Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №1

Тема: «Приближенный аналитический метод Пикара, сравнение с численными методами»

Студент: Левушкин И.К.
Группа: ИУ7-62Б
Оценка (баллы):
Преподаватель: Градов В.М.

Москва, 2020 г.

Рассмотрим задачу с начальным условием для дифференциального уравнения (задачу Коши):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

Решение можно найти приближенным аналитическим методом Пикара:

$$y^{(n+1)}(x) = \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, y^{(n)}(t))dty$$
$$y^{(0)}(x) = \eta$$

Покажем на конкретном примере:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= x^2 + y^2 \\
y(0) &= 0 \\
y^{(1)}(x) &= 0 + \int\limits_0^x t^2 dty = \frac{t^3}{3} \\
y^{(2)}(x) &= 0 + \int\limits_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right] dty = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 9} = \frac{t^3}{3}\left[1 + \frac{t^4}{21}\right] \\
y^{(3)}(x) &= 0 + \int\limits_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\left[1 + \frac{t^4}{21}\right]\right)^2\right] dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 9} = \frac{t^3}{3}\left[1 + \frac{t^4}{21}\right] = \\
&= \frac{x^3}{3}\left[1 + \frac{x^4}{21} + \frac{2x^8}{693} + \frac{x^{12}}{19845}\right] \\
&\dots
\end{aligned}$$

Чем больше итераций n, тем точнее результат.

Кроме того, эту задачу можно решить численными методами. Следующая формула для явного способа:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Похожим образом выглядит неявный метод:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Чем меньше шаг h, тем точнее значение получим.

Стоит заметить, что для всех рассмотренных методов результат будет тем лучше, чем ближе значение x к ξ.

Реализованная программа производит расчет для $f(x, y) = x^2 + y^2$. Исходя из этого, можно упростить нахождения решения в неявном виде: получаем квадратное уравнение и в качестве решения берем меньший корень.