MAXimal

home
algo
bookz
forum
about

добавлено: 11 Jun 2008 11:16
редактировано: 2 May 2009 17:24

Числа Каталана

Содержание [скрыть]

Числа Каталана — числовая последовательность, встречающаяся в удивительном числе комбинаторных задач.

Эта последовательность названа в честь бельгийского математика Каталана (Catalan), жившего в 19 веке, хотя на самом деле она была известна ещё Эйлеру (Euler), жившему за век до Каталана.

Последовательность

Первые несколько чисел Каталана C_n (начиная с нулевого):

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ \ldots$$

Числа Каталана встречаются в большом количестве задач комбинаторики. **n-ое число Каталана** — это:

- Количество корректных скобочных последовательностей, состоящих из n открывающих и n закрывающих скобок.
- Количество корневых бинарных деревьев с $n+1$ листьями (вершины не пронумерованы).
- Количество способов полностью разделить скобками $n+1$ множитель.
- Количество триангуляций выпуклого $n+2$-угольника (т.е. количество разбиений многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники).
- Количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.
- Количество неизоморфных полных бинарных деревьев с n внутренними вершинами (т.е. имеющими хотя бы одного сына).
- Количество монотонных путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) в квадратной решётке размером $n \times n$, не поднимающихся над главной диагональю.
- Количество перестановок длины n, которые можно отсортировать стеком (можно показать, что перестановка является сортируемой стеком тогда и только тогда, когда нет таких индексов $i<j<k$, что $a_k < a_i < a_j$).
- Количество непрерывных разбиений множества из n элементов (т.е. разбиений на непрерывные блоки).
- Количество способов покрыть лесенку $1 \ldots n$ с помощью n прямоугольников (имеется в виду фигура, состоящая из n столбцов, i-ый из которых имеет высоту i).

Вычисление

Имеется две формулы для чисел Каталана: рекуррентная и аналитическая. Поскольку мы считаем, что все приведённые выше задачи эквивалентны, то для доказательства формул мы будем выбирать ту задачу, с помощью которой это сделать проще всего.

Рекуррентная формула

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

Рекуррентную формулу легко вывести из задачи о правильных скобочных последовательностях.

Самой левой открывающей скобке l соответствует определённая закрывающая скобка r, которая разбивает формулу две части, каждая из которых в свою очередь является правильной скобочной последовательностью. Поэтому, если мы обозначим $k = r - l - 1$, то для любого фиксированного r будет ровно $C_k C_{n-1-k}$ способов. Суммируя это по всем допустимым k, мы и получаем рекуррентную зависимость на C_n.

Аналитическая формула

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$$

(здесь через C_n^k обозначен, как обычно, биномиальный коэффициент).

Эту формулу проще всего вывести из задачи о монотонных путях. Общее количество монотонных путей в решётке размером $n \times n$ равно C_{2n}^{n}. Теперь посчитаем количество монотонных путей, пересекающих диагональ. Рассмотрим какой-либо из таких путей, и найдём первое ребро, которое стоит выше диагонали. Отразим относительно диагонали весь путь, идущий после этого ребра. В результате получим монотонный путь в решётке $(n-1) \times (n+1)$. Но, с другой стороны, любой монотонный путь в решётке $(n-1) \times (n+1)$ обязательно пересекает диагональ, следовательно, он получен как раз таким способом из какого-либо (причём единственного) монотонного пути, пересекающего диагональ, в решётке $n \times n$. Монотонных путей в решётке $(n-1) \times (n+1)$ имеется C_{2n}^{n-1}. В результате получаем формулу:

$$C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$$