

## NEERC'15, Problem J

Sie spielen das neue Spiel Jump. Es ist eine gerade Zahl gegeben und Sie müssen einen Bit-String der Länge  $n$  erraten. Dabei können Sie die Funktion

$$\text{Jump}(Q) = \begin{cases} n & S = Q \\ \frac{n}{2} & Q \text{ hat } \frac{n}{2} \text{ viele korrekte Bits} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aufrufen. Beschreiben Sie einen Las-Vegas Algorithmus, der  $S$  in  $\mathcal{O}\left(2^n \cdot \frac{\frac{n}{2}! \cdot \frac{n}{2}!}{n!}\right) + (n+1)$  vielen Aufrufen von Jump findet.

*Hint: Sei  $Q$  ein Bit-String mit  $\text{Jump}(Q) = \frac{n}{2}$  und seien  $i, j \in [n]$ , sodass das  $i$ -te Bit von  $Q$  korrekt und das  $j$ -te Bit von  $Q$  inkorrekt ist. Dann ist  $\text{Jump}(Q') = \frac{n}{2}$ , wobei  $Q'$  ein Bit-String ist, wo wir nur die Bits  $i$  und  $j$  geflipped haben.*

### Lösung:

Wir bemerken, dass einfaches Raten, bis wir auf den korrekten Bit-String kommen Laufzeit  $\mathcal{O}(2^n)$  hat, da wir den String mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2^n}$  korrekt raten und auf den ersten Erfolg warten.

Wir versuchen daher, nur einen Bit-String mit  $\frac{n}{2}$  korrekten Bits zu erraten. Dies tun wir mit Wahrscheinlichkeit  $\binom{n}{n/2} \cdot 2^{-n}$ , da es  $\binom{n}{n/2}$  viele Strings mit  $\frac{n}{2}$  vielen korrekten Bits gibt. Somit erhalten wir eine Laufzeit von  $\mathcal{O}\left(2^n \cdot \frac{\frac{n}{2}! \cdot \frac{n}{2}!}{n!}\right)$  für die erste Phase des Algorithmus.

Sei nun  $Q$  ein Bit-String mit  $\frac{n}{2}$  korrekten Bits. Wir wissen nicht, welche Bits von  $Q$  korrekt/inkorrekt sind. Wir können aber den Hint anwenden, um festzustellen, welche Bits die gleiche Korrektheit haben. Wir rufen daher Jump  $n - 1$  mal auf, wobei wir jedes Mal  $i = 2, \dots, n$  den Bit 1 und den Bit  $i$  flippen. Wenn Jump beim Aufruf  $i$  immernoch  $\frac{n}{2}$  zurückgibt, so haben die Bits 1 und  $i$  unterschiedliche Korrektheit. Am Ende haben wir  $\frac{n}{2}$  viele Bits gefunden, die eine unterschiedliche Korrektheit zu Bit 1 haben, seien sie in der Menge  $I$ . Wir führen nun 2 weitere Aufrufe von Jump auf: einmal flippen wir alle Bits aus Menge  $I$  und das zweite Mal alle anderen Bits ausser die Bits in  $I$ . So muss einer dieser 2 Aufrufe den korrekten String erraten.

**Zur Aufgabe:** Die Aufgabe ist aus einem Wettbewerb in Competitive Programming. NEERC ist eine der Auswahlrunden für ICPC = International Collegiate Programming Contest, was quasi die Informatik Olympiade auf dem Uni Niveau ist. Wer sich für solche Probleme interessiert, kann Competitive Programming Tasks im Internet (insbesondere auf CodeForces) finden.

Link zu allen Aufgaben aus NEERC'15: <https://codeforces.com/gym/100851/attachments>