Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 5

Ilya Maier

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Multiplikationssatz: Für $A_1, \ldots, A_n$, falls $\Pr[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] > 0$,

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2 \mid A_1] \cdot \Pr[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}]$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit: Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ und B, s.d. $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$,

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]}_{=\Pr[B \cap A_i]}$$

Satz von Bayes: Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ und B, s.d. $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $\Pr[B] > 0$,

$$\forall i \in [n] : \Pr[A_i \mid B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B \mid A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

Geburtstagsproblem

Für m Bälle und n Körbe

$A_i = i$-ter Ball landet in einem Korb in dem noch kein Ball liegt

→ $\Pr[A_1] = 1$

→ $\Pr[A_2 | A_1] = \frac{n-1}{n}$

→ $\Pr[A_3 | A_1 \cap A_2] = \frac{n-2}{n}$

→ $\Pr[A_i | A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}] = \frac{n-(i-1)}{n} = 1 - \frac{i-1}{n}$

$\implies \Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_m] = 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot \cdots \cdot (1 - \frac{m-1}{n})$

$$\begin{aligned}
&\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_m] \\
&= 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdots \cdot (1 - \frac{m-1}{n}) \\
&\leq e^{-\frac{1}{n}} e^{-\frac{2}{n}} \cdots e^{-\frac{m-1}{n}} \\
&= e^{-\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+(m-1))} \\
&= e^{-\frac{(m-1)m}{2n}}
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heissen **unabhängig** $\iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$

Ereignisse $A_1, \ldots A_n$ heissen **unabhängig** $\iff$ für jede Teilmenge $I \subseteq [n]$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \cdots \cdot \Pr[A_{i_k}]$$

Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ heissen **unabhängig** $\iff$ $\forall n \in \mathbb{N} : A_1, \ldots, A_n$ unabhängig sind

Lemmas:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind unabhängig $\iff$ $\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \cdots \cdot \Pr[A_n^{s_n}]$ für alle $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n$, wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$

$A_1, A_2, B_1, \ldots, B_n$ sind unabhängig $\implies$ $A_1 \cup A_2, B_1, \ldots, B_n$ sind unabhängig

$A_1, A_2, B_1, \ldots, B_n$ sind unabhängig $\implies$ $A_1 \cap A_2, B_1, \ldots, B_n$ sind unabhängig

Zufallsvariablen

Eine **Zufallsvariable** ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Dichtefunktion: $f_X : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \Pr[X = x]$

Verteilungsfunktion: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \Pr[X \leq x]$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_x} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$

Lemma: Für eine ZV X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{E}[X] := \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]$

Linearität: Sei $X = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$, dann gilt: $\mathbb{E}[X] := a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b$

Indikatorvariablen

Eine **Indikatorvariable** ist eine Funktion $I_E : \Omega \to \{0,1\}$ mit $I_E(\omega) = 1 \iff \omega \in E$

$$\mathbb{E}[I_E] = \Pr[E]$$

Rechnen mit Indikatorvariablen:

Komplement $\bar{A}$ $\qquad I_{\bar{A}} = 1 - I_A$

Schnitt $A_1 \cap \ldots \cap A_n = B$ $\qquad I_B = I_{A_1} \cdot \cdots \cdot I_{A_n}$

Vereinigung $A_1 \cup \ldots \cup A_n = C$ $\qquad I_C = 1 - I_{\bar{C}} = 1 - \prod_{i=1}^{n} I_{\bar{A}_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - I_{A_i})$

Stabile Mengen

Stabile Menge: $S \subseteq V$, in dem es keine Kanten zwischen den Knoten gibt

Gesucht: Möglichst grosses stabile Menge

Phase 1: Füge jeden Knoten unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p zu S hinzu

Phase 2: Für jede noch vorhandene Kante lösche einen zufälligen Knoten

Satz: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$,

findet der Algorithmus eine stabile Menge S mit $\mathbb{E}[|S|] \geq np - mp^2$

Korollar: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$,

findet der Algorithmus für $p = \dfrac{n}{2m}$ eine stabile Menge S mit $\mathbb{E}[|S|] \geq \dfrac{n^2}{4m}$

Kahoot

Aufgaben

1. Es werden zwei Würfel geworfen.

   Sei A das Ereignis, dass die Summe der Augen ungerade ist.

   Sei B das Ereignis, dass die erste Zahl kleiner gleich 2 ist.

   Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \cap \bar{B}$.

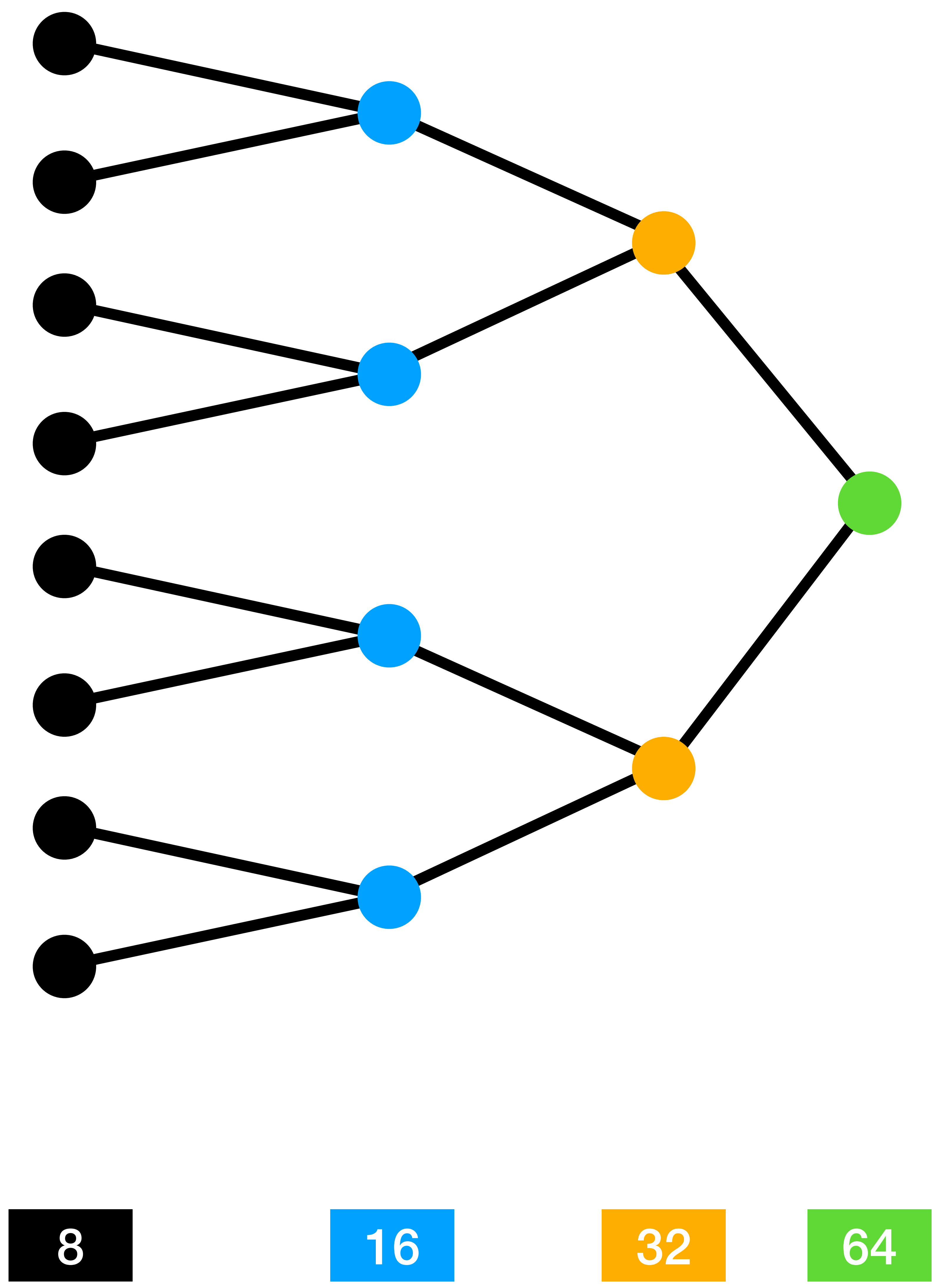
2. Ein Test wird durchgeführt, um eine bestimmte seltene Krankheit zu diagnostizieren, die $\frac{1}{10'000}$ der Bevölkerung betrifft. Dieser Test ist recht zuverlässig und gibt in 99 % der Fälle die richtige Antwort (d.h., wenn man krank ist, dann ist der Test in 99% der Fälle positiv und umgekehrt: wenn man gesund ist, dann ist der Test in 1% der Fälle positiv). Wenn ein Patient einen positiven Test hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich krank ist?

3. Es gibt 64 Mannschaften, die ein Ausscheidungsturnier spielen, also 6 Runden, und du musst die Gewinner aller 63 Spiele noch vor dem Turnier vorhersagen.D.h. du musst eine Tabelle vorlegen, wo bei jedem Spiel die zu gewinnen vorhersagte Mannschaft steht. Du fängst damit an, dass du die Gewinner ersten Runde vorhersagst, dann unter denen die Gewinner der 2. Runde usw.

Deine Punktzahl wird dann wie folgt berechnet: 64 Punkte für die richtige Vorhersage des Finalsiegers, 32 Punkte für jeden Gewinner der 5. Runde und so weiter bis hin zu 2 Punkte für jeden richtig vorhergesagten Sieger der 1. Runde. (Die maximale Punktzahl, die du erreichen kannst, ist also 384.)

Da du nichts über die Mannschaften weisst, wirfst du faire Münzen, um jede deiner 63 Wetten zu entscheiden.

Berechne die erwartete Punktzahl für deine Vorhersagen.



4. 100 Prüfungen liegen auf dem Tisch, wobei zwei Fragen zu bewerten sind. Andy ist für die Benotung der ersten Frage zuständig und Patrick für die Benotung der zweiten Frage. Zunächst benotet Andy einige Prüfungen nach dem Zufallsprinzip; jede Prüfung hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,3 benotet zu werden. Patrick benotet nach dem gleichen Prinzip mit Wahrscheinlichkeit 0,5. Wir nehmen an, dass Andy und Patrick ihre Entscheidungen unabhängig voneinander treffen.

   Ein "gutes Paar" ist ein Paar benachbarter Prüfungen, bei denen beide Fragen benotet werden. Sei P die Anzahl der guten Paare. Wie groß ist $\mathbb{E}[P]$?