Aufgabe 1: Conference Scheduling

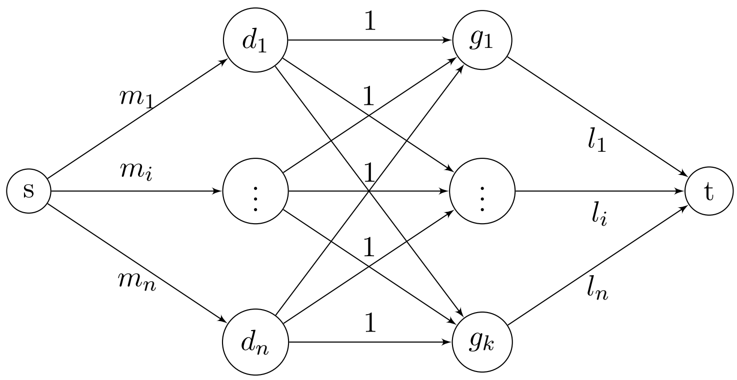
Die ETH organisiert eine Konferenz für alle Departements. Es gibt n Departments mit $m_i(1 \leq i \leq n)$ vielen Teilnehmende von jedem Department i. Auf der Konferenz gibt es eine Gruppenarbeitsphase. Dazu werden alle Teilnehmende in k Gruppen aufgeteilt und jede Gruppe hat $l_i(1 \leq i \leq k)$ viele Plätze. Es darf dabei nie 2 oder mehr Teilnehmende aus dem gleichen Departement in der gleichen Gruppe sein. Wie kann man überprüfen, ob solch eine Aufteilung möglich ist und wenn es möglich ist, wie findet man sie? Modelliere das Problem als ein MaxFlow Problem. Was ist die Laufzeit deines Algorithmus?

Lösung:

Das ist eine typische Flow Aufgabe. Wir definieren das folgende Netzwerk:

Sei $D = \{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ - die Menge der Departements, $G = \{g_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ - die Menge der Arbeitsgruppen und sei $N = (V, A, c, s, t)$ mit

- $V = \{s, t\} \cup D \cup G$
- $A = (\{s\} \times D) \cup (D \times G) \cup (G \times \{t\})$
- und $c(e) = \begin{cases} m_i & e \in \{s\} \times D \\ 1 & e \in D \times G \\ l_i & e \in G \times \{t\} \end{cases}$



Wir finden nun einen maximalen Fluss in diesem Netzwerk mit Ford-Fulkerson in der Zeit von $\mathcal{O}(|V| \cdot |A| \cdot \max\{m_1, \ldots, m_n, l_1, \ldots, l_k\})$. Wenn der Wert des gefunden Flusses kleiner ist als $M := \sum_{i=1}^{n} m_i$, so ist eine Aufteilung in Gruppen nicht möglich, da mindestens einer der Teilnehmende keine Gruppe zugewiesen bekommen kann. Ansonsten ist das Gewicht der Kanten zwischen D und G entweder 0 oder 1, weil alle Kantenkapazitäten ganzzahlig sind und Ford-Fulkerson somit einen ganzzahligen Fluss findet. Wenn eine Kante (d_i, g_j) Gewicht 1 hat, so ist genau ein Teilnehmer aus Department i der Gruppe j zugewiesen.

Aufgabe 2: Modified Network

Gegeben seien ein Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ mit ganzzahligen Kapazitäten und ein ganzzahliger maximaler Fluss f_{max}. Nun wird die Kapazität einer Kante $e \in A$ um 1 erhöht. Wie kann man nun einen maximalen Fluss f'_{max} in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ finden?

Lösung:

Da alle Kapazitäten ganzzahlig sind, sind die Kantengewichte in dem Restnetzwerk nachdem das Gewicht der Kante e verändert wurde alle mindestens 1. Sie können nicht 0 sein, weil dann würde es die Kante nicht geben und die nächste ganze Zahl ist 1.

Wir suchen nun mit BFS/DFS einen s-t-Pfad in dem Restnetzwerk in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$. Wenn es keinen solchen Pfad gibt, so ist f_{max} schon maximal. Ansonsten gibt es einen s-t-Pfad entlang dessen wir f_{max} augmentieren können. Der Wert des Flusses erhöht sich dabei um 1 und der neue Fluss f'_{max} ist maximal. Dies gilt, weil die Kapazität des minimalen Schnittes sich um höchstens 1 erhöht haben können, da wir nur das Gewicht einer Kante verändert haben.