например, пусть первая и вторая строки будут с такими значениями. Тогда алгебраическое дополнение для a_{33} будет равняться ± 4 (т.к. всегда найдутся два столбца, где две двойки стоят в разных столбцах). А, значит, определитель матрицы будет находиться между $+4$ и -4. Значит, максимальное значение определителя - 4.
Ответ: 4.

№11

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(1)\cdot 1 \rightarrow \\ -(1)\cdot 1 \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -(1)\cdot \frac{2}{5} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 5 \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & 26 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +(3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 27 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot -1 \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -27 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(2)\cdot 5 \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -27 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 136 & 10 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ -(5) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -27 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 136 & 10 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ -(3)\cdot \frac{1}{136} \\ -(4)\cdot 2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -27 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 136 & 10 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{826}{136} & -\frac{852}{136} \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ +(4)\cdot \frac{2720}{826} \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -27 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 136 & 10 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{826}{136} & -\frac{852}{136} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{306}{826} \end{vmatrix} =$$

$= 5 \cdot 1 \cdot 136 \cdot -\frac{826}{136} \cdot \frac{306}{826} \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (-1) = -7650$
Но $\frac{-7650}{17} = -450$.
Значит, определитель делится на 17.

Ч.Т.Д.