



Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Учебное пособие

В.М. ГРАДОВ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРАКТИКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 2

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

В.М. ГРАДОВ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В ПРАКТИКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 2

*Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия*

М о с к в а
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2 0 0 6

УДК 518.12
ББК 22.193
Г75

Рецензенты: *В.П. Бородько, А.М. Зимин*

Градов В.М.

Г75 Компьютерные технологии в практике математического моделирования: Учеб. пособие. – Ч. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 48 с.: ил.

ISBN 5-7038-2918-6

Рассмотрены методы построения разностных схем для дифференциальных уравнений в частных производных и средства их компьютерной реализации применительно к различным задачам инженерного и научного содержания. Изложение методов дано с учетом их применения при разработке компьютерных программ на языках высокого уровня и доведено до конкретных рекомендаций по повышению эффективности создаваемых алгоритмов. Важное место в пособии отводится обсуждению использования в расчетной практике современных математических пакетов типа Matlab, приведены примеры использования данного пакета для реализации моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных различных типов.

Для студентов технических университетов.

Ил. 11. Библиогр. 9 назв.

УДК 518.12
ББК 22.193

ISBN 5-7038-2918-6

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии обсуждаются постановки задач при создании математических моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных, вопросы перехода к их дискретной формулировке и способы решения получающихся разностных аналогов [1–7]. Главное внимание сосредоточено на методе конечных разностей, и, соответственно, рассматриваются хорошо зарекомендовавшие себя подходы к получению разностных схем, основанные на непосредственной конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, методе неопределенных коэффициентов и интегро-интерполяционном методе. Сделаны необходимые замечания по особенностям использования методов, областям их наиболее эффективного применения и ограничениям при выборе. В материал пособия включены представляющие интерес для практики вопросы оценивания аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем. Важное место при описании методов отведено различным аспектам компьютерной реализации разностной задачи, что имеет непосредственный выход в практику разработки соответствующих алгоритмов и программного кода с использованием языков высокого уровня (C, Pascal, Fortran). Детали алгоритмов рассматриваются на типовых задачах, возникающих в практике математического моделирования.

Заключительная часть пособия посвящена применению компьютерных технологий при решении вычислительных задач с использованием математического пакета Matlab, отличающегося необычайным разнообразием реализованных в нем численных методов. В состав этих методов включены, в частности, средства решения уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов (ToolBox PDE). Пакет имеет эффективные средства процедурного, объектно-ориентированного и визуального программирования, хорошо продуманные средства отладки программ и создания интерфейса пользователя. При этом развитый графический интерфейс пакета позволяет легко формировать входную информацию и визуализировать результаты вычислений. С помощью ToolBox PDE Matlab может быть решен широкий класс задач математической физики, которые относятся к таким областям научной и инженерной деятельности,

как тепломассоперенос, электростатика и магнитостатика, сопротивление материалов, теория упругости и др. Пакет применим также для решения вычислительных задач и в других областях науки, техники и экономики, в которых применяются модели на основе уравнений в частных производных. Детально возможности пакета Matlab описаны в [8, 9].

1. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Математические модели в частных производных позволяют описывать поля разнообразной физической природы: температур, плотностей, скоростей и концентраций частиц, гравитационные, электромагнитные, радиационные и др. С уравнениями в частных производных приходится иметь дело в различных областях науки и техники при формировании моделей гидро- и газодинамики, переноса излучения, квантовой механики, теплопередачи, физики плазмы и т. д. В указанных уравнениях в качестве независимых переменных обычно выступают время и пространственные координаты, но могут использоваться и такие переменные, как проекции скоростей частиц на координатные оси, что может увеличить размерность уравнений до семи. Решение отыскивается в некоторой области $G(t, x, y, z)$, а на границе области ставятся дополнительные условия, причем условия, поставленные в начальный момент времени, называются *начальными*, а условия на границе пространственной области – *граничными*, или *краевыми*. Для уравнений в частных производных можно поставить задачу Коши, когда формулируются только начальные условия (например, при рассмотрении распространения тепла в неограниченном пространстве).

В пособии рассматриваются методы решения уравнений второго порядка, линейных относительно производных. Общий вид таких уравнений в случае двух переменных может быть представлен следующим образом [1, 2]:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} в общем случае являются функциями x , y , u , u_x , u_y , и тогда уравнение называется *квазилинейным*. Если данные коэффициенты зависят только от x и y , то уравнение считается *линейным относительно старших производных*. Наконец, уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции и ее первых производных, т. е. уравнение может быть записано в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0,$$

где все коэффициенты являются функциями только x и y . Если все коэффициенты не зависят от x и y , то уравнение называется *линейным с постоянными коэффициентами*.

Если коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} равны нулю, а $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, то уравнение имеет первый порядок и называется *уравнением переноса*.

В зависимости от знака дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ уравнения делятся на *гиперболические* ($d > 0$), *параболические* ($d = 0$) и *эллиптические* ($d < 0$).

Общая классификация методов решения уравнений всех типов аналогична приведенной в [1, 6] для обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно: существуют *точные*, *аналитические*, *приближенные* и *численные* методы. Точные решения уравнений в частных производных удается получить лишь в ограниченном ряде случаев, поэтому при реализации вычислительных моделей, построенных на таких уравнениях, особенно велика роль численных методов.

К точным методам решения относятся метод разделения переменных, метод функций источника, метод распространяющихся волн и др. Среди аналитических приближенных методов можно отметить метод малого параметра и метод Бубнова – Галеркина. К численным методам относятся метод конечных разностей (сеточный) и метод конечных элементов (проеекционно-сеточный). В настоящем пособии внимание сосредоточено на методе конечных разностей.

1.1. Постановки задач

Рассмотрим уравнения математической физики, в которых независимыми переменными являются время t и пространственные координаты \vec{r} .

Для выделения единственного решения уравнения должны быть сформулированы дополнительные условия, которые записываются на границе области изменения независимых переменных $\Omega(\vec{r}, t)$. При этом различают задачу Коши (заданы только начальные условия, т. е. условия при $t = t_0$, например задача для беско-

нечного пространства), краевые задачи (заданы условия на границе пространственной области) и смешанные краевые, или нестационарные краевые, задачи (заданы и начальные, и краевые условия).

В качестве примера обсудим постановку задачи для уравнения параболического типа в одномерном и двумерном вариантах. В одномерном варианте имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T_0. \quad (1.1)$$

Начальное условие формулируется в виде

$$u(x, 0) = \mu(x). \quad (1.2)$$

Граничные условия могут быть нескольких типов в зависимости от того, задаются ли на границах функция или ее производная, или соотношение между функцией и ее производной. Могут быть также заданы соотношения на контактной границе и, кроме того, поставлены нелинейные граничные условия.

Простейшие граничные условия первого рода формируют заданием функции

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия второго рода содержат производную от искомой функции. Например, при $x = 0$ можно написать соотношение

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t).$$

Граничные условия третьего рода:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \psi(t).$$

В двумерной постановке задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t), \quad (x, z) \in \Omega, \quad 0 < t < T_0. \quad (1.4)$$

Начальное условие:

$$u(x, z, 0) = \mu(x, z). \quad (1.5)$$

Краевые условия первого рода на границе Γ :

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x, z, t),$$

или более подробно для прямоугольной пространственной области $0 < x < l, \quad 0 < z < s$:

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= \mu_1(z, t), & u(l, z, t) &= \mu_2(z, t), \\ u(x, 0, t) &= \mu_3(x, t), & u(x, s, t) &= \mu_4(x, t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Краевые условия второго рода ставятся следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t),$$

где n – внешняя нормаль к границе области.

1.2. Основные понятия метода конечных разностей

Применение разностного метода начинают с построения в области изменения аргументов $\Omega(\vec{r}, t)$ разностной сетки, представляющей собой множество точек (узлов), образованных пересечением систем линий. На этой сетке производные, входящие в уравнение, аппроксимируют разностными аналогами, в которые входят значения функции в узлах сетки. Начальные и граничные условия также заменяют разностными соотношениями. Построенная таким образом система алгебраических уравнений называется *разностной схемой*, решение которой дает приближенные значения искомой функции в узлах. Получающаяся функция дискретного аргумента, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

Понятно, что должны быть выдвинуты требования существования и единственности решения разностной схемы, и это решение должно сходиться к решению исходной дифференциальной задачи.

Рассмотрим построение сетки на примере разностной аппроксимации уравнения (1.1) с дополнительными условиями (1.2), (1.3). Построим в области интегрирования уравнения прямоугольную сетку. Последняя образуется пересечением линий $\{x_n = nh, 0 \leq n \leq N, t_m = m\tau, 0 \leq m \leq M\}$, где h и τ – шаги сетки по переменным x и t . Значения функции в узлах сетки обозначают как $u_n^m = u(x_n, t_m)$ – рис. 1.1, и, соответственно, $u_n^{m+1} = u(x_n, t_{m+1})$. Значения сеточной функции в узлах, являющейся результатом решения разностных уравнений, обозначим y_n^m и y_n^{m+1} , причем для удобства записи формул освободим верхний индекс, приняв $y_n = y_n^m$ и $\hat{y}_n = y_n^{m+1}$. Для уравнения (1.1) совокупность узлов, лежащих на линии $t = t_m$ (или на плоскости, если решается двумерная по пространству задача, или же на гиперплоскости в случае многомерной постановки), называется *слоем*. Линии на слое, вдоль которых меняется только одна пространственная переменная, называются *направлением*. Выберем конфигурацию узлов, на которой будем проводить аппроксимацию дифференциального уравнения. Эта конфигурация узлов называется *шаблоном*. Для одной и той же задачи можно выбрать много разных шаблонов. На рис. 1.2 показаны три шаблона.

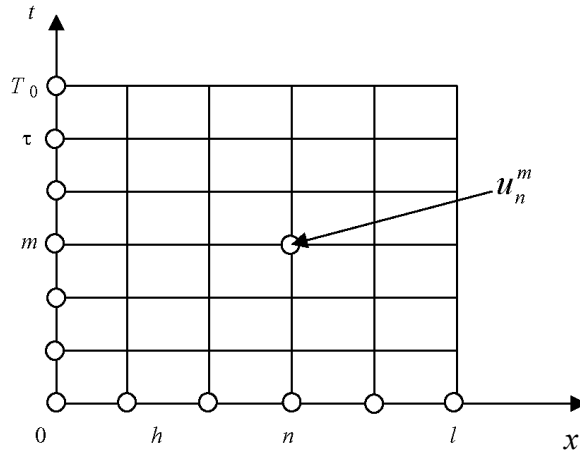


Рис. 1.1. Разностная сетка для уравнения (1.1)

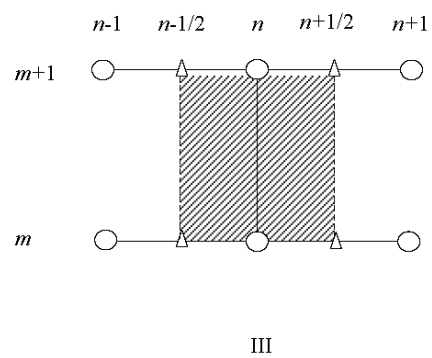
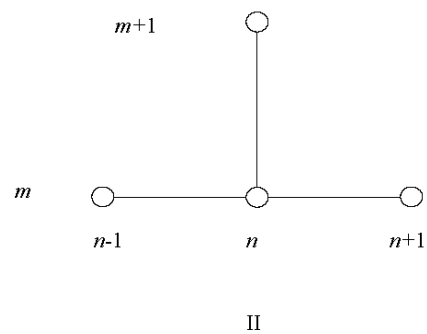
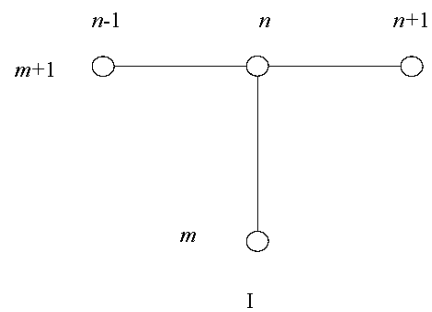


Рис. 1.2. Шаблоны (I–III) разностных схем
(на схеме III заштрихована ячейка)

Заменяя в уравнении (1.1) производные разностными аналогами, получаем на выбранных шаблонах соответствующие разностные схемы:

на шаблоне I

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi_n; \quad (1.7)$$

на шаблоне II

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n; \quad (1.8)$$

на шаблоне III

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\sigma \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \\ + a(1-\sigma) \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В формулах (1.7)–(1.9) $1 \leq n \leq N-1$; σ – параметр со значениями в пределах $0 \dots 1$; a – коэффициент уравнения. Схемы дополняются уравнениями, аппроксимирующими граничные условия:

для шаблонов I и III

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}); \quad (1.10)$$

для шаблона II

$$y_0 = \mu_1(t_m), \quad y_N = \mu_2(t_m). \quad (1.11)$$

Начальное условие имеет вид

$$y_n^0 = \mu(x_n). \quad (1.12)$$

Остановимся на вопросе существования решения.

Схема (1.8) представляет собой формулу для вычисления единственного неизвестного \hat{y}_n , которое легко выразить через значения сеточной функции на предыдущем слое:

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\tau a}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau \varphi_n, \quad (1.13)$$

где $\varphi_n = f(x_n, t_m)$, $1 < n < N - 1$.

При этом значения y_0 и y_N находят из краевых условий (1.11), а при расчете \hat{y}_n^1 используют начальное условие (1.12). Схемы типа (1.8) называются *явными*.

Схемы (1.7) и (1.9) относятся к типу *неявных*. Для получения решения на данном слое здесь приходится решать систему уравнений, в которой каждое уравнение, кроме первого и последнего, содержит три неизвестных: \hat{y}_{n-1} , \hat{y}_n , \hat{y}_{n+1} . Системы (1.7), (1.9) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} &= -F_n, \quad 1 < n < N - 1, \\ \hat{y}_0 &= \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}), \quad n = 0 \text{ и } n = N. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Коэффициенты для разностной схемы (1.7):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \tau \varphi_n + y_n. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для схемы (1.9) коэффициенты следующие:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a \sigma}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \left(1 - \frac{2\tau a(1-\sigma)}{h^2}\right)y_n + \frac{\tau a(1-\sigma)}{h^2}(y_{n-1} + y_{n+1}) + \tau \varphi_n. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Матрица линейной системы (1.14) – трехдиагональная, ее решение может быть найдено методом прогонки. При $\sigma > 0$ решение существует, единственно и прогонка устойчива в силу преобладания диагонального элемента матрицы системы: из (1.15), (1.16) ясно, что модуль этого элемента больше суммы модулей недиагональных членов.

Видно, что при $\sigma = 0$ схема (1.9) переходит в явную схему (1.8), а при $\sigma = 1$ – в чисто неявную (1.7). При $\sigma = \frac{1}{2}$ схема (1.9) называется *симметричной (по времени)*.

1.3. Понятие об аппроксимации, устойчивости и сходимости

Качество построенной разностной схемы оценивается такими свойствами, как аппроксимация, устойчивость, сходимость. Ниже будет показано, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному. Рассмотрим последовательно указанные свойства схем.

1.3.1. Аппроксимация

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f, \quad (1.17)$$

с граничными условиями

$$Bu(x) = \mu(x), \quad (1.18)$$

где, например, для уравнения (1.1) оператор A имеет вид

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Разностная схема для задачи (1.17), (1.18):

$$A_h y = \varphi_h, \quad (1.19)$$

$$B_h y = \beta_h. \quad (1.20)$$

Подставляя в соотношения (1.19) точное решение, получаем, что данное равенство будет нарушено, так как приближенное решение u не совпадает с точным решением u .

Невязкой называется величина

$$\psi = \varphi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h). \quad (1.21)$$

Для граничных условий получаем невязку в виде

$$\rho = \beta_h - B_h u = (Bu - \mu) - (B_h u - \beta_h). \quad (1.22)$$

Дадим определение аппроксимации.

Разностная схема (1.19), (1.20) аппроксимирует задачу (1.17), (1.18), если $\|\psi\| \rightarrow 0$, $\|\rho\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и аппроксимация имеет p -й порядок, если $\|\psi\| = O(h^p)$, $\|\rho\| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Фигурирующие в приведенных соотношениях нормы могут быть определены как сеточные аналоги различных норм: чебышевской $\|u(x)\|_C$, гильбертовой $\|u(x)\|_{L_2}$, энергетической $\|u(x)\|_E$:

$$\|u(x)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|;$$

$$\|u(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx}, \quad \rho(x) > 0;$$

$$\|u(x)\|_E = \sqrt{\int_a^b [\rho_1(x) u_x^2(x) + \rho_0(x) u^2(x)] dx}, \quad \rho_1(x) > 0, \quad \rho_0(x) > 0.$$

Указанные сеточные аналоги выписанных норм представляют в таком виде, чтобы при $h \rightarrow 0$ они переходили в эти нормы:

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|,$$

$$\|y\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \rho_n y_n^2 h_n}.$$

Невязку оценивают, проводя разложение точного решения в ряд Тейлора. Найдем невязку разностной схемы (1.9) для уравнения (1.1).

Выполним разложение решения на сетке, принимая за центр разложения точку $\left(x_n, t_m + \frac{\tau}{2}\right)$. Получим

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{n\pm 1} &= u + \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} + \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} \pm hu_x + \\
&+ \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} \pm \\
&\pm \frac{\tau h}{2}u_{tx} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 hu_{ttx} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^2u_{txx} \pm \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 hu_{tttx} + \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 h^2u_{ttxx} \pm \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^3u_{txxx} + \dots, \\
\hat{u}_n &= u + \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} + \dots, \\
u_{n+1} &= u - \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} + hu_x + \\
&+ \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} - \\
&- \frac{\tau h}{2}u_{tx} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 hu_{ttx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^2u_{txx} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 hu_{tttx} + \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 h^2u_{ttxx} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)h^3u_{txxx} + \dots, \\
u_{n-1} &= u - \frac{\tau}{2}u_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 u_{tttt} - hu_x + \\
&+ \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau h}{2} u_{tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{ttx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{tttx} + \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{ttxx} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots, \\
u_n &= u - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots
\end{aligned}$$

В этих формулах введены обозначения:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Подставив эти разложения в формулу для невязки, придем к соотношению

$$\begin{aligned}
\Psi &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - f(x, t) \right)_{x=x_n}^{t=t_m + \frac{\tau}{2}} - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + \\
&+ a\sigma \frac{\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}}{h^2} + a(1-\sigma) \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \varphi_n = \\
&= a\tau \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) u_{txx} + \frac{\tau^2}{8} \left(a u_{ttxx} - \frac{1}{3} u_{ttt} \right) + \frac{ah^2}{12} u_{xxxx} + \\
&+ \varphi_n - f \left(x_n, t_m + \frac{\tau}{2} \right) + O(\tau^2 + h^2).
\end{aligned}$$

Можно заметить, что если взять $\varphi_n = f \left(x_n, t_m + \frac{\tau}{2} \right)$, то при

$\sigma = \frac{1}{2}$ рассматриваемая разностная схема имеет аппроксимацию

$O(\tau^2 + h^2)$, а при $\sigma \neq \frac{1}{2} - O(\tau + h^2)$.

Аналогично проверяется аппроксимация начальных и граничных условий, если они содержат производные от функции, например граничных условий второго или третьего рода.

1.3.2. Устойчивость

Под устойчивостью задачи понимают непрерывную зависимость решения от входных данных, т. е. малые отклонения во входных данных должны приводить к малому изменению решения. Неустойчивость проявляется в том, что малые ошибки, допущенные на любом расчетном шаге, приводят к быстрому их нарастанию в ходе дальнейших вычислений, что, естественно, обесценивает получаемые результаты.

Дадим определение устойчивости.

Разностная схема $A_h u = \varphi_h$, $B_h u = \beta_h$ устойчива, если ее решение непрерывно зависит от входных данных φ_h и β_h и если эта зависимость равномерна относительно шага сетки, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от шага h , что $\|y^{(1)} - y^{(2)}\| \leq \varepsilon$, если $\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\| \leq \delta$, $\|\beta_h^{(1)} - \beta_h^{(2)}\| \leq \delta$.

В случае нескольких независимых переменных рассматривают условную и безусловную устойчивость. Если сформулированные выше условия выполняются при определенном соотношении шагов по различным переменным, то устойчивость называется *условной*, в противном случае, когда соотношение между шагами может быть произвольным, устойчивость называется *безусловной*. При этом непрерывную зависимость решения от φ_h называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от β_h — *устойчивостью по дополнительным условиям* (начальным и граничным).

Устойчивость разностных схем может быть исследована несколькими методами: разделения переменных, энергетических неравенств, операторных неравенств, на основе принципа максимума и др.

Рассмотрим вначале **принцип максимума**.

Перепишем разностные схемы (1.14) в виде

$$\sum_k a_k \hat{y}_{n+k} = \sum_p b_p y_{n+p} + \varphi_n, \quad (1.23)$$

где суммирование выполняется по узлам шаблона около n -го узла. Пронумеруем узлы так, чтобы $|a_0| = \max_k |a_k|$.

Принцип максимума, дающий достаточное условие устойчивости явных и неявных двухслойных разностных схем, формулируется следующим образом:

1) схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1 + C\tau)|a_0| \geq \sum_{k \neq 0} |a_k| + \sum_p |b_p|, \quad C = \text{const}; \quad (1.24)$$

2) схема устойчива по правой части, если справедливо соотношение (1.24) и имеет место неравенство

$$|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| \geq \frac{D}{\tau}, \quad D = \text{const} > 0. \quad (1.25)$$

Сформулированные условия не являются необходимыми для устойчивости схем, т. е. несоблюдение (1.24), (1.25) не обязательно ведет к их неустойчивости. Данным методом можно доказать устойчивость схем точности $O(\tau)$, в других случаях используют иные методы.

В качестве примера рассмотрим неявную схему (1.7). Представив ее в виде (1.23), получим выражения для коэффициентов

$$a_0 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_{-1} = a_1 = \frac{a}{h^2}, \quad b_0 = \frac{1}{\tau}, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

В случае граничных условий первого рода (1.10) $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ для $n = 0$ и $n = N$. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Видно, что условие (1.25) выполнено во внутренних узлах при произвольных соотношениях шагов по переменным x и t , а условие (1.24) справедливо во всех узлах сетки. Таким образом, рассматриваемая неявная разностная схема безусловно устойчива по начальным данным, правой части и краевым условиям. Принцип максимума позволяет доказывать устойчивость в чебышевской (локальной) норме.

Метод разделения переменных применяют для исследования устойчивости схем в гильбертовой (среднеквадратичной) норме. Запишем разностную схему в канонической форме:

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (1.26)$$

где A и B – разностные операторы, действующие на функцию по пространственным переменным. Например, для явной схемы (1.8) очевидно, что

$$B = E, \quad Ay = -a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \quad (1.27)$$

При постоянной правой части погрешность решения удовлетворяет уравнению

$$B\hat{z} + (A\tau - B)z = 0. \quad (1.28)$$

Частное решение (1.28) будем искать методом разделения переменных:

$$z(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{i\pi qx_n/l}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.29)$$

Здесь ρ_q – множитель роста q -й гармоники при переходе с одного слоя на следующий слой, так что $\hat{z} = \rho_q z$. Подставив (1.29) в (1.28), придем к уравнению

$$\rho_q B e^{i\pi qx/l} + (A\tau - B) e^{i\pi qx/l} = 0. \quad (1.30)$$

Если в схеме (1.26) коэффициенты постоянны, а сетка равномерна, то уравнение (1.30) после сокращения множителя $e^{i\pi qx}$ не будет зависеть от индекса n , т. е. от координаты x , соответственно ρ_q не будет зависеть от x .

Признак устойчивости формулируется следующим образом.

Схема (1.26) с постоянными коэффициентами устойчива по начальным данным, если для всех гармоник с индексом q выполняется неравенство

$$|\rho_q| \leq 1 + C\tau, \quad C = \text{const}. \quad (1.31)$$

Константа C не должна быть большой, поэтому обычно принимают $C = 0$.

Признак неустойчивости заключается в следующем: если хотя бы для одной гармоники q величину $|\rho_q|$ нельзя мажорировать величиной $1 + C\tau$, то схема (1.26) неустойчива.

В качестве примера проверим устойчивость явной схемы (1.8). Зафиксируем правую часть в разностной схеме (1.26), представим погрешность решения в виде (1.29) с учетом того, что $\hat{z} = \rho_q z$, и, подставив ее в (1.8), получим

$$\rho_q^m \left(\frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n / l}}{\tau} \right) - a \rho_q^m \left(\frac{e^{i\pi q (x_n - h) / l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q (x_n + h) / l}}{h^2} \right) = 0,$$

или

$$(\rho_q - 1) - \frac{a\tau}{h^2} (e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}) = 0.$$

Заменяя по формуле Эйлера

$$e^{-i\pi q h / l} + e^{i\pi q h / l} = 2 \cos \pi q h / l,$$

получаем окончательно

$$(\rho_q - 1) + \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_q = 1 - \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l}. \quad (1.32)$$

Теперь согласно условию (1.31) ($|\rho_q| \leq 1$) получим из (1.32) критерий устойчивости рассматриваемой разностной схемы, учитывая, что $\sin^2 \frac{\pi q h}{2l} \geq 0$:

$$\frac{4a\tau}{h^2} \leq 2.$$

Таким образом, явная схема устойчива при определенном соотношении между шагами по координатам x и t :

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a}, \quad (1.33)$$

т. е. явная схема условно устойчива.

Отметим, что из признака (1.31) и дополнительного условия (1.25) следует устойчивость разностной схемы по правой части в гильбертовой норме.

Если дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты или используется неравномерная сетка, то применяют прием «замораживания коэффициентов». В этом случае коэффициенты считают постоянными и равными их значениям в некотором фиксированном узле n . Схема считается устойчивой, если при любых n и q оказывается справедливым неравенство (1.31).

Применим метод разделения переменных для исследования устойчивости разностной схемы (1.9). Вначале проверим устойчивость по начальным данным. Положим $\varphi_n = 0$ и представим погрешность решения в виде (1.29), при этом $\hat{z} = \rho_q z$. Сделав данную подстановку в (1.9), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n / l}}{\tau} \right) - a\sigma\rho_q \left(\frac{e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l}}{h^2} \right) - \\ & - a(1 - \sigma) \left(\frac{e^{i\pi q(x_n - h)/l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h)/l}}{h^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

или, проведя сокращение на $e^{i\pi q x_n / l}$, перейдем к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho_q - 1)}{\tau} - a\sigma\rho_q \left(\frac{e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}}{h^2} \right) - \\ & - a(1 - \sigma) \left(\frac{e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}}{h^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Используя формулу Эйлера, получаем окончательно

$$\rho_q - 1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2} \rho_q \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} + \frac{4a\tau(1 - \sigma)}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_q = \frac{1 - \frac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2} \sin^2 \frac{\pi qh}{2l}}{1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi qh}{2l}}. \quad (1.34)$$

Из этого выражения следует, что при любом $\sigma \geq 0$ множитель роста гармоники $\rho_q \leq 1$. Осталось выяснить условие выполнения соотношения $\rho_q \geq -1$. Элементарными преобразованиями легко показать, что данное обстоятельство реализуется в случае, если

$$\frac{4a\tau}{h^2}(1-2\sigma) \leq 2,$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a\tau}. \quad (1.35)$$

Дополнительное условие устойчивости по правой части (1.25), как это следует из (1.16), выполняется для всех τ и h . Таким образом, разностная схема (1.9) устойчива по правой части, если выполнено условие (1.35) устойчивости по начальным данным.

Для чисто неявной разностной схемы $\sigma = 1$ и из (1.35) следует, что данные схемы устойчивы при любом соотношении шагов по независимым переменным, т. е. они безусловно устойчивы. Этот результат был получен выше на основе принципа максимума.

Для явной разностной схемы $\sigma = 0$ и устойчивость согласно (1.35) обеспечивается при условии $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$, что было показано ранее.

1.3.3. Сходимость

Дадим определение сходимости.

Разностное решение $y(x)$ сходится к решению задачи (1.17), (1.18), если

$$\|y(x) - u(x)\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0;$$

разностное решение имеет порядок точности p , если

$$\|y(x) - u(x)\| = O(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В теории разностных схем большое значение имеет теорема, которую часто в кратком виде формулируют следующим образом: «Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость». Сформулируем и докажем данную теорему.

Теорема. Если решение задачи (1.17), (1.18) существует, разностная схема (1.19), (1.20) корректна (т. е. ее решение существует, единственно и схема устойчива) и аппроксимирует задачу на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

Действительно, из определения невязки (1.21), (1.22) следует

$$A_h u = \varphi_h - \psi, \quad (1.36)$$

$$B_h u = \beta_h - \rho. \quad (1.37)$$

Перепишем разностную схему (1.19), (1.20):

$$A_h y = \varphi_h, \quad B_h y = \beta_h.$$

Сравнивая (1.36), (1.37) с выписанной разностной схемой, видим, что система (1.36), (1.37) представляет собой не что иное, как разностную схему, правые части которой изменены на величину невязки.

Из устойчивости разностной схемы следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$; что $\|y - u\| \leq \varepsilon$, если $\|\psi\| < \delta(\varepsilon)$, $\|\rho\| < \delta(\varepsilon)$.

Но разностная схема аппроксимирует задачу, значит $\forall \delta > 0 \exists h_0(\delta)$, что невязки $\|\psi\| \leq \delta$, $\|\rho\| \leq \delta$ при $h \leq h_0(\delta)$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \exists h_0(\delta(\varepsilon))$, что $\|y - u\| \leq \varepsilon$ при $h \leq h_0(\delta)$, что и доказывает сходимость.

Сделаем замечание относительно точности разностного решения. Краткая формулировка соответствующей теоремы имеет следующий вид: «Для линейных разностных схем порядок точности не ниже порядка аппроксимации». В развернутом варианте теорема формулируется так.

Если условия вышеприведенной теоремы о сходимости выполнены, операторы A_h , B_h линейные, а порядок аппроксимации равен p , то сходимост имеет порядок не ниже p .

2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

При выбранном шаблоне разностные схемы могут быть составлены несколькими методами: непосредственной аппроксимации, неопределенных коэффициентов, интегро-интерполяционным. У этих методов есть свои особенности и области применения.

2.1. Метод разностной аппроксимации

Данный метод применяют для уравнений с гладкими коэффициентами в регулярных областях на прямоугольных сетках. При использовании этого метода дифференциальные операторы непосредственно заменяют разностными аналогами, как это было сделано выше при получении схем (1.7)–(1.9). Метод сложно использовать для уравнений с разрывными коэффициентами, на косоугольных сетках и т. д.

Этим методом можно получить схемы повышенной точности в крайних узлах при постановке граничных условий, содержащих производные решения.

Пусть для уравнения (1.1) при $x = 0$ поставлено краевое условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t} = \alpha u(0, t). \quad (2.1)$$

Если аппроксимировать производную односторонней разностью

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h}, \text{ то граничное условие примет вид}$$

$$\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = \alpha \hat{y}_0.$$

В соответствии с формулой Тейлора

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_0 + h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0, t+\tau} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{0, t+\tau} + O(h^3). \quad (2.2)$$

Тогда невязка в начальном узле x_0 будет следующей:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right) \Big|_{0, t+\tau} - \left(\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} - \alpha \hat{u}_0 \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right) \Big|_{0, t+\tau} - \\ &\quad - \left(\frac{\hat{u}_0 + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) - \hat{u}_0}{h} - \alpha \hat{u}_0 \right) = \\ &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h),\end{aligned}\quad (2.3)$$

т. е. невязка имеет первый порядок малости, который оказался более низким, чем порядок аппроксимации разностной схемы (1.7) для рассматриваемого дифференциального уравнения.

Получим разностное краевое условие с порядком аппроксимации $O(h^2)$. Выразим в разложении (2.2) производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ из (2.1),

а производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — из уравнения (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \hat{u}_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f(x, t)}{a}.$$

Тогда из (2.2)

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= \hat{u}_0 + h \alpha \hat{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3) = \\ &= \hat{u}_0 + h \alpha \hat{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{a} \frac{\hat{u}_0 - u_0}{\tau} + O(\tau) - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3).\end{aligned}$$

Таким образом, имеем краевое условие вида

$$\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = \alpha \hat{u}_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{\hat{u}_0 - u_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a} \right) + O(\tau + h^2),$$

и разностный аналог записывается следующим образом:

$$\frac{\hat{y}_1 - y_0}{h} = \alpha \hat{y}_0 + \frac{h}{2} \left(\frac{\hat{y}_0 - y_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a} \right). \quad (2.4)$$

Разностное уравнение (2.4) имеет второй порядок аппроксимации относительно шага h .

Приведем разностное уравнение (2.4) к виду, удобному для реализации метода прогонки:

$$\alpha_0 \hat{y}_0 + \alpha_1 \hat{y}_1 = \beta_0,$$

где

$$\alpha_0 = h\alpha + \frac{h^2}{2a\tau}, \quad \alpha_1 = -1, \quad \beta_0 = \frac{h^2 f_0}{2a} - y_0.$$

Записывая формулу прогонки в виде

$$\hat{y}_0 = \xi_1 \hat{y}_1 + \eta_1,$$

получаем выражение начальных прогоночных коэффициентов для вычисления массивов прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам

$$\xi_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \eta_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

2.2. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода состоит в том, что на выбранном шаблоне сетки составляют линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах и получают выражение для соответствующей невязки, причем коэффициенты сформированной линейной комбинации находят из условия, чтобы невязка имела наиболее высокий порядок малости относительно шагов по координатам.

В качестве примера получим методом неопределенных коэффициентов разностную схему для уравнения (1.1) на шаблоне I (см. рис. 1.2).

Составим линейную комбинацию значений разностного решения в узлах шаблона:

$$a_1 \hat{y}_{n-1} + a_2 \hat{y}_n + a_3 \hat{y}_{n+1} + a_4 y_n - \varphi_n = 0. \quad (2.5)$$

Выполняя разложение решения в ряд Тейлора около узла (x_n, t_{m+1}) , получаем

$$\begin{aligned}\hat{u}_{n\pm 1} &= \hat{u}_n \pm hu_x(x_n, t_{m+1}) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x_n, t_{m+1}) + \dots, \\ u_n &= \hat{u}_n - \tau u_t(x_n, t_{m+1}) + \dots\end{aligned}$$

Невязку разностной схемы определяем согласно (1.21):

$$\begin{aligned}\psi &= (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) = (u_t - au_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - \\ &\quad - f(x_n, t_{m+1}) - (a_1 \hat{y}_{n-1} + a_2 \hat{y}_n + a_3 \hat{y}_{n+1} + a_4 y_n - \varphi_n) = \\ &= (u_t - au_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - \\ &\quad - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \hat{u}_n + (a_1 - a_3) hu_x - \\ &\quad - \frac{1}{2}(a_1 + a_3) h^2 u_{xx} + a_4 \tau u_t + O(\tau^2 + h^3) - \\ &\quad - f(x_n, t_{m+1}) + \varphi_n.\end{aligned}$$

Чтобы минимизировать невязку, следует положить

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0, \quad a_1 - a_3 = 0, \quad \frac{1}{2}(a_1 + a_3)h^2 = -a, \\ a_4 \tau &= -1, \quad \varphi_n = f(x_n, t_{m+1}).\end{aligned}$$

Выписанные соотношения приводят к следующим формулам для неизвестных коэффициентов схемы:

$$a_1 = a_3 = -\frac{a}{h^2}, \quad a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_4 = -\frac{1}{\tau}.$$

Разностная схема выглядит следующим образом:

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n,$$

где

$$A_n = C_n = -a_1 = \frac{a}{h^2}, \quad B_n = a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau},$$

$$F_n = -(a_4 y_n - \varphi_n) = \frac{1}{\tau} y_n + \varphi_n.$$

Полученная разностная схема совпадает со схемой (1.15), составленной выше методом разностной аппроксимации.

Метод неопределенных коэффициентов достаточно универсален и весьма удобен при написании разностных схем на косоугольных сетках.

2.3. Интегро-интерполяционный метод

Этот метод наиболее надежен и применим во всех случаях, даже для уравнений с разрывными коэффициентами.

Обсудим получение данным методом разностной схемы для уравнения типа (1.1) с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t). \quad (2.6)$$

Коэффициент данного уравнения $\lambda(x, t)$ и источниковый член уравнения $f(x, t)$ – кусочно-непрерывные функции. Для уравнения (2.6) непрерывными величинами являются функция $u(x, t)$ и поток

$$F = -\lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t). \quad (2.8)$$

Для составления разностной схемы выбираем шаблон и связанную с шаблоном ячейку (см. рис. 1.2, шаблон III – ячейка заштрихована). Проводим интегрирование уравнения (2.8) по ячейке:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx,$$

или

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} (\hat{u} - u) dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx.$$

Интеграл в левой части уравнения вычислим методом средних, а первый интеграл в правой части запишем с помощью двухточечной квадратурной формулы с весами σ и $1-\sigma$:

$$(\hat{y}_n - y_n)h = \tau \left[\sigma(\hat{F}_{n-1/2} - \hat{F}_{n+1/2}) + (1-\sigma)(F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) \right] + \varphi_n, \quad (2.9)$$

где величина

$$\varphi_n = \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx. \quad (2.10)$$

Проинтегрируем уравнение (2.7) по интервалу сетки:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{\lambda(x, t)} dx,$$

или

$$u_n - u_{n+1} = F_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda(x, t)}.$$

Отсюда

$$F_{n+1/2} \approx k_{n+1/2} \frac{u_n - u_{n+1}}{h}, \quad (2.11)$$

где

$$k_{n+1/2} = 1 / \left(\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda(x, t)} \right). \quad (2.12)$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} \approx k_{n-1/2} \frac{u_{n-1} - u_n}{h}. \quad (2.13)$$

Выражения, подобные (2.11), (2.13), можно записать и для величин $\hat{F}_{n-1/2}$, $\hat{F}_{n+1/2}$.

Получим разностную схему, которая в [1] называется наилучшей. Для этого подставим в (2.9) выражения для потоков $\hat{F}_{n-1/2}$, $\hat{F}_{n+1/2}$, $F_{n-1/2}$, $F_{n+1/2}$, при этом коэффициенты $k_{n-1/2}$, $k_{n+1/2}$ и величину φ_n будем вычислять в момент времени $t' = t_m + \frac{\tau}{2}$. Результатом такой процедуры будет уравнение

$$\begin{aligned} (\hat{y}_n - y_n)h = & \\ = \tau \left[\sigma(k_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - k_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}) + \right. & \\ \left. + (1 - \sigma)(k_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h} - k_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}) \right] + \varphi_n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Осталось вычислить интегралы, входящие в (2.10), (2.12). Будем считать для общности, что функции $\lambda(x, t)$ и $f(x, t)$ всюду непрерывны, за исключением узла x_n .

Если воспользоваться формулой трапеций, то получим

$$k_{n+1/2} = \frac{1}{\frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \frac{h}{2}} = \frac{2\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}},$$

а если использовать формулу средних, то выражение для $k_{n+1/2}$ будет следующим:

$$k_{n+1/2} = \frac{1}{\frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda_{n+1/2}} \right) h} = \lambda_{n+1/2} \approx \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}.$$

Аналогично определяем коэффициент $k_{n-1/2}$.

Величина φ_n может быть найдена согласно выражению

$$\varphi_n = \tau \frac{h}{2} (f_{n-1/2} + f_{n+1/2}).$$

Разностная схема (2.14) представляет собой линейную систему с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

Можно показать, что схема устойчива при условии

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau} \min \frac{h^2}{k}. \quad (2.15)$$

Приведем результаты по сходимости разностного решения к точному.

Будем считать, что функции $\lambda(x, t)$ и $f(x, t)$, а также их первые и вторые производные кусочно-непрерывны, причем точки разрыва неподвижны. Выберем неравномерную сетку, такую, чтобы узлы попадали на точки разрыва. Тогда наилучшая схема (2.14) при выполнении условия устойчивости (2.15) равномерно сходится на указанной сетке с точностью $O(\tau^p + h^2)$, причем $p = 2$ при весе $\sigma = \frac{1}{2}$ и $p = 1$ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$.

В приложениях часто приходится формулировать задачу в криволинейных координатах: цилиндрических или сферических. В этом случае общий вид уравнения следующий:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p F) + f(r, t), \quad (2.16)$$

$$F = -\lambda(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.17)$$

В уравнении (2.16) $p = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической геометрии соответственно.

Применим интегро-интерполяционный метод для получения наилучшей схемы. Для этого проинтегрируем уравнение (2.16) по ячейке, аналогичной той, которая представлена на рис. 1.2:

$$\begin{aligned} \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^p dr \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt &= - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p F) r^p dr + \\ &+ \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} (\hat{u} - u) r^p dr &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) dt + \\ &+ \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr. \end{aligned}$$

Выполнив те же вычисления, которые привели к формуле (2.9), получим

$$\begin{aligned} (\hat{y}_n - y_n) V_n &= \tau \left[\sigma(r_{n-1/2}^p \hat{F}_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p \hat{F}_{n+1/2}) + \right. \\ &\left. + (1 - \sigma)(r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) \right] + \Phi_n, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$V_n = \frac{1}{p+1} (r_{n+1/2}^{p+1} - r_{n-1/2}^{p+1}).$$

Потоки $\hat{F}_{n-1/2}$, $\hat{F}_{n+1/2}$, $F_{n-1/2}$, $F_{n+1/2}$ вычисляем аналогично (2.11), (2.13).

Подставляя в (2.18) выражения для потоков, получаем уравнение, подобное (2.14):

$$\begin{aligned} (\hat{y}_n - y_n) V_n &= \\ &= \tau \left[\sigma(r_{n-1/2}^p k_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - r_{n+1/2}^p k_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}) + \right. \\ &\left. + (1 - \sigma)(r_{n-1/2}^p k_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h} - r_{n+1/2}^p k_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}) \right] + \Phi_n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Величины $k_{n-1/2}$, $k_{n+1/2}$, Φ_n вычисляем так же, как это описано выше. Высказанные ранее замечания относительно сходимости приближенного решения справедливы и для данного случая.

Далее выполним интегро-интерполяционным методом аппроксимацию граничного условия третьего рода типа (2.1) для уравнения (2.6). Запишем данное условие в виде

$$F(0, t) = \gamma u(0, t), \quad (2.20)$$

где

$$F(0, t) = -\lambda(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Выберем ячейку $[0, x_{1/2}; t_m, t_{m+1}]$. Проинтегрируем уравнение (2.8) по выбранной ячейке:

$$\int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} f(x, t) dx,$$

или

$$\int_0^{x_{1/2}} (\hat{u} - u) dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_0 - F_{1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} f(x, t) dx. \quad (2.21)$$

Вычисляя интегралы каким-либо численным методом (например, методом трапеций) и учитывая, что согласно (2.20) и (2.11)

$$\hat{F}_0 = \gamma \hat{y}_0, \quad \hat{F}_{1/2} = k_{1/2} \frac{\hat{y}_0 - \hat{y}_1}{h},$$

получаем разностный аналог краевого условия в виде, представленном выше:

$$\alpha_0 \hat{y}_0 + \alpha_1 \hat{y}_1 = \beta_0.$$

В практике математического моделирования значительное место занимают задачи, описываемые квазилинейными уравнениями. Выпишем квазилинейный вариант уравнения (2.6), в котором введем зависимость коэффициента λ и функции f от искомого решения u :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, t, u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t, u). \quad (2.22)$$

Для решения таких уравнений обычно используют неявные схемы. Основываясь на (2.14), выпишем чисто неявную схему для (2.22) в линейном и нелинейном вариантах, приводящих к различным алгоритмам реализации. При $\sigma = 1$ имеем в линейном случае

$$\begin{aligned}
(\hat{y}_n - y_n)h &= \\
&= \tau \left(k_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - k_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h} \right) + \Phi_n, \quad (2.23)
\end{aligned}$$

в нелинейном случае

$$\begin{aligned}
(\hat{y}_n - y_n)h &= \\
&= \tau \left(\hat{k}_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - \hat{k}_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h} \right) + \hat{\Phi}_n. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Обе эти схемы абсолютно устойчивы и имеют погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

В линейном варианте (2.23) коэффициенты $k_{n-1/2}$, $k_{n+1/2}$, Φ_n берем с предыдущего известного слоя, т. е. они известны, и трудностей с реализацией схемы не возникает – решение ищем прогонкой. В нелинейном варианте (2.24) указанные коэффициенты относят к слою, на котором ищется решение, т. е. коэффициенты неизвестны и система разностных уравнений (2.24) оказывается нелинейной. Решать данную систему можно методом последовательных приближений (простых итераций) и методом Ньютона.

При использовании последовательных приближений строят итерационную процедуру, причем значения $k_{n-1/2}$, $k_{n+1/2}$, Φ_n берутся с предыдущей $(s-1)$ -й итерации, а в качестве начального приближения используются коэффициенты с предыдущего слоя, т. е. рассчитывают по сеточной функции y_n :

$$\begin{aligned}
(\hat{y}_n^{(s)} - y_n)h &= \\
&= \tau \left(\hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} \frac{\hat{y}_{n-1}^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)}}{h} - \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} \frac{\hat{y}_n^{(s)} - \hat{y}_{n+1}^{(s)}}{h} \right) + \hat{\Phi}_n^{(s-1)}. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

В процессе итераций решение $\hat{y}_n^{(s)}$ (2.25) находят методом прогонки.

При использовании метода Ньютона схему (2.24) линеаризуют с учетом того, что коэффициенты $\hat{k}_{n-1/2}$, $\hat{k}_{n+1/2}$ зависят от значений функции в двух узлах: $\hat{k}_{n-1/2} = \hat{k}(\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n)$, $\hat{k}_{n+1/2} = \hat{k}(\hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$. Получают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial \hat{k}_{n-1/2}}{\partial \hat{y}_{n-1}} (\hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \hat{y}_n^{(s-1)}) + \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} \right] \delta \hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \\
& - \left[\frac{h^2}{\tau} + \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} + \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} - \frac{\partial \hat{k}_{n-1/2}}{\partial \hat{y}_n} (\hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \hat{y}_n^{(s-1)}) + \right. \\
& + \frac{\partial \hat{k}_{n+1/2}}{\partial \hat{y}_n} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}) - \frac{h}{\tau} \frac{\partial \hat{\phi}_n}{\partial \hat{y}_n} \left. \right] \delta \hat{y}_n^{(s-1)} + \\
& + \left[\hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} - \frac{\partial \hat{k}_{n+1/2}}{\partial \hat{y}_{n+1}} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}) \right] \delta \hat{y}_{n+1}^{(s-1)} = \\
& = \frac{h^2}{\tau} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_n) - \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} (\hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \hat{y}_n^{(s-1)}) + \\
& + \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}) - \frac{h}{\tau} \hat{\phi}_n^{(s-1)} \left. \right]. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Каждое уравнение записанной системы содержит три неизвестных $\delta \hat{y}_{n-1}^{(s-1)}$, $\delta \hat{y}_n^{(s-1)}$, $\delta \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}$, которые определяют методом прогонки. После того как система (2.26) решена, очередное приближение искомой функции находят по формуле

$$\hat{y}_n^{(s)} = \hat{y}_n^{(s-1)} + \delta \hat{y}_n^{(s-1)}.$$

Отметим, что при использовании нелинейного варианта разностной схемы вычисления можно проводить с бóльшим шагом по времени, чем в линейном случае. Поэтому нелинейная схема оказывается предпочтительнее, несмотря на ее громоздкость и сложность.

2.4. Продольно-поперечная схема при решении многомерных уравнений

Рассмотрим построение разностной схемы для уравнения с несколькими независимыми пространственными переменными типа (1.4). Для составления схемы, которая носит название продольно-поперечной, вводят полуцелый слой $\bar{t} = t_m + \frac{\tau}{2}$. Схема имеет вид

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{0,5\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + A_2 y_{nk} + \bar{f}_{nk}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\hat{y}_{nk} - \bar{y}_{nk}}{0,5\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + A_2 \hat{y}_{nk} + \bar{f}_{nk}, \quad (2.28)$$

причем разностные операторы A_1, A_2 определяются следующими выражениями:

$$A_1 y_{nk} = \frac{a}{h_1^2} (y_{n-1, k} - 2y_{nk} + y_{n+1, k}),$$

$$A_2 y_{nk} = \frac{a}{h_2^2} (y_{n, k-1} - 2y_{nk} + y_{n, k+1}),$$

т. е. операторы A_1, A_2 действуют по координатам x и z .

Схема (2.27), (2.28) реализуется следующим образом. Вначале находят решение на полуцелом слое согласно (2.27). В системе линейных уравнений (2.27) с трехдиагональной матрицей неизвестными являются величины \bar{y}_{nk} , которые находят прогонкой по индексу n (по координате x) для каждого фиксированного значения индекса k . При найденном решении \bar{y}_{nk} система (2.28) также является линейной системой уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными выступают \hat{y}_{nk} . Решение \hat{y}_{nk} находят прогонкой по индексу k (по координате z) для каждого индекса n .

Относительно аппроксимации и устойчивости продольно-поперечной схемы следует отметить, что согласно [1] схема (2.27), (2.28) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и по правой части и аппроксимирует задачу на равномерных сетках с погрешностью $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА МАТЛАВ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математический пакет Matlab является универсальным средством решения широкого класса задач в разнообразных сферах научной, инженерной и экономической деятельности. С помощью этого пакета может быть исследована проблематика самых различных областей знания, включая математическое моделирование в актуальных сферах человеческой деятельности, решение оптимизационных задач, цифровую обработку сигналов и изображений, матричный анализ, нечеткую логику, анализ картографических изображений и т. д. Соответствующие средства Matlab собраны в пакеты, называемые ToolBox.

Для задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, в Matlab предусмотрен ToolBox с названием Partial Differential Equations (PDE). Он построен на основе проекционного метода конечных элементов и обладает графическим интерфейсом, который позволяет легко формировать входную информацию и визуализировать результаты вычислений. Задачи математической физики, которые могут быть реализованы с помощью этого пакета, относятся к таким областям, как тепломассоперенос, электростатика и магнитостатика, сопротивление материалов и др. Понятно, что пакет применим для решения стационарных и нестационарных задач и в других областях науки, техники и экономики, в которых используются модели на основе уравнений в частных производных различных типов.

3.1. ToolBox PDE Matlab в задачах математической физики

ToolBox PDE позволяет решать двумерные по пространству уравнения эллиптического, параболического и гиперболического типов в ограниченных областях. К таким уравнениям приводят модели теории упругости, теплопроводности, гидродинамических течений, диффузии, распространения акустических и электромагнитных волн, колебаний конструкций и многие другие. Коэффициенты и правые части уравнений могут быть переменными (зависящими от координат). Имеется также возможность решать системы уравнений второго порядка.

Ядро ToolBox PDE включает в себя более 50 функций, реализующих все этапы решения задачи, в число которых входят формирование области интегрирования уравнения, выбор типа уравнения, задание коэффициентов уравнения, задание граничных условий и, наконец, визуализация результатов вычислений. Для облегченного доступа к ядру ToolBox PDE в Matlab предусмотрена специальная среда PDETool, которая берет на себя вызов нужных функций, имеющих достаточно сложный интерфейс. В то же время имеется возможность непосредственного программирования с использованием функций ядра, что существенно расширяет возможности пакета. Среда PDETool предоставляет пользователю удобный графический интерфейс.

Работа в среде начинается с задания пространственной области решения уравнения. При этом конструирование области заключается в комбинировании геометрических примитивов, список которых включает прямоугольник (квадрат), эллипс (круг) и многоугольник произвольной конфигурации. Область создается в результате операций объединения, пересечения и разности примитивов. Выбранный объект может быть повернут на заданный угол относительно заданного центра вращения. При построении области объединением примитивов появляются внутренние границы, которые при необходимости могут быть удалены. Описанные средства позволяют конструировать достаточно сложные области, примеры которых представлены на рис. 3.1, 3.2.

После задания области выбирают тип уравнения.

Эллиптическое уравнение в ToolBox PDE представляется в следующем виде:

$$-\operatorname{div}(c \operatorname{grad}(u)) + a \cdot u = f.$$

Пользователю остается задать коэффициенты c , a , f числовыми константами или функциями пространственных координат x и y . Предусмотрена также возможность формулирования нелинейного варианта задачи посредством задания зависимости указанных коэффициентов от искомой функции u . Граничные условия могут быть оформлены как условия первого, второго или третьего рода. Общий вид этих условий:

$$\begin{aligned} hu &= r, \\ n \cdot c \cdot \operatorname{grad}(u) + qu &= g, \end{aligned}$$

где n – вектор внешней нормали к границе. Пользователь, задавая значения коэффициентов h , r , q и g , в том числе и равные нулю,

может сформировать граничные условия соответствующих родов. Указанные коэффициенты могут быть также заданы как функции x , y и u .

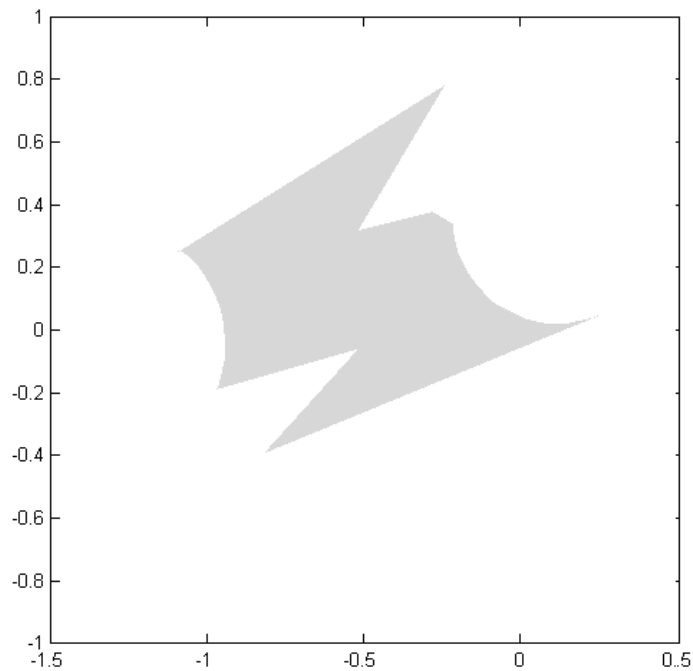


Рис. 3.1. Пример области решения уравнения, формируемой средствами PDETool (сплошная область)

Параболическое и гиперболическое уравнения представляются следующим образом:

$$d \cdot u' - \operatorname{div}(c \cdot \operatorname{grad}(u)) + a \cdot u = f,$$

$$d \cdot u'' - \operatorname{div}(c \cdot \operatorname{grad}(u)) + a \cdot u = f.$$

Коэффициенты c , a , f , d задаются пользователем либо как константы, либо как функции координат. Граничные условия представляются аналогично тому, как описано выше, при этом имеется возможность работать с нестационарными условиями, рассматриваемыми как функции времени. Кроме того, надо ввести начальные условия в общем случае как функции x и y .

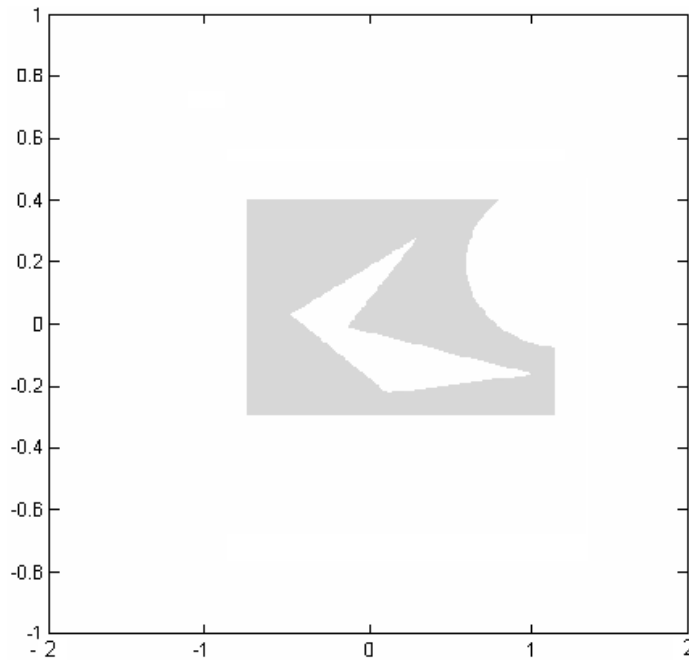


Рис. 3.2. Пример области решения уравнения, формируемой средствами PDETool (область с полостью)

Решение параболических и гиперболических уравнений помимо координат зависит еще и от времени. Среда позволяет либо выдать результаты расчета в любой момент времени, либо выполнить их анимацию, давая возможность пользователю наблюдать динамику процессов.

3.2. Примеры применения ToolBox PDE Matlab

Рассмотрим несколько моделей, сформированных на основе эллиптических и параболических уравнений, со сложными областями интегрирования.

Пример 1. Найти стационарное температурное поле в тонкой пластине с прямоугольным отверстием. В пластине действуют равномерно распределенные по объему источники тепла. С поверхности отверстия и противоположной наружной поверхности происходит конвективный теплообмен в среду с заданными температурой и коэффициентом теплоотда-

чи. Перепадом температур по толщине пластины пренебречь, полагая, что обе плоскости пластины теплоизолированы.

Сформулированная задача описывается математической моделью, построенной на основе эллиптического уравнения

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q = 0. \quad (3.1)$$

Граничные условия на поверхностях теплосъема следует поставить в виде: для поверхностей, перпендикулярных оси x ,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_0); \quad (3.2)$$

для поверхностей, перпендикулярных оси y ,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(T - T_0). \quad (3.3)$$

Обозначения в уравнениях следующие:

$T(x, y)$ – температурное поле в пластине;

λ, α – коэффициент теплопроводности материала пластины и коэффициент теплоотдачи от поверхности пластины к окружающей среде;

q – объемная плотность источников тепловыделения;

T_0 – температура окружающей среды.

Геометрия задачи и результаты расчета с помощью пакета PDE при заданных значениях λ, α, q и T_0 показаны на рис. 3.3, 3.4 (график распределения температур представлен в варианте 3D).

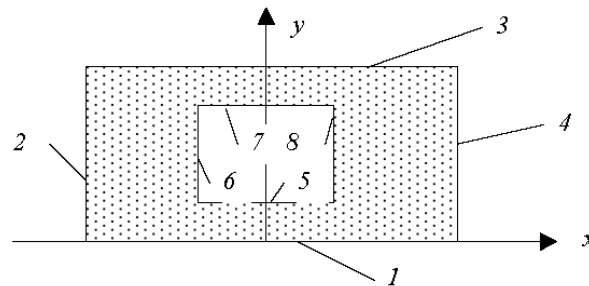


Рис. 3.3. Область решения задачи. На поверхностях 1–8 происходит конвективный теплосъем

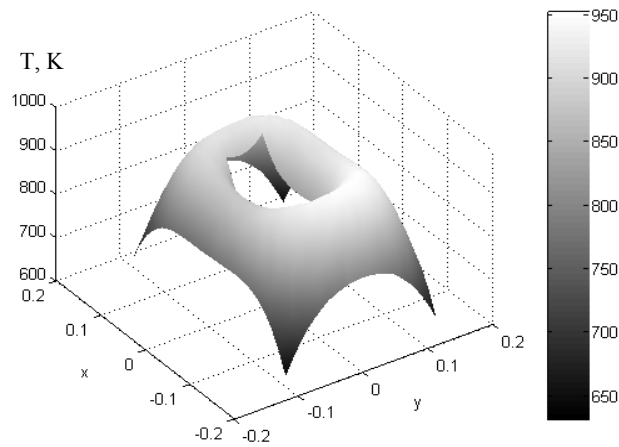


Рис. 3.4. Распределение температуры в пластине с отверстием

Отметим, что среда позволяет после выполнения расчетов изменить геометрию области, граничные условия, коэффициенты в уравнении (3.1) и граничные условия (3.2), (3.3) и повторить вычисления с новыми данными.

Пример 2. Решить задачу из примера 1 в нестационарной постановке. В пластине действуют равномерно распределенные по объему источники тепла, линейно зависящие от времени по закону $q = 1000t$.

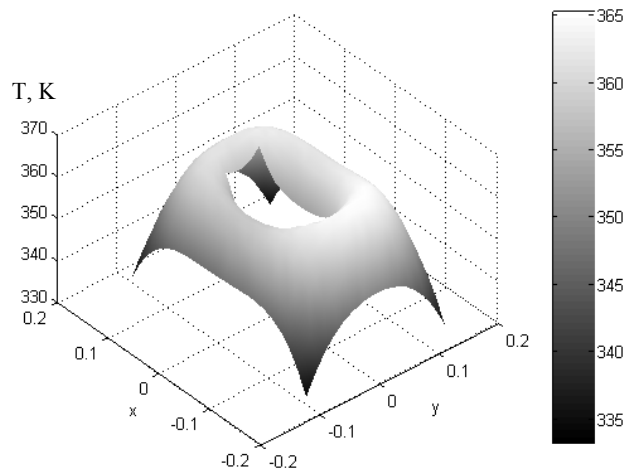


Рис. 3.5. Распределение температуры в момент времени $t = 10$ с

Математическую модель задачи строим на основе параболического уравнения

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q.$$

Граничные условия формулируем в виде (3.2), (3.3). Результаты расчета для двух моментов времени (10 и 100 с) представлены на рис. 3.5, 3.6.

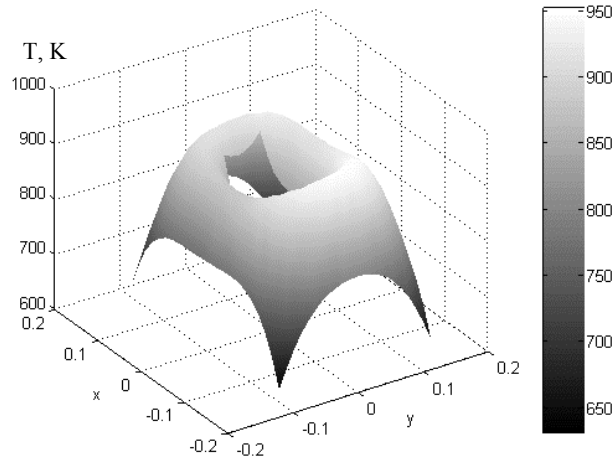


Рис. 3.6. Распределение температуры в момент времени $t=100$ с

Пример 3. Найти стационарное температурное поле в системе, состоящей из четырех бесконечно длинных стержней, помещенных в цилиндрический моноблок, охлаждаемый с наружной поверхности за счет конвективного теплообмена. В стержнях происходит выделение тепла с равномерным распределением источников тепловыделения по объему, и стержни пребывают в идеальном тепловом контакте с моноблоком. Материал стержней и моноблока разный, т. е. их теплофизические свойства различны.

При составлении модели будем исходить из того, что имеется гетерогенная среда, состоящая из пяти зон: моноблока и четырех стержней со своими коэффициентами теплопроводности, причем между зонами имеются внутренние границы (рис. 3.7).

Модель системы включает эллиптические уравнения для каждой зоны и соответствующие граничные условия на поверхности моноблока:

$$-\lambda_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \right) + q_i = 0,$$

где $i = 1 \dots 5$.

Граничные условия записываем в виде

$$-\lambda \vec{n} \nabla T_5 = \alpha(T_5 - T_0),$$

где \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности.

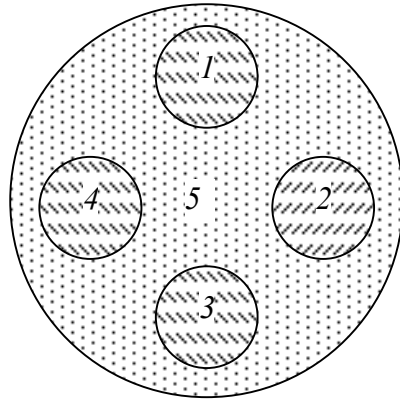


Рис. 3.7. Область решения задачи, образованная системой четырех тепловыделяющих стержней (1–4), размещенных в цилиндрическом моноблоке (5)

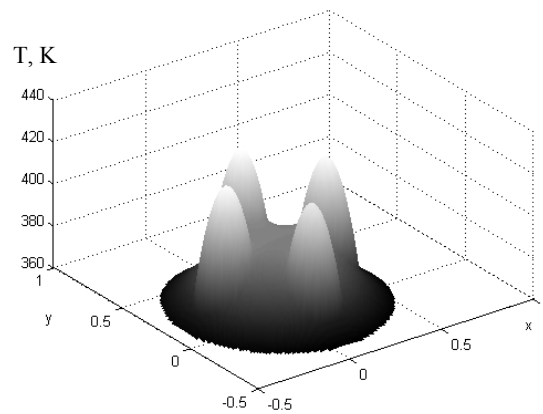


Рис. 3.8. Температурное поле в системе четырех тепловыделяющих стержней, размещенных в цилиндрическом моноблоке

Для зон 1–4 и зоны 5 могут быть заданы свои коэффициенты теплопроводности и значение мощности тепловыделения q , причем для зоны 5 $q = 0$. Результаты расчета в виде трехмерного графика представлены на рис. 3.8, в другом виде – как контурный график с градиентной заливкой – на рис. 3.9.

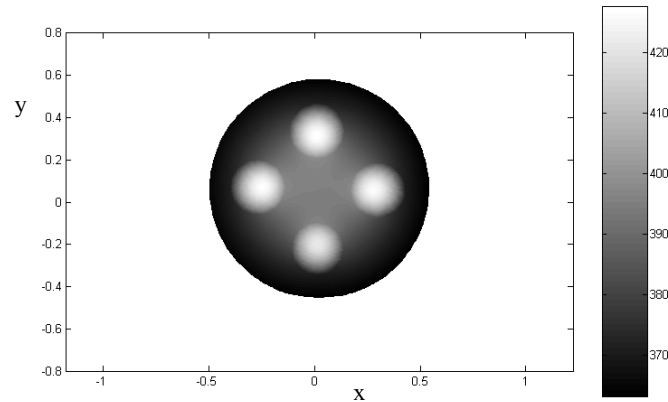


Рис. 3.9. Температурное поле в системе четырех тепловыделяющих стержней, размещенных в цилиндрическом моноблоке, представленное в виде контурного графика с градиентной заливкой

Отметим, что среда PDETool скрывает от пользователя механизм вызова функций ядра пакета, предоставляя для этого пользователю соответствующий графический интерфейс. В то же время непосредственное обращение к указанным функциям позволяет решать задачи в более сложных и разнообразных постановках, чем отражено в рассмотренных выше примерах. В частности, с помощью файл-функций можно выполнить параметрическое задание частей границ области решения задачи, не ограничиваясь только предоставляемыми средой PDETool стандартными геометрическими примитивами, такими, как эллипс, прямоугольник и многоугольник. Точно так же в файл-функции пользователя может быть отражена специфика граничных условий решаемой задачи. В пакете PDE предусмотрена также возможность непосредственного вызова функций для визуализации получаемого решения.

Применение всех этих возможностей Toolbox PDE открывает широкие перспективы в реализации сложных моделей объектов и процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие для ун-тов. М.: Наука, 1972. 736 с.
3. *Самарский А.А., Вабичевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 548 с.
5. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 432 с.
6. *Градов В.М.* Компьютерные технологии в практике математического моделирования: Учеб. пособие. Ч. 1. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 108 с.
7. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование Matlab: Пер. с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. 720 с.
8. *Мартынов Н.Н.* Введение в Matlab 6. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2002. 352 с.
9. *Потемкин В.Г.* Matlab 6: среда проектирования инженерных приложений. М.: Диалог-МИФИ, 2005. 448 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	5
1.1. Постановки задач.....	6
1.2. Основные понятия метода конечных разностей.....	8
1.3. Понятие об аппроксимации, устойчивости и сходимости	13
2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.....	24
2.1. Метод разностной аппроксимации	24
2.2. Метод неопределенных коэффициентов	26
2.3. Интегро – интерполяционный метод.....	28
2.4. Продольно-поперечная схема при решении многомерных уравнений	35
3. ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА Matlab В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ	37
3.1. ToolBox PDE в задачах математической физики.....	37
3.2. Примеры применения ToolBox PDE Matlab.....	40
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	46

Учебное издание

Владимир Михайлович Градов

**Компьютерные технологии
в практике математического
моделирования**

Часть 2

Редактор *Е.К. Кошелева*

Корректор *Л.И. Малютина*

Компьютерная верстка *О.В. Беляевой*

Подписано в печать 29.09.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Печ. л. 3,0. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,65. Тираж 100 экз.

Изд. № 41. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.