1

Seien X und Y Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Wir definieren die Kovarianz Cov(X,Y) durch Cov$(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])]$

(i) Zeige, dass $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$.

(ii) Zeige, dass $\text{Cov}(X,Y) = 0$, wenn X und Y unabhängig ist.

(iii) Seien nun $\text{Var}(X), \text{Var}(Y)$ und $\text{Cov}(X,Y)$ bekannt. Berechne $\text{Var}(X+Y)$.

(iv) Sei $\Omega = [5]$ ein Laplace Raum und X und Y zwei Zufallsvariablen mit untenstehender Definition, wobei X die Anzahl der Stunden Schlaf am Tag i und Y die Anzahl der getrunkenen Kaffeebecher am Tag i angibt. Berechne $\text{Cov}(X,Y)$.

Day i	1	2	3	4	5
$X(i)$	8	4	10	2	6
$Y(i)$	1	4	0	7	3

Lösung:

(i) Wir multiplizieren zuerst die Terme in der Definition der Kovarianz: $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])] =$
$\mathbb{E}[X\cdot Y - X\cdot\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\cdot Y + \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]]$
$= \mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X\cdot\mathbb{E}[Y]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\cdot Y] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]]$
$= \mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$
$= \mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

aufgrund der Linearität des Erwartungswertes.

(ii) Wenn X und Y unabhängig sind, so gilt $\mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$ und die Aussage gilt trivial.

(iii) Wie benutzen die zweite (nützliche) Formel für die Varianz und kriegen somit insgesamt:

- $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
- $\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$
- $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X\cdot Y] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

Wenn wir nun wieder die Formel für die Varianz für $X+Y$ anwenden, so kriegen wir

$$\begin{aligned}\text{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2\\ &= \mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2] - (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])^2\\ &= \mathbb{E}[X^2] + 2\cdot\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X]^2 + 2\cdot\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2)\\ &= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\cdot\text{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

(iv) Wir benutzen die Formel aus Aufgabe i) und berechnen erstmal die benötigten Erwartungswerte.

Day i	1	2	3	4	5
$X(i)$	8	4	10	2	6
$Y(i)$	1	4	0	7	3
$X\cdot Y(i)$	8	16	0	14	18

$\Longrightarrow$

- $\mathbb{E}[X] = \frac{8+4+10+2+6}{5} = 6$
- $\mathbb{E}[Y] = \frac{1+4+0+7+3}{5} = 3$
- $\mathbb{E}[XY] = \frac{8+16+0+14+18}{5} = \frac{56}{5} \approx 11$

Somit kriegen wir $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{56}{5} - 6 \cdot 3 \approx -7$