добавлено: 10 Jun 2008 23:08
редактировано: 10 May 2012 23:22

Вершинная связность. Свойства и нахождение

Содержание [скрыть]

Определение

Пусть дан неориентированный граф G с n вершинами и m рёбрами.

Вершинной связностью λ графа G называется наименьшее число вершин, которое нужно удалить, чтобы граф перестал быть связным.

Например, для несвязного графа вершинная связность равна нулю. Для связного графа с единственной точкой сочленения вершинная связность равна единице. Для полного графа вершинную связность полагают равной $n-1$ (поскольку, какую пару вершин мы ни выберем, даже удаление всех остальных вершин не сделает их несвязными). Для всех графов, кроме полного, вершинная связность не превосходит $n-2$ — поскольку можно найти пару вершин, между которыми нет ребра, и удалить все остальные $n-2$ вершины.

Говорят, что множество S вершин **разделяет** вершины s и t, если при удалении этих вершин из графа вершины u и v оказываются в разных компонентах связности.

Ясно, что вершинная связность графа равна минимуму от наименьшего числа вершин, разделяющих две вершины s и t, взятому среди всевозможных пар (s,t).

Свойства

Соотношение Уитни

Соотношение Уитни (Whitney) (1932 г.) между рёберной связностью λ, вершинной связностью κ и наименьшей из степеней вершин δ:

$$\kappa \le \lambda \le \delta.$$

Докажем это утверждение.

Докажем сначала первое неравенство: $\kappa \le \lambda$. Рассмотрим этот набор из λ рёбер, делающих граф несвязным. Если мы возьмём от каждого из этих рёбер по одному концу (любому из двух) и удалим из графа, то тем самым с помощью $\le \lambda$ удалённых вершин (поскольку одна и та же вершина могла встретиться дважды) мы сделаем граф несвязным. Таким образом, $\kappa \le \lambda$.

Докажем второе неравенство: $\lambda \le \delta$. Рассмотрим вершину минимальной степени, тогда мы можем удалить все δ смежных с ней рёбер и тем самым отделить эту вершину от всего остального графа. Следовательно, $\lambda \le \delta$.

Интересно, что неравенство Уитни **нельзя улучшить**: т.е. для любых троек чисел, удовлетворяющих этому неравенству, существует хотя бы один соответствующий граф. См. задачу "Построение графа с указанными величинами вершинной и рёберной связностей и наименьшей из степеней вершин".

Нахождение вершинной связности

Переберём пару вершин s и t, и найдём минимальное количество вершин, которое надо удалить, чтобы разделить s и t.

Для этого **раздвоим** каждую вершину: т.е. у каждой вершины i создадим по две копии — одна i_1 для входящих рёбер, другая i_2 — для выходящих, и эти две копии связаны друг с другом ребром (i_1, i_2).

Каждое ребро (u, v) исходного графа в этой модифицированной сети превратится в два ребра: (u_2, v_1) и (v_2, u_1).

Всем рёбрам проставим пропускную способность, равную единице. Найдём теперь максимальный поток в этом графе между истоком s и стоком t. По построению графа, он и будет являться минимальным количеством вершин, необходимых для разделения s и t.

Таким образом, если для поиска максимального потока мы выберем алгоритм Эдмондса-Карпа, работающий за время $O(nm^2)$, то общая асимптотика алгоритма составит $O(n^3m^2)$. Впрочем, константа, скрытая в асимптотике, весьма мала: поскольку сделать граф, на котором алгоритмы бы работали долго при любой паре исток-сток, практически невозможно.