Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 10

Ilya Maier

Minitest

Nachbesprechung Serie

- $\Pr\left[X \geq \frac{3}{4}k\right] = \Pr\left[X - \frac{k}{2} \geq \frac{k}{4}\right] \leq \Pr\left[\left|X - \frac{k}{2}\right| \geq \frac{k}{4}\right]$

Theorie Recap

Kleinster umschliessender Kreis

Gegeben: eine endliche Punktenmenge $P \subseteq \mathbb{R}^2$
Gesucht: der Kreis des kleinsten Radius, der P umschliesst

Lemma: für jede Punktenmenge $P \subseteq \mathbb{R}^2, |P| \geq 3$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq P$ s.d. $|Q| \leq 3 \wedge C(Q) = C(P)$
Wir verwenden: $T :=$ Anzahl der Runden/Durchläufe der Schleife

<u>*Randomized_PrimitiveVersion*(P)</u>

1) **wiederhole unendlich**
2)   wähle $Q \subseteq P$ mit $|Q| = 3$ gleichverteilt zufällig
3)   finde $C(Q)$
4)   **if** $P \subseteq C^{\bullet}(Q)$
5)   **return** $C(Q)$

Erwartete Laufzeit: $T \sim \mathrm{Geo}\left(1/\binom{n}{3}\right) \implies \mathcal{O}(n \cdot n^3)$

<u>*Randomized_CleverVersion*(P)</u>

1) $P' \leftarrow P$
2) **wiederhole unendlich**
3)   wähle $Q \subseteq P'$ mit $|Q| = 11$ gleichverteilt zufällig
4)   finde $C(Q)$
5)   **if** $P \subseteq C^{\bullet}(Q)$
6)   **return** $C(Q)$
7)   **else** verdopple alle Punkte von P' ausserhalb von $C(Q)$

Erwartete Laufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot T) = \mathcal{O}(n \cdot \log n)$

Lemma 3.28

Lemma 3.28. Sei P eine Menge von n (nicht unbedingt verschiedenen) Punkten und für $r \in \mathbb{N}$, R zufällig gleichverteilt aus $\binom{P}{r}$. Dann ist die erwartete Anzahl Punkte von P, die ausserhalb von $C(R)$ liegen, höchstens $3\frac{n-r}{r+1} \leq 3\frac{n}{r+1}$.

Für $p \in P$ **und** $R, Q \subseteq P$

- $\mathrm{out}(p, R) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \notin C^{\bullet}(R) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\mathrm{out}(p, R) = 1 \iff \mathrm{essential}(p, R \cup \{p\}) = 1$$

- $\mathrm{essential}(p, Q) := \begin{cases} 1 & \text{falls } C(Q - p) \neq C(Q) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $Y :=$ Anzahl Punkte ausserhalb von $C(R)$

Beweis von Lemma 3.28

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R \in \binom{P}{r}} \sum_{p \in P \setminus R} \mathrm{out}(p, R)$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R \in \binom{P}{r}} \sum_{p \in P \setminus R} \mathrm{essential}(p, R \cup \{p\})$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q \in \binom{P}{r+1}} \underbrace{\sum_{p \in Q} \mathrm{essential}(p, Q)}_{\leq 3}$$

$$\leq \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q \in \binom{P}{r+1}} 3 = 3 \cdot \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = 3 \cdot \frac{n-r}{r+1}$$

1. gehe über alle $r-$elementige Subsets durch und zähle die Punkte ausserhalb, am Ende bestimme den Durchschnitt
2. $\mathrm{out}(p, R) = 1 \iff \mathrm{essential}(p, R \cup \{p\}) = 1$
3. im Schritt davor haben wir uns sowieso schon Mengen mit $r + 1$ Elementen angeschaut
4. es kann höchstens 3 essentielle Punkte geben letzte Umformungen sind einfach Arithmetik

Anzahl Punkte - Upper Bound

- $X_k :=$ Anzahl Punkte nach k Iterationen
- $X_0 = n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k] &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_k \,|\, X_{k-1} = i] \cdot \Pr[X_{k-1} = i] \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{r+1}\right) \cdot i \cdot \Pr[X_{k-1} = i] \\
&= \left(1 + \frac{3}{r+1}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X_{k-1} = i] \\
&= \left(1 + \frac{3}{r+1}\right) \cdot \mathbb{E}[X_{k-1}]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n$$

1. Def. bedingter Erwartungswert
2. Abschätzung durch Lemma 3.28

   $\rightarrow$ höchstens $\dfrac{3i}{r+1}$ ausserhalb
3. die Klammer rausziehen
4. Def. Erwartungswert
5. Teleskopieren

Anzahl Punkte - Lower Bound

- $X_k :=$ Anzahl Punkte nach k Iterationen
- $T :=$ Anzahl der Runden/Durchläufe der Schleife

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k] &= \mathbb{E}[X_k \mid T \geq k] \cdot \Pr[T \geq k] + \mathbb{E}[X_k \mid T < k] \cdot \Pr[T < k] \\ &\geq \mathbb{E}[X_k \mid T \geq k] \cdot \Pr[T \geq k] \\ &\geq 2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k]\end{aligned}$$

1. Def. bedingter Erwartungswert
2. Erwartungswert und Wahr-keit nicht negativ
3. mindestens einer der Punkte ist in mindesten $k/3$ der Runden ausserhalb
   $\rightarrow$ hat mindestens $2^{k/3}$ Kopien

Laufzeit

Zusammen mit Lower und Upper bound:

$$2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k] \leq \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n \qquad \Longrightarrow \Pr[T \geq k] \leq \left(\frac{1 + \frac{3}{r+1}}{2^{1/3}}\right)^k \cdot n$$

Laufzeit

Zusammen mit Lower und Upper bound:

$$2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k] \leq \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n \qquad \Longrightarrow \Pr[T \geq k] \leq \min\left\{1, \left(\frac{1 + \frac{3}{r+1}}{2^{1/3}}\right)^k \cdot n\right\}$$

Laufzeit

Zusammen mit Lower und Upper bound:

$$2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k] \leq \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n \qquad \Longrightarrow \Pr[T \geq k] \leq \min\left\{1, \left(\frac{1+\frac{3}{12}}{2^{1/3}}\right)^k \cdot n\right\} \leq \min\{1, 0.995^k \cdot n\}$$

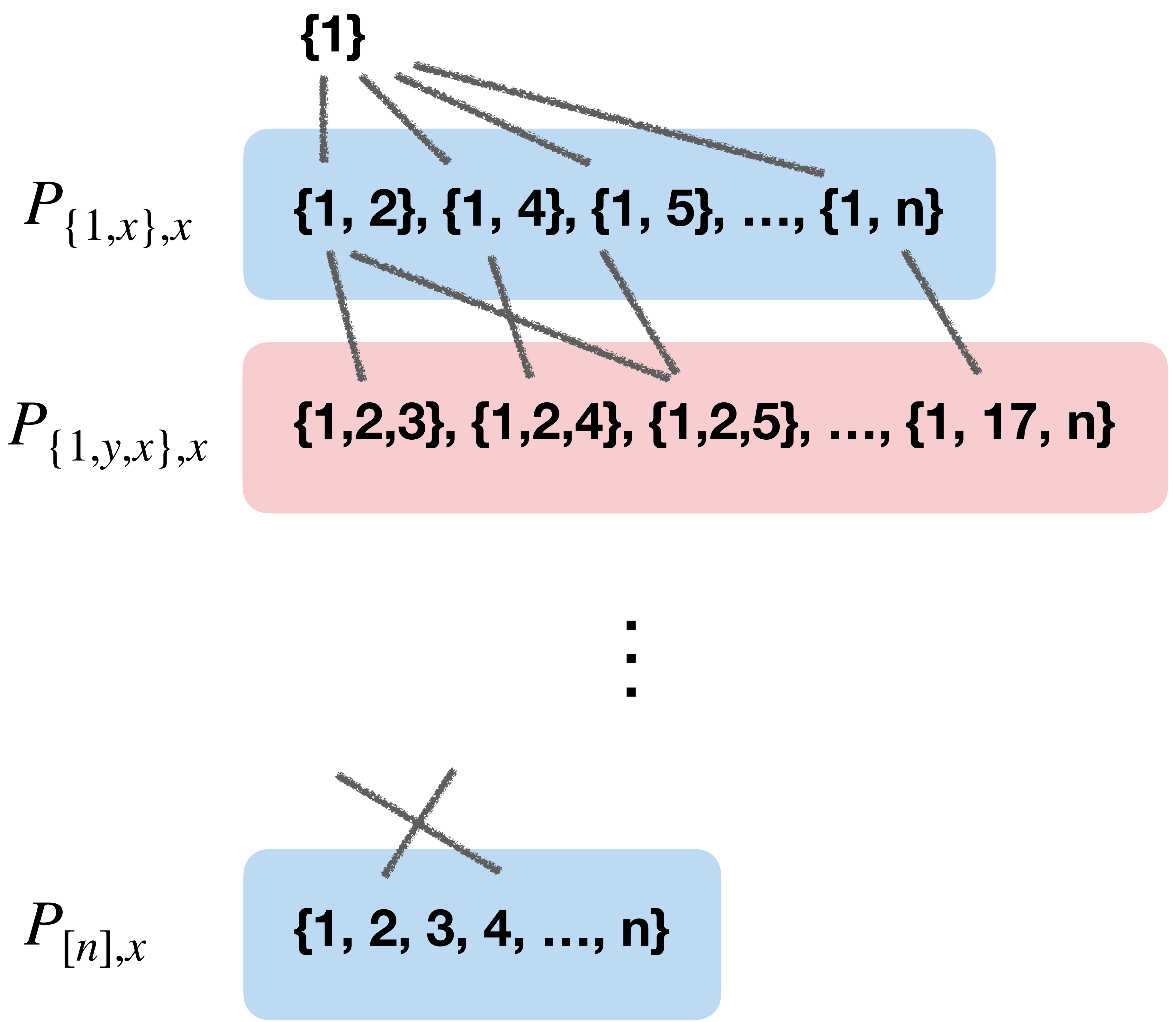
Mit $k_0 := -\log_{0.995} n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \sum_{k \geq 1} \Pr[T \geq k] \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} 1 + \sum_{k > k_0} 0.995^k \cdot n \\
&= \sum_{k=1}^{k_0} 1 + \sum_{k' \geq 1} 0.995^{k'} \cdot 0.995^{k_0} \cdot n \\
&= k_0 + \mathcal{O}(1) \leq 200 \ln n + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

1. Def. Erwartungswert, T nichtnegativ
2. 0.995^k dominiert erst ab $k > k_0$
3. $k = k_0 + k'$
4. $0.995^{k_0} \cdot n = 1$ $\qquad \sum_{k' \geq 1} 0.995^{k'}$ ist eine geom. Reihe

DP-Hamiltonkreis

Visuelle Darstellung:



Für alle $S \subseteq [n]$ mit $1 \in S$ und alle $x \in S$ mit $x \neq 1$:

$P_{S,x} = 1 \iff$

$\exists$ 1-x-Pfad, der genau aus den Knoten von S besteht

Initialisierung:

$\forall x \in \{2,\ldots,n\} : P_{\{1,x\},x} = 1 \iff \{1,x\} \in E$

Berechnung:

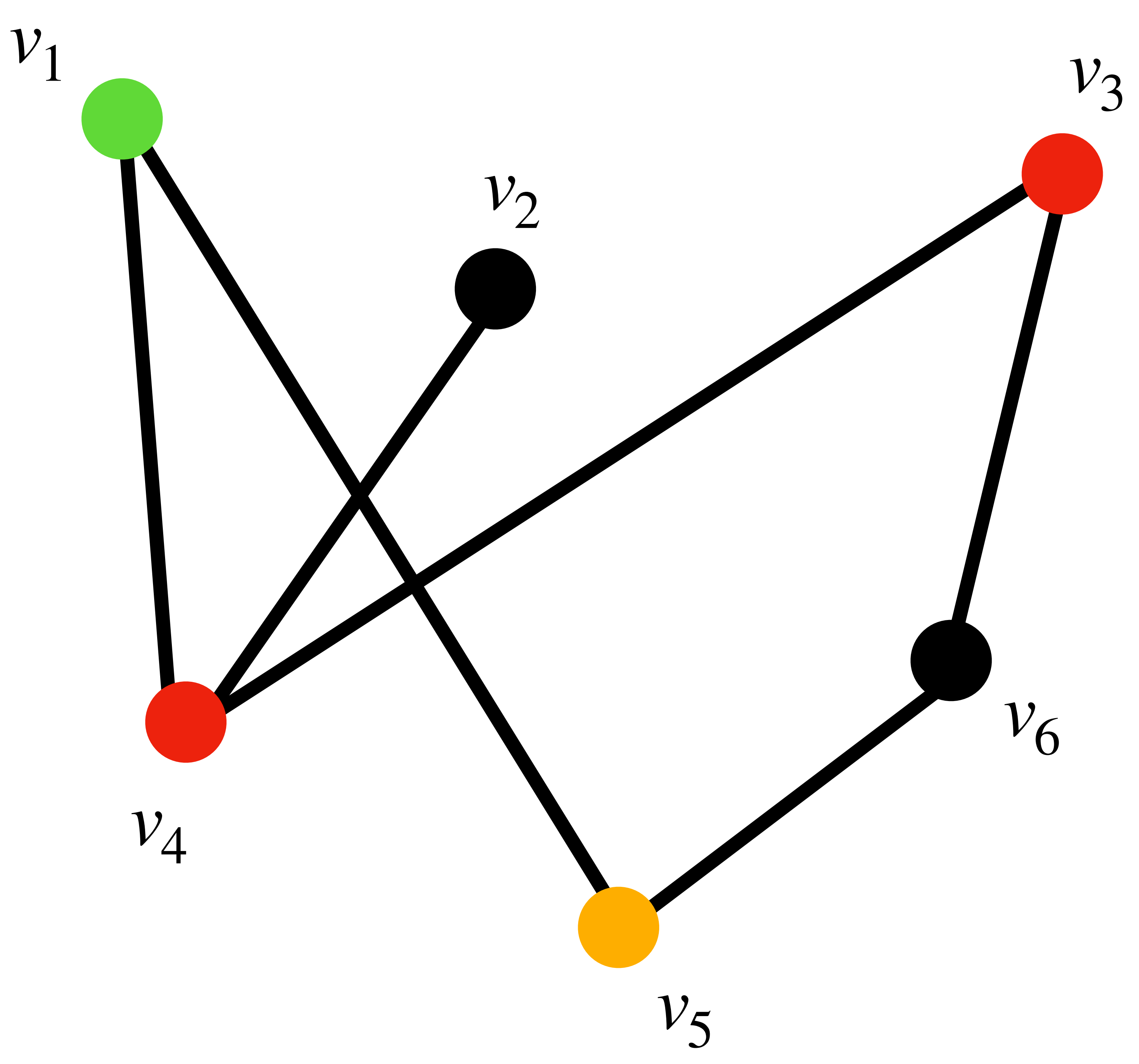
for all $s = 3$ to n:
    for all $S \subseteq [n]$ mit $1 \in S$ und $|S| = s$:
        for all $x \in S$ mit $x \neq 1$:
            $P_{S,x} = \max\{P_{S\setminus\{x\},y} : y \in \mathcal{N}(x) \cap S, y \neq 1\}$

G hat einen Hamiltonkreis $\iff \exists x \in \mathcal{N}(1)$ und $P_{[n],x} = 1$

Laufzeit: $O(2^n \cdot n^2)$

Speicherplatz: $O(2^n \cdot n)$

Bunte Pfade



Gegeben: ein Graph G und eine Färbung $\gamma : V \to [k]$

die Färbung muss nicht auf die Kanten achten

Gesucht: ob G einen <u>bunten</u> Pfad der Länge $k - 1$ enthält

Bunter Pfad = alle Knoten haben verschiedene Farben

$P_i(v)$:= alle Bunte Pfade der Länge i, die in v enden

$$P_i(v) := \{S \in \binom{[k]}{i+1} \mid \exists \text{bunter Pfad, der in } v \text{ endet und genau mit } S \text{ gefärbt ist}\}$$

Gesucht: ob $\bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \varnothing$

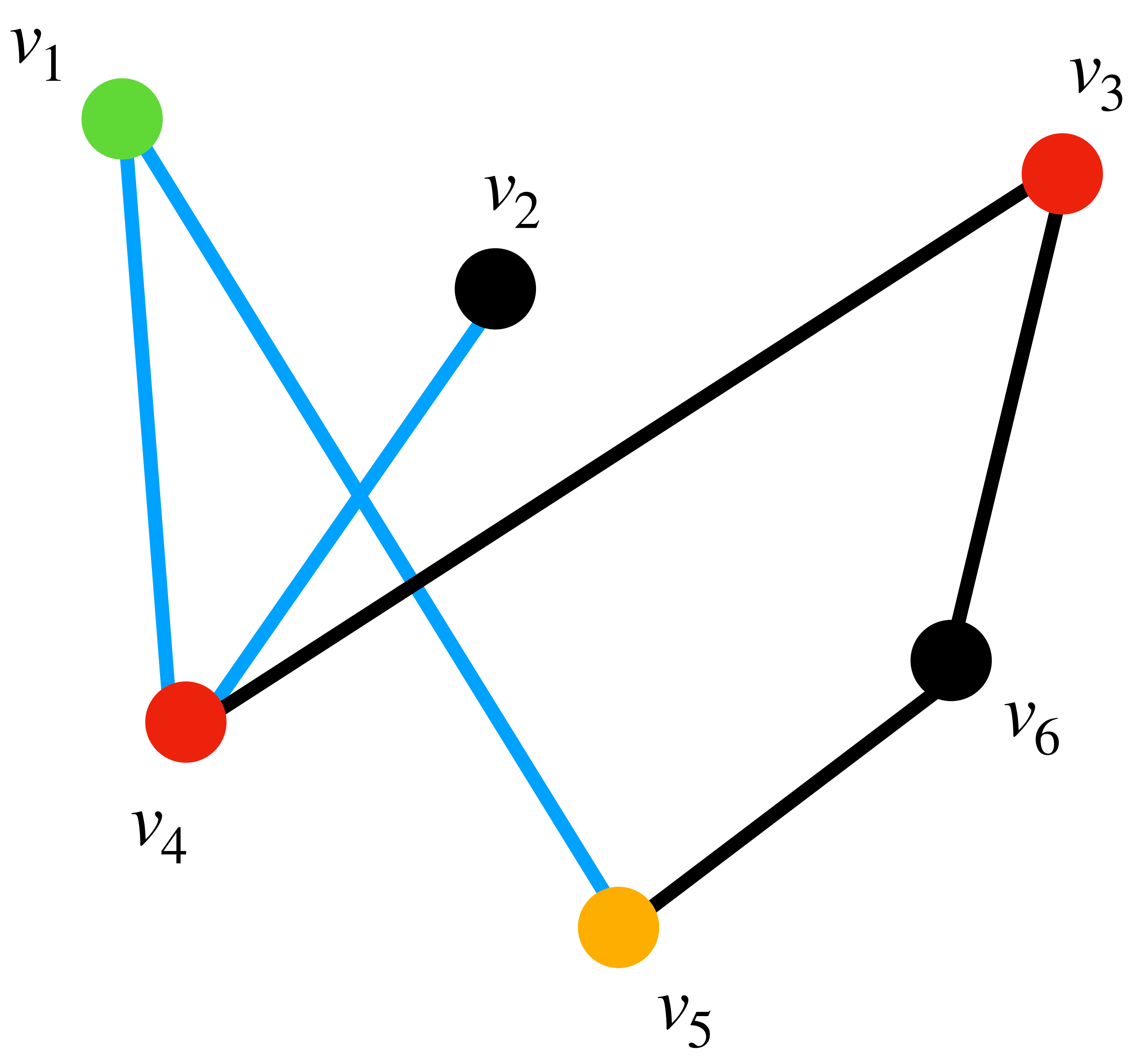
Bunte Pfade

Gegeben: ein Graph G und eine Färbung $\gamma : V \to [k]$

die Färbung muss nicht auf die Kanten achten

Gesucht: ob G einen <u>bunten</u> Pfad der Länge $k-1$ enthält

Bunter Pfad = alle Knoten haben verschiedene Farben



$P_i(v)$:= alle Bunte Pfade der Länge i, die in v enden

$$P_i(v) := \{S \in \binom{[k]}{i+1} \mid \exists \text{bunter Pfad, der in } v \text{ endet und genau mit } S \text{ gefärbt ist}\}$$

Gesucht: ob $\bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \varnothing$

$n = 6$

$k = 4$

$P_3(v_5) = \{\{1,2,4,3\}\}$

Bunte Pfade

<u>Bunt(G, i)</u>

for all $v \in V$ **do**

$\quad P_i(v) \leftarrow \varnothing$

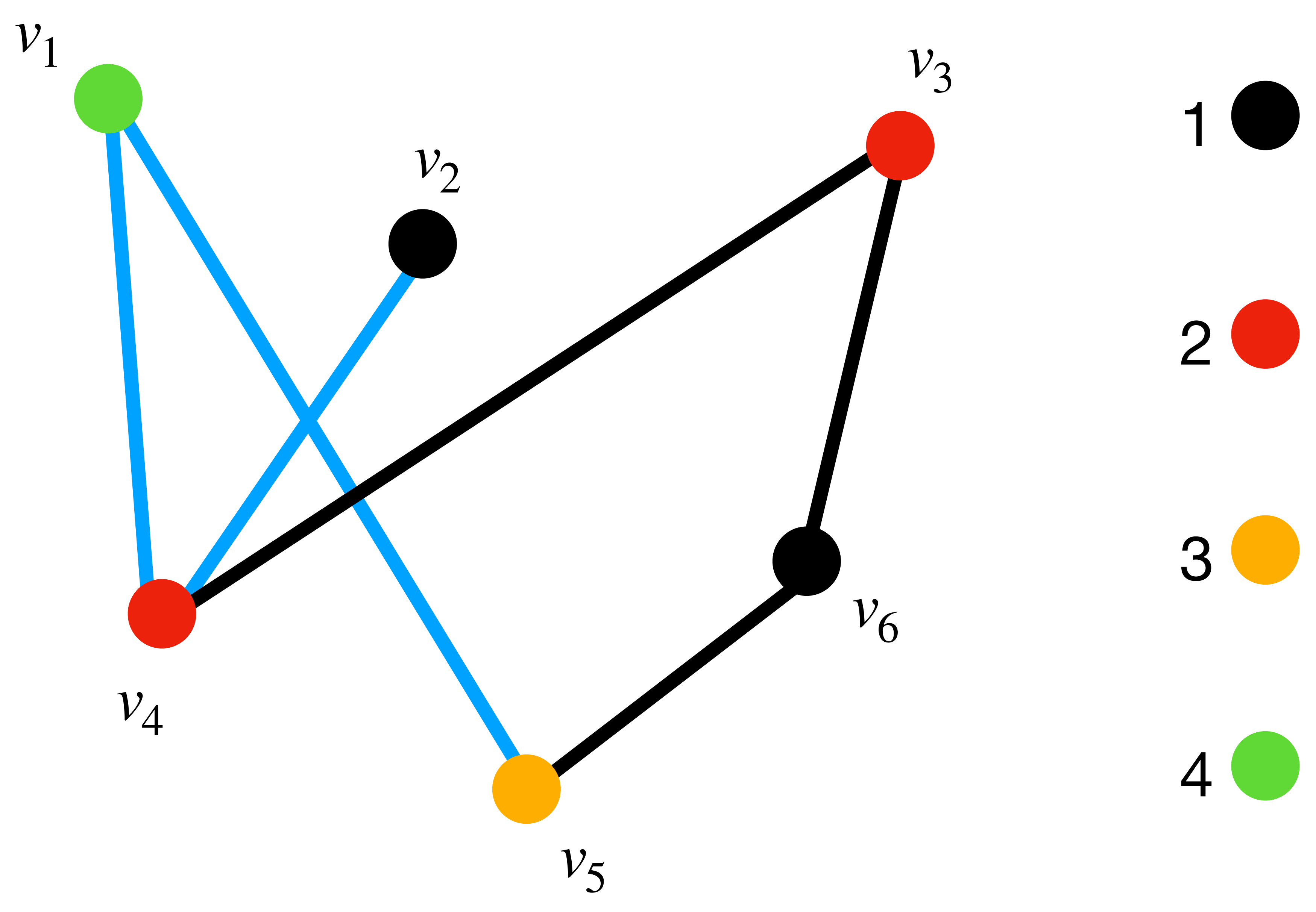
$\quad$ **for all** $x \in N(v)$ **do**

$\quad\quad$ **for all** $R \in P_{i-1}(x)$ mit $\gamma(v) \notin R$ **do**

$\quad\quad\quad P_i(v) \leftarrow P_i(v) \cup \{R \cup \{\gamma(v)\}\}$

<u>Beschreibung:</u> findet alle bunte Pfade der Länge i, basierend auf langen Pfaden der Länge $i-1$

<u>Laufzeit:</u> $\mathcal{O}\left(\sum_{v \in V} \deg(v) \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right) = \mathcal{O}\left(m \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right)$



$P_0(v_1) = \{\{4\}\}$ $\quad P_0(v_2) = \{\{1\}\}$ $\quad P_0(v_3) = \{\{2\}\}$ $\quad \ldots$

$P_1(v_4) = \{\{4{,}2\}, \{1{,}2\}\}$ $\quad \ldots$

$P_2(v_1) = \{\{1{,}2{,}4\}, \{1{,}3{,}4\}\}$ $\quad \ldots$

$P_3(v_5) = \{\{1{,}2{,}4{,}3\}\}$ $\quad \ldots$

Bunte Pfade

<u>Bunt(G, i)</u>

for all $v \in V$ **do**

  $P_i(v) \leftarrow \varnothing$

  for all $x \in N(v)$ **do**

    for all $R \in P_{i-1}(x)$ mit $\gamma(v) \notin R$ **do**

      $P_i(v) \leftarrow P_i(v) \cup \{R \cup \{\gamma(v)\}\}$

<u>Beschreibung:</u> findet alle bunte Pfade der Länge i, basierend auf langen Pfaden der Länge $i - 1$

<u>Laufzeit:</u> $\mathcal{O}\left(\sum_{v \in V} \deg(v) \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right) = \mathcal{O}\left(m \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right)$

<u>Regenbogen(G, γ)</u>

for all $v \in V$ **do** $P_0(v) \leftarrow \{\{\gamma(v)\}\}$

for $i = 1,\ldots,k-1$ **do** $\text{Bunt}(G, i)$

return $\bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \varnothing$

<u>Beschreibung:</u> findet, ob es einen bunten Pfad der Länge $k - 1$ gibt

<u>Laufzeit:</u> $\mathcal{O}\left(|V| + \sum_{i=1}^{k-1}\left(m \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right)\right) = \mathcal{O}(2^k km)$

Lange Pfade

Long Path Problem

Gegeben: ein Graph G und $k \in \mathbb{N}_0$

Gesucht: ob G einen Pfad der Länge k enthält

→ NP-schwer (Reduktion von HamiltonPfad-Problem)

Lange Pfade → Bunte Pfade

Für $\text{Longpath}(G, k)$ lösen wir $\text{Regenbogen}(G, \gamma')$

wobei $\gamma' : V \to [k+1]$ ist eine gleichverteilt zufällige Färbung mit $k+1$ Farben

Ein Versuch

Laufzeit: $\mathcal{O}(2^k km)$

$p_{erfolg} \geq e^{-k}$

$\lceil \lambda e^k \rceil$ **Versuche**

Laufzeit: $\mathcal{O}(\lambda e^k \cdot 2^k km)$

$p_{erfolg} \geq 1 - e^{-\lambda}$

Aufgaben