

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 1

Ilya Maier

Heute

- Motivation
- Organisatorisches
- Zusammenhang

Motivation

- Student perspective:
- Leichter **Bonus**
 - 2p. code expert
 - 2p. minitest
 - 2p. serie / peergrading
 - 80% insgesamt für 0.25
 - **Aktive** Mitarbeit = 50-75% der Prüfung

Prüfung

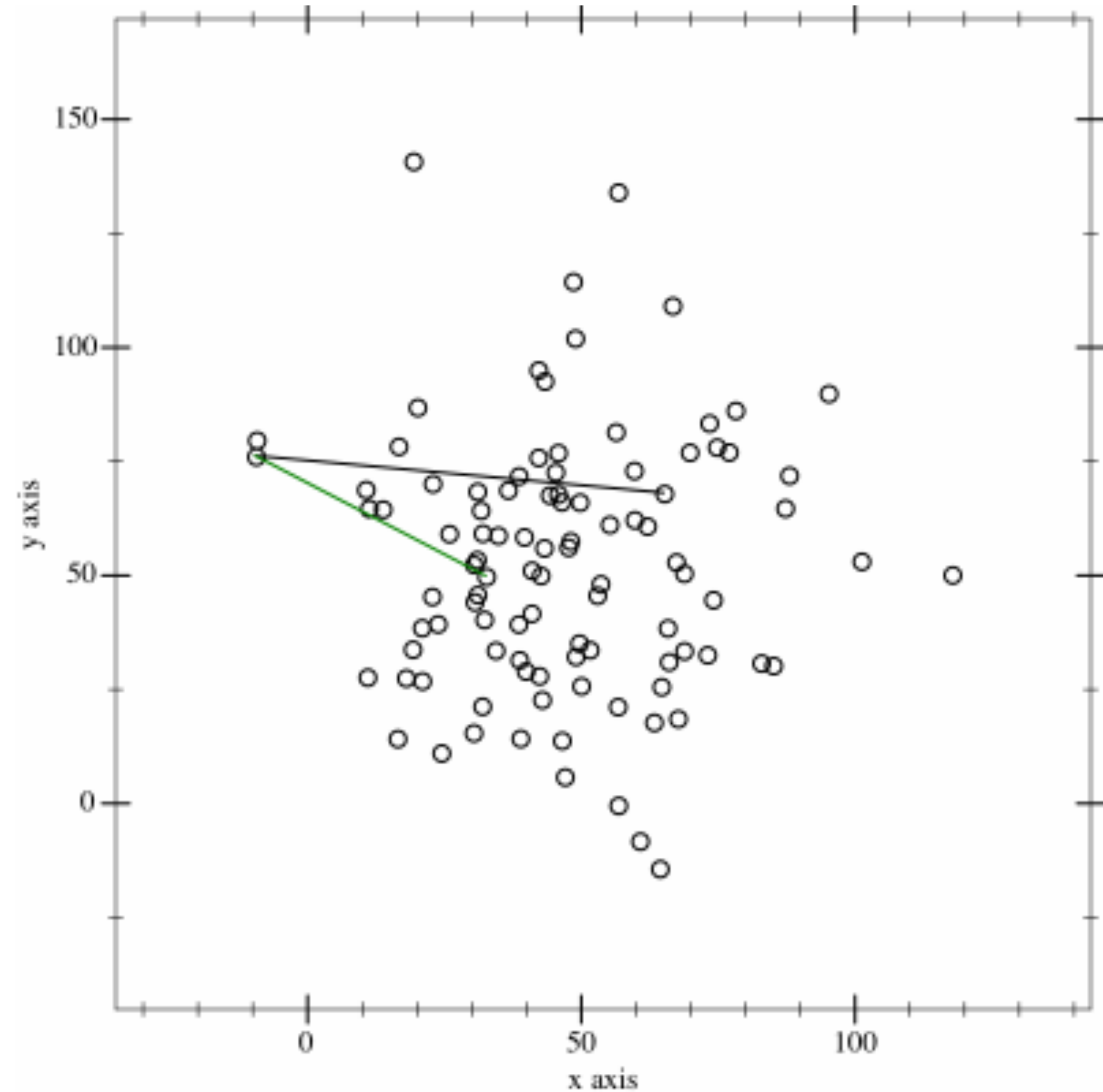
- 50% multiple choice / short answers
- 25% schriftlich
- 25% code expert

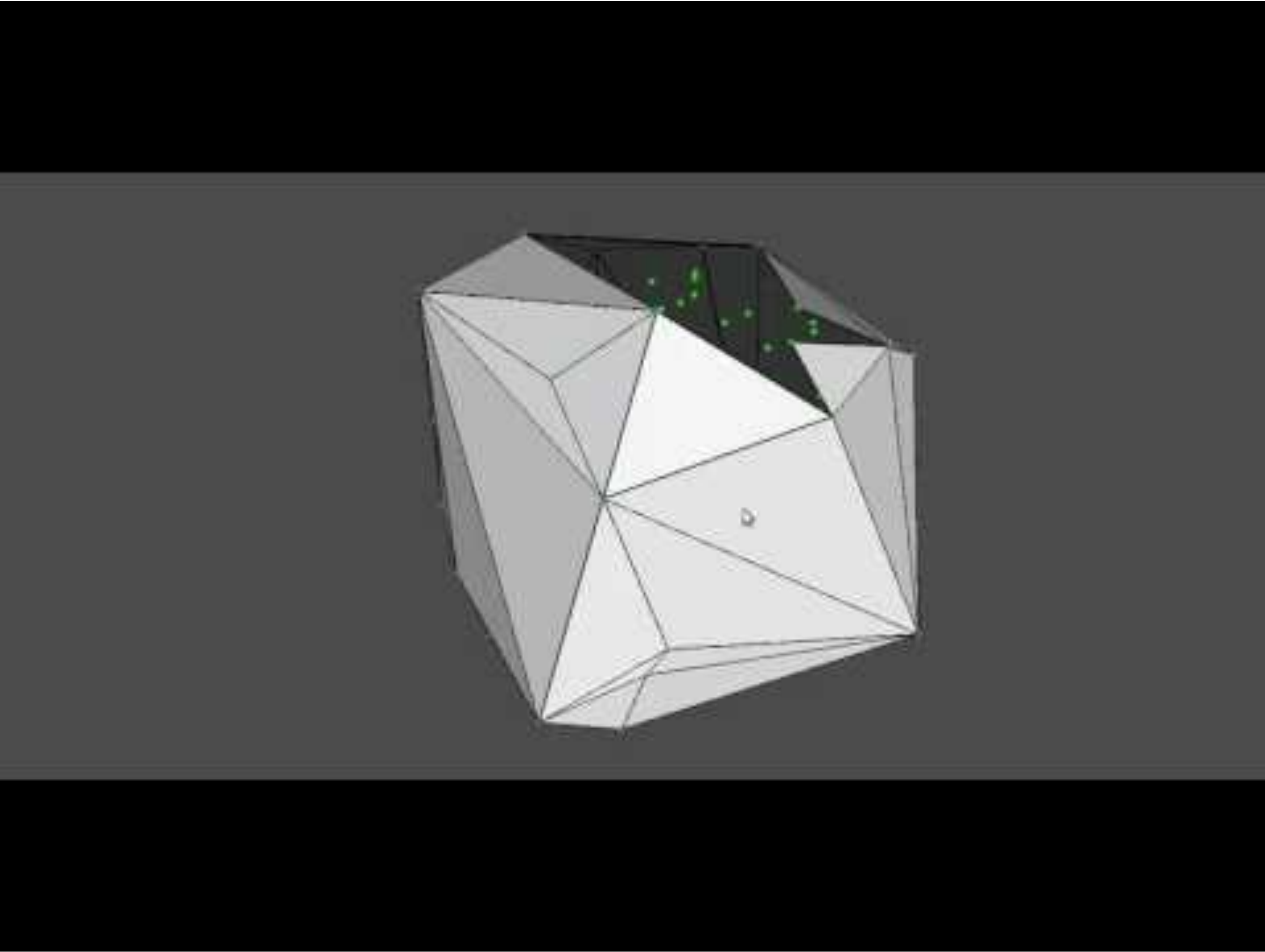
Motivation

- Student perspective:
 - Ana, PProg, DDCA -> man kann nicht wirklich was skippen
 - AnW: 3 Teile, man kann “neu” in das Fach einsteigen
Rest im Sommer nachholen
 - Eine Woche frei im April, Feiertage im Mai, 2.5 Monate Zeit bis zu den Prüfungen -> entspannteres Semester, mehr Zeit zum lernen

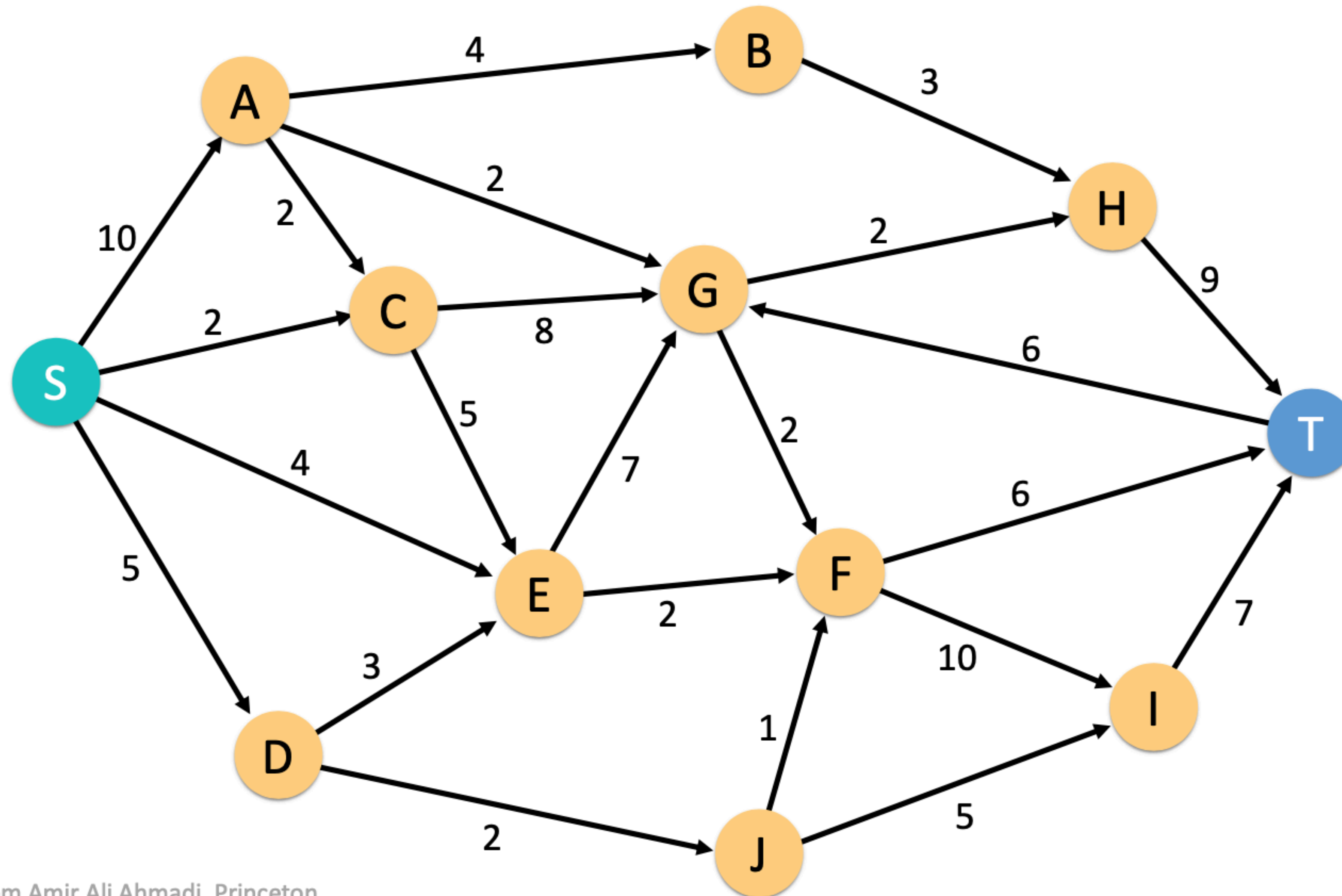
Motivation

- Inhalt perspective:
 - **Einfache** und coole Algorithmen
 - Gut und verständlich geschriebenes Skript



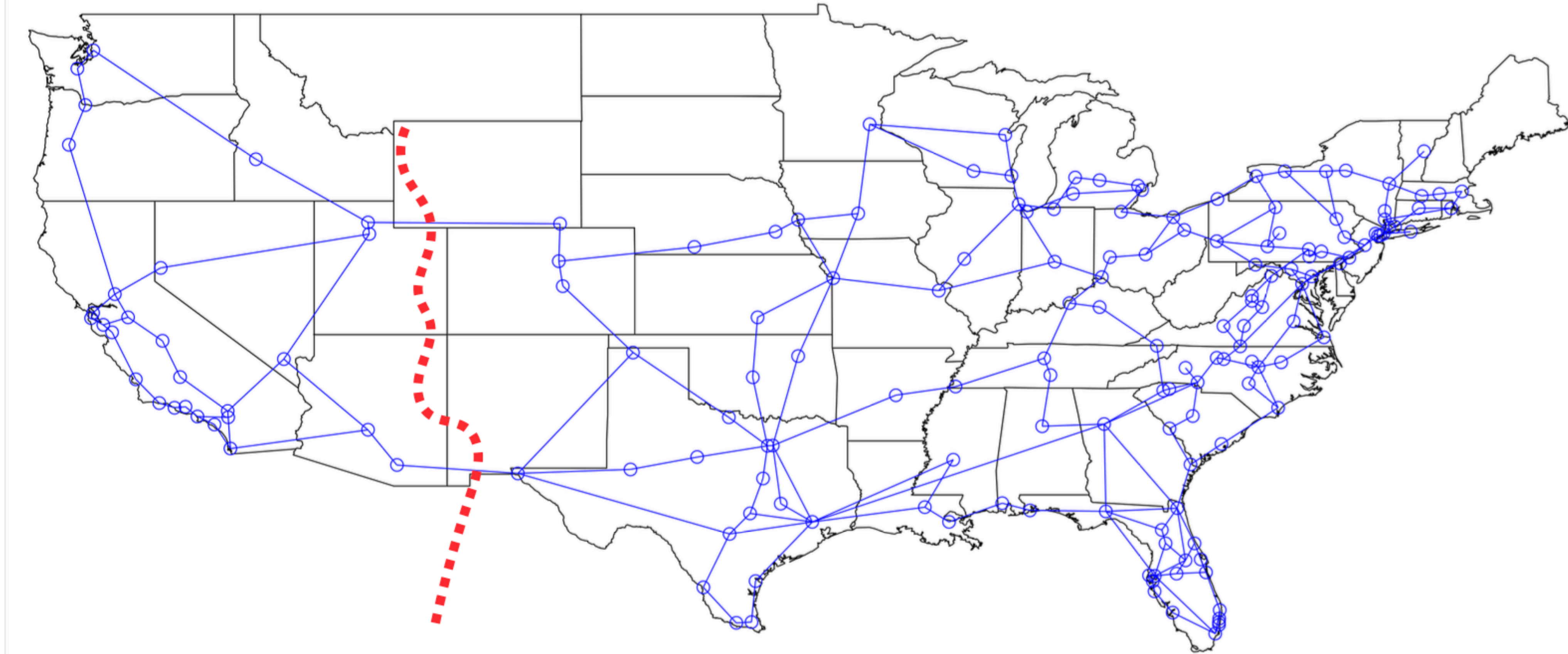


Maximum traffic from S to T?



Example adapted from Amir Ali Ahmadi, Princeton

The Internet is today's critical infrastructure!



Organisatorisches

- Jede Woche:
 - Code Expert ab 18 Uhr am Do. -> Abgabe bis nächsten Do um 10
- Alle 2 Wochen alternierend:
 - Minitest in der ÜS, nach der ÜS Serie - Abgabe bis nächsten Do um 10
 - PeerGrading ab 18 Uhr am Do. -> Abgabe bis So -> Korrektur bis Do
- Erster Minitest und Serie **nächsten Do**, den 29. Februar

Organisatorisches

- Abgaben auf Moodle, Korrekturen auch
- Fragen: imaier@ethz.ch
- Webseite: ilyamaier.github.io

Theorie Recap

k -Zusammenhang

Ein Graph $G = (V, E)$ ist **zusammenhängend** $\iff \forall u, v \in V, u \neq v : \exists u, v$ -**Pfad** in G

Knoten

$$X \subseteq V$$

k -zusammenhängend

- 1) $|V| \geq k + 1$
- 2) $\forall X \subseteq V : |X| < k \implies G[V \setminus X]$ zusammenhängend

Satz von Menger

G k -zusammenhängend

$\iff \forall u, v \in V, u \neq v : \exists k$ intern-knotendisjunkte u, v -Pfade

Kanten

$$X \subseteq E$$

k -kanten**-zusammenhängend**

$\forall X \subseteq E : |X| < k \implies (V, E \setminus X)$ zusammenhängend

Satz von Menger

G k -**kanten**-zusammenhängend

$\iff \forall u, v \in V, u \neq v : \exists k$ **kanten**disjunkte u, v -Pfade

$\exists v \in V : \deg(v) < k \implies G$ ist nicht k -zusammenhängend

Knotenzusammenhang \leq Kantenzusammenhang \leq minimaler Grad

2-Zusammenhang

Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$:

Knoten

$v \in V$ ist ein **Artikulationsknoten (AK)**

$\iff G - v$ ist **nicht zusammenhängend**

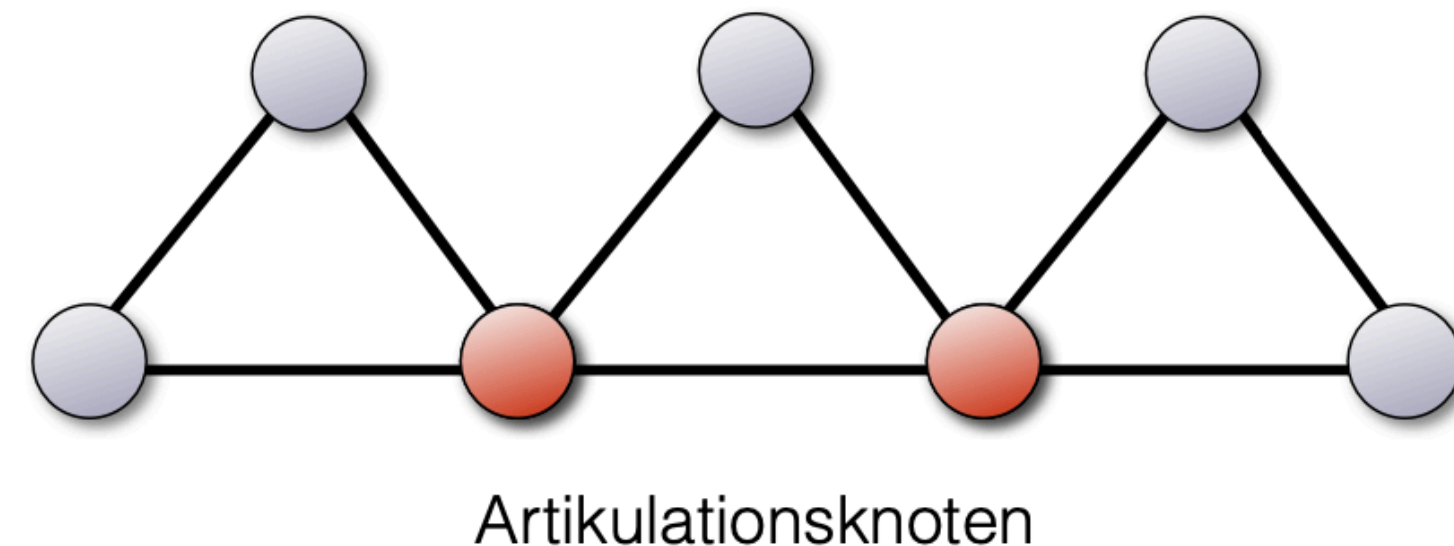
Kanten

$e \in E$ ist eine **Brücke**

$\iff G - e$ ist **nicht zusammenhängend**

$\forall u, v \in V : \{u, v\}$ ist eine **Brücke** \implies $\deg(u) = 1$ oder u ist ein **AK**
und
 $\deg(v) = 1$ oder v ist ein **AK**

Umkehrung gilt nicht!

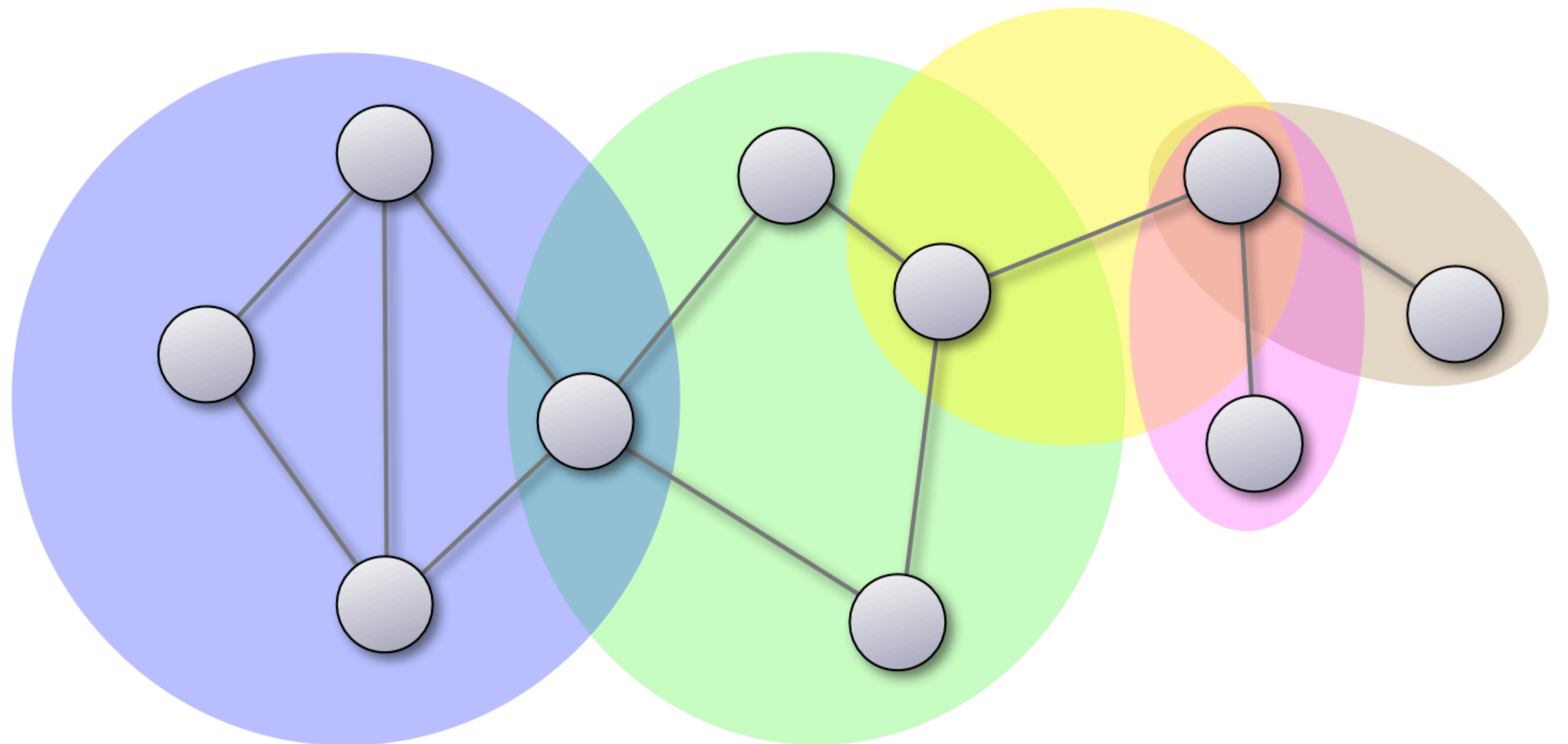


Blöcke

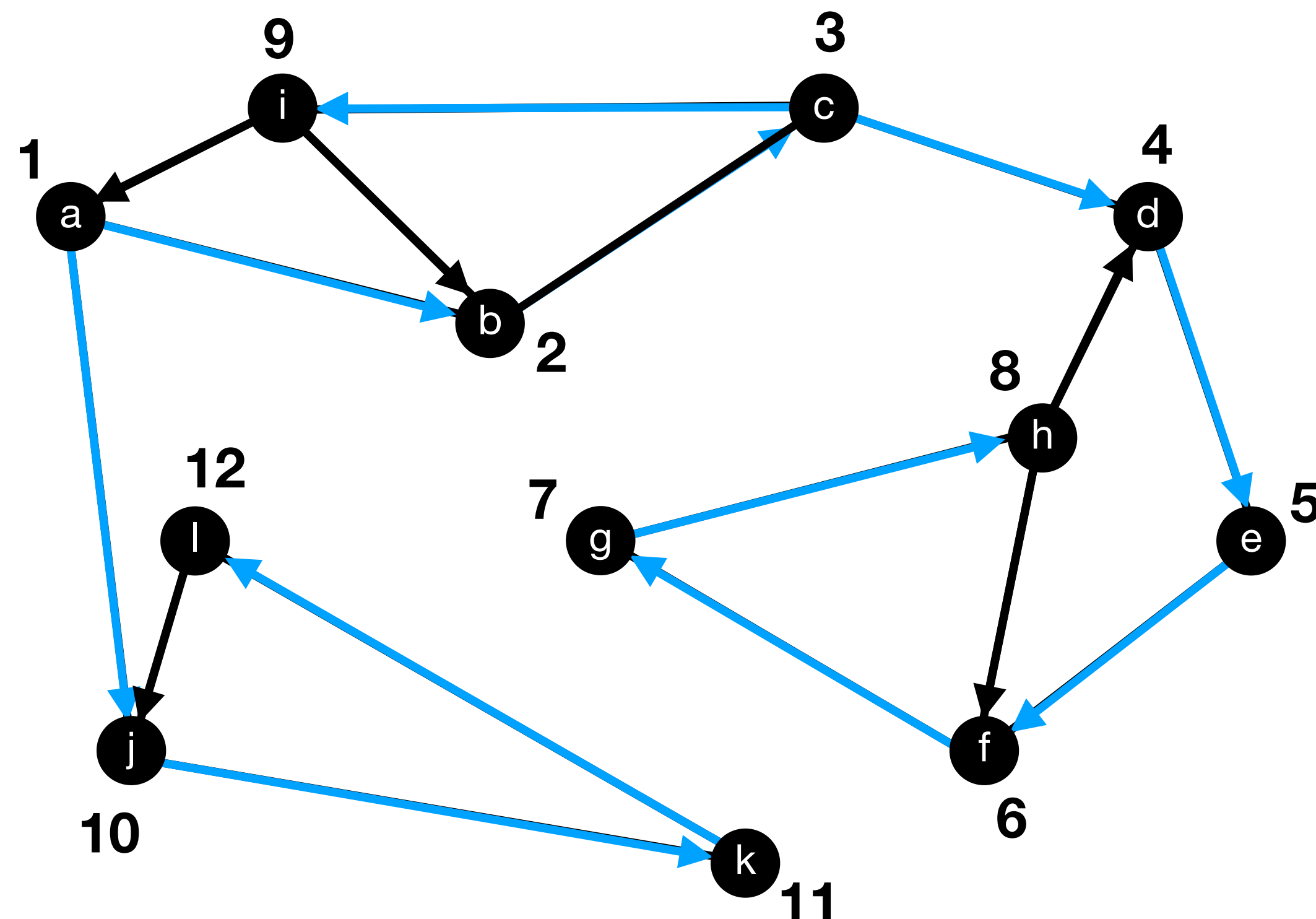
Äquivalenzrelation auf **Kanten**


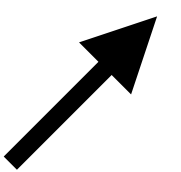
$$e \sim f \iff \begin{cases} e = f \text{ oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$$

Lemma: Zwei Blöcke scheiden sich in einem **AK**



Depth First Search



 = Baumkanten
 = Restkanten

Artikulationsknoten / Brücken finden

low[v]: kleinste **dfs**-Nummer, die man von v aus durch einen gerichteten Pfad aus beliebig vielen Baumkanten und maximal einer Restkante erreichen kann

→ Berechenbar in $O(|V| + |E|)$ mithilfe DP

$$\mathbf{low}[v] = \min \left(\mathbf{dfs}[v], \min_{(v,w) \in E} \begin{cases} \mathbf{dfs}[w], & \text{falls } (v,w) \text{ Restkante} \\ \mathbf{low}[w], & \text{falls } (v,w) \text{ Baumkante} \end{cases} \right)$$

AK finden

If 1) $v = \mathbf{root}$ und v hat mind. 2 Kinder in DFS

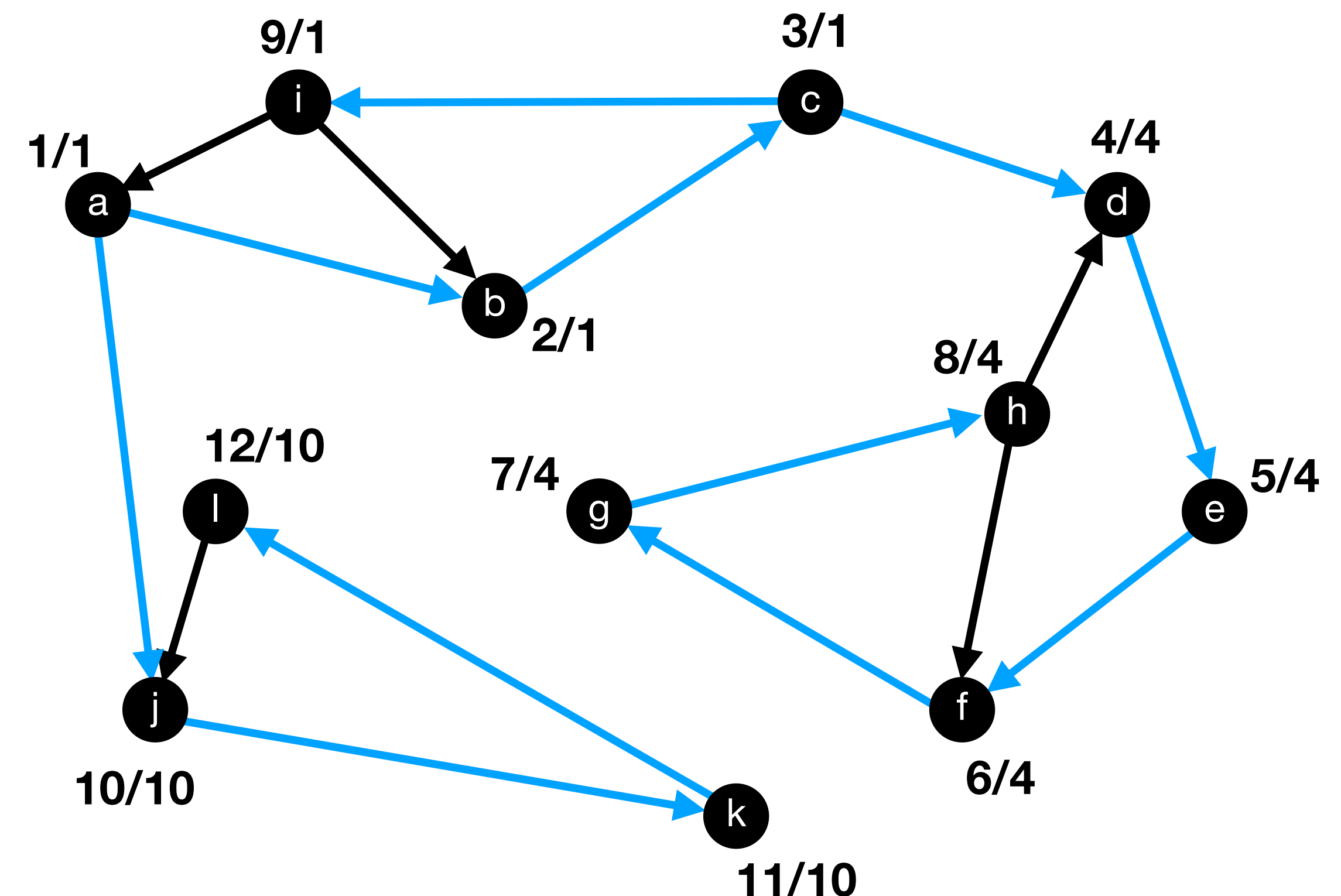
2) $v \neq \mathbf{root}$ und v hat ein Kind w in DFS s.t. $\mathbf{low}[w] \geq \mathbf{dfs}[v]$

Brücke finden

Eine Baumkante $e = (v, w)$ ist eine Brücke

$\iff \mathbf{low}[w] > \mathbf{dfs}[v]$

Eine Restkante ist nie eine Brücke

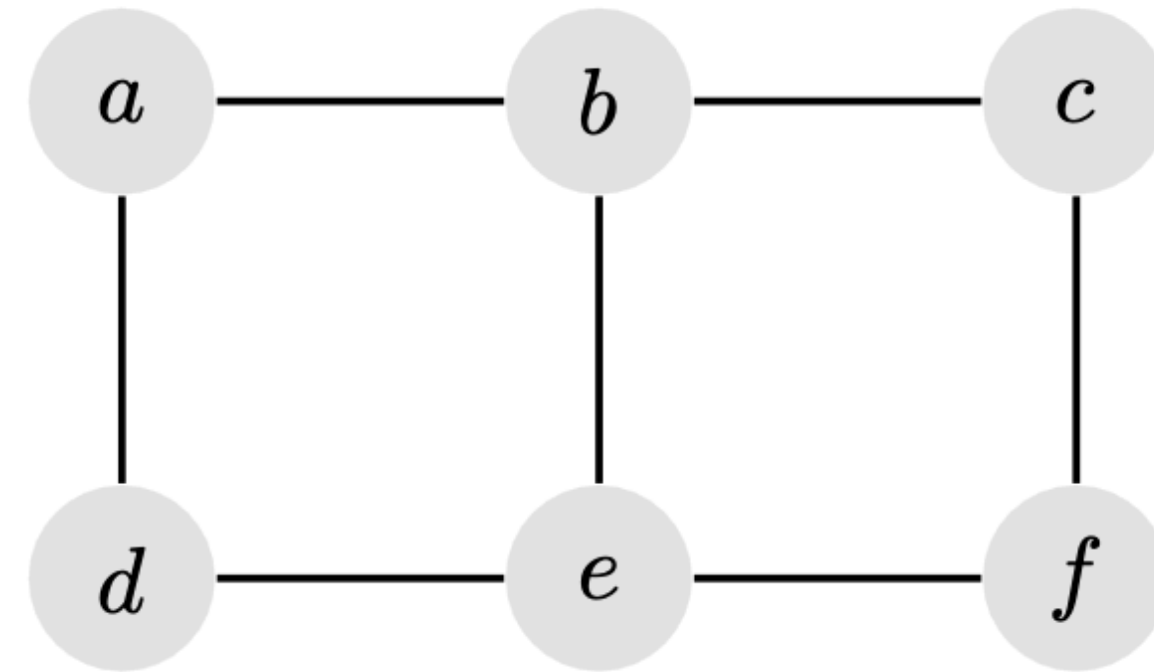


Kahoot

Aufgaben

Aufgabe 1 – *Pfade, Wege, Kreise*

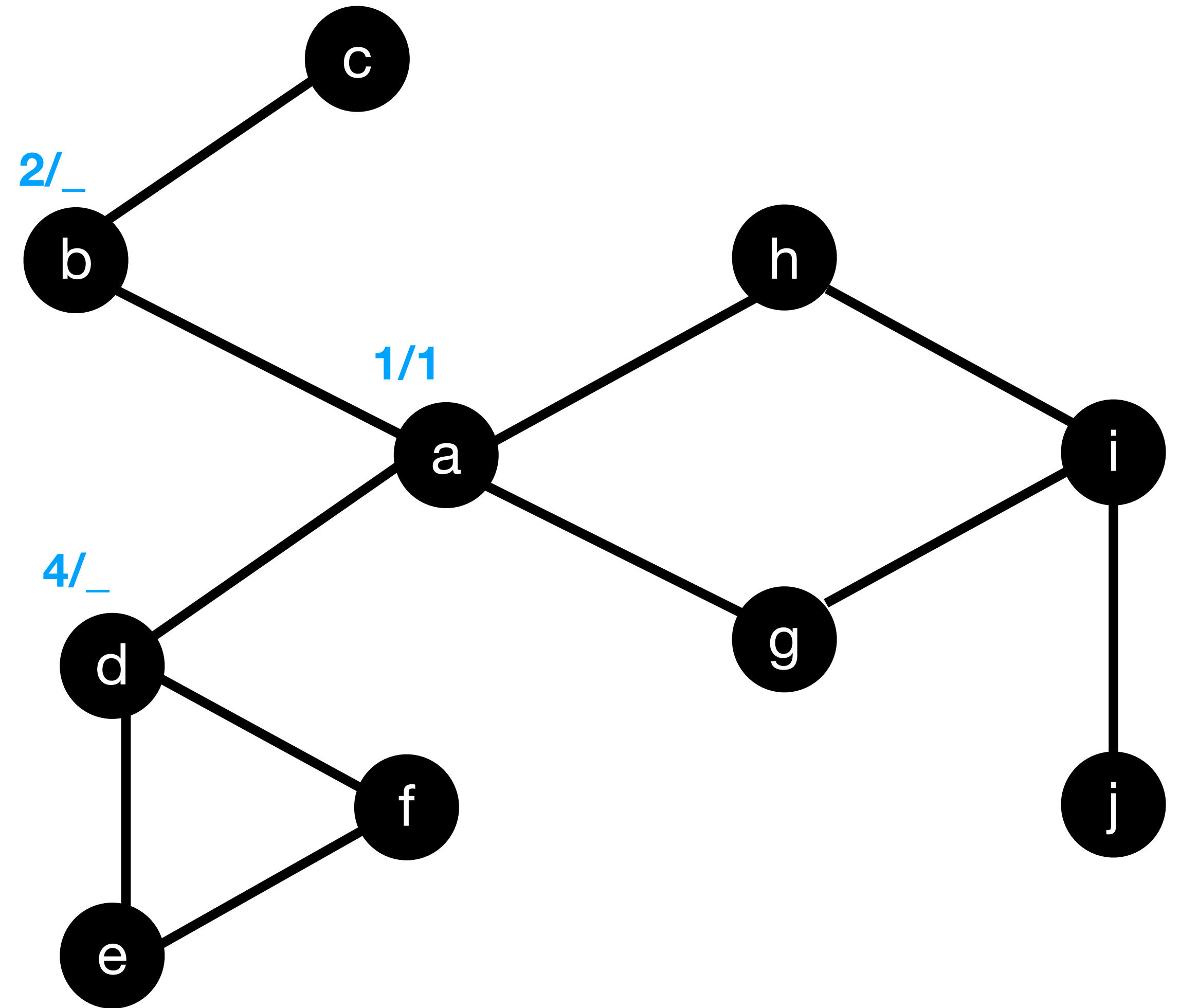
Betrachten Sie folgenden Graphen $G = (V, E)$.



1. Welche Pfade der Länge 4 (d.h. mit 4 Kanten) gibt es von a nach e ?
2. Welche Wege der Länge 4 (d.h. mit 4 Kanten) gibt es von a nach e ?
3. Welche Kreise gibt es in G ?
4. Wie viele Zykeln gibt es in G ?

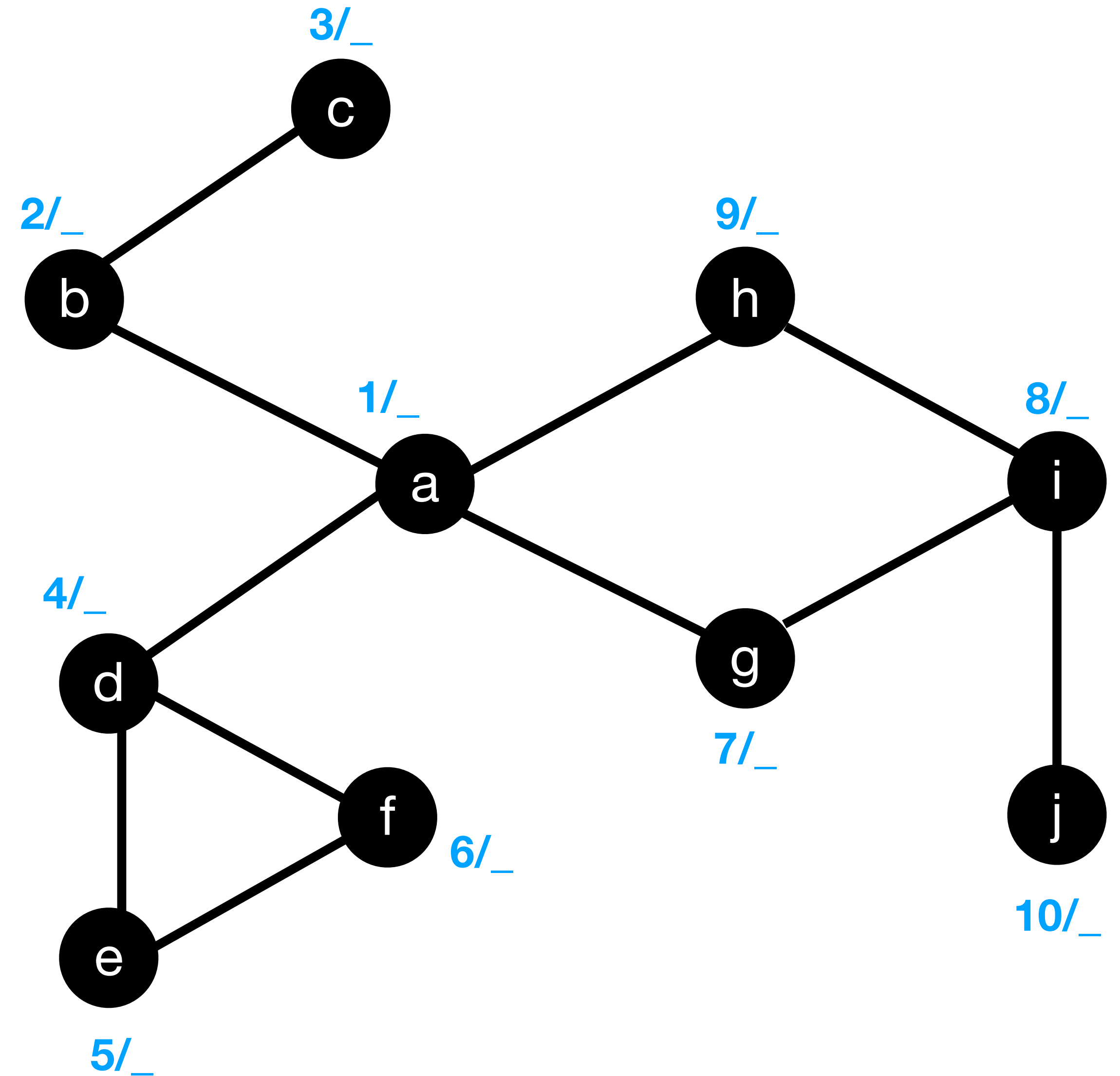
Aufgabe 2

- a) Berechne die low/dfs Nummern ausgehend vom Knoten a und finde alle AKs/Brücken:
- b) Welche Blöcke gibt es in diesem Graphen?



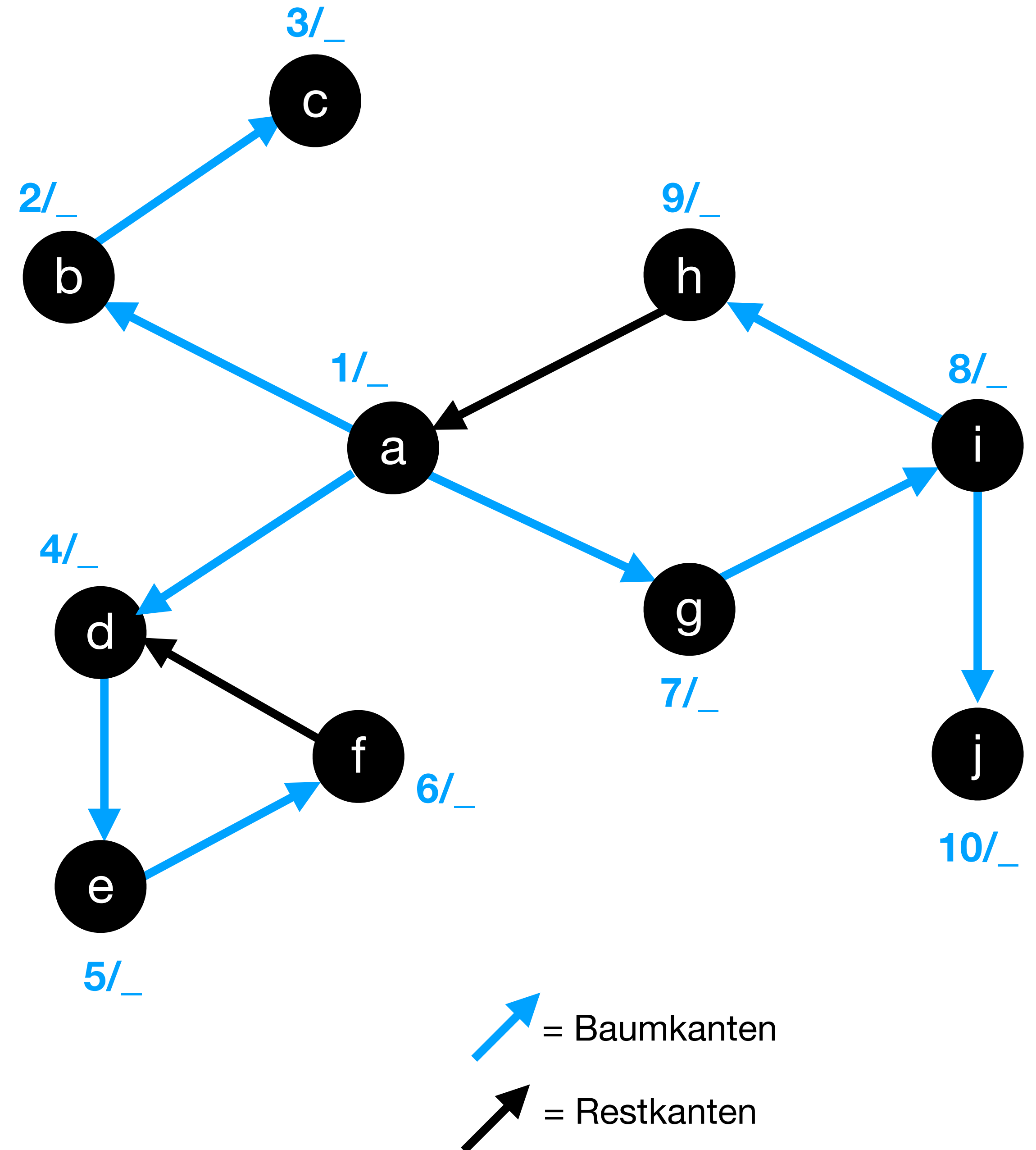
Aufgabe 2

- a) Berechne die low/dfs Nummern ausgehend vom Knoten a und finde alle AKs/Brücken:
- b) Welche Blöcke gibt es in diesem Graphen?



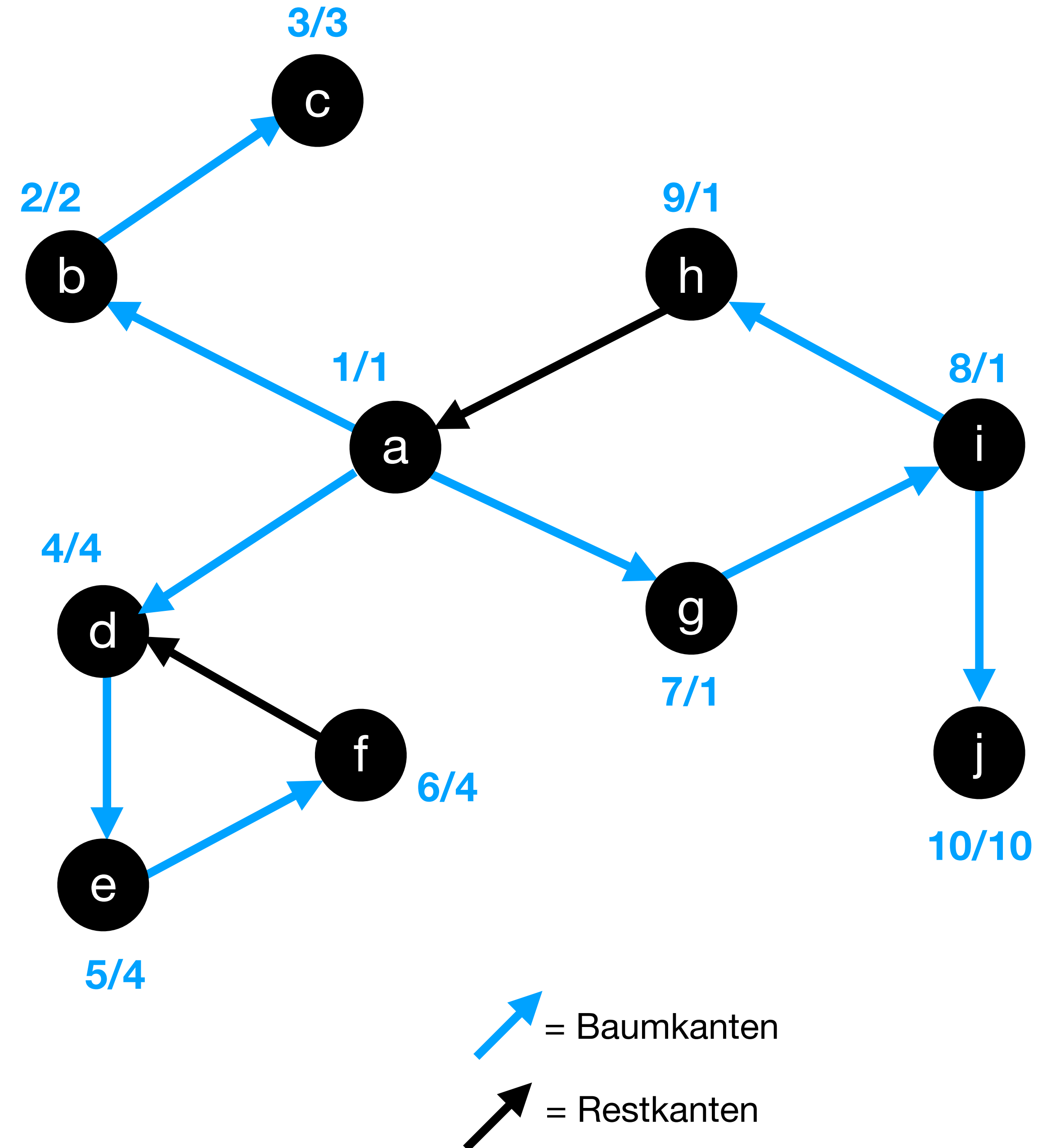
Aufgabe 2

- a) Berechne die low/dfs Nummern ausgehend vom Knoten a und finde alle AKs/Brücken:
- b) Welche Blöcke gibt es in diesem Graphen?



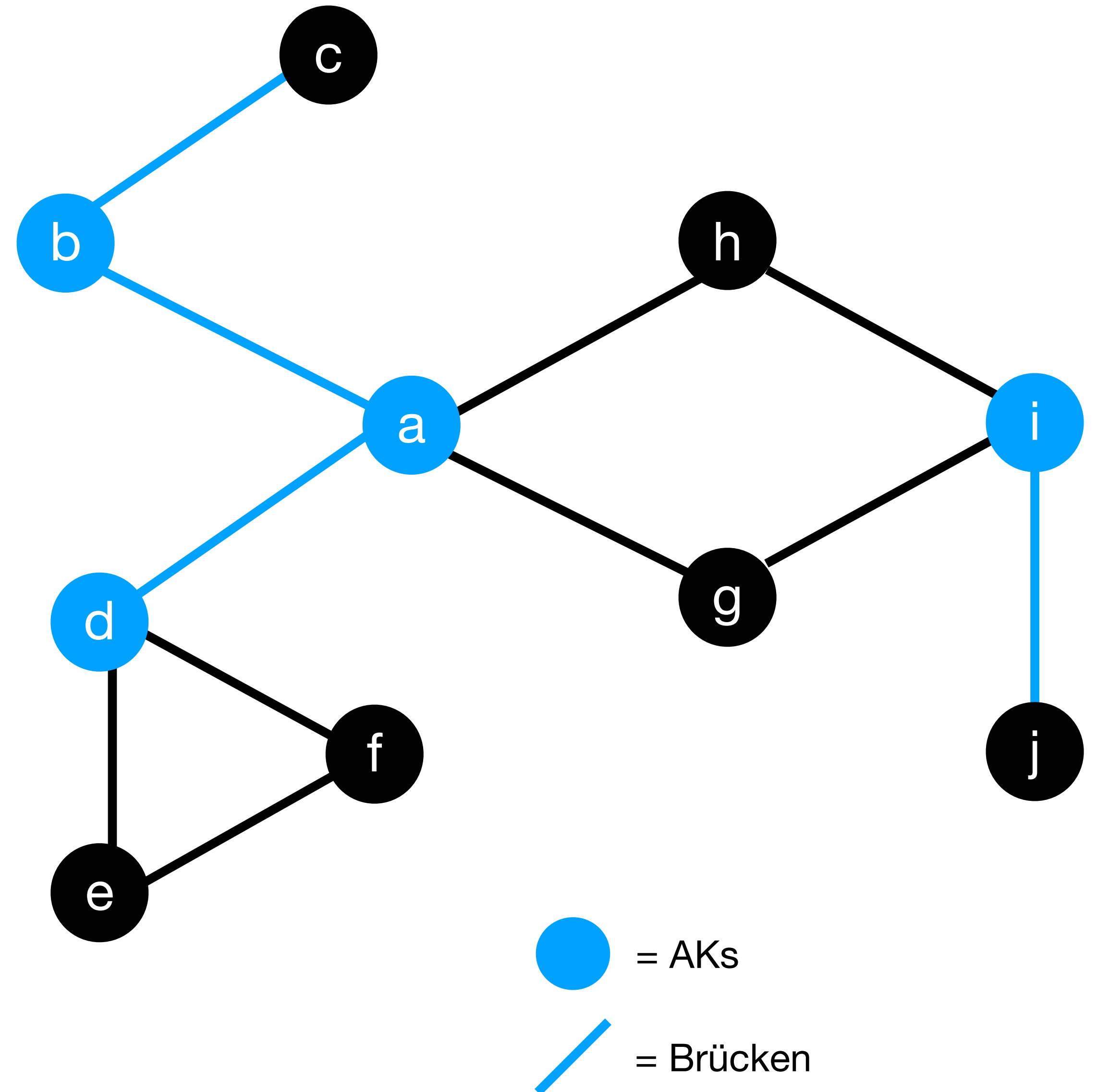
Aufgabe 2

- a) Berechne die low/dfs Nummern ausgehend vom Knoten a und finde alle AKs/Brücken:
- b) Welche Blöcke gibt es in diesem Graphen?



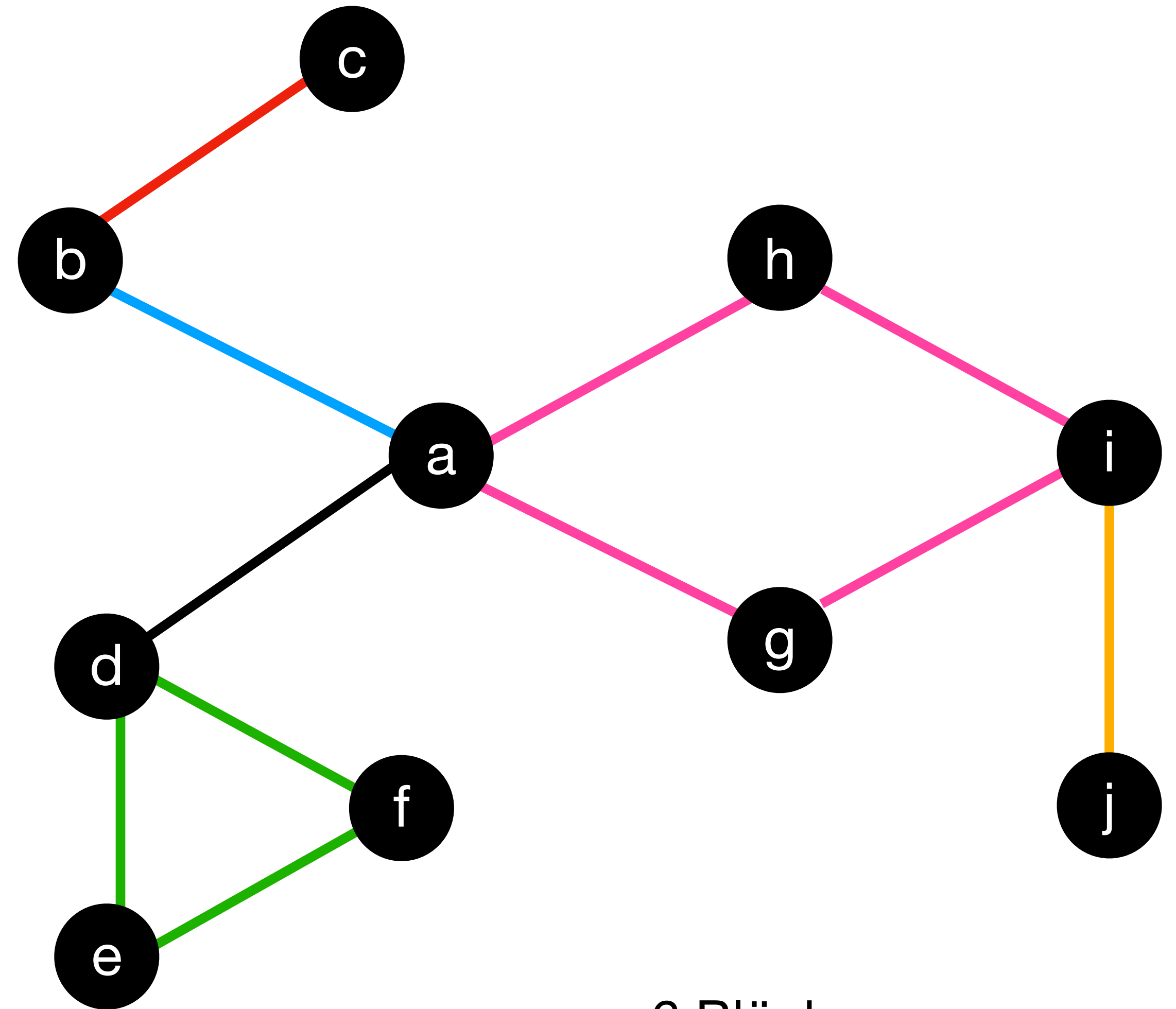
Aufgabe 2

- a) Berechne die low/dfs Nummern ausgehend vom Knoten a und finde alle AKs/Brücken:
- b) Welche Blöcke gibt es in diesem Graphen?



Aufgabe 2

- a) Berechne die low/dfs Nummern ausgehend vom Knoten a und finde alle AKs/Brücken:
- b) Welche Blöcke gibt es in diesem Graphen?



6 Blöcke

Aufgabe 3

Sei G ein Graph, der nur einen Block hat. Sind die folgenden Aussagen wahr/falsch?

- i) G hat keine AKs
- ii) G ist 2-zusammenhängend
- iii) G ist 2-Kanten-zusammenhängend
- iv) G kann Brücken haben

Aufgabe 3

Sei G ein Graph, der nur einen Block hat. Sind die folgenden Aussagen wahr/falsch?

i) G hat keine AKs

wahr -> ohne AK gibt es 2 ZHK,

somit kann es nicht einen Kreis durch alle Knoten gegeben haben

iii) G ist 2-zusammenhängend

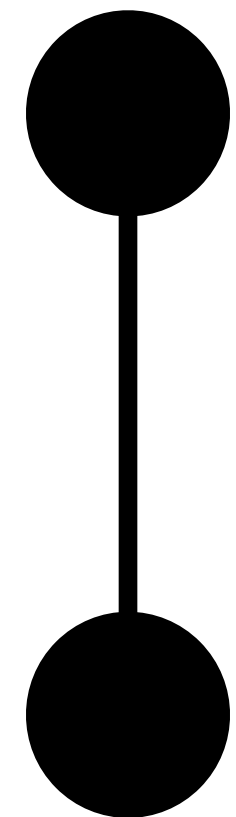
falsch ->

iv) G ist 2-Kanten-zusammenhängend

falsch ->

v) G kann Brücken haben

wahr ->



Aufgabe 4 – *Eine generelle Eigenschaft von Graphen*

Zeigen Sie, dass jeder Graph G mit $n \geq 2$ Knoten zwei Knoten $v \neq w$ enthält, sodass $\deg(v) = \deg(w)$.

Hinweis: Für ein gegebenes n , was ist der grösstmögliche Grad den ein Knoten haben kann?

Aufgabe 5 – *Algorithmus*

Beschreiben Sie einen Algorithmus der das folgende Problem löst: Gegeben ist die Eingabe bestehend aus einem Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten (gehen Sie davon aus, dass der Graph als Adjazenzliste gegeben ist). Ihr Algorithmus soll “Ja” ausgeben, falls G ein Baum ist und “Nein” andernfalls.

Wie immer wenn Sie einen Algorithmus beschreiben gehört zu einer vollständigen Lösung: eine klare Beschreibung des Algorithmus, ein Korrektheitsbeweis und eine Laufzeitanalyse.

Hinweis: Für diese Aufgabe dürfen Sie das Statement aus Aufgabe 6 ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 6 – *Charakterisierung von Bäumen (Challenge-Aufgabe)*

Zeigen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein Graph auf $|V| \geq 1$ Knoten, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) G ist zusammenhängend und kreisfrei (d.h. G ist ein Baum).
- (b) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
- (c) G ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.
- (d) Für alle $x, y \in V$ gilt: G enthält genau einen x - y -Pfad.

Aufgabe 6 – *Charakterisierung von Bäumen (Challenge-Aufgabe)*

Zeigen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein Graph auf $|V| \geq 1$ Knoten, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) G ist zusammenhängend und kreisfrei (d.h. G ist ein Baum).
- (b) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
- (c) G ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.
- (d) Für alle $x, y \in V$ gilt: G enthält genau einen x - y -Pfad.