Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Дисциплина: «Моделирование»

Лабораторная работа №3

Тема работы: «Марковские случайные цепи»

Студент: Левушкин И. К.
Группа: ИУ7-72Б
Преподаватель: Рудаков И. В.

Москва, 2020 г.

Задание

Необходимо для сложной системы S, имеющей не более 10 состояний, определить среднее время нахождения системы в предельных состояниях, т. е. при установившемся режиме работы. Матрица интенсивностей, задать размерность системы ($\leqslant 10$), нажать на кнопку вычислить и получить время.

Марковский случайный процесс

Случайный процесс называется марковским, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от её состояния в настоящем, т. е. при $t = t_0$, и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние, т. е. не зависит от того, как процесс развивался в прошлом. В марковском случайном процессе будущее развитие его зависит только от настоящего и не зависит от предыстории процесса. Уравнения Колмогорова:

$$F = (P'(t), P(t), \Lambda) = 0, \tag{1}$$

$\Lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - набор некоторых коэффициентов.

Для станционарного распределения:

$$\Phi = (P(t), \Lambda) = 0 \tag{2}$$

Для выходных характеристик:

$$Y = Y(P(\Lambda)), Y = Y(X, V, H) \tag{3}$$

Формализация

В данной лабораторной работе необходимо определить среднее относительное время пребывания системы S в каждом из состоянии.

Для этого необходимо посчитать вероятности для каждого состояния. Чтобы посчитать вероятности, *достаточно*, чтобы из любого состояния системы можно было (за какое-то число шагов) перейти в любое другое.

Таким образом, под матрицей интенсивностей будем подразумевать граф перехода из i-ого состояния системы в j-ое.

Ниже приведен пример для размерности системы, равной 4, а именно матрица интенсивностей для каждого перехода из одного состояния в другое и граф самого процесса:

λ	1	2	3	4
1	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}
2	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}
3	λ_{31}	λ_{32}	λ_{33}	λ_{34}
4	λ_{41}	λ_{42}	λ_{43}	λ_{44}

Таблица 1: Матрица интенсивностей для каждого перехода из i-ого состояния в j-ое.

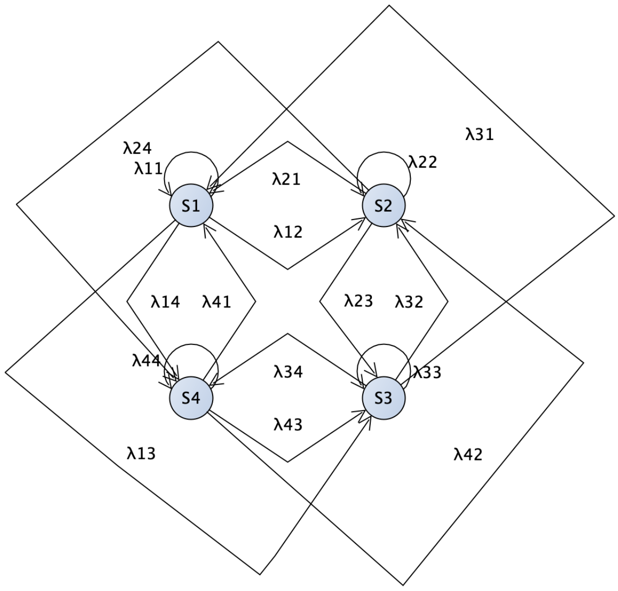

Рис. 1: Граф марковского процесса из 4 состояний.

Соответственно, напишем систему уравнений для данного процесса:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14})p_1(t)+\lambda_{11}p_1(t)+\lambda_{21}p_2(t)+\lambda_{31}p_3(t)+\lambda_{41}p_4(t) \\ p_2'(t) = -(\lambda_{22}+\lambda_{21}+\lambda_{23}+\lambda_{24})p_2(t)+\lambda_{22}p_2(t)+\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{32}p_3(t)+\lambda_{42}p_4(t) \\ p_3'(t) = -(\lambda_{33}+\lambda_{31}+\lambda_{32}+\lambda_{34})p_3(t)+\lambda_{33}p_3(t)+\lambda_{13}p_1(t)+\lambda_{23}p_2(t)+\lambda_{43}p_4(t) \\ p_4'(t) = -(\lambda_{44}+\lambda_{41}+\lambda_{42}+\lambda_{43})p_4(t)+\lambda_{44}p_4(t)+\lambda_{24}p_2(t)+\lambda_{34}p_3(t)+\lambda_{14}p_1(t) \end{cases} \tag{4}$$

Вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ могут быть получены решением данной системы линейных алгебраических уравнений, если положить в них левые части (производные) равными нулю.

Таким образом, получается (для системы S с 4 состояниями) система 4 однородных линейных алгебраических уравнений с 4 неизвестными ${}_1, {}_2, ..., {}_4$.

Из этой системы можно найти неизвестные $_1, _2, ..., _4$ с точностью до произвольного множителя. Чтобы найти точные значения $_1, ..., _4$, к уравнениям добавляют нормировочное условие $p_1+p_2+\ldots+p_4=1$, пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей p_i через другие (и соответственно отбросить одно из уравнений).

Таким образом, система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14})p_1 + \lambda_{11}p_1 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4 \\ 0 = -(\lambda_{22}+\lambda_{21}+\lambda_{23}+\lambda_{24})p_2 + \lambda_{22}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 + \lambda_{42}p_4 \\ 0 = -(\lambda_{33}+\lambda_{31}+\lambda_{32}+\lambda_{34})p_3 + \lambda_{33}p_3 + \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 + \lambda_{43}p_4 \\ 1 = p_1+p_2+p_3+p_4 \end{cases} \tag{5}$$

А среднее относительное время пребывания системы в i-ом состоянии равняется:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\lambda_{14})-(\lambda_{11}+\lambda_{21}+\lambda_{31}+\lambda_{41})}{p_1} \\ \tau_2 = \frac{(\lambda_{21}+\lambda_{22}+\lambda_{23}+\lambda_{24})-(\lambda_{12}+\lambda_{22}+\lambda_{32}+\lambda_{42})}{p_2} \\ \tau_3 = \frac{(\lambda_{31}+\lambda_{32}+\lambda_{33}+\lambda_{34})-(\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{33}+\lambda_{43})}{p_3} \\ \tau_4 = \frac{(\lambda_{41}+\lambda_{42}+\lambda_{43}+\lambda_{44})-(\lambda_{14}+\lambda_{24}+\lambda_{34}+\lambda_{44})}{p_4} \end{cases} \tag{6}$$

Результаты работы

Ниже приведены результаты работы программы для 3, 4 и 5 состояний.

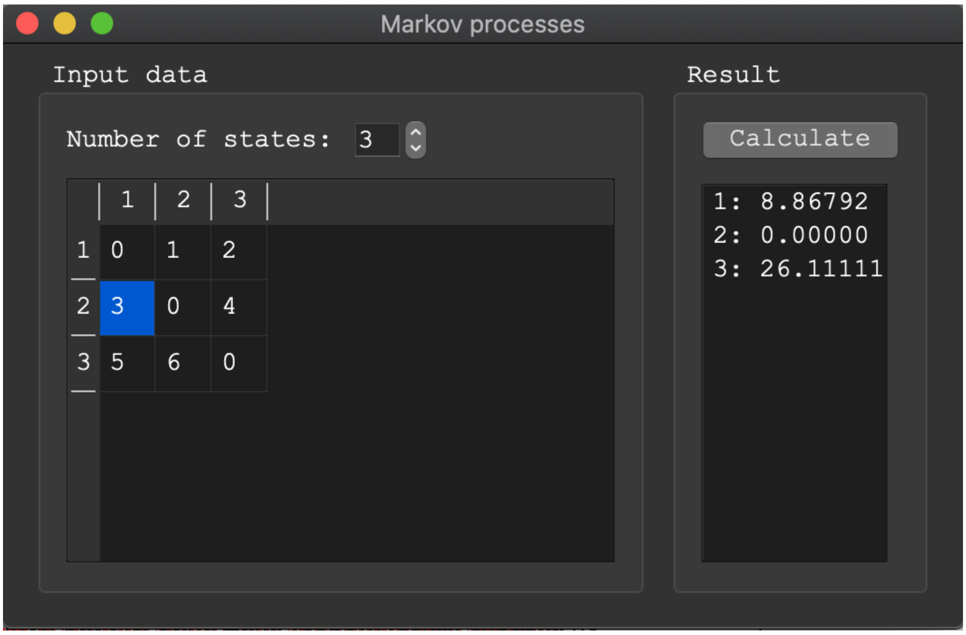

Рис. 2: Результат работы программы при для 3 состояний.

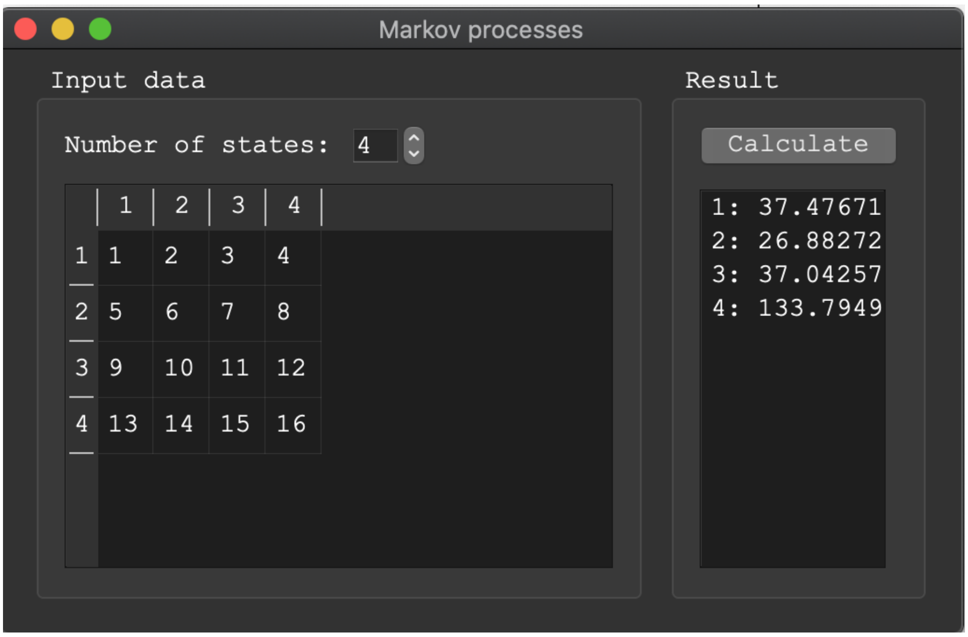

Рис. 3: Результат работы программы при для 4 состояний.

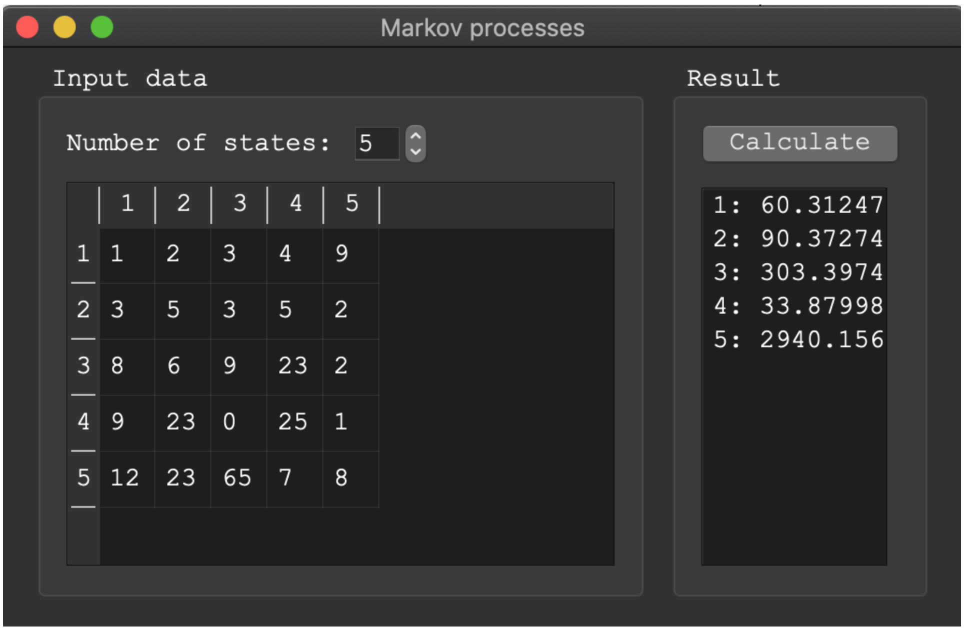

Рис. 4: Результат работы программы при для 5 состояний.

Вывод

В результате проделанной работы была дана теоретическая справка по Марковским случайным процессам и проведена формализация задачи.

Также, была разработана программа, полностью реализующая поставленную задачу.