Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 6

Ilya Maier

Minitest

Minitest

Password: harmony

Nachbesprechung Serie/Peergrading

- Frobenius, Hall und Hopcroft-Karp nur für einfache Graphen beschrieben
  - nicht für Multi Graphen
- Laufzeitanalyse nicht vergessen
- Bei Peergrading wird etwas mehr als einfach “alles gut” erwartet
- Peergrading bis nächsten Sonntag abgeben (Osterferien)

1. Bernoulli-Verteilung

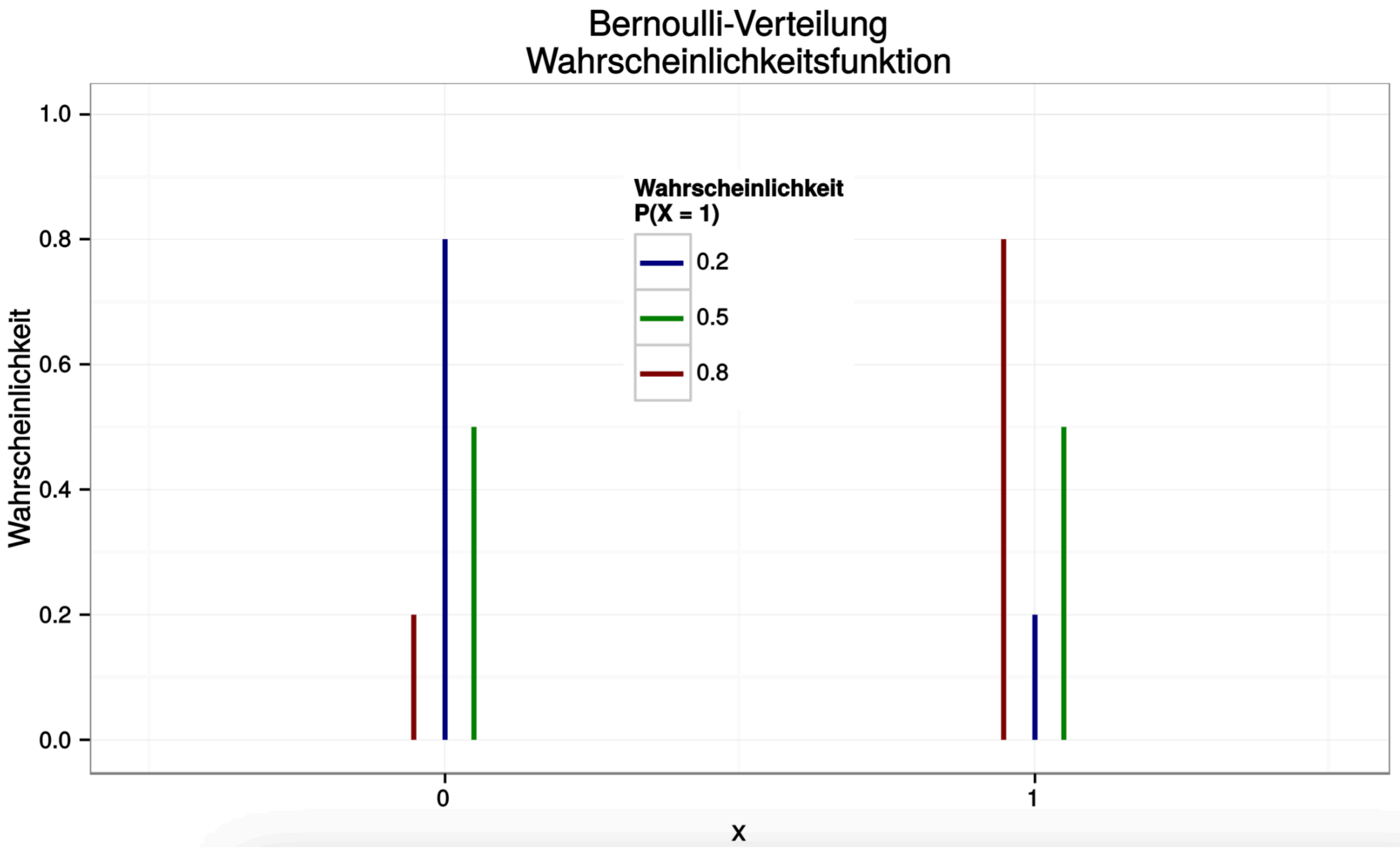
Bezeichnung: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Wertebereich: $W_X = \{0,1\}$

Dichtefunktion: $f_X(i) = \begin{cases} p & i = 1 \\ 1-p & i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = p$

Beispiel: Münzenwurf, Indikator für Kopf



2. Binomial-Verteilung

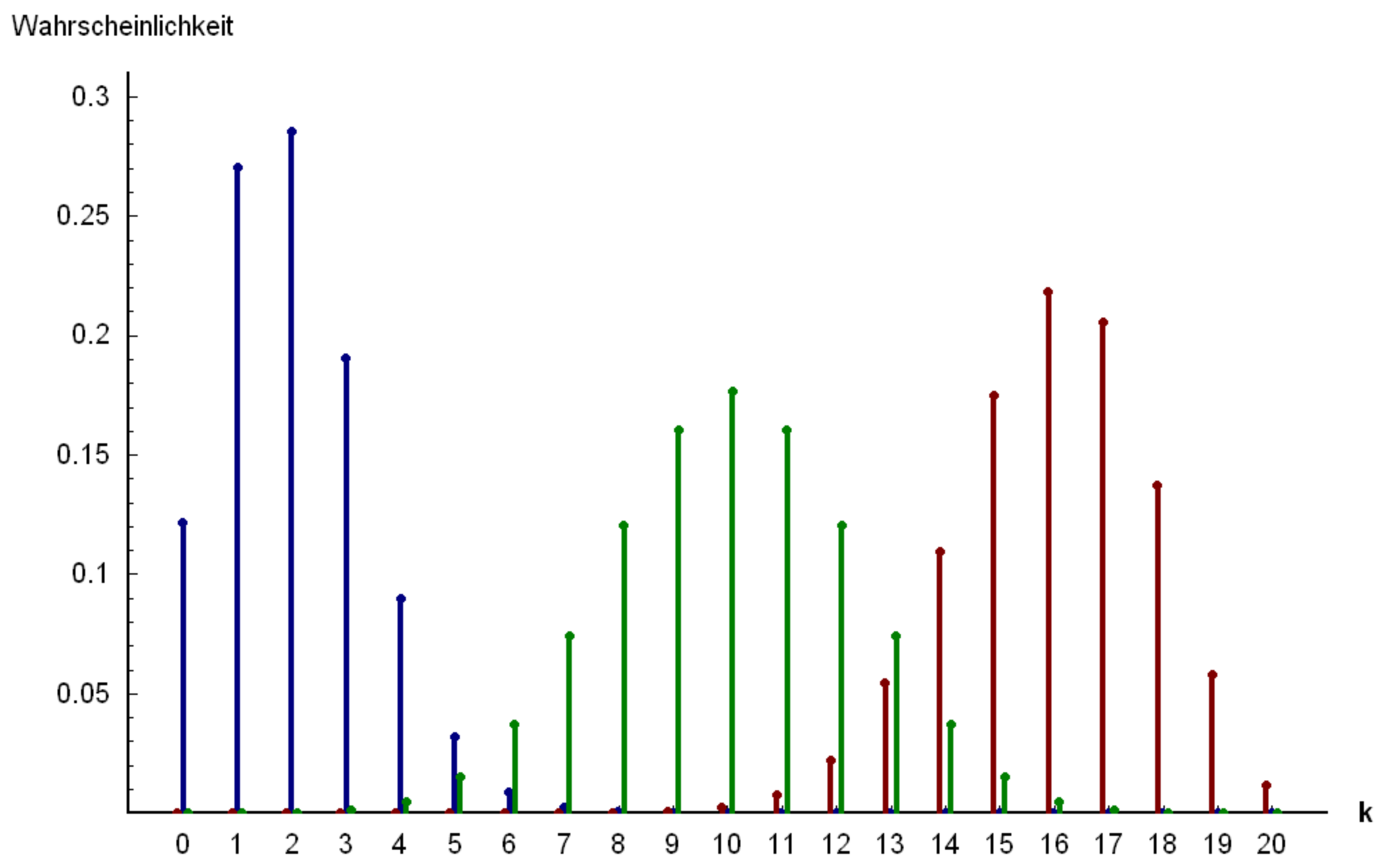
Bezeichnung: $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Wertebereich: $W_X = \{0,1,\ldots,n\}$

Dichtefunktion: $f_X(i) = \begin{cases} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} & i \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = np$

Beispiel: n mal Münzenwurf und wir zählen wie oft Kopf vorkommt



$p = 0.1$ blau

$p = 0.5$ grün

$p = 0.8$ rot

3. Geometrische-Verteilung

Bezeichnung: $X \sim \text{Geo}(p)$

Wertebereich: $W_X = \mathbb{N}$

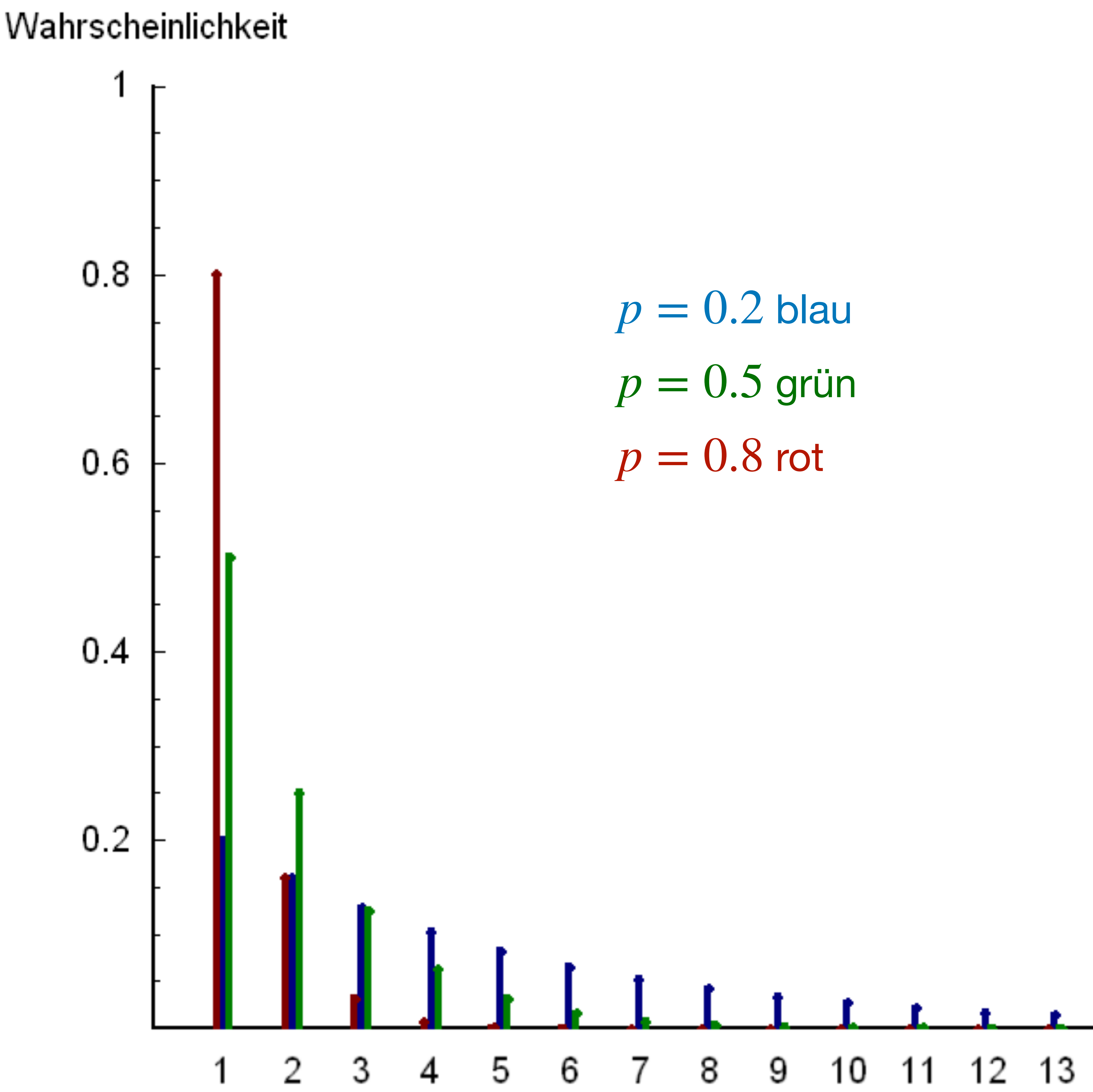
Dichtefunktion: $f_X(i) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^{i-1} & i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$

$\Pr[X > t] = (1-p)^t$

Beispiel: Anzahl der Würfe bis das erste Mal Kopf vorkommt

Gedächtnislosigkeit: für alle $s, t \in \mathbb{N}$: $\Pr[X \geq s + t \mid X > s] = \Pr[X \geq t]$



$p = 0.2$ blau

$p = 0.5$ grün

$p = 0.8$ rot

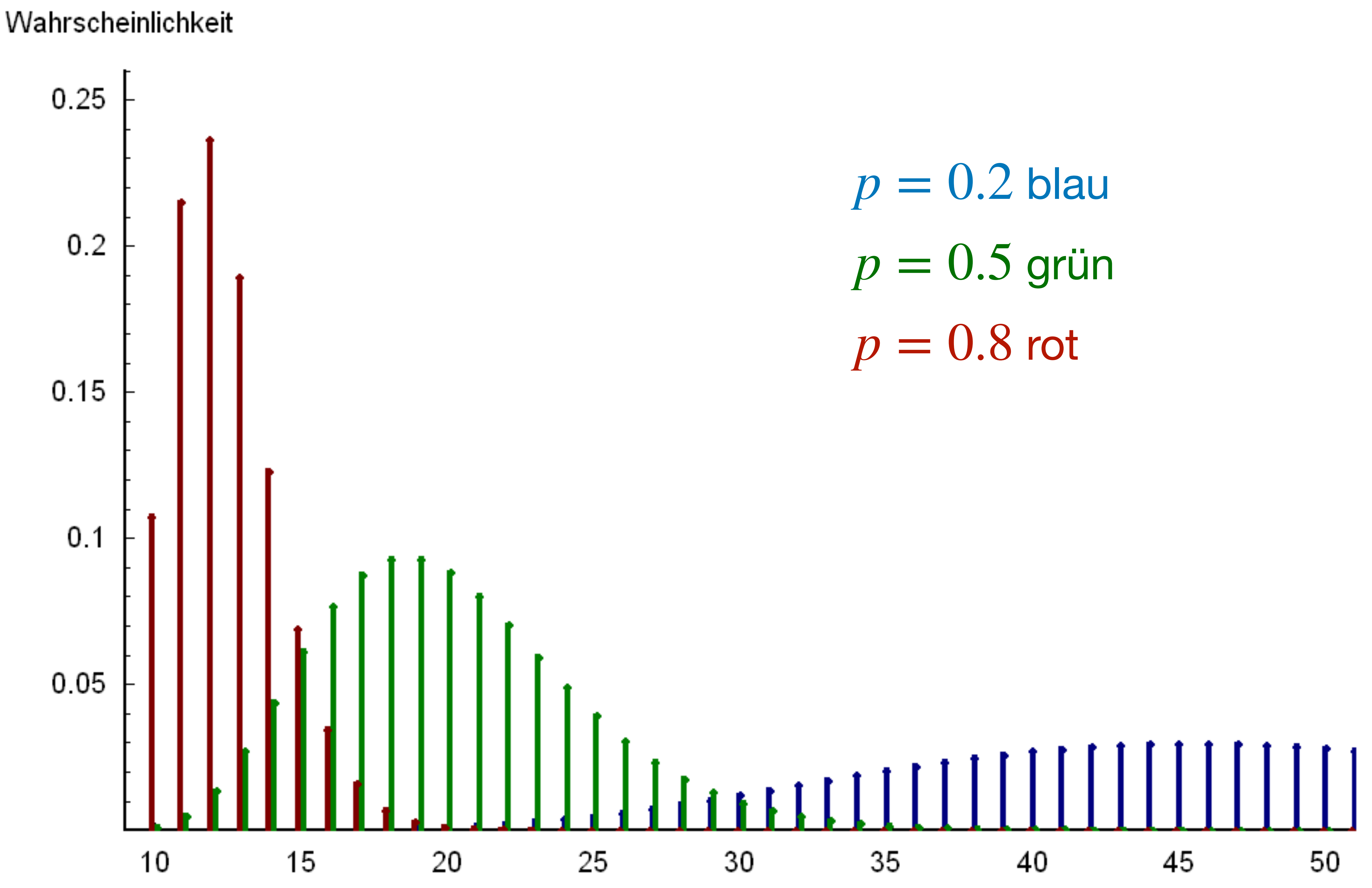
4. Negative Binomial-Verteilung

Bezeichnung: $X \sim \text{NegativeBin}(n, p)$

Wertebereich: $W_X = \mathbb{N}_{\geq n}$

Dichtefunktion: $f_X(i) = \begin{cases} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{i-n} & i \geq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \dfrac{n}{p}$



$p = 0.2$ blau

$p = 0.5$ grün

$p = 0.8$ rot

Beispiel: Anzahl der Versuche bis wir n Mal einen Kopf werfen

5. Poisson-Verteilung

Bezeichnung: $X \sim \text{Po}(\lambda)$

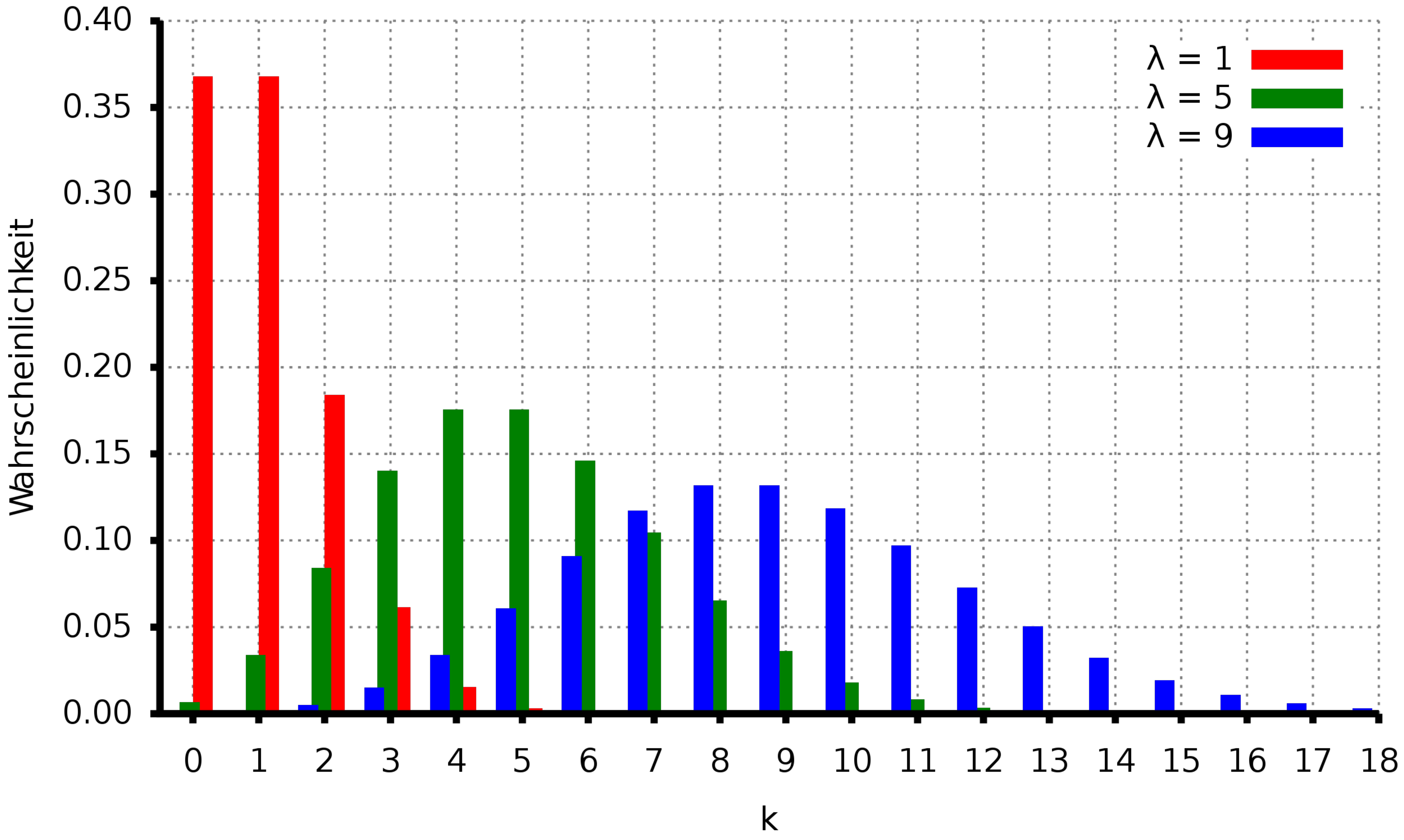
Wertebereich: $W_X = \mathbb{N}_0$

Dichtefunktion: $f_X(i) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} & i \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \lambda$

Beispiel: Anzahl der Herzinfarkte in der Schweiz, die in einer Stunde auftreten, wenn der gemessene Durchschnitt soweit λ Herzinfarkte pro Stunde ist

Konvergenz: $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ konvergiert zu $\text{Po}(\lambda)$ für $n \to \infty$



Coupon Collector

Es gibt n Verschiedene Bilder, in jeder Runde erhalten wir gleichwahrscheinlich ein Bild

$X =$ Anzahl Runden bis wir alle n Bilder sammeln

Phase i: Runden vom Erwerb des $(i-1)$-ten Bildes (ausschliesslich) bis zum Erwerb des i-ten Bildes (einschliesslich)
$X_i =$ Anzahl Runden in Phase i

$X_i \sim \text{Geo}\left(\frac{n-(i-1)}{n}\right)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n \approx n \ln n + \mathcal{O}(n)$$

Bekommen wir die **ersten** k Bilder: $\mathbb{E}[X] = n \cdot H_{n-k}$

Bekommen wir die **letzten** k Bilder: $\mathbb{E}[X] = n \cdot (H_n - H_k)$

Bedingte Zufallsvariablen

Definition: $\Pr[X = x \,|\, A] = \dfrac{\Pr[\{\omega \in A : X(\omega) = x\}]}{\Pr[A]}$

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X \,|\, A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x \,|\, A] = \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \Pr[\omega \,|\, A]$

Totale Wahrscheinlichkeit: Seien $A_1, \ldots, A_n$ disjunkt mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ und $\Pr[A_i] > 0$, dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X \,|\, A_i] \cdot \Pr[A_i]$$

Mehrere Zufallsvariablen

Definition: $\Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}]$

Gemeinsame Dichte: $f_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x, Y = y]$

Randdichte: $f_X(x) = \Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y]$

Unabhängigkeit:

$X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig $\iff \forall (x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt $\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \cdots \cdot Pr[X_n = x_n]$

Korollar: $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig, so ist dann auch jeder Subset von $X_1, \ldots, X_n$

Mehrere Zufallsvariablen

Satz: Sind $f_1, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen $(X_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig,

so sind auch $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig

Satz: Seien X, Y unabhängig und $Z := X + Y$, dann gilt $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$

Waldsche Identität: Seien X, N unabhängig mit $W_N \subseteq \mathbb{N}$. Weiter sei $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei X_i unabhängige Kopien von X sind.

Dann gilt: $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]$

Beispiel: N ist die Augenzahl eines Würfels, X Indikator für Kopf. Z ist die Anzahl von Kopf, wenn wir N mal werfen.

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{21}{6} \cdot \frac{1}{2} = 1{,}75$$

Aufgaben

Aufgabe 1 – *Dominante Menge*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine 'dominante Menge' $W \subseteq V$ ist eine Knotenmenge, sodass für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass entweder v selbst oder ein Nachbar von v in W enthalten ist. In dieser Aufgabe betrachten wir einen randomisierten Algorithmus, der eine dominante Menge findet und dem Algorithmus aus der Vorlesung zum Finden einer stabilen Menge ähnelt.

Wir nehmen an, dass G Minimalgrad mindestens $d > 1$ hat, d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat Grad $deg(v) \geq d$. Der Algorithms besteht aus zwei Runden. In der ersten Runde markieren wir jeden Knoten unabhängig von den anderen Knoten mit Wahrscheinlichkeit p (wobei $0 \leq p \leq 1$ gegeben ist). In der zweiten Runde betrachten wir jeden Knoten $v \in V$, wenn weder v noch einer seiner Nachbarn in der ersten Runde markiert wurden, so markieren wir v. Man sieht leicht, dass die Menge der markierten Knoten nach der zweiten Runde eine dominante Menge ist. Wir analysieren die Grösse dieser dominanten Menge im Folgenden.

(a) Sei X die Anzahl der Knoten, die in der ersten Runde markiert werden. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

(b) Sei $v \in V$ ein beliebiger (aber fixer) Knoten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass weder v noch einer der Nachbarn von v markiert wurde genau (die Antwort darf von v abhängen). Finden Sie eine obere Schranke für diese Wahrscheinlichkeit, die nur von d und p abhängt (und nicht von v).

Aufgabe 1 – *Dominante Menge*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine 'dominante Menge' $W \subseteq V$ ist eine Knotenmenge, sodass für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass entweder v selbst oder ein Nachbar von v in W enthalten ist. In dieser Aufgabe betrachten wir einen randomisierten Algorithmus, der eine dominante Menge findet und dem Algorithmus aus der Vorlesung zum Finden einer stabilen Menge ähnelt.

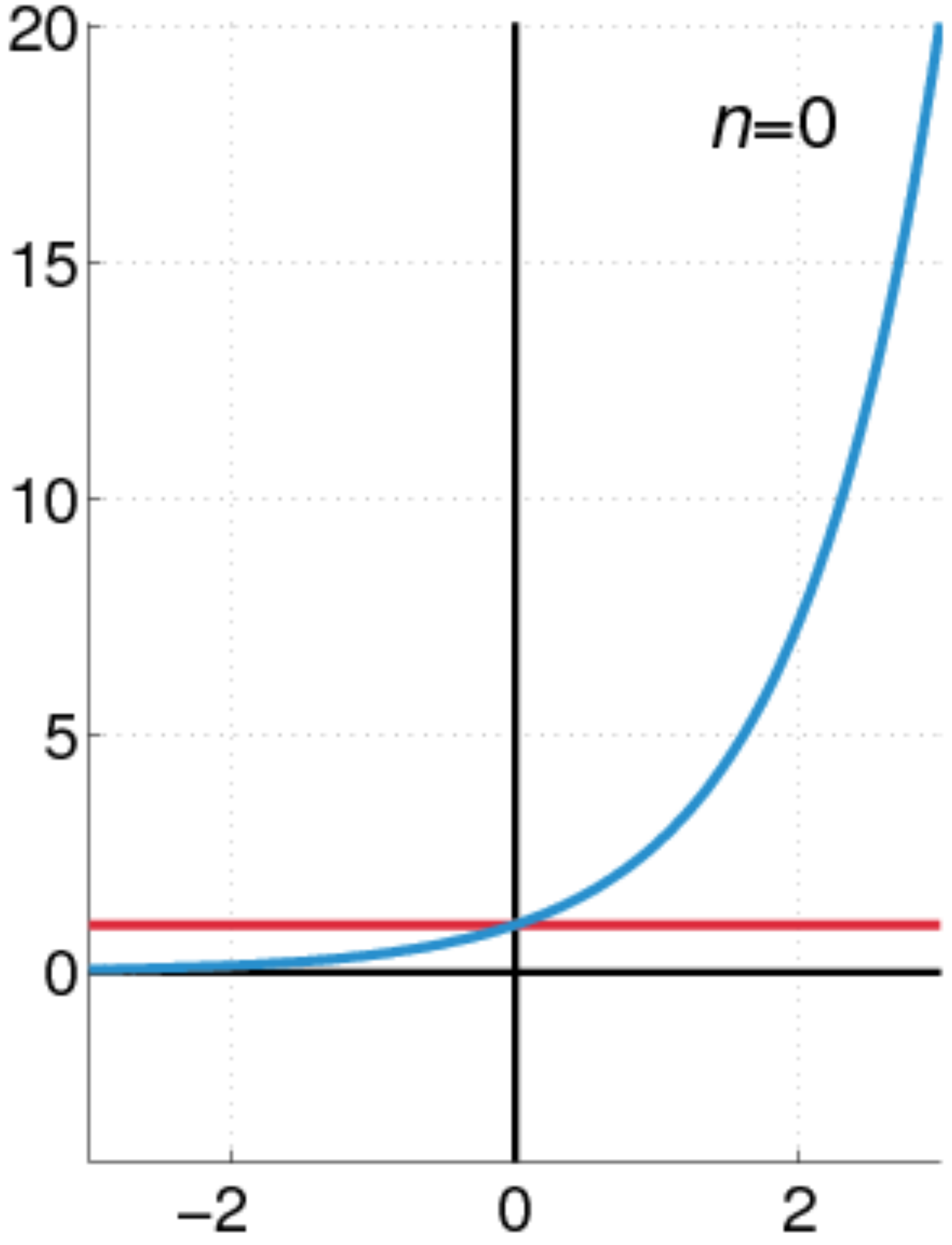
Wir nehmen an, dass G Minimalgrad mindestens $d > 1$ hat, d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat Grad $deg(v) \geq d$. Der Algorithms besteht aus zwei Runden. In der ersten Runde markieren wir jeden Knoten unabhängig von den anderen Knoten mit Wahrscheinlichkeit p (wobei $0 \leq p \leq 1$ gegeben ist). In der zweiten Runde betrachten wir jeden Knoten $v \in V$, wenn weder v noch einer seiner Nachbarn in der ersten Runde markiert wurden, so markieren wir v. Man sieht leicht, dass die Menge der markierten Knoten nach der zweiten Runde eine dominante Menge ist. Wir analysieren die Grösse dieser dominanten Menge im Folgenden.

(c) Sei Y die Anzahl der Knoten, die in der zweiten Runde markiert werden. Verwenden Sie (b) um eine obere Schranke für $\mathbb{E}[Y]$ zu finden.

(d) Zeigen Sie, dass die erwartete Grösse der dominanten Menge höchstens $n(p + e^{-p(d+1)})$ ist. *Hinweis:* Sie dürfen die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ ohne Beweis verwenden.

Taylor's expansion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$



Aufgabe 1 – *Dominante Menge*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine 'dominante Menge' $W \subseteq V$ ist eine Knotenmenge, sodass für jeden Knoten $v \in V$ gilt, dass entweder v selbst oder ein Nachbar von v in W enthalten ist. In dieser Aufgabe betrachten wir einen randomisierten Algorithmus, der eine dominante Menge findet und dem Algorithmus aus der Vorlesung zum Finden einer stabilen Menge ähnelt.

Wir nehmen an, dass G Minimalgrad mindestens $d > 1$ hat, d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat Grad $deg(v) \geq d$. Der Algorithms besteht aus zwei Runden. In der ersten Runde markieren wir jeden Knoten unabhängig von den anderen Knoten mit Wahrscheinlichkeit p (wobei $0 \leq p \leq 1$ gegeben ist). In der zweiten Runde betrachten wir jeden Knoten $v \in V$, wenn weder v noch einer seiner Nachbarn in der ersten Runde markiert wurden, so markieren wir v. Man sieht leicht, dass die Menge der markierten Knoten nach der zweiten Runde eine dominante Menge ist. Wir analysieren die Grösse dieser dominanten Menge im Folgenden.

(d) Zeigen Sie, dass die erwartete Grösse der dominanten Menge höchstens $n(p + e^{-p(d+1)})$ ist. *Hinweis:* Sie dürfen die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ ohne Beweis verwenden.

(e) Zeigen Sie, dass G eine dominante Menge der Grösse höchstens $n \cdot \frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$ enthält.

Seien X und Y Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamen Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} & \text{für } x = 1,2,\ldots \text{ und } y = 1,2,\ldots, x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Berechne die Randdichten f_X, f_Y.

3. Sind X und Y unabhängig?