Aufgabe 1: 2/3 Überdeckung

Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph. Wir nennen eine Teilmenge der Kanten $U \subseteq E$ eine 2/3 - Überdeckung von G, falls für den Graphen $G' = (A \uplus B, U)$ folgendes gilt:
$\deg_{G'}(a) = 2$ für alle $a \in A$ und $\deg_{G'}(b) = 3$ für alle $b \in B$.

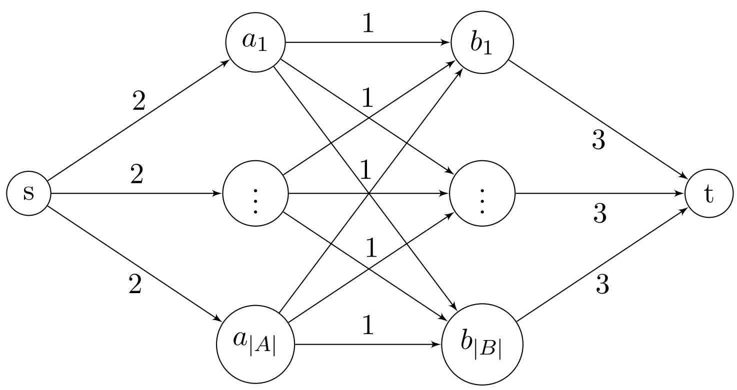
Ein perfektes Matching entspricht einer 1/1 - Überdeckung.

Aufgabe: beschreibe einen Algorithmus, der, gegeben $G = (A \uplus B, E)$, entscheidet, ob es eine eine 2/3 - Überdeckung von G gibt.

Lösung:

Sei $N = (V, A, c, s, t)$ mit

- $V = \{s, t\} \cup A \cup B$
- $A = (\{s\} \times A) \cup \{(a, b) \in A \times B \mid \{a, b\} \in E\} \cup (B \times \{t\})$
- und $c(e) = \begin{cases} 2 & e \in \{s\} \times A \\ 3 & e \in B \times \{t\} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$



Wir finden nun einen maximalen Fluss in diesem Netzwerk mit einem beliebigen MaxFlow Algorithmus, z.B. Ford-Fulkerson. Wenn der Wert des Flusses $val(f)$ gleich $2|A|$ und gleich $3|B|$ ist, so gibt es eine 2/3 - Überdeckung. Dies gilt, weil alle Kantenkapazitäten ganzzahlig sind, also gibt es auch mindestens einen maximalen ganzzahligen Fluss. Bei diesem Fluss haben die Kanten von A nach B Gewicht entweder 0 oder 1 und somit sind die Gewichte die Indikatoren davon, ob die Kanten in der Überdeckung U liegen oder nicht. Die Gewichte 2 und 3 für Kanten von s bzw. zu t garantieren dabei, dass Grade der Knoten 2 bzw. 3 sind.

Aufgabe 2: Satz von Hall

Satz von Hall (Heiratssatz): Ein bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$ hat ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$ gdw. $\forall X \subseteq A : |X| \leq |\mathcal{N}(X)|$

Beweise den Satz von Hall mittels Flüsse.

Lösung:

Wir konstruieren ein Netzwerk N wie in der Aufgabe davor bzw. wie im Skript mit allen Gewichten gleich 1. Betrachte nun einen beliebigen s-t-Schnitt (S, T). Offensichtlich ist $s \in S$ und $t \in T$. Sei nun die Anzahl der Knoten aus A in S gleich i, d.h. $|A \cap S| = i$. Es gibt daher $|A| - i$ viele Knoten aus A in T ($|A \cap T| = |A| - i$) und somit ist die Kapazität des Schnittes $cap(S, T)$ mindestens $|A| - i$, da es eine Kante von s zu jedem Knoten aus A mit Gewicht 1 gibt.

Für die i Knoten aus A in S betrachte ihre Nachbarschaft $\mathcal{N}(A \cap S)$. Für jeden Knoten v aus dieser Nachbarschaft gilt folgendes: entweder ist $v \in T$ und somit gibt es mindesten eine Kante aus S zu v. Andernfalls ist $v \in S$ und dann gibt es die Kante von v zu t. In beiden Fällen gibt es mindestens eine Kante mit Gewicht 1 von S nach T und somit ist die gesamte Kapazität des Schnittes mindestens $|A|$. Das heisst aber auch, dass die Kapazität des minimalen Schnittes mindestens $|A|$ ist. Mit dem MinCut-MaxFlow Satz folgt somit, dass der Wert eines maximalen Flusses in N mind. $|A|$ ist und somit gibt es ein Matching M mit $|M| = |A|$.