Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана» (национальный исследовательский университет)

Дисциплина: «Анализ алгоритмов»
Отчет по лабораторной работе №4

Тема работы:
«Многопоточность на примере умножения матриц»

Студент: Левушкин И. К.
Группа: ИУ7-52Б
Преподаватели: Волкова Л. Л.,
Строганов Ю. В.

Москва, 2019 г.

Содержание

Введение

Алгоритм умножения матриц применяется во многих серьезных вычислительных задачах. Поиск способа оптимизации такой операции является довольно важным вопросом.

Цель лабораторной работы: изучение метода динамического программирования на материале оптимизированного алгоритма Винограда и реализация многопоточности для него.

Задачи работы:

1) изучить алгоритм умножения матриц по Винограду;
2) оптимизировать алгоритм Винограда;
3) реализовать многопоточность для оптимизированного алгоритма Винограда;
3) применить метод динамического программирования для реализации указанных алгоритмов;
4) провести сравнительный анализ по затрачиваемому времени при разном количестве рабочих потоков;
5) описать и обосновать полученные результаты в отчете, выполненного как расчётно-пояснительная записка к работе.

1 Аналитический раздел

В данном разделе анализируются классический подход к решению задачи об умножении матриц, а также алгоритм Винограда.

1.1 Описание алгоритмов

1.1.1 Классический алгоритм умножения матриц

Матрица определяется как математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы чисел, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся ее элементы. Количество строк и столбцов является размерностью матрицы.

Пусть даны две матрицы **A** размерностью $m \times q$ и **B** размерностью $q \times n$.

Тогда результатом умножения матрицы A на B является матрица **C** размерностью $m \times n$, в которой элемент c_{ij} вычисляется следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \cdot b_{kj},$$

где
$i = \overline{1, m}$,
$j = \overline{1, n}$.

Заметим, что операция умножения двух матриц возможна только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором.

1.1.2 Умножение матриц по Винограду

Если посмотреть на результат умножения двух матриц, то видно, что каждый элемент в нем представляет собой скалярное произведение соответствующих строки и столбца исходных матриц. Можно заметить также, что такое умножение допускает предварительную обработку, позволяющую часть работы выполнить заранее [1].

Рассмотрим два вектора $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $\mathbf{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Их скалярное произведение равно:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4.$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = (v_1 + w_2)(v_2 + w_1) + (v_3 + w_4)(v_4 + w_3) \\ - v_1 v_2 - v_3 v_4 - w_1 w_2 - w_3 w_4. \quad (1)$$

Кажется, что второе выражение задает больше работы, чем первое: вместо четырех умножений мы насчитываем их шесть, а вместо трех сложений - десять. Менее очевидно, что выражение в правой части последнего равенства допускает предварительную обработку: его части можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и для каждого столбца второй. На практике это означает, что над предварительно обработанными элементами нам придется выполнять лишь первые два умножения и последующие пять сложений, а также дополнительно два сложения.

Выводы

Рассмотрены основные алгоритмы умножения матриц, приведено их описание. Кроме того, указаны идейные различия между ними. Обосновано сокращение операций в алгоритме Винограда, являющемся модификацией классического алгоритма.

2 Конструкторский раздел

2.1 Разработка алгоритмов

На рис. 1 представлена схема умножения матриц по Винограду.

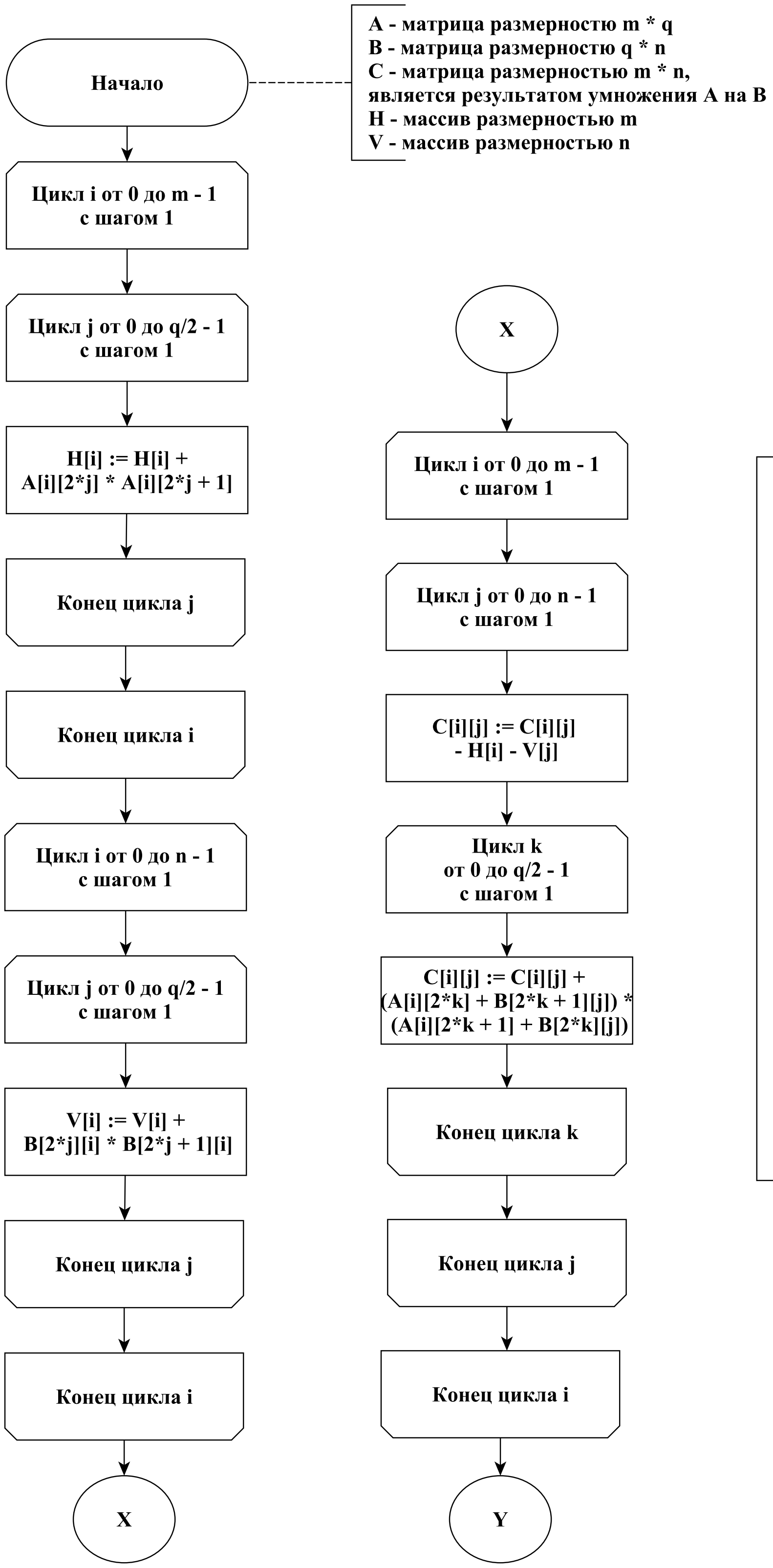


Рис. 1: Умножение матриц по Винограду

На рис. 2 приведена схема оптимизированного умножения матриц по Винограду.

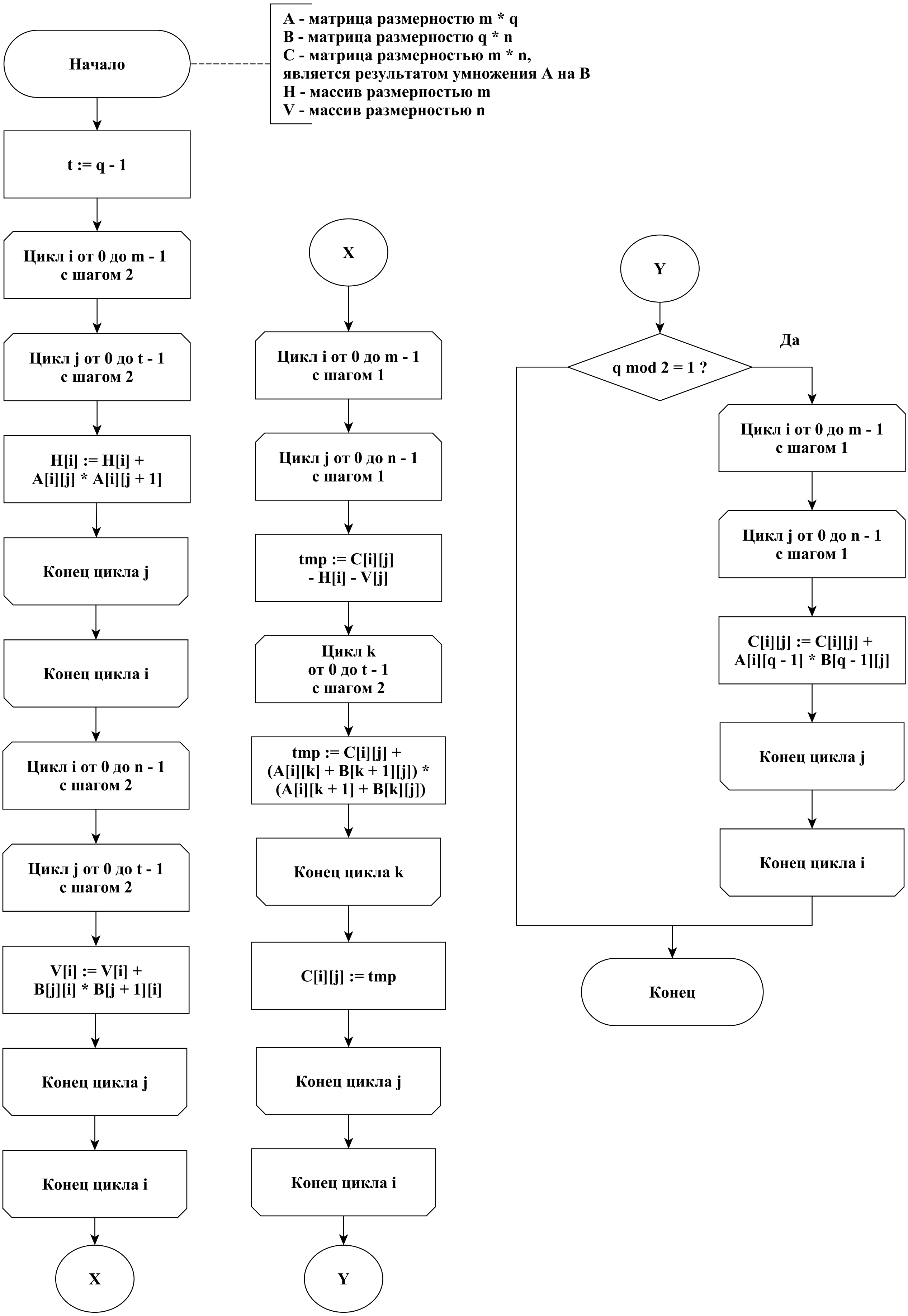


Рис. 2: Оптимизированное умножение матриц по Винограду

Выводы

В разделе представлены схемы стандартного алгоритма умножения матриц, обычного и оптимизированного алгоритмов Винограда.

3 Технологический раздел

Здесь описываются требования к программному обеспечению и средства реализации, приводится листинг программы и проводится сравнительный анализ потребления памяти.

3.1 Требования к программному обеспечению

Входные данные:

- количество используемых потоков,
- m – количество строк матрицы $\mathbf{A}$,
- q – количество столбцов матрицы $\mathbf{A}$ и строк матрицы $\mathbf{B}$,
- элементы матрицы $\mathbf{A}$,
- n – количество столбцов матрицы $\mathbf{B}$,
- элементы матрицы $\mathbf{B}$.

Выходные данные: матрица $\mathbf{C}$ размерностью $m \times n$ – результат умножения $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$, время выполнения в наносекундах.

3.2 Средства реализации

Для реализации поставленной задачи был использован язык программирования C++ [7]. Проект был выполнен в среде QT Creator [5]. Для измерения процессроного времени была использована ассемблерная инструкция rdtsc [6].

3.3 Листинг программы

Реализованная программа представлена в листингах 1, 2, 3 и **??**.

Листинг 1: Реализация оптимизированного алгоритма умножения матриц по Винограду

```
Matrix modified_vinograd_mult(const Matrix &a, const Matrix &b) {
if (a.empty() || b.empty() || a[0].size() != b.size()) {
return Matrix();
}
```

```

size_t m = a.size();
size_t q = b.size();
size_t n = b[0].size();
Matrix c(m, std::vector<int>(n, 0));

size_t t = q - 1;
std::vector<int> row_fact(m, 0);
std::vector<int> col_fact(n, 0);

for (size_t i = 0; i < m; i++) {
for (size_t j = 0; j < t; j += 2) {
row_fact[i] += a[i][j] * a[i][j+1];
}
}

for (size_t i = 0; i < n; i++) {
for (size_t j = 0; j < t; j += 2) {
col_fact[i] += b[j][i] * b[j+1][i];
}
}

int tmp = 0;

for (size_t i = 0; i < m; i++) {
for (size_t j = 0; j < n; j++) {
tmp = -row_fact[i] - col_fact[j];
for (size_t k = 0; k < t; k += 2) {
tmp += (a[i][k] + b[k+1][j]) * (a[i][k+1] + b[k][j]);
}

c[i][j] = tmp;
}
}

if (q % 2) {
for (size_t i = 0; i < m; i++) {
for (size_t j = 0; j < n; j++) {
c[i][j] += a[i][q-1] * b[q-1][j];
}
}
}

return c;
}
```

Листинг 2: Реализация оптимизированного многопоточного алгоритма умножения матриц по Винограду

```
void calc_row_fact(vector<int> &row_fact, size_t m, size_t t, const Matrix &
    a)
{
for (size_t i = 0; i < m; i++)
{
for (size_t j = 0; j < t; j += 2)
{
```

```
row_fact[i] += a[i][j] * a[i][j + 1];
}
}
}

void calc_col_fact(vector<int> &col_fact, size_t n, size_t t, const Matrix &
    b)
{
for (size_t i = 0; i < n; i++) {
for (size_t j = 0; j < t; j += 2) {
col_fact[i] += b[j][i] * b[j+1][i];
}
}
}

void par_calculations(size_t m, size_t n, size_t t, const Matrix &a,
const Matrix &b, Matrix &c, size_t thread,
size_t count_threads, const vector<int> &row_fact, const vector<int> &
    col_fact, int tmp)
{

for (size_t i = thread; i < m; i += count_threads) {
for (size_t j = 0; j < n; j++) {
tmp = -row_fact[i] - col_fact[j];
for (size_t k = 0; k < t; k += 2) {
tmp += (a[i][k] + b[k + 1][j]) * (a[i][k + 1] + b[k][j]);
}
c[i][j] = tmp;
}
}
}

void calc_dop_calculations(size_t m, size_t n, size_t q, const Matrix &a,
    const Matrix &b, Matrix &c, size_t thread, size_t count_theads)
{
for (size_t i = thread; i < m; i += count_theads)
{
for (size_t j = 0; j < n; j++)
{
c[i][j] += a[i][q - 1] * b[q - 1][j];
}
}
}

Matrix modified_thread_vinograd_mult(const Matrix &a, const Matrix &b,
    size_t count_threads)
{
if (a.empty() || b.empty() || a[0].size() != b.size()) {
return Matrix();
}

size_t m = a.size();
size_t q = b.size();
size_t n = b[0].size();
Matrix c(m, std::vector<int>(n, 0));
```

```
size_t t = q - 1;
std::vector<int> row_fact(m, 0);
std::vector<int> col_fact(n, 0);

thread row(calc_row_fact, ref(row_fact), m, t, ref(a));
thread col(calc_col_fact, ref(col_fact), n, t, ref(b));

row.join();
col.join();



vector<thread> threads(count_threads);

int tmp = 0;

for (size_t i = 0; i < count_threads; i++)
{
threads[i] = thread(par_calculations, m, n, t, ref(a), ref(b), ref(c), i,
    count_threads, ref(row_fact), ref(col_fact), tmp);
}

for (size_t i = 0; i < count_threads; i++)
{
threads[i].join();
}

if (q % 2)
{
for (size_t i = 0; i < count_threads; i++)
{
threads[i] = thread(calc_dop_calculations, m, n, q, ref(a), ref(b), ref(c),
    i, count_threads);
}

for (size_t i = 0; i < count_threads; i++)
{
threads[i].join();
}
}

return c;
}
```

Листинг 3: Замер времени

```
long long get_dif_threads(long long i1, long long i2, const Matrix &m1,
    const Matrix &m2, size_t count_threads)
{
i1 = __rdtsc();
Matrix m4 = modified_thread_vinograd_mult(m1, m2, count_threads);
i2 = __rdtsc();

return abs(i2 - i1);
}
```

```
}
```

3.4 Тестовые данные

Программа должна корректно работать при следующих входных данных:

- умножение матриц, состоящих из одного элемента:
$$\begin{pmatrix}2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\end{pmatrix},$$
- умножение на нулевую матрицу:
$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
- умножение на единичную матрицу:
$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix},$$
- умножение матриц с положительными числами:
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix},$$
- умножение матриц с отрицательными числами:
$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix},$$
- умножение матриц нечетной размерности (актуально для алгоритма Винограда, т.к. используется дополнительная проверка):
$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ -4 & 5 & 6\\ -7 & -8 & 9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & 5 & -6\\ -7 & 8 & -9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28 & -32 & 36\\ 26 & -31 & 36\\ -24 & 18 & -12\end{pmatrix},$$
- умножение матриц с целыми числами:
$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 10\\ -15 & 22\end{pmatrix},$$
- умножение прямоугольных матриц:
$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\\ 5 & -6\\ 7 & -8\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10 & 100 & 1000\\ 20 & 200 & 2000\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30 & -300 & -3000\\ -50 & -500 & -5000\\ -70 & -700 & -7000\\ -90 & -900 & -9000\end{pmatrix}.$$

3.5 Сравнительный анализ реализаций

Примем следующую теоретическую модель вычислений для оценки трудоемкости алгоритмов:

1) операции единичной стоимости (арифметические, сравнения, обращение по адресу);

2) циклы определяются формулой:

$$\begin{aligned} f_{cycle} = f_{init} + f_{cmp} + n \cdot (f_{inner} + f_{inc} + f_{cmp}) = \\ = 1 + 1 + n \cdot (f_{inner} + 1 + 1) = \\ = 2 + n \cdot (f_{inner} + 2), \end{aligned} \quad (2)$$

   где
   n — количество итераций цикла,
   f_{cycle} — трудоемкость цикла,
   f_{init} — трудоемкость инициализации,
   f_{cmp} — трудоемкость сравнения,
   f_{inner} — трудоемкость тела цикла,
   f_{inc} — трудоемкость инкремента;

3) переход по условию в условном операторе равен нулю, но при этом в расчет входит трудоемкость вычисления условия.

Пусть даны две матрицы **A** размерностью $m \times q$ и **B** размерностью $q \times n$, результат их умножения — матрица **C** размерностью $m \times n$.

3.5.1 Трудоемкость стандартного алгоритма

Опираясь на указанные выше правила, подсчитаем трудоемкость стандартного алгоритма умножения матриц:

$$\begin{aligned} f_{std} = 2 + m \cdot (2 + 2 + n \cdot (2 + 2 + q \cdot (2 + \underbrace{8}_{[\,]} + \underbrace{1}_{=} + \underbrace{1}_{+} + \underbrace{1}_{\times}))) = \\ = 13mqn + 4mn + 4m + 2 \end{aligned} \quad (3)$$

3.5.2 Трудоемкость алгоритма Винограда

Заполнение массива под произведения строчных элементов:

$$\begin{aligned} f_{row} = 2 + m \cdot (2 + 2 + 1 + \frac{q}{2} \cdot (3 + \underbrace{6}_{[\,]} + \underbrace{1}_{=} + \underbrace{2}_{+} + \underbrace{3}_{\times})) = \\ = \frac{15}{2}mq + 5m + 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Заполнение массива под произведения элементов столбцов производится аналогично, поэтому можно перейти сразу к формуле:

$$f_{col} = \frac{15}{2}qn + 5n + 2.$$

Основной цикл вычисления значений элементов результирующей матрицы:

$$f_{inner} = 2 + m \cdot (2 + 2 + n \cdot (2 + 7 + 3 + \frac{q}{2} \cdot (3 + \underbrace{12}_{[\,]} + \underbrace{1}_{=} + \underbrace{5}_{+} + \underbrace{5}_{\times}))) = \\ = 13mqn + 12qn + 4m + 2. \quad (5)$$

Учет условия перехода при значении q:

$$f_{cond} = 2+ \begin{bmatrix} 0, q - , \\ 2 + m \cdot (2 + 2 + n \cdot (2 + \underbrace{8}_{[\,]} + \underbrace{1}_{=} + \underbrace{1}_{+} + \underbrace{2}_{-} + \underbrace{1}_{\times})), , \end{bmatrix} = \ = 2+ \begin{bmatrix} 0, q - \\ 15mn \end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем формулу вычисления произведения матриц алгоритмом Винограда:

$$f_V = 13mqn + \frac{15}{2}mq + \frac{39}{2}qn + 9m + 5n + 8 + \begin{bmatrix} 0, q - , \\ 15mn + 4m + 2, . \end{bmatrix}$$

3.5.3 Трудоемкость оптимизированного алгоритма Винограда

Заполнение массива под произведения строчных элементов:

$$f_{row} = 2 + m \cdot (2 + 2 + \frac{q}{2} \cdot (3 + \underbrace{5}_{[\,]} + \underbrace{1}_{+} + \underbrace{1}_{+=} + \underbrace{1}_{\times})) = \\ = \frac{11}{2}mq + 4m + 2. \quad (6)$$

Заполнение массива под произведения элементов столбцов производится аналогично, поэтому можно перейти сразу к формуле:

$$f_{col} = \frac{11}{2}qn + 4n + 2.$$

Основной цикл вычисления значений элементов результирующей матрицы:

$$f_{inner} = 2+m\cdot(2+2+n\cdot(2+9+3+\frac{q}{2}\cdot(3+\underbrace{8}_{[\,]} + \underbrace{1}_{=} + \underbrace{2}_{+} + \underbrace{1}_{+=} + \underbrace{1}_{\times}))) = \\ = 8mqn + 14qn + 4m + 2. \quad (7)$$

Учет условия перехода при значении q:

$$f_{cond} = 1 + \begin{bmatrix} 0, q - , \\ 2 + m \cdot (2 + 2 + n \cdot (1 + \underbrace{6}_{[]} + \underbrace{1}_{+} + \underbrace{2}_{-} + \underbrace{1}_{\times})), , \end{bmatrix} = \, = 2 + \begin{bmatrix} 0, q - , \\ \frac{11}{2} mn + 4m \end{bmatrix}$$

Конечная формула:

$$f_V = 8mqn + \frac{11}{2}mn + \frac{39}{2}qn + 8m + 4n + 6 + \begin{bmatrix} 0, q - , \\ \frac{11}{2}mn + 4m + 2, . \end{bmatrix}$$

Выводы

В данном разделе были рассмотрены требования к программному обеспечению, обоснован выбор средств реализации, приведён листинг программы и тестовые данные.

4 Исследовательский раздел

В разделе представлены результаты тестирования, постановка и результаты экспериментов, а также их сравнительный анализ.

4.1 Результаты тестирования

Все тесты из раздела 3.4 успешно пройдены.

4.2 Постановка эксперимента

Необходимо сравнить время работы оптимизированного алгоритма Винограда и оптимизированного алгоритма Винограда на 1-ом, 2-мя, 4-мя, 8-ю и 32-мя рабочими потоками на квадратных матрицах 100×100.

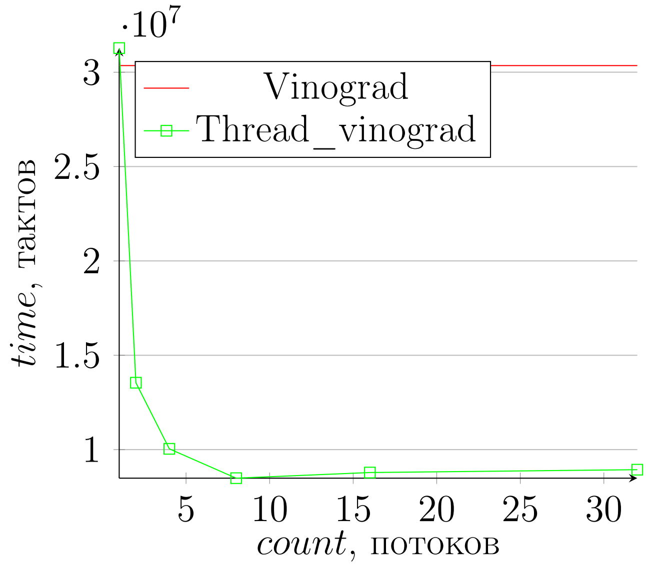
4.3 Сравнительный анализ на основе эксперимента

Экспериментально получена таблица сравнения времени 1:

Таблица 1: Сравнение времени выполнения оптимизированного алгоритма Винограда и оптимизированного алгоритма Винограда на разных потоках на квадратных матрицах 100×100 в тиках

Кол-во потоков	Размерность	Виноград (опт.)	Виноград (опт. + потоки)
1	100	30350926	31278636
2	100	30350926	13545137
4	100	30350926	10040994
8	100	30350926	8486562
16	100	30350926	8785022
32	100	30350926	8936443

На рис. 4.3 приводятся графики сравнения времени выполнения выбранных алгоритмов.



Как видно, при 8-ми потоках достигается наибольшая производительность. При этом разница во времени выполнения алгоритмов Винограда и Винограда с потоками различается почти в 4 раза.

Выводы

Программа успешно прошла все заявленные тесты. Эксперименты замера времени показали, что эффективнее всего использовать 8 рабочих потоков на алгоритме Винограда. При этом алгоритм Винограда на одном потоке работает почти в 4 раза медленней.

Заключение

В ходе работы выполнено следующее:

1) изучен алгоритм умножения матриц по Винограду;

2) оптимизирован алгоритм Винограда;
3) реализована многопоточность для оптимизированного алгоритма Винограда;
3) применен метод динамического программирования для реализации указанных алгоритмов;
4) проведен сравнительный анализ по затрачиваемому времени при разном количестве рабочих потоков;
5) описаны и обоснованы полученные результаты в отчете, выполненного как расчётно-пояснительная записка к работе.

Эксперименты замера времени показали, что при последовательной и параллельной (с одним рабочим потоком) реализациях оптимизированного алгоритма Винограда совсем немного выигрывает последовательная реализация (в ней не тратится время на выделение рабочего потока). На матрицах размером 100×100 последовательная реализация на 0.0015% быстрее параллельной.

При сравнении замеров времени для параллельной реализации алгоритма с 1-м, 2-мя, 4-мя, 8-ю, 16-ю и 32-мя рабочими потоками выяснилось, что максимальная производительность достигается на 8-ми рабочих потоках , что равно количеству логических потоков компьютера, на котором производились замеры. Выполнение алгоритма на 8-ми рабочих потоках быстрее в 3,95 раз, по сравнению с выполнением на 1-м потоке для матриц размера 100×100. При большем количестве рабочих потоков происходит небольшое падение производительности (тратится время на создание новых рабочих потоков, но вычисления будут производиться с той же скоростью, что и при 8 рабочих потоках).

Список литературы

[1] Дж. Макконнелл. Анализ алгоритмов. Активный обучающий подход.- М.:Техносфера, 2009.

[2] Group-theoretic Algorithms for Matrix Multiplication [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://users.cms.caltech.edu/ umans/papers/CKSU05.pdf, свободный – (10.10.2019)

[3] Уменьшена экспонента умножения матриц [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/133875/, свободный – (11.10.2019)

[4] Библиография в LaTeX [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/114997/, свободный – (26.09.2019)

[5] QT Creator Manual [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://doc.qt.io/qtcreator/index.html, свободный. (Дата обращения: 29.09.2019 г.)

[6] Microsoft «rdtsc» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://docs.microsoft.com/ru-ru/cpp/intrinsics/rdtsc?view=vs-2019, свободный. (Дата обращения: 29.09.2019 г.)

[7] ISO/IEC JTC1 SC22 WG21 N 3690 «Programming Languages — C++» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://devdocs.io/cpp/, свободный. (Дата обращения: 29.09.2019 г.)