

Асимметричное шифрование

Проблема распространения ключей

Даффи-Хелман/Маркл

- Алгоритм общедоступен
- Ключ шифрования общедоступен
- Ключ расшифровки - секрет
- Обратное преобразование открытым ключом сложно

RSA

- Вычисление ключей
 - P, Q
 - $N = P * Q$ - длина алфавита
 - $\phi = (P-1)(Q-1)$
 - E - открытый ключ: взаимно простое с $\phi \rightarrow (E, N)$
 - D - закрытый ключ: $(E * D) \bmod \phi = 1 \rightarrow (D, N)$
- Шифрование
 - $C = (M^E) \bmod N$
- Расшифровка
 - $M' = (C^D) \bmod N$

Алгоритмы получения простых чисел

- $[2; \text{SQRT}(P)]$
- Решето Эратосфена
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
- Теорема Рабина
- Тест Рабина-Миллера

Алгоритм Евклида

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a/b)$

$$a = b * q_1 + r_1$$

$$b = r_1 * q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 * q_3 + r_3$$

....

$$r_{N-1} = r_N * q_N$$

Расширенный алгоритм Евклида

$$r_1 = a + b(-q_1)$$

$$r_2 = b + r_1(-q_2) = b + (a + b(-q_1))(-q_2) = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2)$$

...

$$r_N = a * S + b * T$$

$$\begin{aligned}
 a/b &= q_1 + r_1/b \\
 b/r_1 &= q_2 + r_2/r_1 \\
 r_1/r_2 &= q_3 + r_3/r_2 \\
 &\dots \\
 r_{N-1}/r_N &= q_N
 \end{aligned}$$

$$a/b = q_1 + (q_2 + r_2/r_1) \cdot 1/b = q_1 + (q_2 + (q_3 + (q_4 \dots (q_N - 1) - 1) - 1) - 1) \cdot 1/b$$

$$\begin{aligned}
 ed &= 1 + fi \cdot k \\
 ed - fi \cdot k &= 1
 \end{aligned}$$

Матричная реализация

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 r &= a \bmod b \\
 q &= a/b \text{ (целочисленное деление)} \\
 r &= 0? \\
 E &= E \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix} \\
 a, b &\rightarrow b, r
 \end{aligned}$$

$$d > 0 \rightarrow N + d$$

Возведение в степень по модулю
 $(a^k) \bmod N$:

$$\begin{aligned}
 r &= 1 \\
 (k > 0)? & \\
 \quad ?k \text{ - нечетное } &\rightarrow r = (r \cdot a) \bmod N \\
 \quad a &= (a^2) \bmod N \\
 \quad k &\gg 1 \quad (k = k/2)
 \end{aligned}$$