МГТУ им. Баумана

Лабораторная работа №2

По курсу: "Анализ алгоритмов"

Оценка трудоемкости алгоритмов на примере алгоритмов умножения матриц

Работу выполнил: Левушкин Илья, ИУ7-52Б

Преподаватели: Волкова Л.Л., Строганов Ю.В.

Москва, 2019

Оглавление

Введение

> *Для решения любой сколь угодно простой задачи можно написать программу, которая будет работать сколь угодно медленно.* (Афоризм, рожденный из практики приема курсовых работ.)

Скорость выполнения программы (или производительность) зависят от многих факторов: языка программирования, способа реализации транслятора (компилятор, интерпретатор), производительности процессора. Поэтому заранее оценить производительность еще не написанной программы сложно. Но для уже разработанного алгоритма и написанной программы оценить перспективы ее использования с различными объемами данных вполне реально. Для этого и вводится понятие трудоемкости.

Трудоемкость программы (алгоритма) – это зависимость количества массовых операций (сравнения, обмены, сдвиги, повторения цикла и т.п.) от объема (размерностей) обрабатываемых данных.

Самое важное, что трудоемкость напрямую не связана со временем выполнения программы, но является мерой затрат на ее выполнение. Отметим наиболее важные свойства трудоемкости:

- трудоемкость определяется отдельно для каждого вида операций;
- трудоемкость может зависеть от входных данных. Поэтому оценка трудоемкости дается для лучшего и худшего случая, а также в среднем Tmin, Tmax, Tср . Свойство программы – иметь различную трудоемкость для разных данных, называется чувствительностью к данным;

- на практике обычно используется грубая оценка трудоемкости, основанная на понятии скорости (степени) роста функции.

Для грубой оценки трудоемкости есть свои основания. Дело в том, что размерности исходных данных **(N)** меняются в программах в широких пределах: на несколько порядков при отладке программы и ее работе в реальных условиях. Поэтому для функции трудоемкости важно ее асимптотическое поведение при достаточно больших **N**. Говорится, что функция **T(N)** имеет степень роста **G(N)**, если

$$\exists C, N0 : \forall N > N0 : C * G(N) > T(N) \tag{1}$$

, то есть начиная с некоторого **N0** функция **G(N)** всегда превышает **T(N)** с некотором коэффициентом пропорциональности.

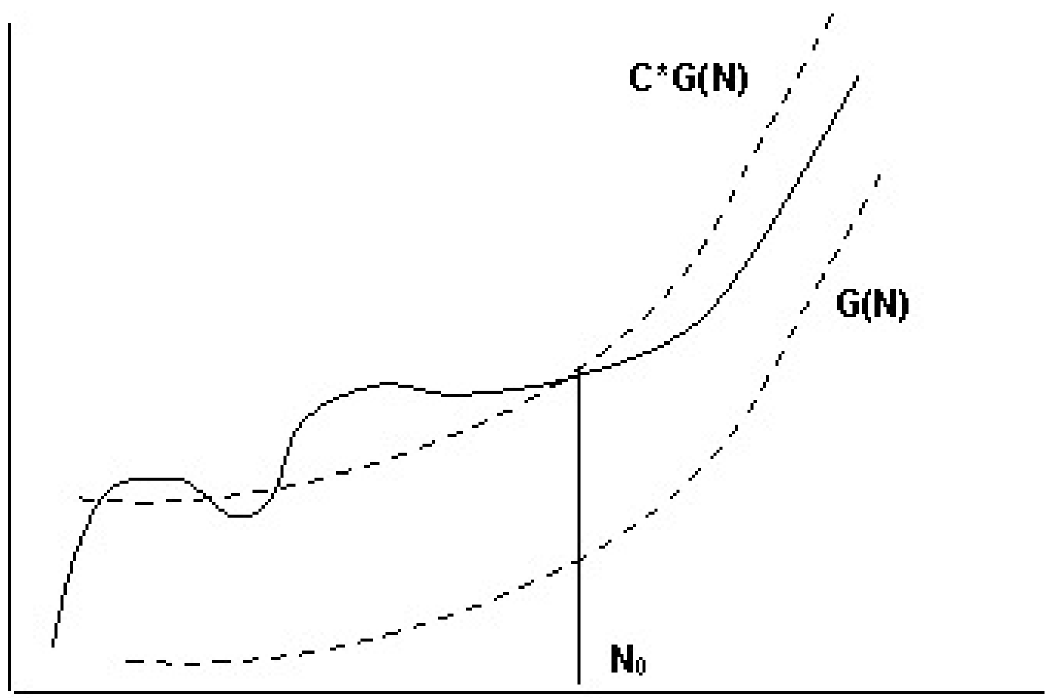


Рис. 1: Определение степени роста функции T(N).

Умножение матриц — это один из базовых алгоритмов, который широко применяется в различных численных методах, и в частности в алгоритмах машинного обучения. Многие реализации прямого и обратного распространения сигнала в сверточных слоях неронной сети базируются на этой операции. Так порой до 90-95% всего времени, затрачиваемого на машинное обучение, приходится именно на эту операцию. Почему так происходит? Ответ кроется в очень эффективной реализации этого алгоритма для процессоров, графических ускорителей (а в последнее время и специальных ускорителей матричного умножения). Матричное умножение — один из немногих алгоритмов, которые позволяет эффективно задействовать все вычислительные ресурсы современных процессоров и графических ускорителей. Поэтому не удивительно, что многие алгоритмы стараются свести к матричному умножению — дополнительная расходы, связанные с подготовкой данных, как правило с лихвой окупаются общим ускорением алгоритмов.

Так как реализован алгоритм матричного умножения? На сколько сильно одни алгоритмы умножения матриц могут быть эффективней других алгоритмов? В данной лабораторной работе будут рассмотрены три различных алгоритма умножения матриц: стандартный, алгоритм Винограда и его оптимизированная версия с последующей оценкой трудоемкости данных алгоритмов.

1 Цель

Целью данной лабораторной работы является изучение алгоритмов умножения матриц:

- стандартный;
- алгоритм Винограда.

С последующей оценкой трудоемкости получившихся алгоритмов.

2 Задачи

Для достижение поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- проанализировать и разработать существующие реализации стандартного алгоритма и алгоритма Виноградова;
- также разработать оптимизированную версию алгоритма Винограда;
- выбрать технологии для последующих реализаций и иследования алгоритмов;
- реализовать эти алгоритмы;
- произвести тестирование корректности работы реализаций;
- произвести оценку трудоемкости этих алгоритмов;
- сравнить быстродействие реализаций;
- описать и обосновать полученные результаты в отчете о выполненной лабораторной работе, выполненного как расчётно-пояснительная записка к работе.

3 Аналитическая часть

3.1 Определение

Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размерности $l \times m$ и $m \times n$ соответственно:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Тогда матрица C размерностью $l \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

в которой:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \quad (i = 1, 2, \ldots l;\ j = 1, 2, \ldots n)\,. \tag{3.3}$$

называется их произведением.

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором; в этом случае говорят, что матрицы согласованы. В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.

Таким образом, из существования произведения AB вовсе не следует существование произведения BA..

3.2 Алгоритм Винограда

Исходя из равенства 3.2, видно, что каждый элемент в нем представляет собой скалярное произведение соответствующих строки и столбца исходных матриц. Такое умножение допускает предварительную обработку, позволяющую часть работы выполнить заранее. [3]
Рассмотрим два вектора U и V:

$$U = A_i = (u_1, u_2, \dots, u_n), \tag{3.4}$$

где $U = A_i$ – i-ая строка матрицы A,
$u_k = a_{ik}, \overline{k = 1 \dots n}$ – элемент i-ой строки k-ого столбца матрицы A.

$$V = B_j = (v_1, v_2, \dots, v_n), \tag{3.5}$$

где $V = B_j$ – j-ый столбец матрицы B,
$v_k = b_{kj}, \overline{k = 1 \dots n}$ – элемент k-ой строки j-ого столбца матрицы B.

По определению их скалярное произведение равно:

$$U \cdot V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4. \tag{3.6}$$

Равенство 3.6 можно переписать в виде:

$$U \cdot V = (u_1 + v_2)(u_2 + v_1) + (u_3 + v_4)(u_4 + v_3) - u_1 u_2 - u_3 u_4 - v_1 v_2 - v_3 v_4. \tag{3.7}$$

В равенстве 3.6 насчитывается 4 операции умножения и 3 операции сложения, в равенстве 3.7 насчитывается 6 операций умножения и 9 операций сложения. Однако выражение $-u_1 u_2 - u_3 u_4$ используются повторно при умножении i-ой строки матрицы A на каждый из столбцов матрицы B, а выражение $-v_1 v_2 - v_3 v_4$ - при умножении j-ого столбца матрицы B на строки матрицы A. Таким образом, данные выражения можно вычислить предварительно для каждых строк и столбцов матриц для сокращения повторных вычислений. В результате повторно будут выполняться лишь 2 операции умножения и 7 операций сложения (2 операции нужны для добавления предварительно посчитанных произведений).

3.2.1 Оптимизированный алгоритм Винограда

Для оптимизации алгоритма Винограда могут использоваться такие стратегии, как:

- предварительные вычисления повторяющихся одинаковых действий;
- использование более быстрых операций при вычислении (такие, как смещение битов вместо умножения или деления на 2);
- уменьшения количества повторных проверок;
- использование аналогичных конструкций, уменьшающих трудоёмкость операций (к примеру, замена сложения с 1 на инкремент).

Ниже представлен список личностей, проводивших оптимизацию алгоритма:

- в 2010 Эндрю Стотерс усовершенствовал алгоритм до $O(n^{2.374})$;
- в 2011 году Вирджиния Уильямс усовершенствовала алгоритм до $O(n^{2.3728642})$;
- в 2014 году Франсуа Ле Галль упростил метод Уильямса и получил новую улучшенную оценку $O(n^{2.3728639})$.

3.2.2 Модель вычислений

В рамках данной работы используется следующая модель вычислений:

- операции, имеющие трудоемкость 1: $<$, $>$, $=$, $<=$, $=>$, $==$, $!=$,$+$, $-$, $*$, $/$, $+=$, $-=$, $*=$, $/=$, $[\,]$;
- оператор условного перехода имеет трудоёмкость, равную трудоёмкости операторов тела условия;

- оператор цикла for имеет трудоемкость:

$$F_{for} = F_{init} + F_{check} + N * (F_{body} + F_{inc} + F_{check}), \tag{3.8}$$

где F_{init} – трудоёмкость инициализации, F_{check} – трудоёмкость проверки условия, F_{inc} – трудоёмкость инкремента аргумента, F_{body} – трудоёмкость операций в теле цикла, N – число повторений. [4]

3.3 Выводы по аналитической части

В рамках данной работы были выбраны для исследования стандартный алгоритм, алгоритм Винограда, а также оптимизированная его версия, умножения матриц. Были расписаны способы оптимизации алгоритма Винограда (3.2.1) и выбрана модель вычислений по которой будет оцениваться трудоемкость алгоритмов (3.2.2).

4 | Конструкторская часть

4.1 Реализация алгоритмов

4.1.1 Стандартный алгоритм

В стандартном алгоритме мы перемножаем каждый вектор-строку первой матрицы на каждый вектор-столбец второй матрицы. То есть в первом цикле мы проходимся по всем строкам первой матрицы, во втором цикле проходимся по всем столбцам второй матрицы, и в третьем цикле мы проходимся по всем столбцам первой/строкам второй матрицы. При этом используем формулу 3.3 для получения ответа.

4.1.2 Алгоритм Винограда

В алгоритме Винограда мы также пермножаем каждый вектор-строку первой матрицы на каждый вектор-столбец второй матрицы, только вместо того, чтобы делать это по отдельности, для каждого i-ого элемента: $u_i v_i$, мы считаем сумму сразу по 2 элемента: $u_i v_i + u_{i+1} v_{i+1}$. Преобразовав это выражение к: $(u_i + v_{i+1})(u_{i+1} + v_i) - u_i u_{i+1} - v_i v_{i+1}$, и посчитав $-u_i u_{i+1} - v_i v_{i+1}$ заранее (вне основного цикла), получим всего 1 операцию умножения и 2 операции сложения заместо двух операций умножения и одной операции сложения.

4.1.3 Список оптимизаций алгоритма Винограда

Алгоритм Винограда был оптимизирован с помощью следующих модификаций:

- вычисление повторно используемых величин выполняется предварительно ($N/2$, $N-1$, $2*k$);
- проверка на четность/нечетность матрицы происходит до основого цикла, и в зависимости от результата выбирается один из основных циклов: для четной и нечетной матрицы (цикл вычислений для нечётных элементов включён в основной цикл, добавив дополнительные операции). Данная модификация исключает повторные проверки на нечётность N;
- вместо обращения к ij-ому элементу массива результирующей матрицы на каждой итерации, в основном цикле используется указатель на i-ый элемент массива, чтобы во втором цикле исключить лишнее обращение к i-ому элементу массива;
- используется буфер buf для уменьшения количества обращений к результирующей матрице.

4.2 Схемы алгоритмов

На рисунках 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 представлены схемы реализаций стандартного алгоритма, алгоритма Винограда и его оптимизированный вариант.

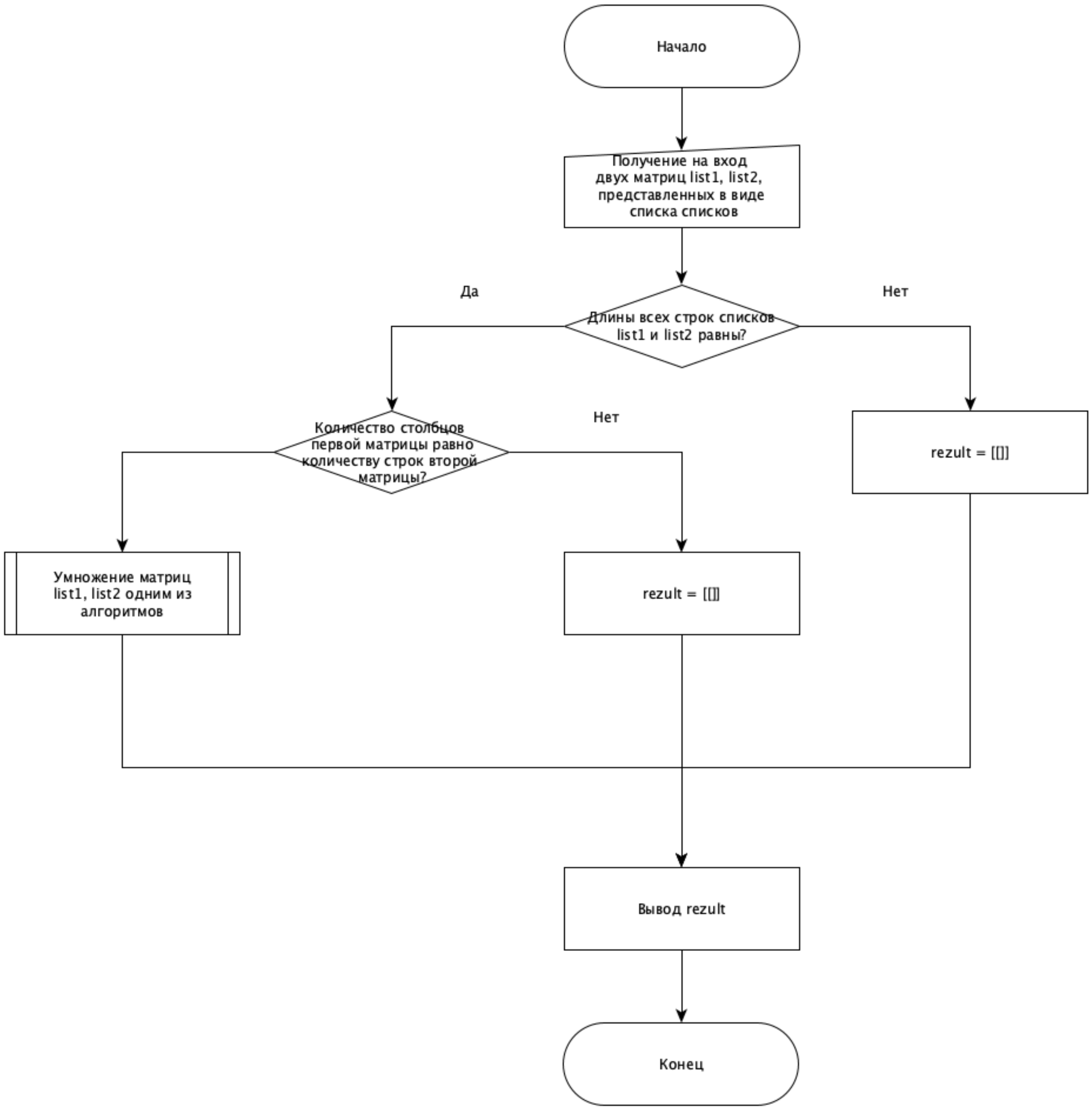


Рис. 4.1: Алгоритм умножения матриц.

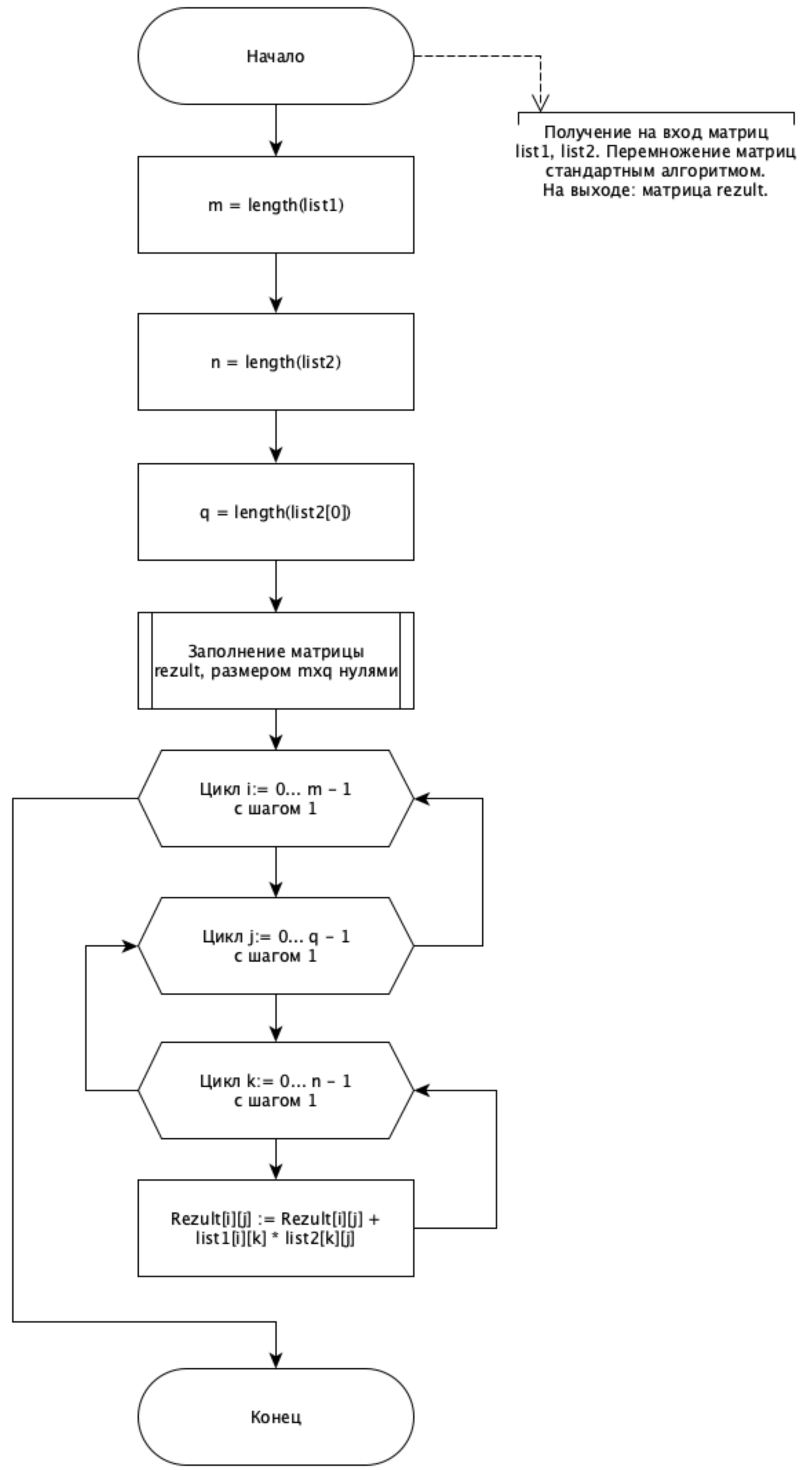


Рис. 4.2: Подпрограмма стандартного умножения матриц.

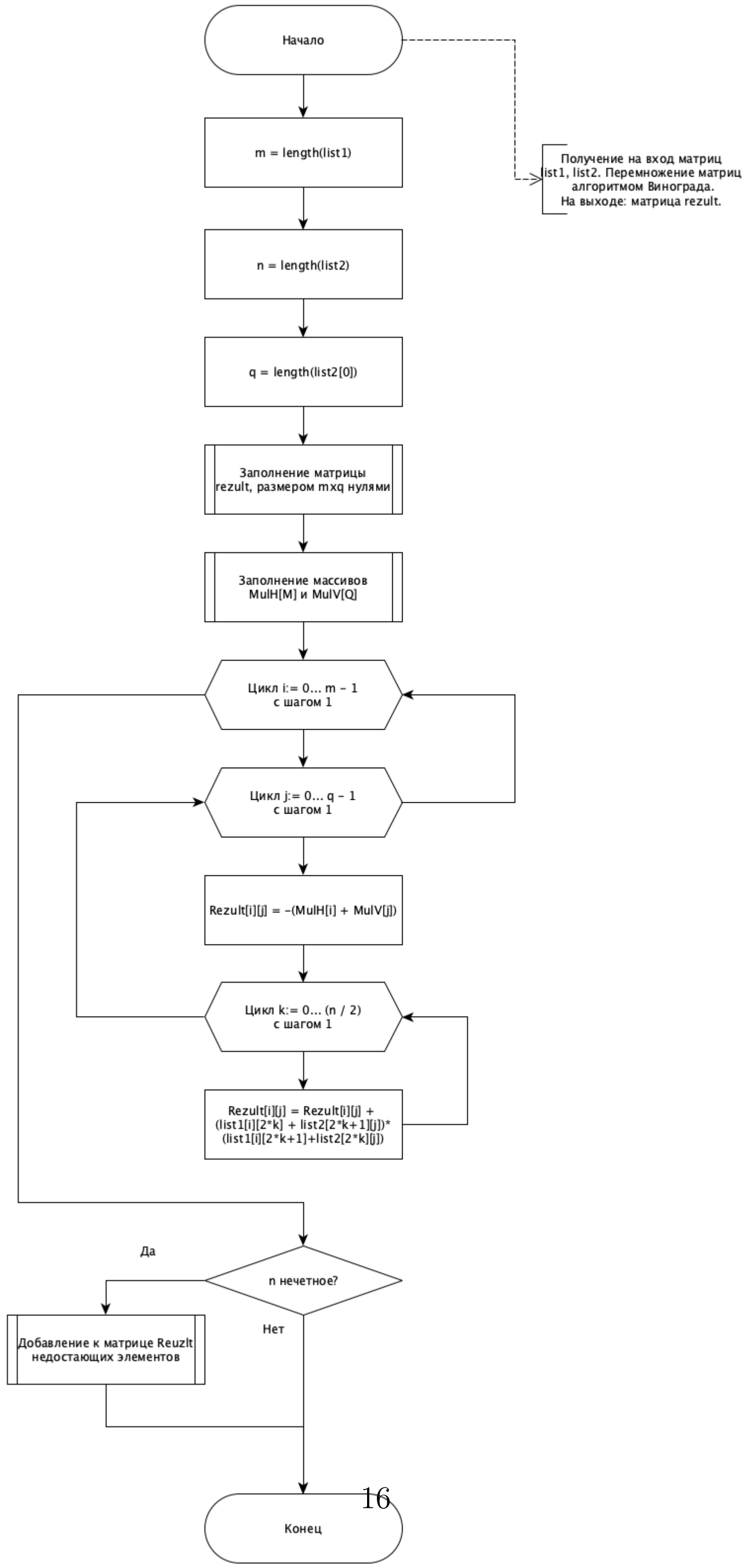


Рис. 4.3: Подпрограмма умножения матриц по Винограду.

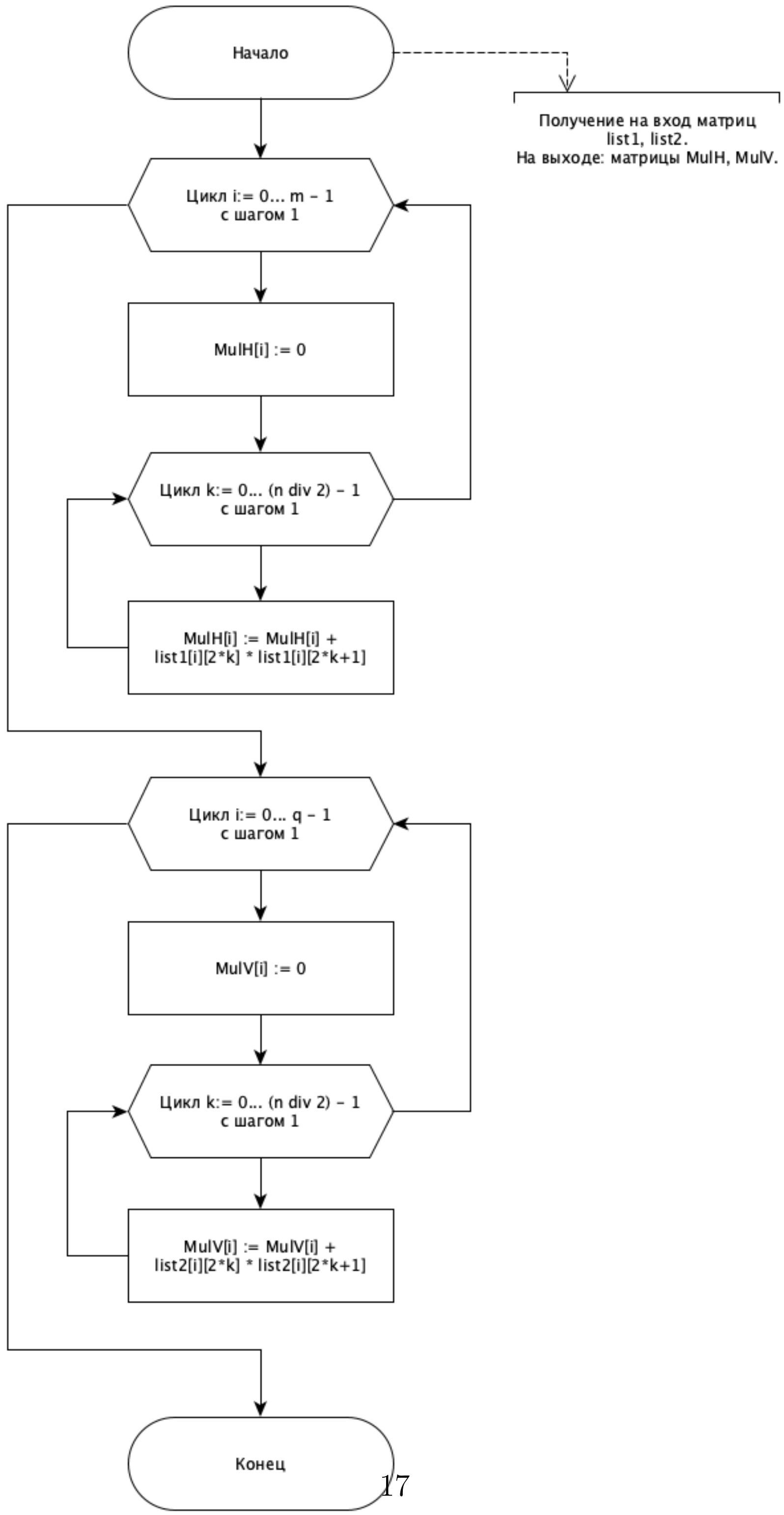


Рис. 4.4: Подпрограмма заполнения массивов MulH[M] и MulV[Q].

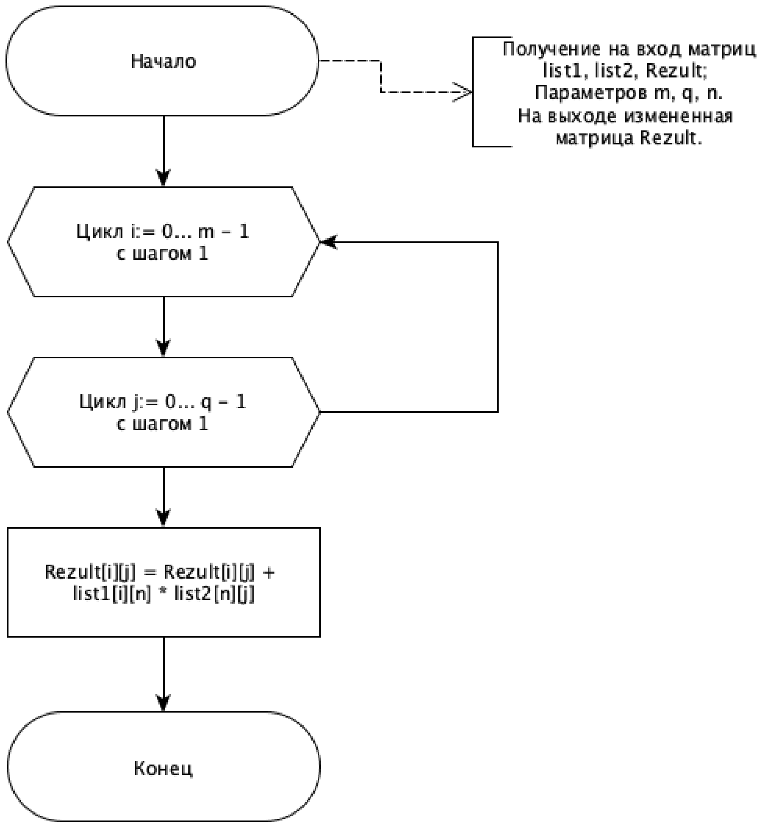


Рис. 4.5: Подпрограмма добавления к матрице Rezult нечетных элементов.

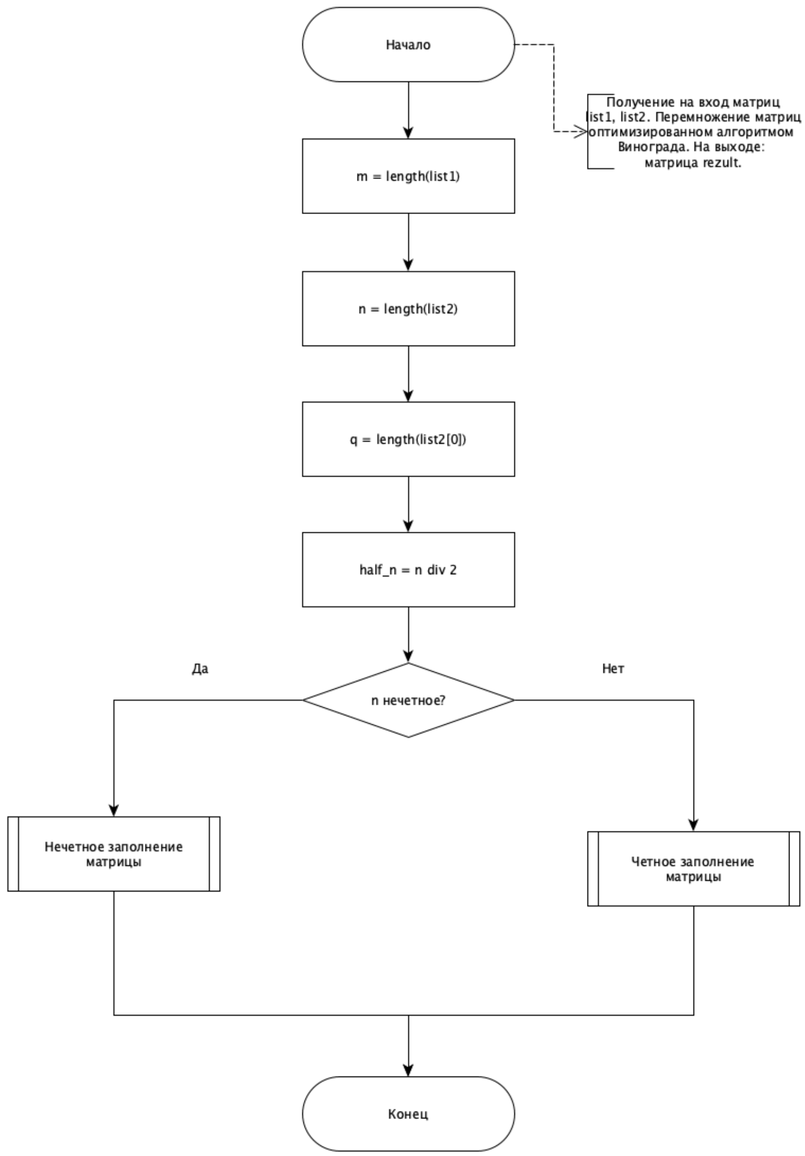


Рис. 4.6: Подпрограмма умножения матриц по Винограду (оптимизированный вариант).

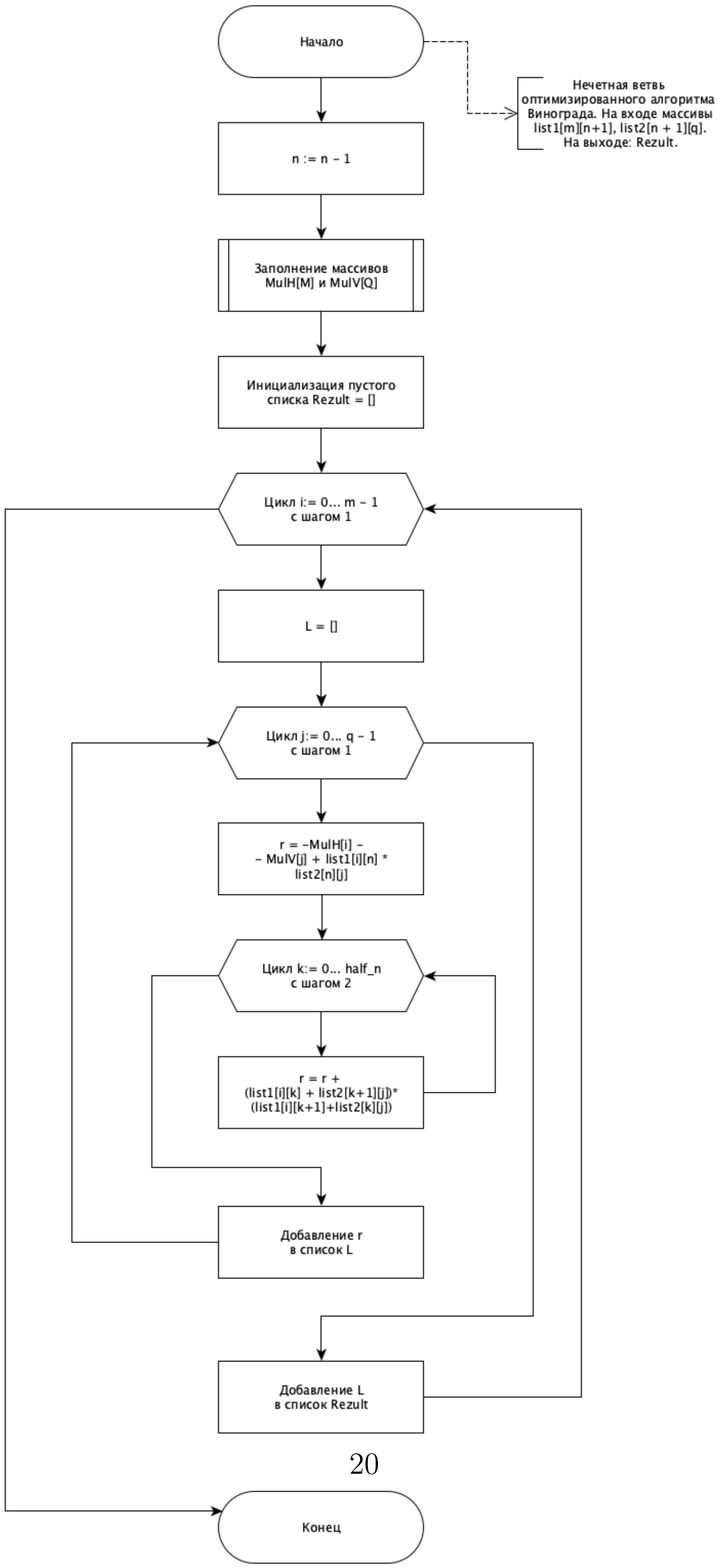


Рис. 4.7: Подпрограмма нечетного заполнения матрицы.

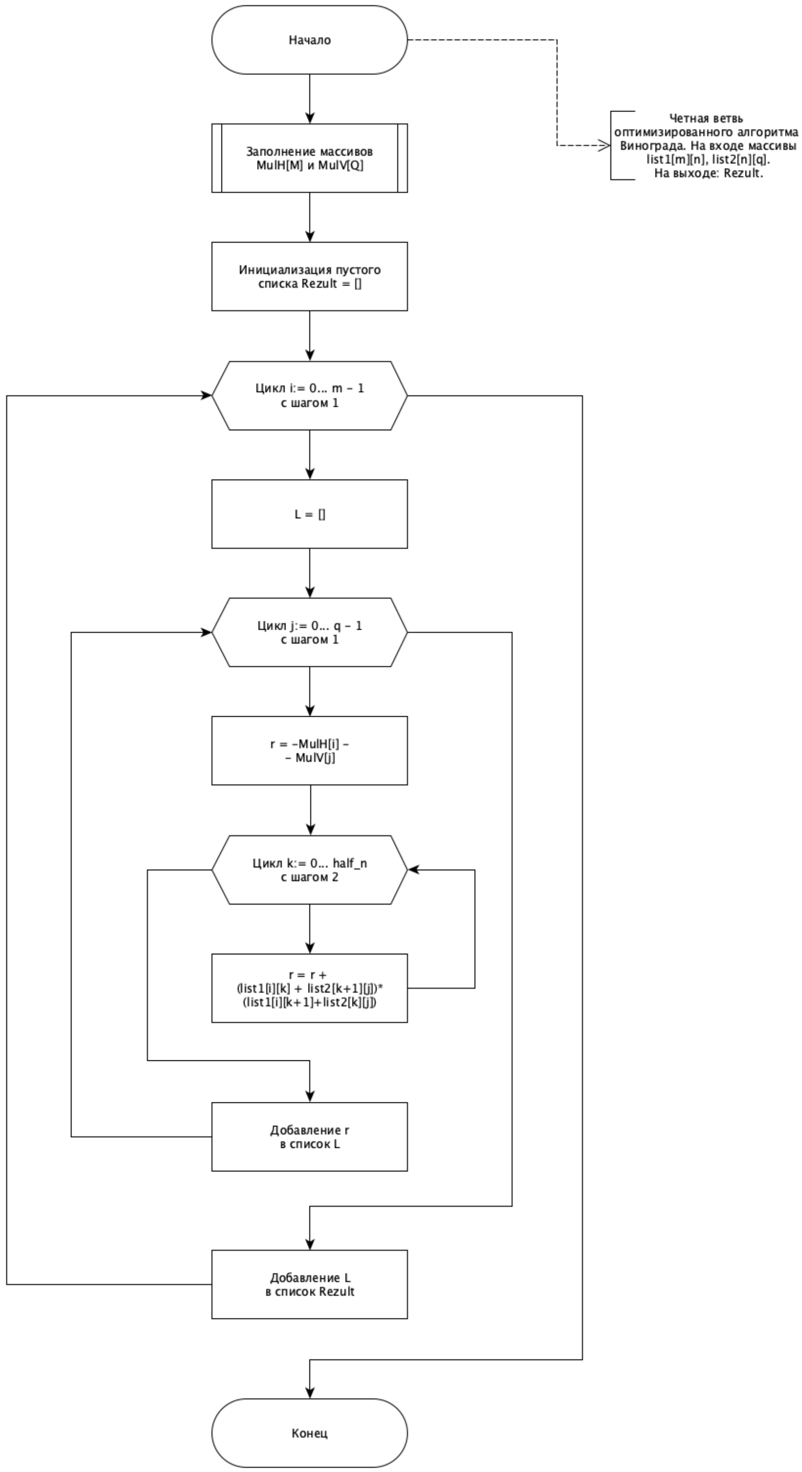


Рис. 4.8: Подпрограмма четного заполнения матрицы.

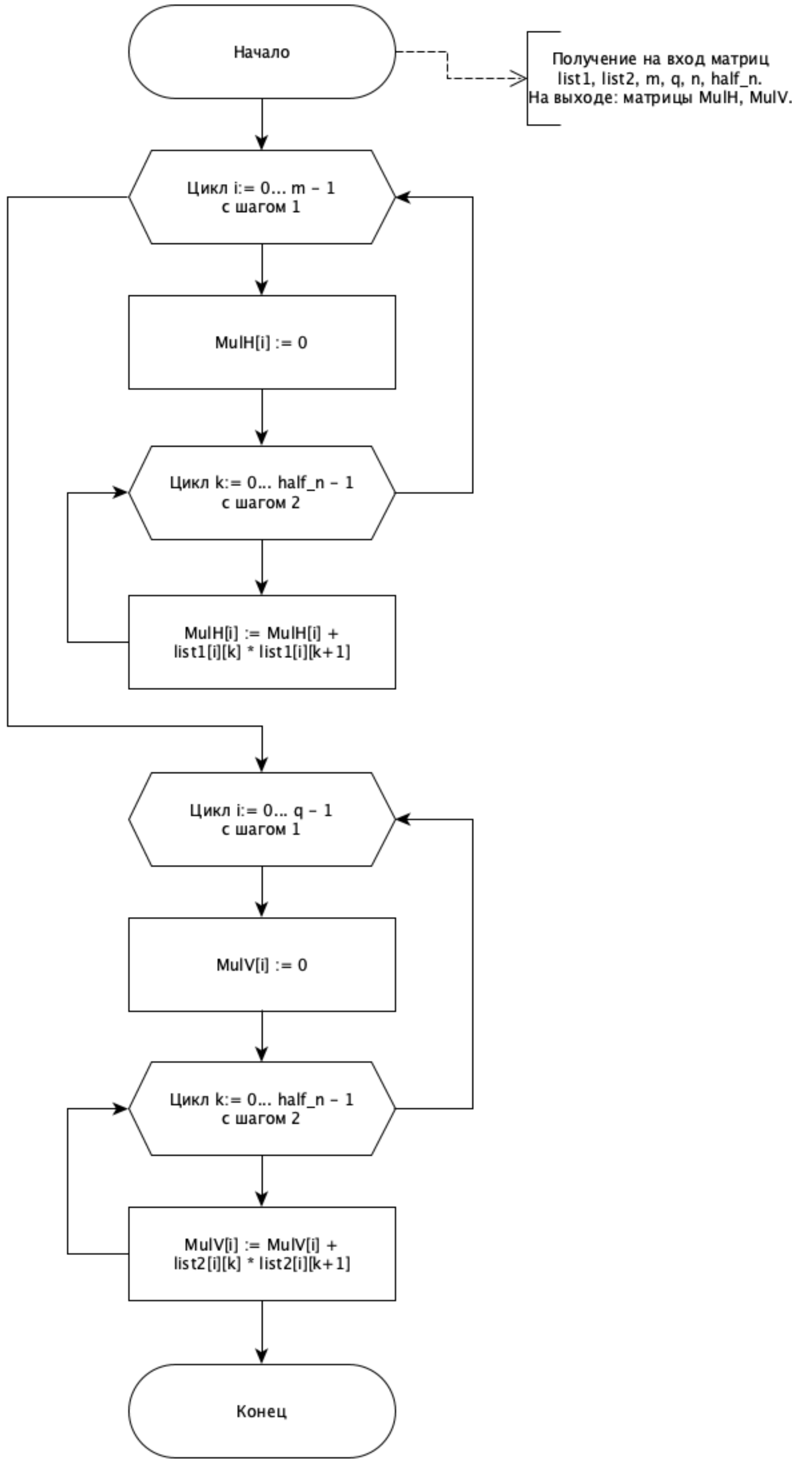


Рис. 4.9: Подпрограмма заполнения массивов MulH[M] и MulV[Q].

4.3 Оценка трудоемкости

4.3.1 Классический алгоритм

$$f_{classic} = 13MNQ + 4MQ + 4M + 1 \tag{4.1}$$

4.3.2 Алгоритм Виноградова

Трудоёмкости составных частей алгоритма:

- цикл создания вектора MulH: $f_I = \frac{15}{2}MN + 4M + 2$;
- цикл создания вектора MulV: $f_{II} = \frac{15}{2}NQ + 4Q + 2$;
- основной цикл: $f_{III} = 13MNQ + 4MQ + 4M + 2$;
- условный переход при чётном N: $f_{IV} = 2$;
- условный переход и цикл при нечётном N: $f_{IV} = 17MQ + 4M + 4$.

Общая трудоемкость алгоритма:

- при чётном N:

$$f_{vin} = f_I + f_{II} + f_{III} + f_{IV} = 13MNQ + \frac{15}{2}MN + \frac{15}{2}NQ + 4MQ + 8M + 4Q + 8 \tag{4.2}$$

- при нечётном N:

$$f_{vin} = f_I + f_{II} + f_{III} + f_{IV} = 13MNQ + \frac{15}{2}MN + \frac{15}{2}NQ + 21MQ + 12M + 4Q + 10 \tag{4.3}$$

4.3.3 Оптимизированный алгоритм Винограда

Трудоёмкости составных частей алгоритма:

- цикл создания вектора MulH: $f_I = \frac{11}{2}MN + 4M + 2$;
- цикл создания вектора MulV: $f_{II} = \frac{11}{2}NQ + 4Q + 2$;

- основной цикл при чётном N: $f_{III} = 10MNQ + 17MQ + 4M + 6$;
- основной цикл при нечётном N: $f_{III} = 10MNQ + 10NQ + 4M + 2$.

Общая трудоемкость алгоритма:

- при чётном N:

$$f_{opt} = f_I + f_{II} + f_{III} = 10MNQ + \frac{11}{2}MN + \frac{11}{2}NQ + 9MQ + 8M + 4Q + 6 \tag{4.4}$$

- при нечётном N:

$$f_{opt} = f_I + f_{II} + f_{III} = 10MNQ + \frac{11}{2}MN + \frac{11}{2}NQ + 16MQ + 8M + 4Q + 10 \tag{4.5}$$

4.4 Замер используемой памяти

Пусть даны две матрицы A и B размерностью $M \times N$ и размерностью $N \times Q$ соответственно и для хранения целого числа требуется 4 байта памяти.

В каждом из алгоритмов требуется хранить исходные матрицы A и B и матрицу результата умножения C, которая имеет размеры $M \times Q$. Таким образом, под хранение матриц требуется $4 \cdot (MN + NQ + MQ)$ байт памяти.

Для алгоритма Винограда и его оптимизированного варианта требуется также хранить два дополнительных вектора $MulH$ и $MulV$. Их размеры M и Q соответственно, следовательно требуется дополнительно $4 \cdot (M + Q)$ байт памяти. В итоге для алгоритмов Винограда требуется $4 \cdot (MN + NQ + MQ + M + Q)$ байт памяти. Таким образом, при больших размерах матриц (больше 100) алгоритмы Винограда будут незначительно проигрывать по памяти классическому алгоритму.

4.5 Требования к программе

- Программа должна предоставлять доступный и понятный интерфейс с выбором алгоритмов (и всех их реализаций);
- Должно быть 2 реализации алгоритма Виноградова:
  - неоптимизированная;
  - оптимизированная.
- На вход каждой функции, реализующей конкретный алгоритм, подаются две матрицы **целых** чисел;
- Пользователь должен иметь возможность вводить матрицы вручную либо выбрать пункт случайного заполнения, в случае чего ему будет предоставлен выбор длин матриц;
- Требования к выводу программы:
  - программа должна выдавать корректное перемножение двух матриц (см. Аналитискую часть);
  - при вводе пустых матриц - программа не должна аварийно завершаться, а выдавать пустую матрицу;
  - при вводе матриц, не удовлетворяющих условиям перемножения матриц (см. Аналитическую часть) - программа не должна аварийно завершаться, а выдавать пустую матрицу;

4.6 Выводы по конструкторской части

В результате проведенной работы было расписано описание алгоритмов, разработаны схемы алгоритмов, была оценена трудоемкость каждого из алгоритмов, а также расписаны оптимизации для алгоритма Винограда.

Помимо всего прочего, был произведен замер используемой памяти программой (аналитически). Были сформулированы основные требования к программе.

5 Технологическая часть

5.1 Средства реализации

Для реализации программы был использован язык программирования **Haskell** [1]. Время работы алгоритмов было замерено с помощью функции **getCPUTime** из библиотеки **System.CPUTime**. Для отключения встроенной оптимизиации компилятора был использован атрибут -O0 компилятора ghci. Тестирование было организовано с помощью библиотеки **TestHUnit**. При сравнении результатов двух функций использовалась функция randomRs из библиотеки System.Random, которая генерирует случайный список целых чисел нужного размера.

5.2 Сведения о модулях программы

Программа состоит из:

- Main.hs - Главный файл программы, в котором располагается меню;
- Lib.hs - файл с подключенными модулями реализаций алгоритмов;
- Standard.hs - Файл с реализацией стандартного алгоритма умножения матриц;
- Grape.hs - Файл с реализацией алгоритма Винограда;
- Optymize_grape.hs - Файл с реализацией оптимизированного алгоритма Винограда;

- Spec.hs - Файл с модульными тестами.

Ниже приведены листинги 5.1, 5.2, 5.3 функций программы.

Листинг 5.1: Стандартный алгоритм умножения матриц

```

import Data.List


answer_fill :: Int -> Int -> [[Int]]
answer_fill 0 j = []
answer_fill i j = take j (repeat 0) : answer_fill (i - 1)
    j


--c[m][q] += a[m][n] * b[n][q]
get_new_line_answer :: Int -> Int -> Int -> [Int] -> [Int]
get_new_line_answer j a b line = (take j line) ++
([(line !! j) + a * b]) ++
(reverse (take (length line - j - 1) $ reverse line))



third_loop :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int
    -> [[Int]] -> [[Int]]
third_loop list1_i list2 i j k n answer | k == n    =
    answer
| otherwise =
(third_loop list1_i list2 i j (k + 1) n $
take i answer ++
[get_new_line_answer j
(list1_i !! k)
((list2 !! k) !! j)
(answer !! i)] ++
(reverse (take (length answer - i - 1) $ reverse answer)))


second_loop :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> [[
    Int]] -> [[Int]]
```

```
second_loop list1_i list2 i j q answer | j == q    = answer
| otherwise =
second_loop list1_i list2 i (j + 1) q $
third_loop list1_i list2 i j 0 (length list2) answer


first_loop :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> [[Int]] -> [[Int]]
first_loop list1 list2 i m answer | i == m    = answer
| otherwise =
first_loop list1 list2 (i + 1) m $
second_loop (list1 !! i) list2 i 0 (length $ head list2) answer


calc_multypl :: [[Int]] -> [[Int]] -> [[Int]]
calc_multypl list1 list2 = (first_loop list1 list2 0 (length list1)) $ answer_fill
(length list1) (length $ head list2)


check_size :: [[Int]] -> Int -> Int
check_size list 1 = length list
check_size list 2 = length $ head list


check_matr :: [[Int]] -> Bool
check_matr [] = True
check_matr (_:[]) = True
check_matr (x:xs) = if ((length x) == (length $ head xs))
then check_matr xs
else False


standard :: [[Int]] -> [[Int]] -> [[Int]]
standard list1 list2 = if (check_matr list1 && check_matr list2)
then (if (check_size list1 2) == (check_size list2 1)
then calc_multypl list1 list2
```

```
else [[]])
else [[]]
```

Листинг 5.2: Алгоритм Винограда

```
import Data.List

answer_fill :: Int -> Int -> [[Int]]
answer_fill 0 j = []
answer_fill i j = take j (repeat 0) : answer_fill (i - 1) j



mulh_loop :: Int -> Int -> Int -> [Int] -> Int -> Int
mulh_loop i k n a_i mulh_i | k == div n 2    = mulh_i
| otherwise        = mulh_i + (a_i !! (2 * k)) * (a_i !! (2 * k + 1)) +
(mulh_loop i (k + 1) n a_i mulh_i)



calc_mulh :: Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> [Int] -> [Int]
calc_mulh i m n list mulh | i == m    = mulh
| otherwise = calc_mulh (i + 1) m n list
((take i mulh) ++
[mulh_loop i 0 n (list !! i) (mulh !! i)] ++
(reverse (take (length mulh - i - 1) $ reverse mulh)))



mulv_loop :: Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> Int -> Int
mulv_loop i k n a mulv_i    | k == div n 2    = mulv_i
| otherwise        = mulv_i + ((a !! (2 * k)) !! i) * ((a !! (2 * k + 1)) !! i) +
(mulv_loop i (k + 1) n a mulv_i)



calc_mulv :: Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> [Int] -> [Int
```

```
    ]
calc_mulv i q n list mulv | i == q     = mulv
| otherwise = calc_mulv (i + 1) q n list
((take i mulv) ++
[mulv_loop i 0 n list (mulv !! i)] ++
(reverse (take (length mulv - i - 1) $ reverse mulv)))


main_k_loop :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> [[Int]]
main_k_loop a b i j k c | k == div (length b) 2 = c
| otherwise              = main_k_loop a b i j (k + 1) (
(take i c) ++
[
take j (c !! i) ++
[((c !! i) !! j) + ((((a !! i) !! (2 * k)) + ((b !! (2 * k + 1)) !! j)) *
(((a !! i) !! (2 * k + 1)) + ((b !! (2 * k)) !! j)))] ++
(reverse (take (length (c !! i) - j - 1) $ reverse (c !! i)))
] ++
(reverse (take (length c - i - 1) $ reverse c))
)



main_q_loop :: [[Int]] -> [[Int]] -> [Int] -> [Int] -> Int -> Int -> [[Int]] -> [[Int]]
main_q_loop a b mulh mulv i j c | j == (length $ head b) = c
| otherwise                 = main_q_loop a b mulh mulv i (j + 1) (main_k_loop a b i j 0
(
(take i c) ++
[
take j (c !! i) ++
[-1 * ((mulh !! i) + (mulv !! j))] ++
(reverse (take (length (c !! i) - j - 1) $ reverse (c !! i)))
] ++
```

```
(reverse (take (length c - i - 1) $ reverse c))
)
)


main_calc :: [[Int]] -> [[Int]] -> [Int] -> [Int] -> Int
    -> [[Int]] -> [[Int]]
main_calc a b mulh mulv i c | i == (length a)  = c
| otherwise          = main_calc a b mulh mulv (i + 1) (
    main_q_loop a b mulh mulv i 0 c)



nechet_q_loop :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int
    -> Int -> [[Int]] -> [Int]
nechet_q_loop a b i j n q c | j == q    = (c !! i)
| otherwise = nechet_q_loop a b i (j + 1) n q
(
(take i c) ++
[(take j (c !! i)) ++
[((c !! i) !! j) + ((a !! i) !! (n - 1)) * ((b !! (n - 1))
    !! j)] ++
(reverse (take (length (c !! i) - j - 1) $ reverse (c !! i
    )))] ++
(reverse (take (length c - i - 1) $ reverse c))
)



nechet_m_loop :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int
    -> Int -> [[Int]] -> [[Int]]
nechet_m_loop a b i m q n c | i == m    = c
| otherwise = nechet_m_loop a b (i + 1) m q n
((take i c) ++
[nechet_q_loop a b i 0 n q c] ++
(reverse (take (length c - i - 1) $ reverse c)))


nechet_calc :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int ->
    [[Int]] -> [[Int]]
```

```
nechet_calc a b m q n c | not (odd n) = c
| otherwise = nechet_m_loop a b 0 m q n c



calc_multypl :: [[Int]] -> [[Int]] -> [[Int]]
calc_multypl list1 list2 = nechet_calc list1 list2 (length list1)
(length $ head list2)
(length list2) $
main_calc list1 list2
(calc_mulh 0 (length list1) (length $ head list1) list1 (take (length list1) (repeat 0)))
(calc_mulv 0 (length $ head list2) (length list2) list2 (take (length $ head list2) (repeat 0)))
0
(answer_fill (length list1) (length $ head list2))



check_size :: [[Int]] -> Int -> Int
check_size list 1 = length list
check_size list 2 = length $ head list


check_matr :: [[Int]] -> Bool
check_matr [] = True
check_matr (_:[]) = True
check_matr (x:xs) = if ((length x) == (length $ head xs))
then check_matr xs
else False



grape :: [[Int]] -> [[Int]] -> [[Int]]
grape list1 list2 = if (check_matr list1 && check_matr list2)
then (if (check_size list1 2) == (check_size list2 1)
then calc_multypl list1 list2 else [[]])
else [[]]
```

Листинг 5.3: Оптимизированный алгоритм Винограда

```
answer_fill :: Int -> Int -> [[Int]]
answer_fill 0 j = []
answer_fill i j = take j (repeat 0) : answer_fill (i - 1) j

mulh_loop :: Int -> Int -> Int -> [Int] -> Int -> Int
mulh_loop i k n a_i mulh_i | k >= n    = mulh_i
| otherwise = mulh_i + (a_i !! k) * (a_i !! (k + 1)) +
(mulh_loop i (k + 2) n a_i mulh_i)

calc_mulh :: Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> [Int] -> [Int]
calc_mulh i m n list mulh | i == m    = mulh
| otherwise = calc_mulh (i + 1) m n list
((take i mulh) ++
[mulh_loop i 0 n (list !! i) (mulh !! i)] ++
(reverse (take (length mulh - i - 1) $ reverse mulh)))

mulv_loop :: Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> Int -> Int
mulv_loop i k n a mulv_i   | k >= n      = mulv_i
| otherwise   = mulv_i + ((a !! k) !! i) * ((a !! (k + 1)) !! i) +
(mulv_loop i (k + 2) n a mulv_i)

calc_mulv :: Int -> Int -> Int -> [[Int]] -> [Int] -> [Int]
calc_mulv i q n list mulv | i == q    = mulv
| otherwise = calc_mulv (i + 1) q n list
((take i mulv) ++
[mulv_loop i 0 n list (mulv !! i)] ++
```

```
(reverse (take (length mulv - i - 1) $ reverse mulv)))



buf :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int
buf a_i b j k n | k >= n    = 0
| otherwise = (((a_i !! k) + ((b !! (k + 1)) !! j)) *
((a_i !! (k + 1)) + ((b !! k) !! j))) +
(buf a_i b j (k + 2) n)



main_q_loop :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int -> Int -> [Int] -> [Int]
main_q_loop a_i b j m q n mulh_i mulv | j == q    = []
| otherwise = ((buf a_i b j 0 n) -
(mulh_i +
(mulv !! j))) :
(main_q_loop a_i b (j + 1) m q n mulh_i mulv)


main_calc :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int -> [Int] -> [Int] -> [[Int]]
main_calc a b i m q n mulh mulv | i == m    = []
| otherwise = (main_q_loop (a !! i) b 0 m q n (mulh !! i) mulv) :
(main_calc a b (i + 1) m q n mulh mulv)


buf_nechet :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int
buf_nechet a_i b j k n_minus_one | k >= n_minus_one = 0
| otherwise         = (((a_i !! k) + ((b !! (k + 1)) !! j)) *
((a_i !! (k + 1)) + ((b !! k) !! j))) +
(buf_nechet a_i b j (k + 2) n_minus_one)



add_nechet :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int
```

```
add_nechet a_i b j n_minus_one = (a_i !! n_minus_one) * ((b !! n_minus_one) !! j)


main_q_loop_nechet :: [Int] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int -> Int -> [Int] -> Int -> [Int]
main_q_loop_nechet a_i b j m q n mulh_i mulv n_minus_one | j == q     = []
| otherwise = ((buf_nechet a_i b j 0 n_minus_one) -
(mulh_i +
(mulv !! j)) + (add_nechet a_i b j n_minus_one)) :
(main_q_loop_nechet a_i b (j + 1) m q n mulh_i mulv n_minus_one)


main_calc_nechet :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> Int -> [Int] -> [Int] -> Int -> [[Int]]
main_calc_nechet a b i m q n mulh mulv n_minus_one | i == m     = []
| otherwise = (main_q_loop_nechet (a !! i) b 0 m q n (mulh !! i) mulv n_minus_one) :
(main_calc_nechet a b (i + 1) m q n mulh mulv n_minus_one)


calc_multypl :: [[Int]] -> [[Int]] -> Int -> Int -> Int -> [[Int]]
calc_multypl list1 list2 m q n = if not (odd n) then
(main_calc list1 list2 0 m q n
(calc_mulh 0 m n list1 (take m (repeat 0)))
(calc_mulv 0 q n list2 (take q (repeat 0))))
else (main_calc_nechet list1 list2 0 m q n
(calc_mulh 0 m (n - 1) list1 (take m (repeat 0)))
(calc_mulv 0 q (n - 1) list2 (take q (repeat 0)))
(n - 1))
```

```
check_size :: [[Int]] -> Int -> Int
check_size list 1 = length list
check_size list 2 = length $ head list

check_matr :: [[Int]] -> Bool
check_matr [] = True
check_matr (_:[]) = True
check_matr (x:xs) = if ((length x) == (length $ head xs))
then check_matr xs
else False



optymize_grape :: [[Int]] -> [[Int]] -> [[Int]]
optymize_grape list1 list2 = if (check_matr list1 &&
    check_matr list2)
then (if (check_size list1 2) == (check_size list2 1)
then calc_multypl list1 list2 (length list1)
(length $ head list2)
(length list2)
else [[]])
else [[]]
```

5.3 Тесты

Для проверки корректности работы алгоритмов были подготовлены функциональные автоматические тесты, представленные в таблице 5.1.

Таблица 5.1: Функциональные тесты.

Описание теста	Матрица 1	Матрица 2	Ожидаемый результат
Пустые матрицы	[[]]	[[]]	[[]]
Незаполненные матрицы	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & \end{bmatrix}$	[[]]
$n1 \neq n2$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$	[[]]
n четное (4x6 6x1)	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 9 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 9 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 97 \\ 100 \\ 130 \\ 102 \end{bmatrix}$
n нечетное (5x3 3x7)	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 3 & 8 & 6 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 99 & 94 & 128 & 58 & 111 & 109 & 75 \\ 71 & 74 & 98 & 43 & 84 & 82 & 58 \\ 42 & 66 & 74 & 32 & 58 & 62 & 54 \\ 36 & 92 & 86 & 39 & 59 & 75 & 81 \\ 73 & 117 & 123 & 59 & 92 & 110 & 104 \end{bmatrix}$
Обычный случай (3x3 3x6)	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 58 & 29 & 34 & 17 & 53 & 37 \\ 100 & 56 & 63 & 40 & 107 & 67 \\ 106 & 65 & 54 & 37 & 89 & 61 \end{bmatrix}$
Обычный случай №2 (1x4 4x1)	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 83 \end{bmatrix}$
Обычный случай №3 (6x2 2x5)	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \\ 2 & 5 \\ 8 & 9 \\ 9 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 34 & 57 & 31 & 54 & 26 \\ 46 & 73 & 59 & 86 & 34 \\ 31 & 53 & 24 & 46 & 24 \\ 69 & 113 & 74 & 118 & 52 \\ 52 & 81 & 73 & 102 & 38 \\ 52 & 88 & 44 & 80 & 40 \end{bmatrix}$

Также были подготовлены тесты, в которых попарно сравнивались все 3 реализации функций умножения матриц.

В результате проверки реализации всех алгоритмов умножения прошли все поставленные функциональные тесты.

5.4 Выводы по технологической части

В качестве языка программирования был выбран язык программирования Haskell, а также все необходимые функции для реалзиации поставленных задач.

Была разработана программа, реализаующая все требования, поставленные в конструкторской части. Сведения о модулях программы и листинги кода также приведены в этом разделе.

Были составлены функциональные тесты, проверяющие работу реализованных алгоритмов.

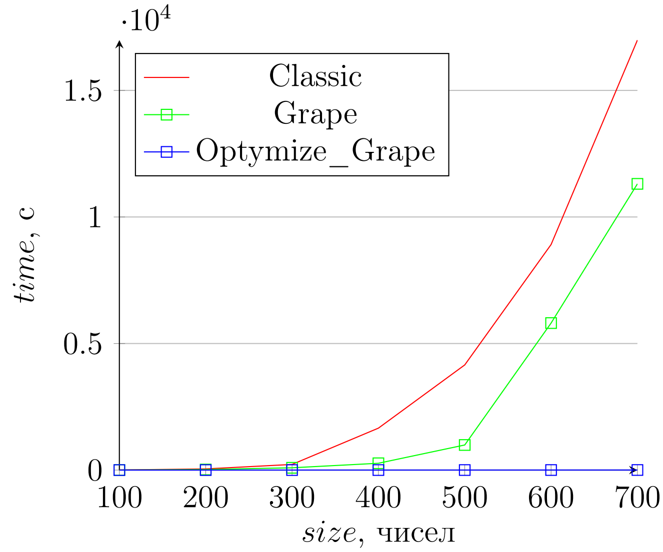
6 Экспериментальная часть

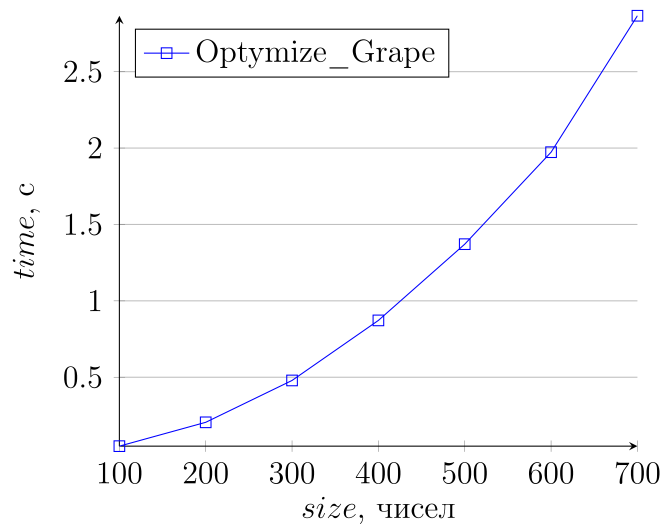
6.1 Сравнение работы алгоритмов при чётных размерах матриц

Для сравнения времени работы алгоритмов умножения матриц были использованы квадратные матрицы размером от 100 до 1000 с шагом 100. Эксперимент для более точного результата повторялся 100 раз. Итоговый результат рассчитывался как средний из полученных результатов. Результаты измерений показаны в таблице и на рисунке

Таблица 6.1: Время работы алгоритмов в секундах.

Размер матриц	Классический, с	Алгоритм Винограда, с	Оптимизированный алгоритм Винограда, с
100	4.927	2.517	0.049
200	45.956	22.215	0.205
300	222.990	90.549	0.479
400	1656.764	268.980	0.872
500	4154.464	991.378	1.371
600	8910.944	5808.120	1.973
700	16988.810	11308.290	2.866





Из результатов эксперимента видно, что алгоритм Винограда, даже в самой плохой своей реализации, на больших размерах матриц (порядка 100x100) значительно выигрывает по сравнению с классическим алгоритмом умножения матриц (при умножении матриц 500x500 время выполнения различается больше чем в 4 раза).

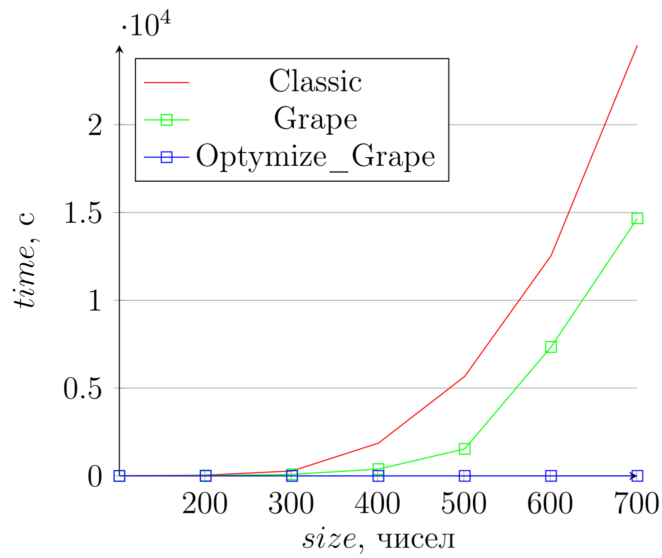
Если же говорить про оптимизированную версию алгоритма Винограда, то она затрачивает в тысячи раз меньше времени (при умножении матриц 500x500 время выполнения различается больше чем в 4000 раз) чем классический алгоритм умножения.

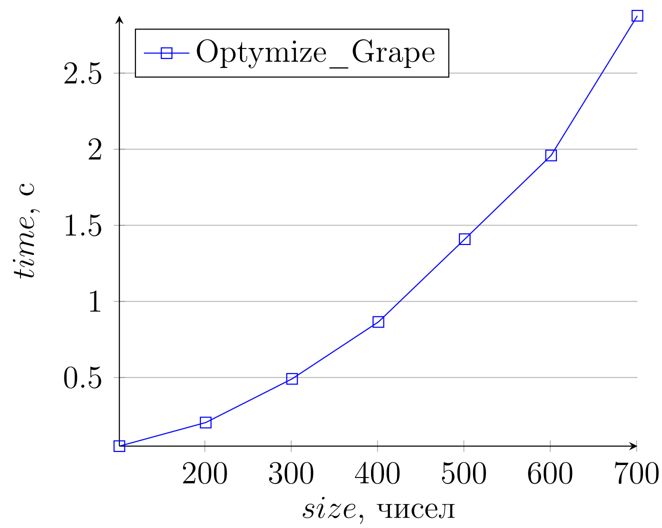
6.2 Сравнение работы алгоритмов при нечетных размерах матриц

Для сравнения времени работы алгоритмов умножения матриц были использованы квадратные матрицы размером от 100 до 1000 с шагом 100. Эксперимент для более точного результата повторялся 100 раз. Итоговый результат рассчитывался как средний из полученных результатов. Результаты измерений показаны в таблице и на рисунке

Таблица 6.2: Время работы алгоритмов в секундах.

Размер матриц	Классический, с	Алгоритм Винограда, с	Оптимизированный алгоритм Винограда, с
101	5.150	2.368	0.049
201	43.338	22.306	0.204
301	281.546	88.246	0.491
401	1865.899	386.807	0.865
501	5668.476	1538.992	1.409
601	12540.691	7346.204	1.959
701	24528.664	14666.842	2.877





Для случая с нечетными матрицами ситуация не меняется даже не смотря на выполнение худшего случая алгоритма Винограда: алгоритм Винограда, даже в самой плохой своей реализации, на больших размерах матриц (порядка 100x100) значительно выигрывает по сравнению с классическим алгоритмом умножения матриц (при умножении матриц 501x501 время выполнения различается больше чем в 3 раза)

Если же говорить про оптимизированную версию алгоритма Винограда, то она затрачивает в тысячи раз меньше времени (при умножении матриц 501x501 время выполнения различается больше чем в 5000 раз) чем классический алгоритм умножения.

6.3 Выводы по экспериментальной части

В результате полученных экспериментов выяснилось, что на больших размерах матриц оба алгоритма Винограда (неоптимизированная версия и оптимизированная) выигрывают у стандартного алгоритма умножения матриц как в лучшем (при четных размерах), так и в худшем случаях (при нечетных размерах).

Заключение

В ходе лабораторной работы были изучены 2 алгоритма умножения матриц: классический алгоритм и алгоритм Винограда. Также были разработаны 2 реализации алгоритма Винограда: оптимизированная и неоптимизированная версия, и одна реализация стандартного алгоритма на языке программирования Haskell.

Сравнительный анализ алгоритмов показал, что алгоритмы Винограда, введя дополнительные векторы и увеличив тем самым расход памяти, добились уменьшения времени умножения матриц за счет уменьшения трудоемких операций: вместо 2 операций умножения, используемых в стандартном варианте, выполнялась всего одна операция умножения в алгоритме Винорада. Причем неоптимизированная версия алгоритма Винограда работает в среднем на 55% быстрее нежели стандартный алгоритм на больших размерах матриц (от 100 и больше), а оптимизированная версия работает в среднем в 2300 раз быстрее, чем стандартный алгоритм.

Такая большая разница между оптимизированной версией и неоптимизированной обусловлена не только тем списком оптимизаций, что изложен в конструкторской части, но также тем, что реализация данного алгоритма была написана на языке программирования Haskell, у которого основной структурой данных является не массив, а список. В связи с чем операция обращения к i-ому элементу списка занимает гораздо больше времени нежели обращение к голове списка (0-ому элементу) в отличие от "сишного"массива, где не имеет значения, к какому элементу по счету идет обращение, так как происходит обращение по указателю.

Литература

[1] https://www.haskell.org/documentation/ - Документация Haskell

[2] Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1987.

[3] Jelfimova L. A new fast systolic array for modified Winograd algorithm // Proc. Sevens Int. Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata and Array, PARCELLA-96 (Berlin, Germany, Sept. 1996). — Berlin: Akad. Verlag. — 1996.

[4] Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р.М. Ривест: – МЦНТО, 1999.

[5] https://cppreference.com/ [Электронный ресурс]