НЯ!
Эта статья полна любви и обожания.
Возможно, стоит добавить ещё больше?

Дерево Фенвика

Дерево Фенвика или двоичное индексированное дерево (англ. *binary indexed tree*) — структура данных, которая на многих задачах заменяет собой дерево отрезков, но при этом работает в 3-4 раза быстрее, занимает минимально возможное количество памяти (столько же, сколько и массив той же длины), намного быстрее пишется и легче обобщается на большие размерности.

Определение

Пусть дан массив a длины n. Деревом Фенвика будем называть массив t той же длины, объявленный следующим образом:

$$t_i = \sum_{k=F(i)}^{i} a_k$$

где F это какая-то функцию, для которой выполнено $F(i) \leq i$. Конкретно её определим потом.

Запрос суммы. Когда нам нужна сумма на отрезке, мы будем сводить этот запрос к двум суммам на префиксе: $sum(l, r) = sum(r) - sum(l-1)$. Оба этих запроса будем считать по формуле:

$$sum(k) = t_k + sum(F(k) - 1)$$

Запрос обновления. Когда мы изменяем k-ю ячейку исходного массива, мы обновляем все t_i, в которых учтена эта ячейка.

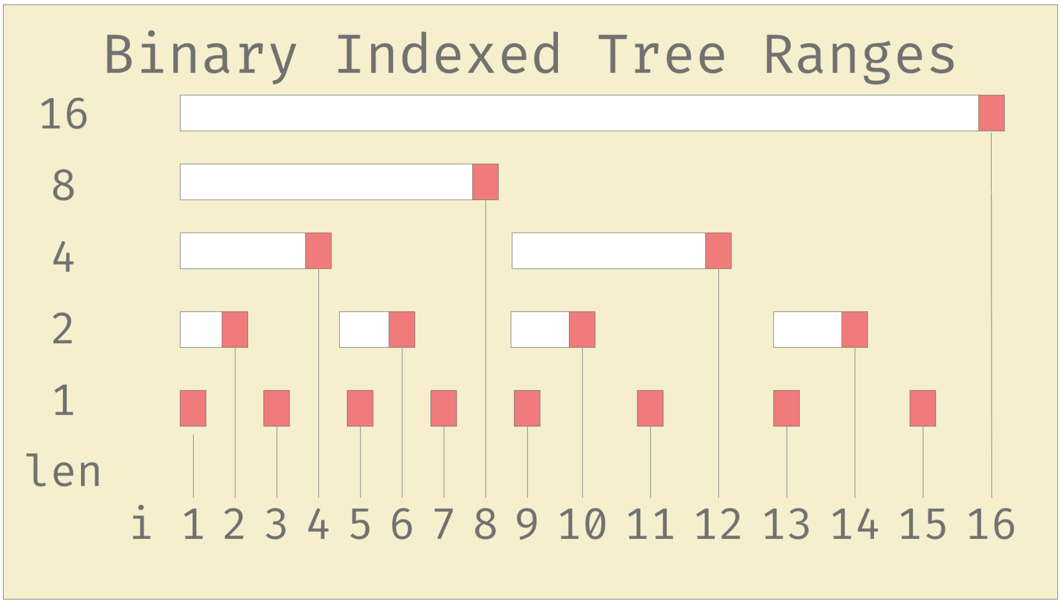
F можно выбрать так, что и «спусков» при подсчете суммы, и интересных нам t_i при обновлении будет будет $O(\log n)$. Популярны две функции:

- $F_1(x) =$ `x & (x + 1)`
- $F_2(x) =$ `x - (x & -x) + 1`

Первый вариант описан на Викиконспектах и Емаксе и поэтому более известен. Второй, как мы дальше увидим, более простой для запоминания и кодинга, а так же более гибкий — например, там можно делать бинпоиск по префиксным суммам. Его мы и будем использовать.

Примечание. Наверное, меньше четверти умеющих писать эту структуру полностью понимают, как она работает. Анализ действительно весьма сложный, поэтому мы приведём его в конце. Рекумендуется пока что абстрагироваться и принять на веру, что любой префикс разбивается на $O(\log n)$ отрезков вида

$[F(i), i]$, а также что любой элемент входит в не более $O(\log n)$ таких отрезков.



Реализация

Так как $F(0) = 1 > 0$, то $[0, F(0)]$ не является корректным отрезком. Поэтому нам будет удобнее хранить массив в 1-индексации и не использовать t_0.

```
int t[maxn];

// возвращает сумму на префиксе
int sum (int r) {
    int res = 0;
    for (; r > 0; r -= r & -r)
        res += t[r];
    return res;
}

int sum (int l, int r) {
    return sum(r) - sum(l-1);
}

// обновляет нужные t
void add (int k, int x) {
    for (; k <= n; k += k & -k)
        t[k] += x;
}
```

Автор отмечает красивую симметрию в формулах `r -= r & -r` и `k += k & -k`, которой нет в «традиционной» версии.

Многомерный случай

> k-мерное дерево Фенвика пишется в $(k+1)$ строчку

Нужно добавить всего одну такую же строчку в `sum`, `add`, а также при подсчете суммы на прямоугольнике вместо двух запросов к префиксным суммам использовать четыре.

`sum` перепишется следующим образом:

```
int sum (int r1, int r2) {
    int res = 0;
    for (int i = r1; i > 0; i -= i & -i)
        for (int j = r2; j > 0; j -= j & -j)
            ans += t[i][j];
    return res;
}
```

В k-мерном случае, в соответствии с принципом включений-исключений, для запроса суммы нужно 2^k запросов суммы на префиксах.

Если размерности больше, чем позволяет память, то можно вместо массива `t` использовать хэш-таблицу — так потенциально потребуется $O(q \log^2 A)$ памяти (A — максимальная координата), но это всё равно один из самых безболезненных способов решать достаточно простые задачи на двумерные структуры. Автор в своё время таким образом [решил](#) какую-то задачу на 2d-сумму с USACO 2017.

Бинпоиск

Оказывается, можно производить бинарный поиск (точнее, спуск) по префиксным суммам за $O(\log n)$.

```
// возвращает индекс, на котором сумма уже больше
int lower_bound (int s) {
    int k = 0;
    for (int l = logn; l >= 0; l--) {
        if (k + (1<<l) <= n && t[k + (1<<l)] < s) {
            k += (1<<l);
            s -= t[k];
        }
    }
    return k;
}
```

Если знать, что $F(x)$ удаляет последний бит x, то принцип понятен: просто делаем спуск по бинарному дереву, как в ДО. Чем-то похоже на генерацию k-го лексикографического комбинаторного объекта: пытаемся увеличить следующий символ всегда, когда это возможно.

Отметим, что в «традиционной» индексации такое делать нельзя.

Ограничения на операцию

Дерево Фенвика можно использовать, когда наша операция обратима, а также когда трюк с префиксными суммами работает. Это обычно простые операции типа суммы, `xor`, умножения по модулю (если гарантируется, что на этот модуль ничего не делится). Минимум и `gcd`, отложенные операции и персистентность прикрутить в общем случае уже не получится — тогда уже нужно писать дерево отрезков.

Почему это работает

Итак, мы выбрали вариант с $F(x)$ = `x - (x & -x) + 1`. Поймем, что означает `x & -x`.

Лемма. `x & -x` возвращает последний единичный бит в двоичной записи x.

Доказательство потребует знания, как в компьютерах хранятся целые числа. Чтобы процессор не сжигал лишние такты, проверяя знак числа при арифметических операциях, их хранят как бы по модулю 2^k, а первый бит отвечает за знак (0 для положительных и 1 для отрицательных). Поэтому когда мы хотим узнать, как выглядит отрицательное число, нужно его вычесть из нуля: $-x = 0 - x = 2^k - x$.

Как будет выглядеть `-x` в битовой записи? Ответ можно мысленно разделить на три блока:

- Первые сколько-то (возможно, нисколько) нулей с конца числа x ими же в ответе и останутся.
- Потом, ровно на самом младшем единичном бите x, мы «займём» много единиц, так что весь префикс станет единицами. В ответе на этом месте точно будет единица.
- Потом отменятся ровно те биты из этого префикса, которые были единицами в исходном числе.

Пример:

$$
\begin{aligned}
+90 &= 2 + 8 + 16 + 64 = 0\,10110_2 \\
-90 &= 00000_2 - 10110_2 = 1\,01010_2 \\
\implies & (+90) \& (-90) = 0\,00010_2
\end{aligned}
$$

Теперь мы можем доказать нашу лемму. Когда мы сделаем &, в префиксе до младшего единичного бита все биты `x` и `-x` будут противоположными, младший единичный бит останется единичным, а на суффиксе все как было нулями, так и осталось. Следовательно, «выживет» только этот самый младший единичный бит, что мы и доказывали.

Следствие 1. `sum` будет работать за логарифм, а точнее за количество единичных битов в записи x: на каждой итерации мы делаем `x -= x & -x`, то есть удаляем младший бит.

Следствие 2. `add` тоже будет работать за логарифм: каждую итерацию количество нулей на конце x увеличивается хотя бы на единицу.

Следствие 3. (Почему дерево Фенвика — дерево.)

- Длина отрезка, соответствующего любому t_i — степень двойки, причём начинается этот отрезок на индексе, кратном этой же степени двойки.
- $\implies$ Множества элементов, учтённых в произвольных t_i и t_j, либо не пересекаются, либо одно является подмножеством другого.
- $\implies$ На t_i можно ввести отношение вложенности.

То есть, если напрячь воображение, то t можно рассматривать как лес деревьев. В частном случае, когда n является степенью двойки, дерево будет одно.

Теперь единственное, что осталось доказать — это корректность `add`. На самом деле, в `add` мы делаем ни что иное, как подъём от вершины до корня по всем предкам.

Как для x найти непосредственного родителя? Нужно найти минимальное число $y > x$, у которого t_y будет включать x. Иными словами, должно выполняться `y >= x > y - (y & -y)`.

Дальше читателю предлагается самостоятельно попялиться в пример, чтобы понять, что `x + (x & -x)` — минимальное такое число:

$$x = 90 = 2 + 8 + 16 + 64 = 10110_2$$
$$y = 96 = 32 + 64 = 11000_2$$