Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 11

Ilya Maier

Theorie Recap

Konvexe Hülle

Gegeben: eine endliche Punktenmenge $P \subseteq \mathbb{R}^d$
Gesucht: die konvexe Hülle von P, $\text{conv}(P)$

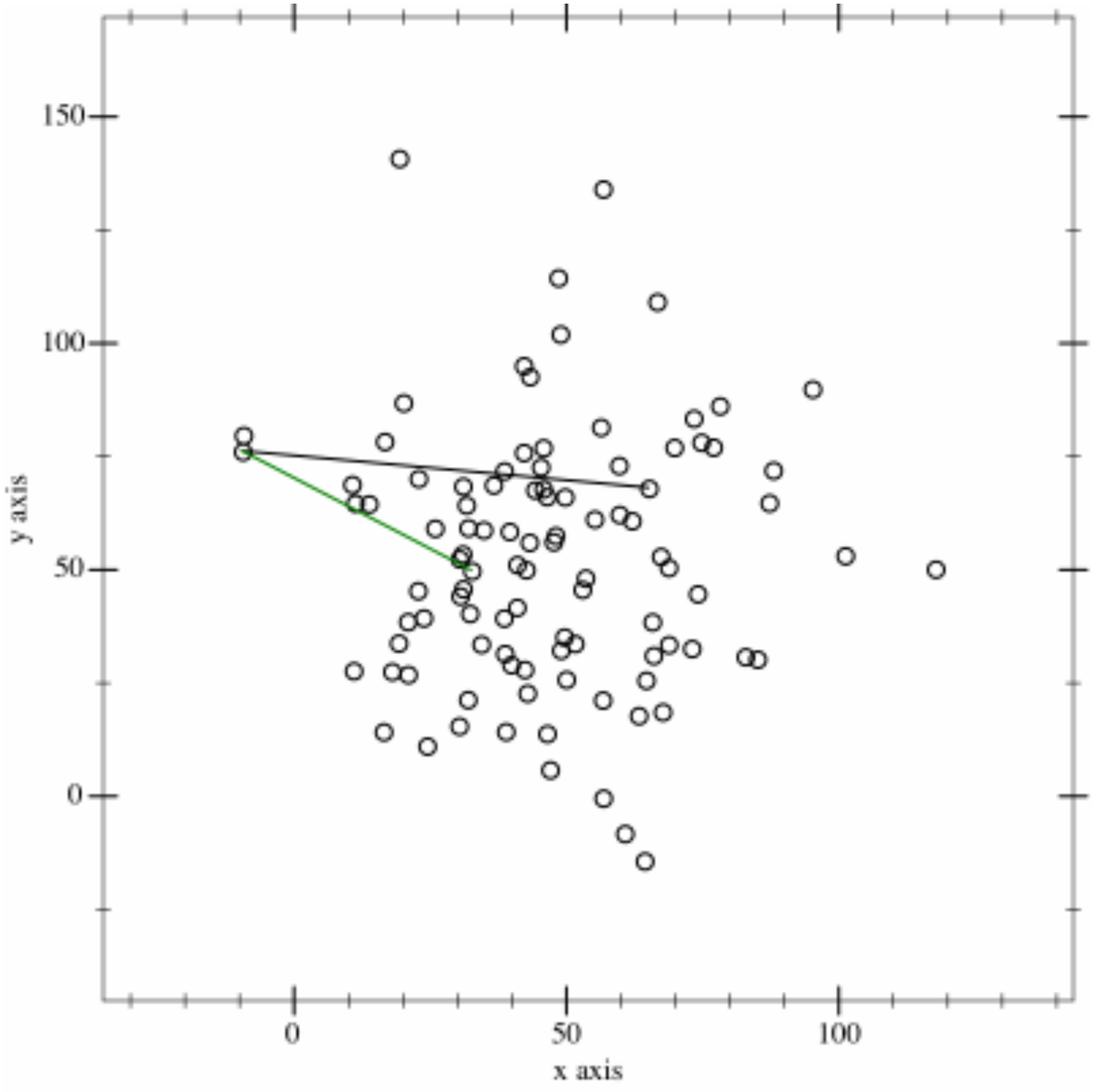
Konvexe Hülle: die minimale konvexe Menge, die P beinhaltet
Randkante: geordnetes Paar qr für $q, r \in P$ mit $q \neq r$ s.d. alle Punkte von P links von qr liegen

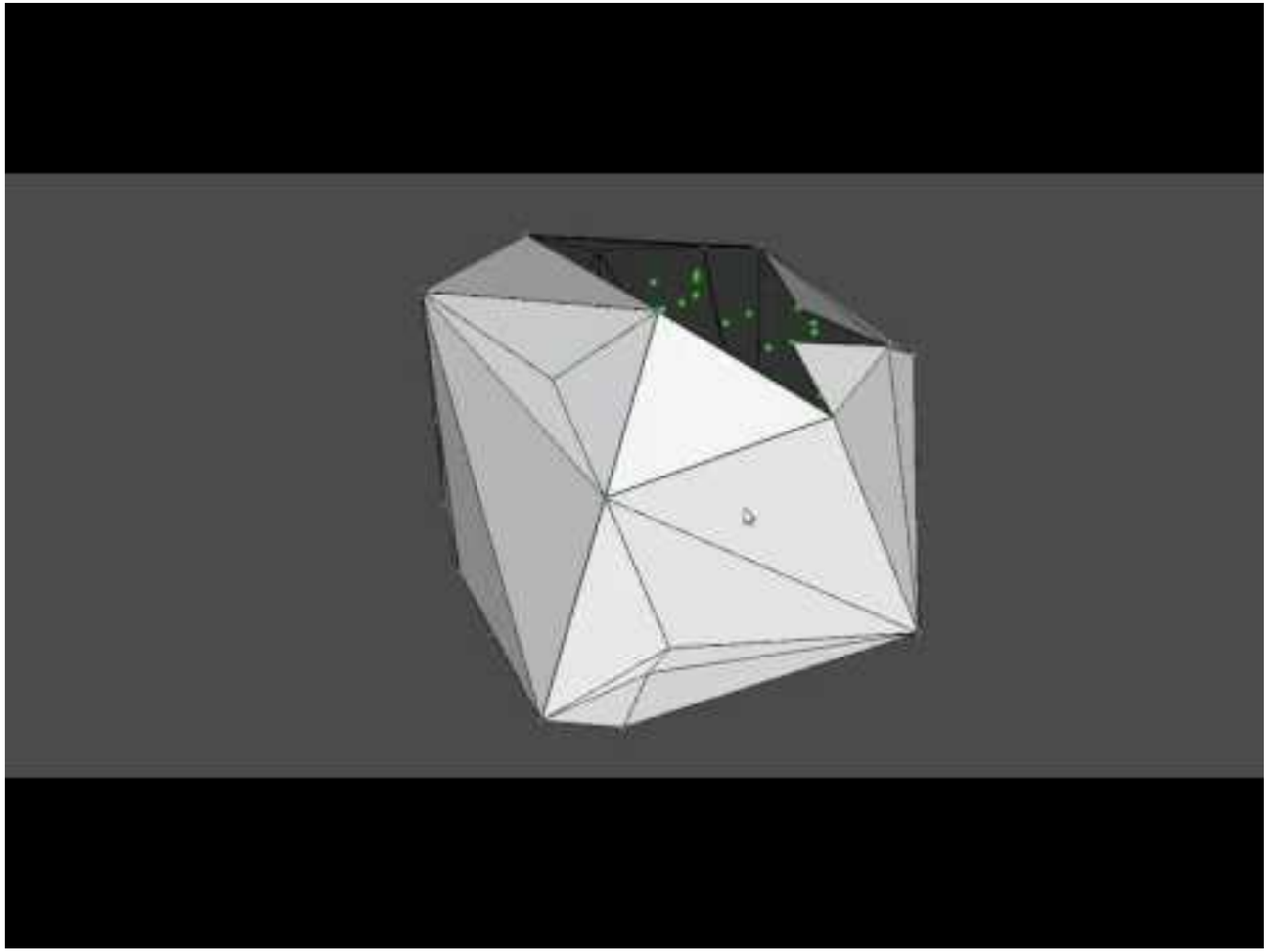
JarvisWrap(P)
1) $h \leftarrow 0$
2) $p_{now} \leftarrow$ Punkt mit kleinster $x-$Koordinate
3) **repeat**
4) $\quad q_h \leftarrow p_{now}$
5) $\quad p_{now} \leftarrow \text{FindNext}(q_h)$
6) $\quad h \leftarrow h + 1$
7) **until** $p_{now} = p_0$
8) **return** $(q_0, \ldots, q_{h-1})$

Laufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot h)$, wobei $h :=$ #Ecken in $\text{conv}(P)$
$\rightarrow \mathcal{O}(n^2)$ worst case
$\rightarrow \mathcal{O}(n)$ wenn h konstant

FindNext(q)
1) Wähle beliebig $p_0 \in P \backslash \{q\}$
2) $q_{next} \leftarrow p_0$
3) **for all** $p \in P \backslash \{q, p_0\}$ **do**
4) $\quad$ **if** p **rechts** von qq_{next} **then**
5) $\quad\quad q_{next} \leftarrow p$
6) **return** q_{next}

p rechts von qq_{next}
$\iff (q_x - p_x)(q_{next,y} - p_y) < (q_y - p_y)(q_{next,x} - p_x)$


150
100
50
0
y axis
0
50
100
x axis



Konvexe Hülle - Lower Bound der Laufzeit

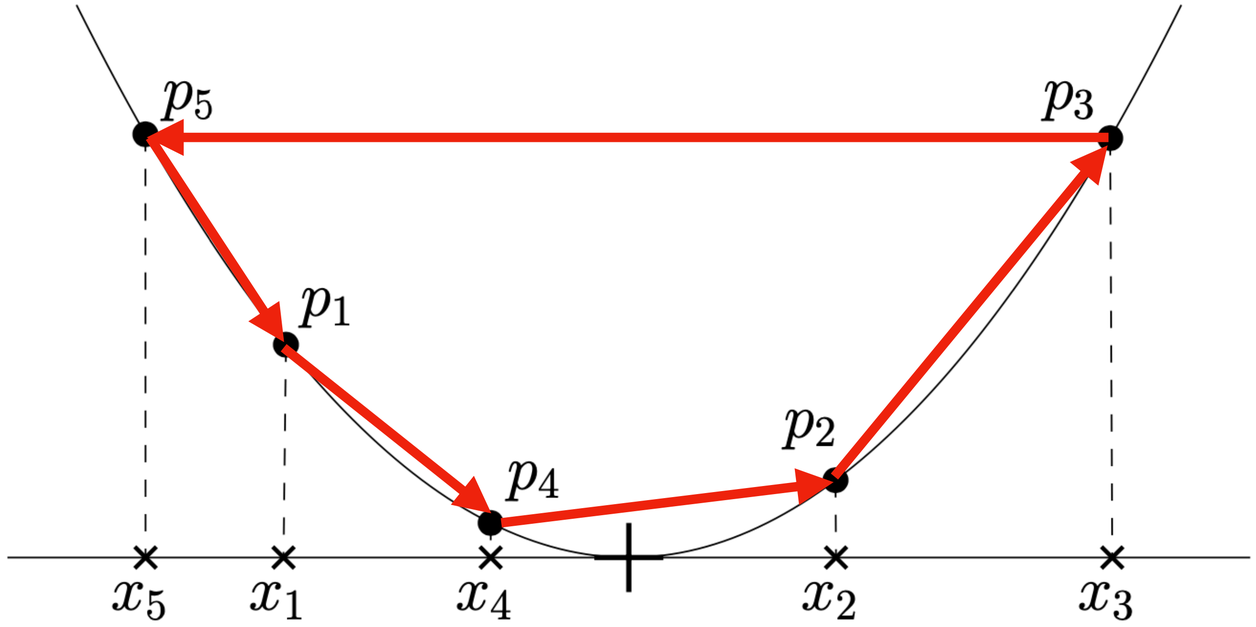
Reduktion vom Sortieren:

$(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow ((x_1, x_1^2), \ldots, (x_n, x_n^2))$

können wir Konvexe Hülle in $t(n)$ bestimmen

so können wir in $\mathcal{O}(t(n) + n)$ sortieren

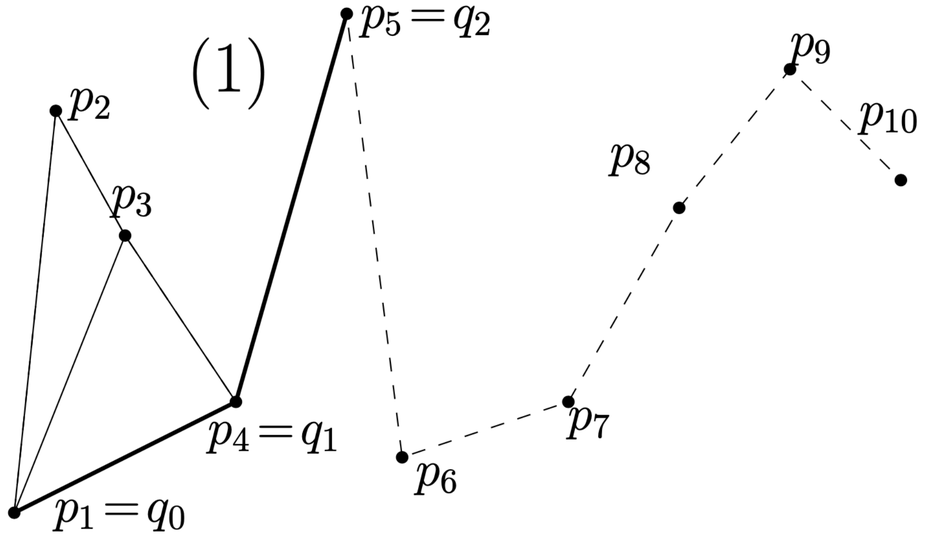
$\Longrightarrow \quad t(n) \in \Omega(n \cdot \log n)$

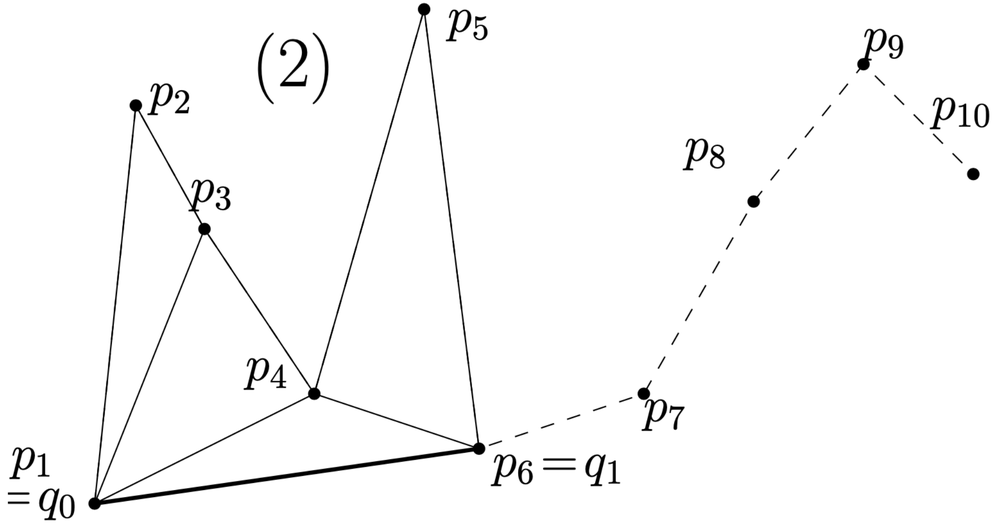


Konvexe Hülle - Lokal Verbessern

LocalRepair($p_1, p_2, \ldots, p_n$) — ($p_1, p_2, \ldots, p_n$) sortiert

```
1:  q_0 ← p_1; h ← 0
2:  for i ← 2 to n do                    ▷ unterer Rand, links nach rechts
3:      while h > 0 und q_h links von q_{h-1}p_i do
4:          h ← h − 1
5:      h ← h + 1; q_h ← p_i
6:              ▷ (q_0, ..., q_h) untere konvexe Hülle von {p_1, ..., p_i}
7:  h' ← h
8:  for i ← n − 1 downto 1 do            ▷ oberer Rand, rechts nach links
9:      while h > h' und q_h links von q_{h-1}p_i do
10:         h ← h − 1
11:     h ← h + 1; q_h ← p_i
12: return (q_0, q_1, ..., q_{h-1})
```





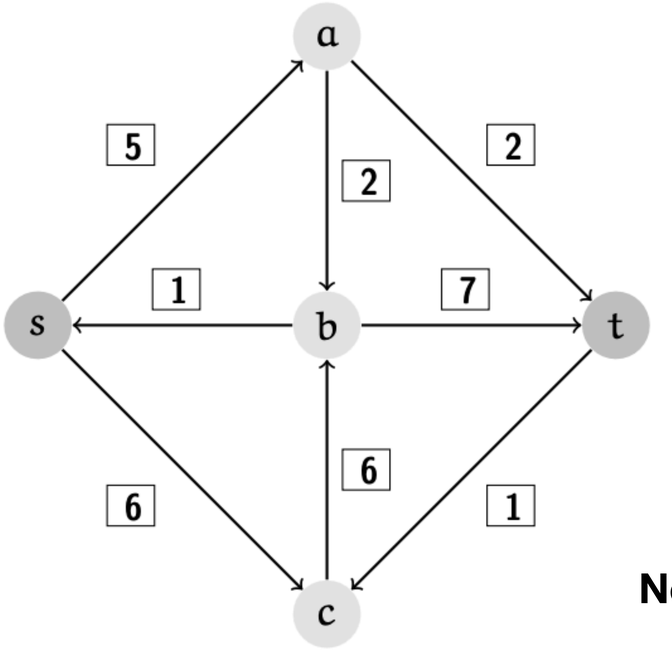
Analyse

- Sortieren -> $\mathcal{O}(n \log n)$
- $2n - 2 - h$ Mal erfolgreiche Tests (neues Dreieck) -> $\mathcal{O}(n)$
- $2n - 2$ erfolglose Tests (p_i wird zu einer Kante) -> $\mathcal{O}(n)$

→ Wenn die Punkte schon sortiert sind -> $\mathcal{O}(n)$ statt $\mathcal{O}(n \log n)$

Netzwerke und Flüsse

Netzwerk $N := (V, A, c, s, t)$
- (V, A) ist ein gerichteter Graph
- $s \in V$ ist die Quelle
- $t \in V$ ist die Senke
- $c : A \to \mathbb{R}_0^+$ die Kapazitätsfunktion

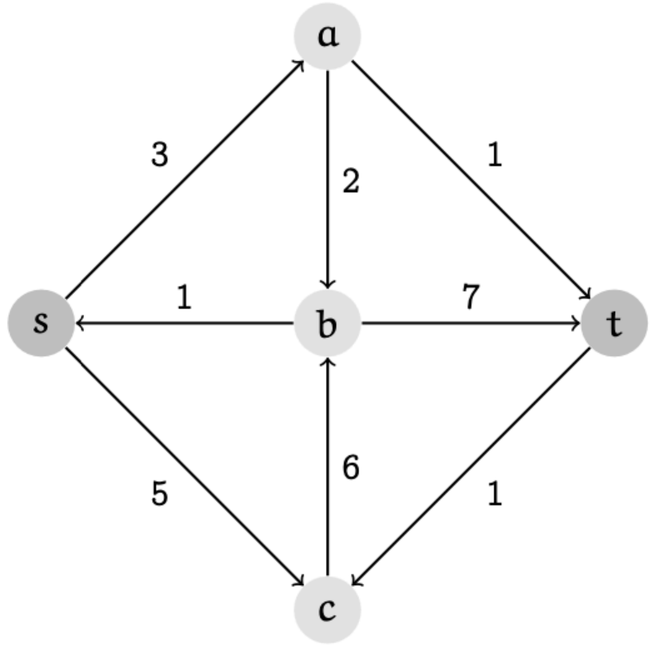


Netzwerk

Fluss f **in** $N : f : A \to \mathbb{R}_0^+$
- **Zulässigkeit**: $0 \leq f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in A$
- **Flusserhaltung**: Für alle $v \in V \backslash \{s, t\}$ gilt

$$\sum_{u \in V:(u,v) \in A} f(u, v) = \sum_{u \in V:(v,u) \in A} f(v, u)$$

- **val**(f) := **netoutflow**(s) := $\sum_{u \in V:(s,u) \in A} f(s, u) - \sum_{u \in V:(u,s) \in A} f(u, s)$
- **val**(f) := **netinflow**(t) := $\sum_{u \in V:(u,t) \in A} f(u, t) - \sum_{u \in V:(t,u) \in A} f(t, u)$

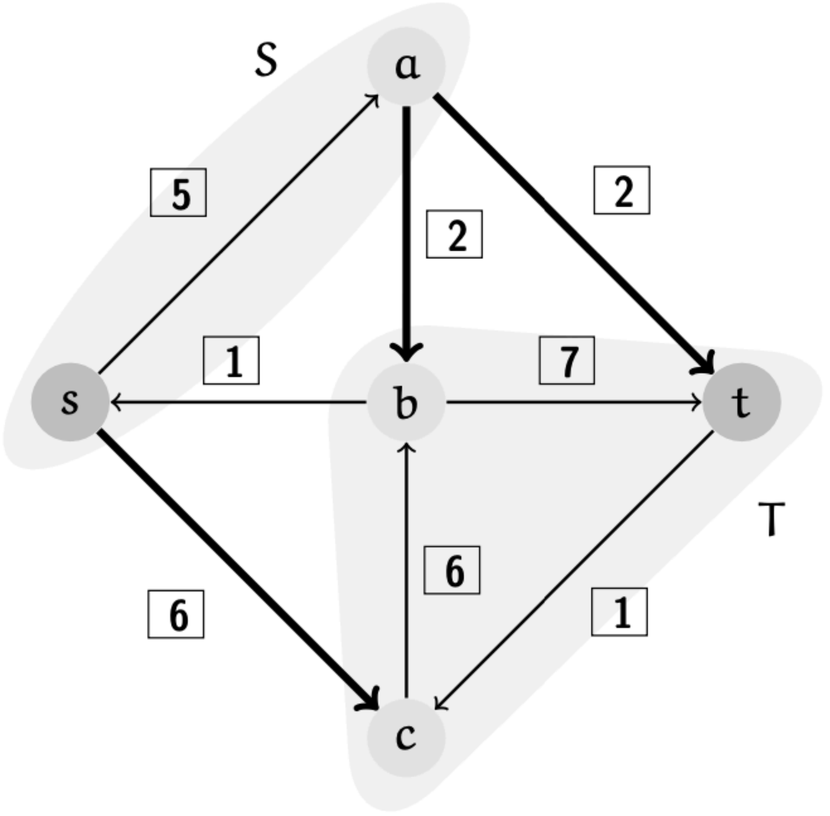


Fluss

Schnitte

s-t-Schnitt in $N := (V, A, c, s, t)$

- eine Partition von V: (S, T)
- $s \in S, t \in T$
- $\text{cap}(S, T) = \sum_{(u,w)\in(S\times T)\cap A} c(u, w)$



Flüsse und Schnitte

- für einen Fluss f und einen Schnitt (S, T) : **val**$(f) \leq$ **cap**(S, T)
- für einen Fluss f: $\exists (S, T)$: $\text{val}(f) = \text{cap}(S, T) \implies f$ is maximal
- **MaxFlowMinCut-Theorem:**

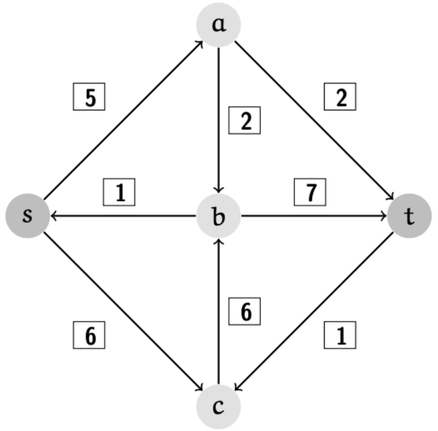
$$\max_{f} \text{val}(f) = \min_{(S,T)} \text{cap}(S, T)$$

$\text{cap}(S, T) = 2 + 2 + 6 = 10$

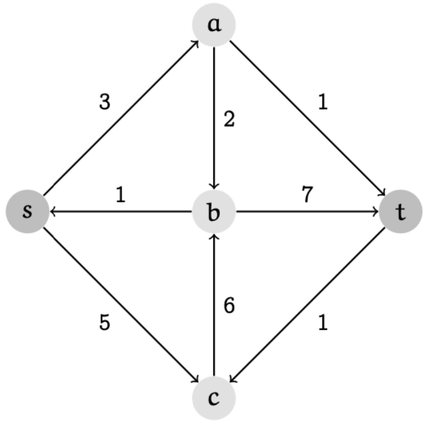
Restnetzwerk

Restnetzwerk $N_f = (V, A_f, r_f, s, t)$ **für** N, f

- N hat keine entgegen gerichtete Kanten
- $\forall e \in A : f(e) < c(e) \implies e \in A_f \wedge r_f(e) = c(e) - f(e)$
- $\forall e \in A : f(e) > 0 \implies e^{opp} \in A_f \wedge r_f(e^{opp}) = f(e)$
- A_f hat keine weiteren Kanten



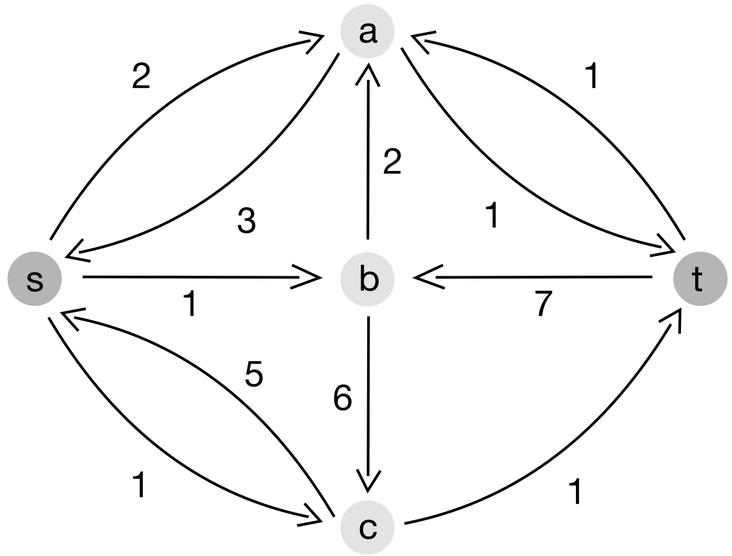
Netzwerk



Fluss

Restnetzwerk und MaxFlow

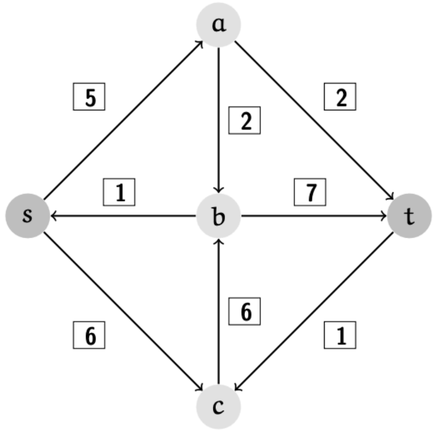
f ist ein maximaler Fluss $\iff$ $\neg \exists$ gerichteter s-t-Pfad in N_f



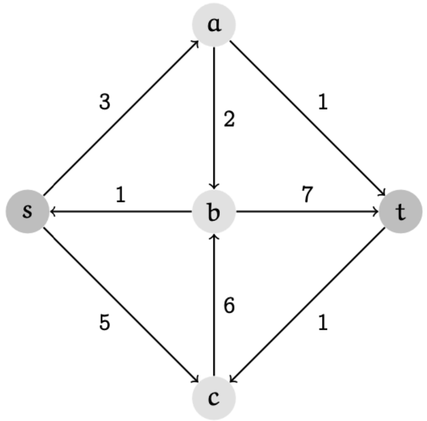
Restnetzwerk

Restnetzwerk $N_f = (V, A_f, r_f, s, t)$ **für** N, f

- N hat keine entgegen gerichtete Kanten
- $\forall e \in A : f(e) < c(e) \implies e \in A_f \wedge r_f(e) = c(e) - f(e)$
- $\forall e \in A : f(e) > 0 \implies e^{opp} \in A_f \wedge r_f(e^{opp}) = f(e)$
- A_f hat keine weiteren Kanten



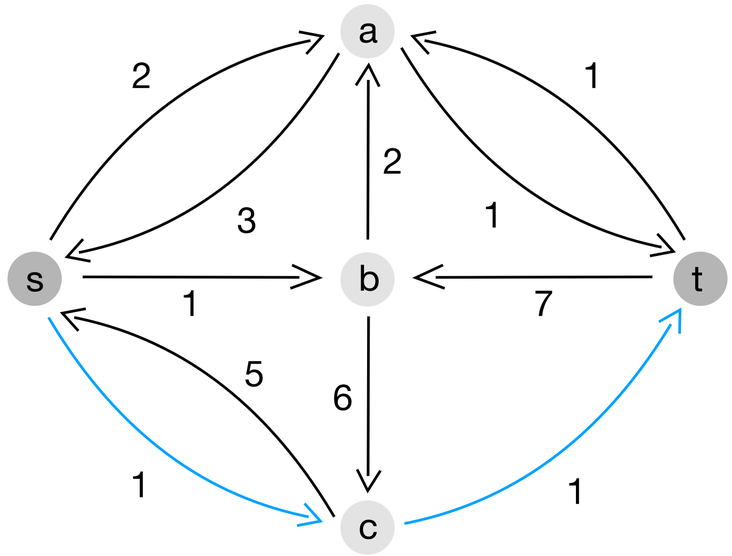
Netzwerk



Fluss

Restnetzwerk und MaxFlow

f ist ein maximaler Fluss $\iff \neg \exists$ gerichteter s-t-Pfad in N_f



Max-Flow Algorithmen nach Veröffentlichung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Jahr	Autor(en)	Name	Laufzeiten
1956	Ford, Fulkerson	Algorithmus von Ford und Fulkerson	$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot u_{\max})$, falls alle Kapazitäten ganzzahlig sind
1969	Edmonds, Karp	Algorithmus von Edmonds und Karp	$\mathcal{O}(m^2 \cdot n)$
1970	Dinic	Algorithmus von Dinic	$\mathcal{O}(m \cdot n^2)$
1973	Dinic, Gabow		$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log(u_{\max}))$
1974	Karzanov		$\mathcal{O}(n^3)$
1977	Cherkassky		$\mathcal{O}(n^2 \cdot \sqrt{m})$
1980	Galil, Naamad		$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log(n)^2)$
1983	Sleator, Tarjan		$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log(n))$
1986	Goldberg, Tarjan	Goldberg-Tarjan-Algorithmus	$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log\left(\frac{n^2}{m}\right)\right)$
1987	Ahuja, Orlin		$\mathcal{O}(m \cdot n + n^2 \cdot \log(u_{\max}))$
1987	Ahuja, Orlin, Tarjan		$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log\left(2 + \frac{n \cdot \sqrt{\log(u_{\max})}}{m}\right)\right)$
1990	Cheriyan, Hagerup, Mehlhorn		$\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$
1990	Alon		$\mathcal{O}\left(m \cdot n + \sqrt[3]{n^8} \cdot \log(n)\right)$
1992	King, Rao, Tarjan		$\mathcal{O}(m \cdot n + n^{2+e})$
1993	Philipps, Westbrook[2]		$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log_{\frac{m}{n}}(n) + n^2 \cdot \log(n)^{2+e}\right)$
1994	King, Rao, Tarjan[3]		$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log_{\frac{m}{n \cdot \log(n)}}(n)\right)$
1997	Goldberg, Rao[4]		$\mathcal{O}\left(\min\{\sqrt{m}, \sqrt[3]{n^2}\} \cdot m \cdot \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \cdot \log(u_{\max})\right)$
2012	Orlin, King, Rao, Tarjan		$\mathcal{O}(n \cdot m)$
2022	Chen, Kyng, Liu, Peng, Gutenberg, Sachdeva[5]		$m^{1+o(1)}$ für ganzzahlige Kapazitäten, die polynomiell beschränkt sind

Algorithmen

Ford-Fulkerson Algorithmus

1) $f \leftarrow 0$

2) **while** ∃s-t-Pfad P in N_f **do**

3) **Augmentiere** den Fluss entlang P

4) **return** f

→ kann unendlich laufen wenn $c : A \to \mathbb{R}$

→ läuft immer endlich wenn $c : A \to \mathbb{N}_0$

→ Laufzeit: $\mathcal{O}(mnU)$ wobei $c : A \to \mathbb{N}_0$ und $U = \max_{e \in A} c(e)$

Andere Methode/Algorithmen

1) Capacity Scaling (Kapazitäten ganzzahlig + höchstens U)

$\mathcal{O}(mn(1 + \log U))$

2) Dynamic Trees

$\mathcal{O}(mn \log n)$

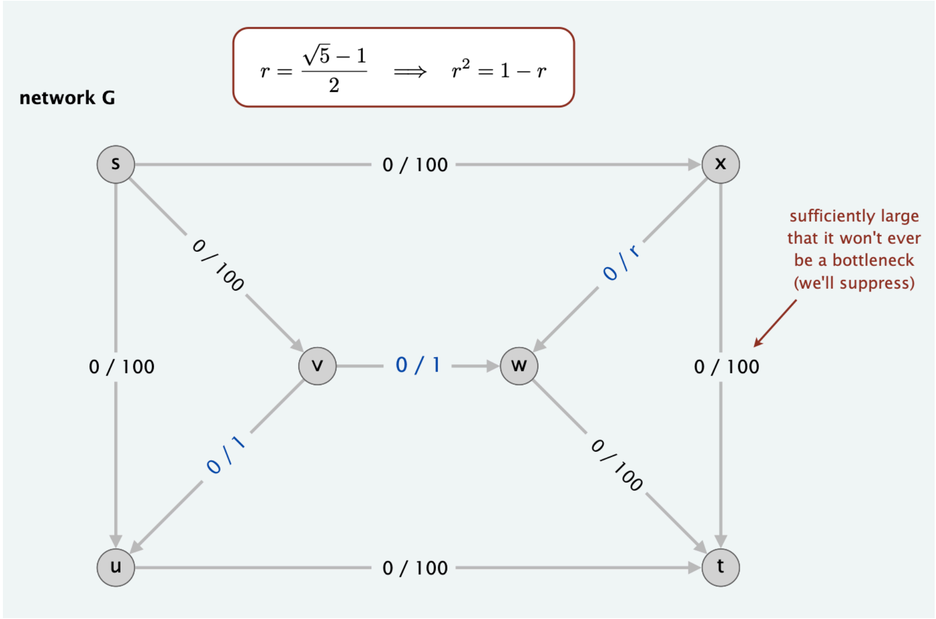
Satz für Ford-Fulkerson Algorithmus

Für N mit $c : A \to \mathbb{N}_0^{\leq U}$ gilt:

1) es gibt einen ganzzahligen maximalen Fluss

2) der Algo findet den Fluss in $\mathcal{O}(mnU)$

Pathological Example:



https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring13/cos423/lectures/07DemoFordFulkersonPathological.pdf

Kahoot

Aufgaben

Aufgabe 1: Conference Scheduling

Die ETH organisiert eine Konferenz für alle Departements. Es gibt n Departments mit m_i $(1 \leq i \leq n)$ vielen Teilnehmer:innen von jedem Department i. Auf der Konferenz gibt es eine Gruppenarbeitsphase. Dazu werden alle Teilnehmer:innen in k Gruppen aufgeteilt und jede Gruppe hat l_i $(1 \leq i \leq k)$ viele Plätze. Es darf dabei nie 2 oder mehr Teilnehmer:innen aus dem gleichen Departement in der gleichen Gruppe sein. Wie kann man überprüfen, ob solch eine Aufteilung möglich ist und wenn es möglich ist, wie findet man sie? Modelliere das Problem als ein MaxFlow Problem. Was ist die Laufzeit deines Algorithmus?

Aufgabe 2: Modified Network

Gegeben seien ein Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ mit ganzzahligen Kapazitäten und ein ganzzahliger maximaler Fluss f_{max} .

Nun wird die Kapazität einer Kante $e \in A$ um 1 erhöht. Wie kann man nun einen maximalen Fluss f'_{max} in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ finden?