Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 7

Ilya Maier

Nachbesprechung Peergrading

- Viele haven richtig bemerkt, dass Knoten 1 und 4 die gleiche Farbe kriegen sollen
  - Wie rechnet man aber die Wahrscheinlichkeit dafür aus?

Varianz

Sei X ein Zufallsvariable mit $\mu = \mathbb{E}[X]$

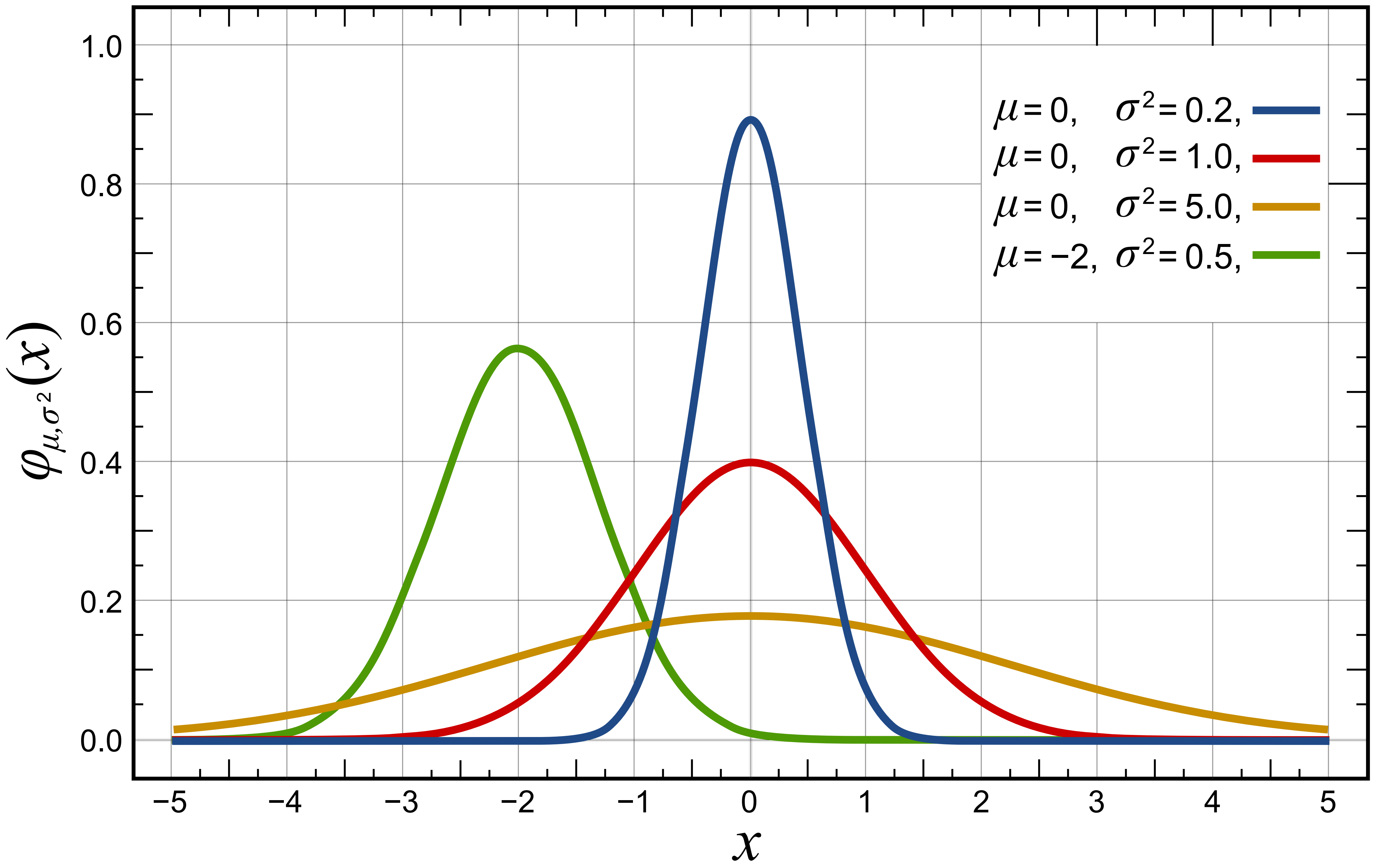
Varianz: $\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 \cdot \Pr[X = x]$

Standardabweichung von X: $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

Varianz mit Erwartungswert: $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Rechenregeln:

1) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ $\quad \forall X, Y$
2) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ $\quad \forall X, Y$ unabhängig
3) $\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$ $\quad \forall X, Y$ unabhängig
4) $\text{Var}[X \cdot Y] \neq \text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]$ $\quad$ (in meisten Fällen)
5) $\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$



Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

Markovs Ungleichung:

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

$\forall X \geq 0$

$\forall t > 0,\ t \in \mathbb{R}$

Chebyshevs Ungleichung:

$$\Pr[\,|X - \mathbb{E}[X]|\, \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$

$\forall X$

$\forall t > 0,\ t \in \mathbb{R}$

Chernoffs Ungleichung:

1. $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2\mathbb{E}[X]}$
2. $\Pr[X \leq (1 - \delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2\mathbb{E}[X]}$
3. $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$

$\forall X \sim \text{Bin}(n, p)$

$\forall 0 < \delta \leq 1$

$\forall t \geq 2e\mathbb{E}[X]$

Kahoot

Aufgaben

1. Seien X und Y Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Wir definieren die *Kovarianz* Cov(X, Y) durch

Cov$(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$.

i) Zeige, dass Cov$(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

ii) Zeige, dass Cov$(X, Y) = 0$, wenn X und Y unabhängig sind.

iii) Seien nun Var(X), Var(Y) und Cov(X, Y) bekannt. Berechne Var$[X + Y]$.

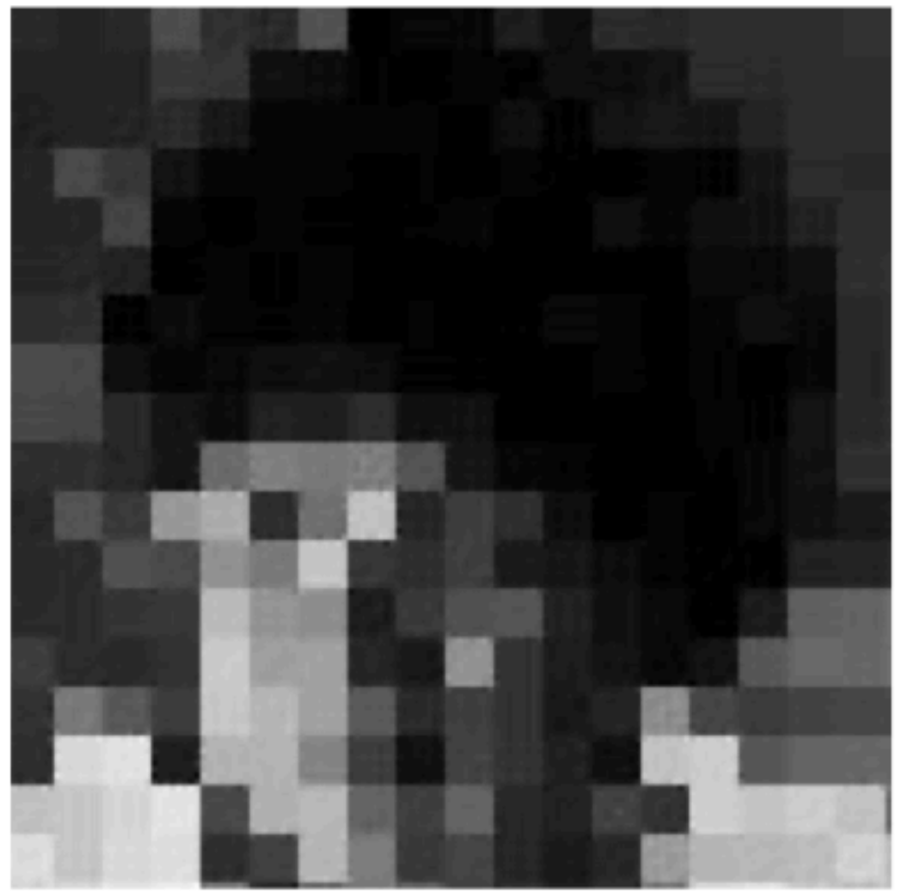
iv) Sei $\Omega = [5]$ ein Laplace Raum und X und Y zwei Zufallsvariablen mit untenstehender Definition, wobei X die Anzahl der Stunden Schlaf am Tag i und Y Anzahl der getrunkenen Kaffeebecher am Tag i angibt. Berechne Cov(X, Y).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
X	8	4	10	2	6
Y	1	4	0	7	3

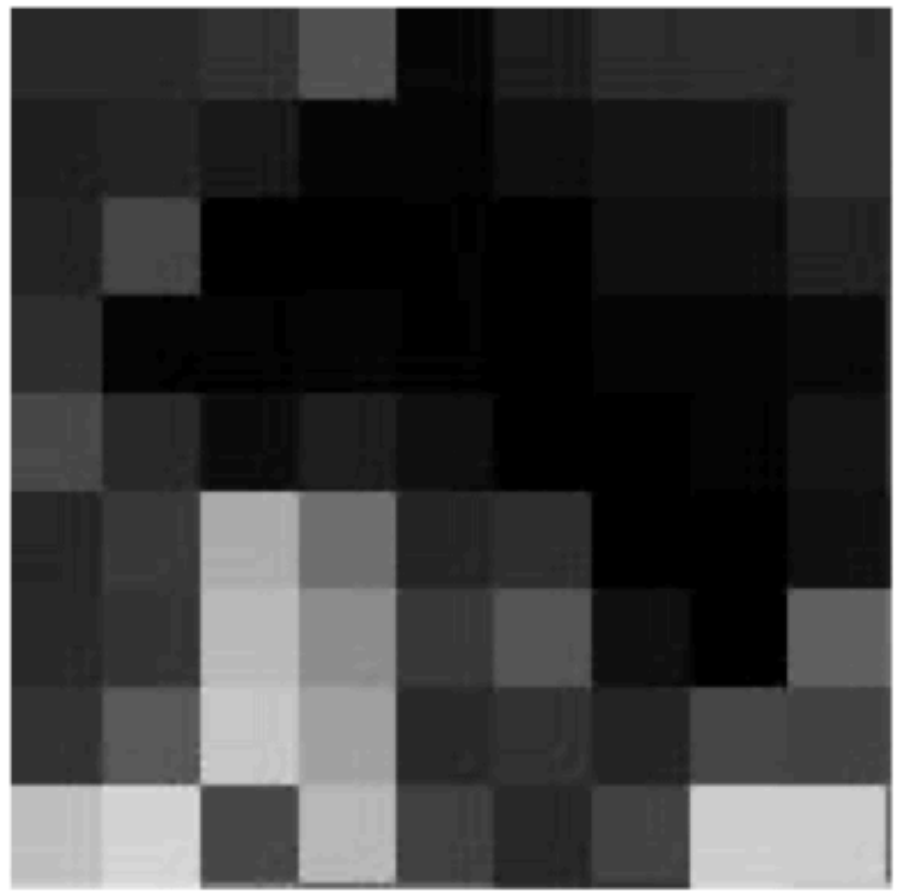
144x144

72x72

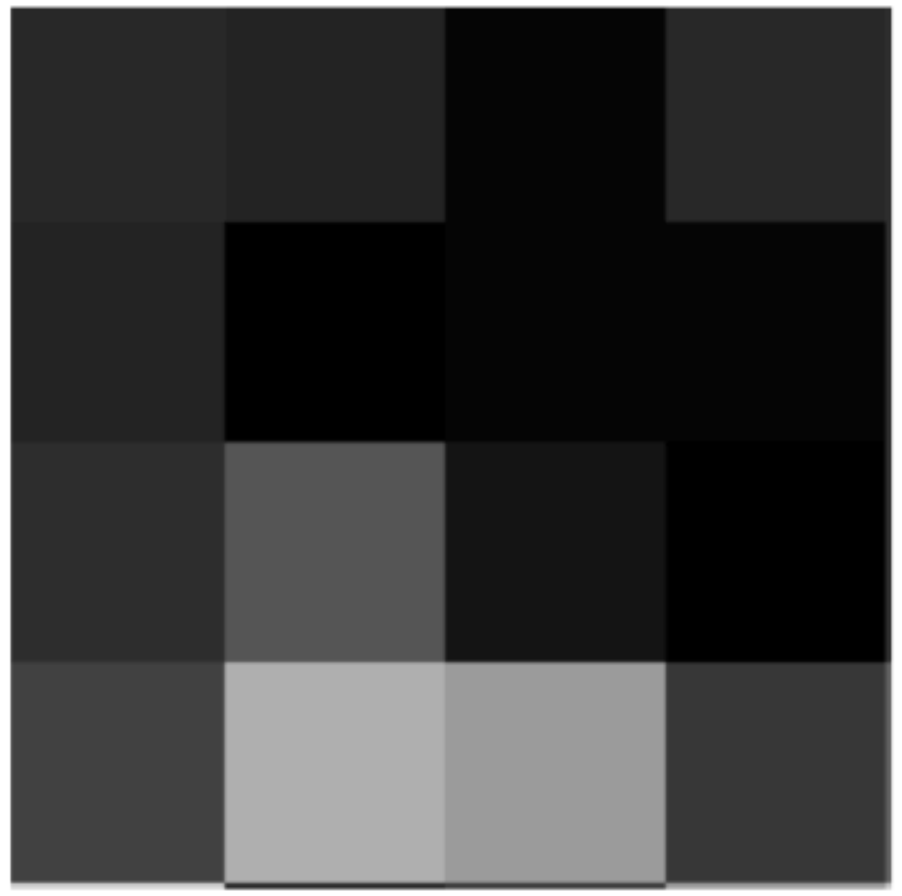
36x36



18x18

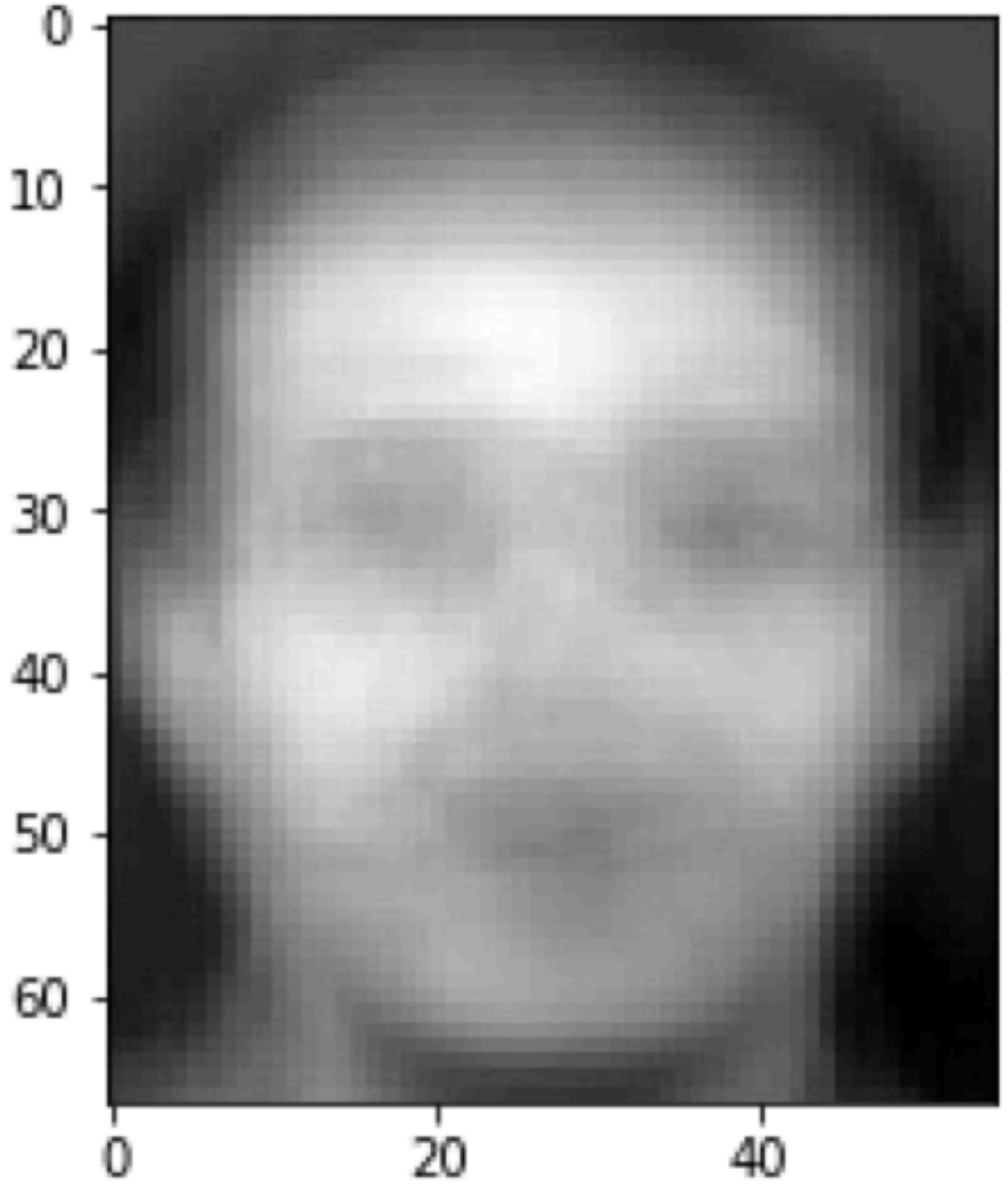


9x9



4x4

AT&T face database: 40 people, 10 expressions each



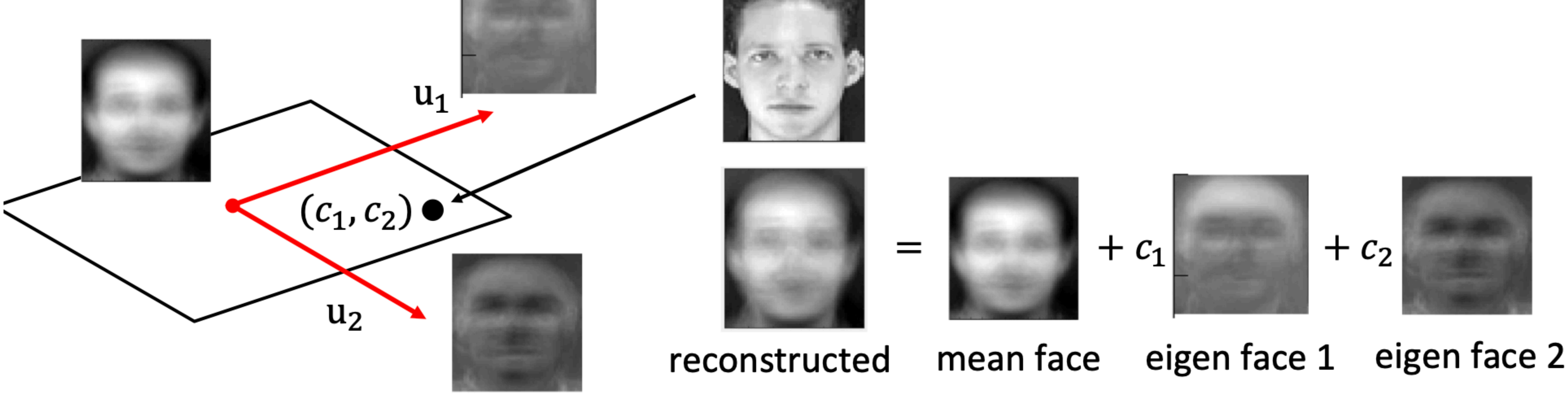
mean $\mu \in \mathbb{R}^D$

Cannot visualize

covariance matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{D \times D}$

- First 10 eigenvectors $u_{1:K}$ ordered by decreasing eigenvalues

- Take $K = 2$



- We have $D = 68 \times 56 = 3808$
- If $K = 100$ then each face is represented by only 100 values
- That's a 38x compression!

original reconstructed

DP mit Wahrscheinlichkeit

1) Einen mathematischen Ausdruck mit den Variablen definieren

$f(i, x) :=$ Wahrscheinlichkeit, dass ich noch x Gehirnzellen nach i Wahrscheinlichkeits-DP Aufgaben habe

2) Deutlich schreiben, was zu finden ist

Zu finden: $f(n,0) :=$ Wahrscheinlichkeit, dass ich nach n W-DP Aufgaben hirntot bin

3) Rekursion finden

4) Implementieren

Tipps / Common Mistakes

- Klare Struktur für den Code verwenden, klare Variablen Namen schreiben
- Static Funktionen und Variablen, wenn nicht innerhalb von testCase()
- DP auf -1 initialisieren, hilft bei Memoization und Debugging
- Overflow checken: anstatt **==n** soll es ggf. **>=n** sein
- Base Case bei Rekursion nicht vergessen
- Out.print**ln**() - eine Zeile für jeden Test Case
- Don’t overthink! -> meiste Aufgaben sind einfach zu lösen