Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 12

Ilya Maier

Minitest

Theory Recap

Anwendungen der Flüsse

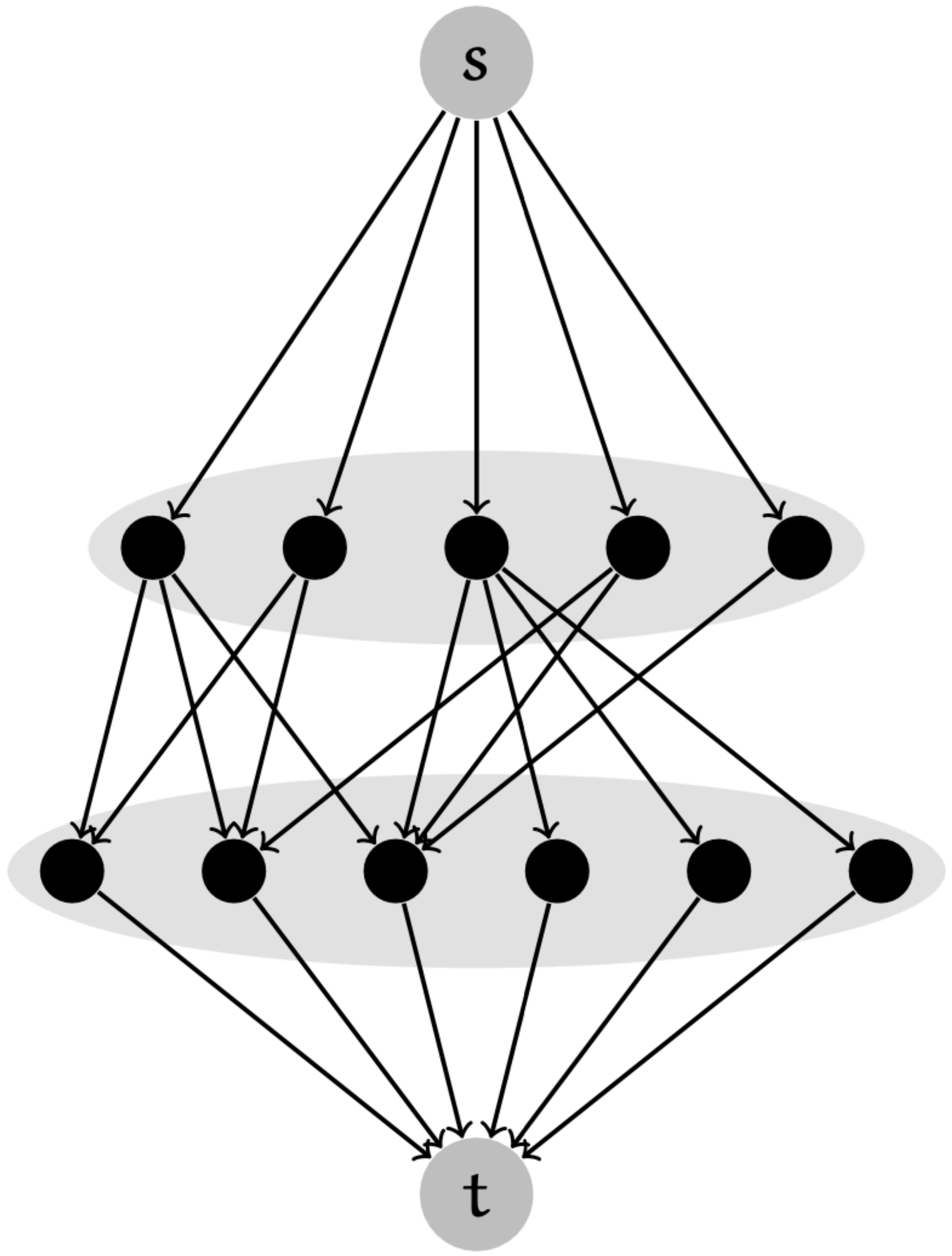
1. Matchings in bipartiten Graphen

$G = (A \uplus B, E)$
$\mapsto N_G = (V', E', 1, s, t\}$

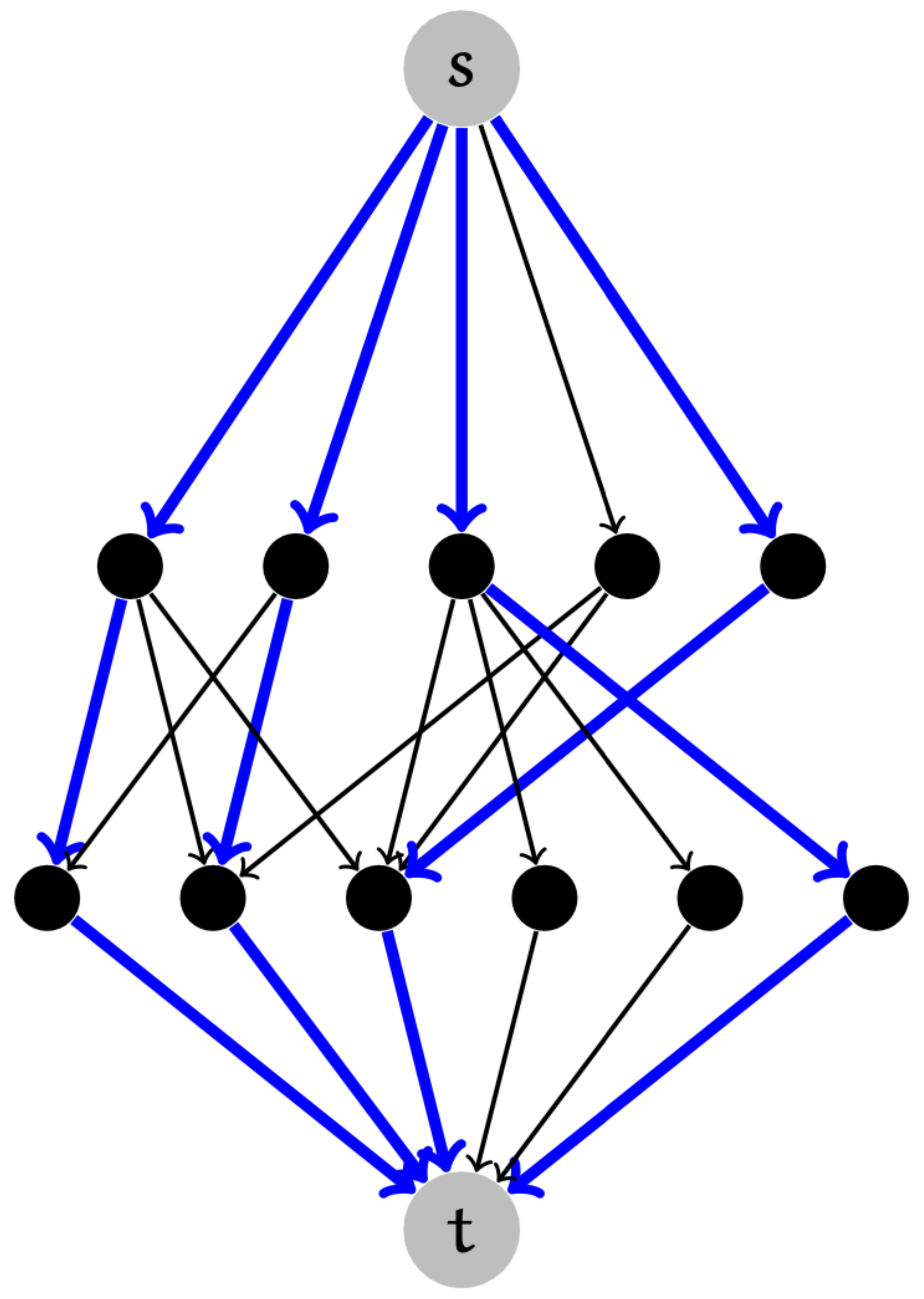
mit $V' = A \uplus B \uplus \{s, t\}$

und $E' = \{s\} \times A \quad \cup \quad \{(a, b) \in A \times B \,|\, \{a, b\} \in E\} \quad \cup \quad B \times \{t\}$

$$\max_{M \text{ Matching in } G} |M| = \max_{f \text{ Fluss in } N_G} \mathrm{val}(f)$$



Anwendungen der Flüsse



1. Matchings in bipartiten Graphen

$G = (A \uplus B, E)$

$\mapsto N_G = (V', E', 1, s, t\}$

mit $V' = A \uplus B \uplus \{s, t\}$

und $E' = \{s\} \times A \quad \cup \quad \{(a, b) \in A \times B \mid \{a, b\} \in E\} \quad \cup \quad B \times \{t\}$

$$\max_{M \text{ Matching in } G} |M| = \max_{f \text{ Fluss in } N_G} \mathrm{val}(f)$$

Anwendungen der Flüsse

2. Kantendisjunkte Pfade

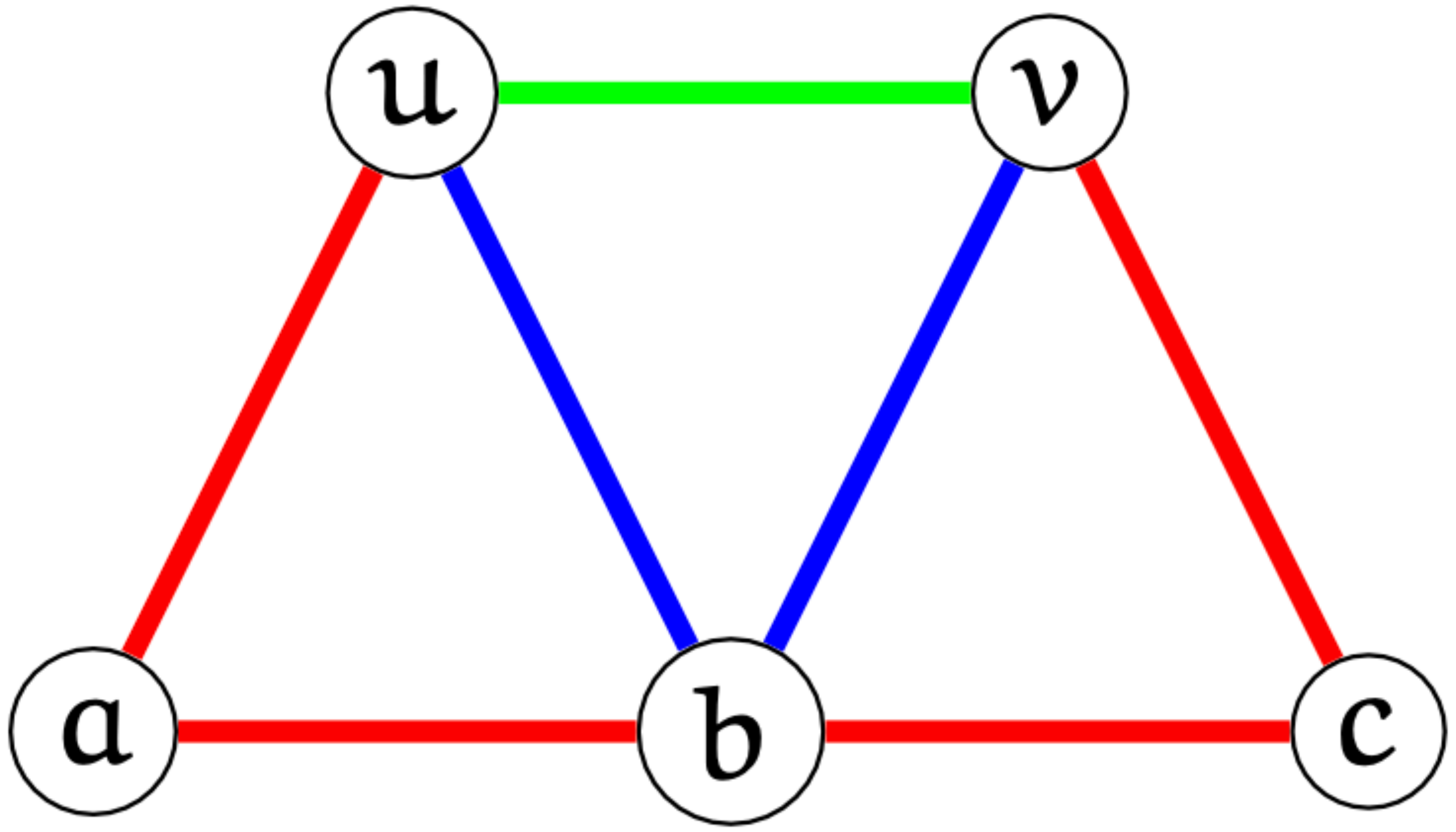
$G = (V, E), u, v \in V$

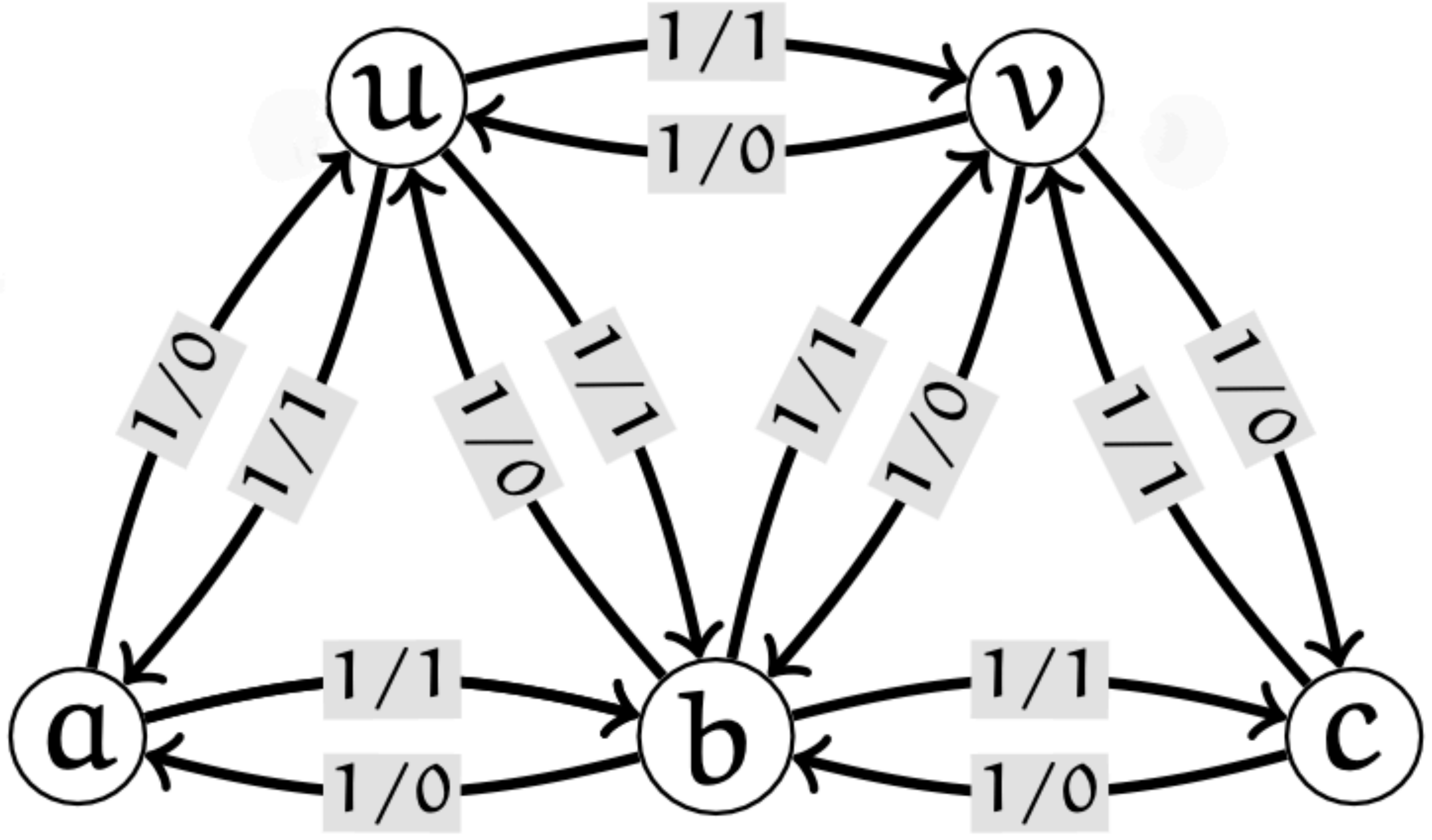
$\mapsto N_G = (V, \{(x, y), (y, x) \mid \{x, y\} \in E\}, 1, u, v)$

1. Finde ganzzahligen maximalen Fluss
2. Starte bei u und finde einen Pfad nach v durch noch nicht besuchte Kanten mit Fluss 1.
3. Markiere die Kanten besucht
4. Wiederhole val(f) mal

$$\max_{f \text{ Fluss in } N_G} \text{val}(f) = \max \#\text{Kantendisjunkter Pfade zwischen } u \text{ und } v \text{ in } G = \min \#\text{Kanten, die } u \text{ und } v \text{ trennen}$$

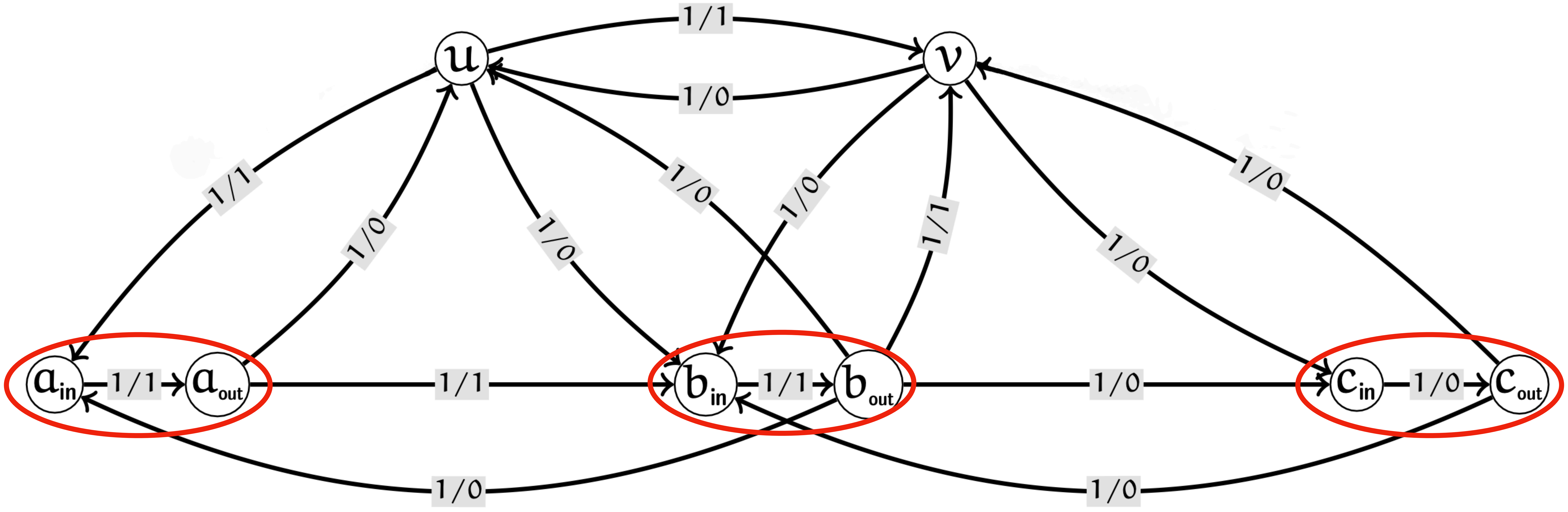
Anwendungen der Flüsse





Anwendungen der Flüsse

Knoten - disjunkte Pfade:



Anwendungen der Flüsse

3. Bildsegmentierung

Bild: ein Graph $G = (P, E)$ mit $\chi : P \to$ Farben

$\alpha : P \to \mathbb{R}_0^+$ α_p größer $\Longrightarrow$ eher im Vordergrund

$\beta : P \to \mathbb{R}_0^+$ β_p größer $\Longrightarrow$ eher im Hintergrund

$\gamma : E \to \mathbb{R}_0^+$ γ_e größer $\Longrightarrow$ eher im gleichen Teil

Qualitätsfunktion: $q(A, B) := \sum_{p \in A} \alpha_p + \sum_{p \in B} \beta_p - \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e$

Gesucht: eine Vorder-/Hintergrundspartition (A, B) die $q(A, B)$ maximiert

Anwendungen der Flüsse

$$
\begin{aligned}
\max q(A,B) &= \max\Big(\sum_{p\in A}\alpha_p + \sum_{p\in B}\beta_p - \sum_{e\in E, |e\cap A|=1}\gamma_e\Big) \\
&= \max\Big(\sum_{p\in P}(\alpha_p+\beta_p) - \sum_{p\in A}\beta_p - \sum_{p\in B}\alpha_p - \sum_{e\in E, |e\cap A|=1}\gamma_e\Big) \\
&= \sum_{p\in P}(\alpha_p+\beta_p) - \min\Big(\sum_{p\in A}\beta_p + \sum_{p\in B}\alpha_p + \sum_{e\in E, |e\cap A|=1}\gamma_e\Big) \\
&=: \sum_{p\in P}(\alpha_p+\beta_p) - \min q'(A,B)
\end{aligned}
$$

Anwendungen der Flüsse

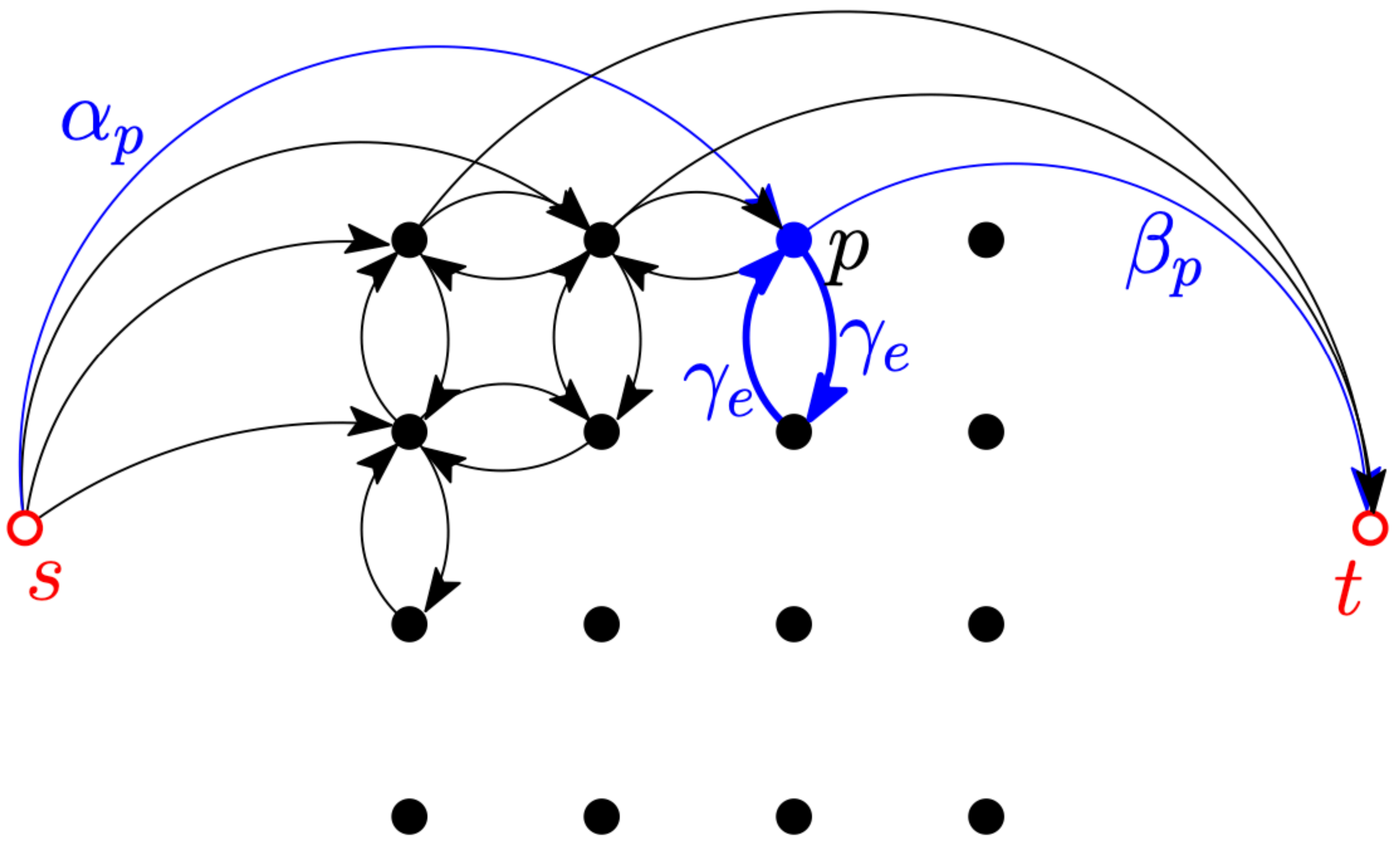
3. Bildsegmentierung

Bild: ein Graph $G = (P, E)$ mit $\chi : P \to$ Farben

$\alpha : P \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad \alpha_p$ größer $\Longrightarrow$ eher im Vordergrund

$\beta : P \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad \beta_p$ größer $\Longrightarrow$ eher im Hintergrund

$\gamma : E \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad \gamma_e$ größer $\Longrightarrow$ eher im gleichen Teil



$\mapsto N = (P \cup \{s, t\}, \overrightarrow{E}, c, s, t)$

$\forall p \in P, \exists (s, p) \in \overrightarrow{E} : c(s, p) = \alpha_p$

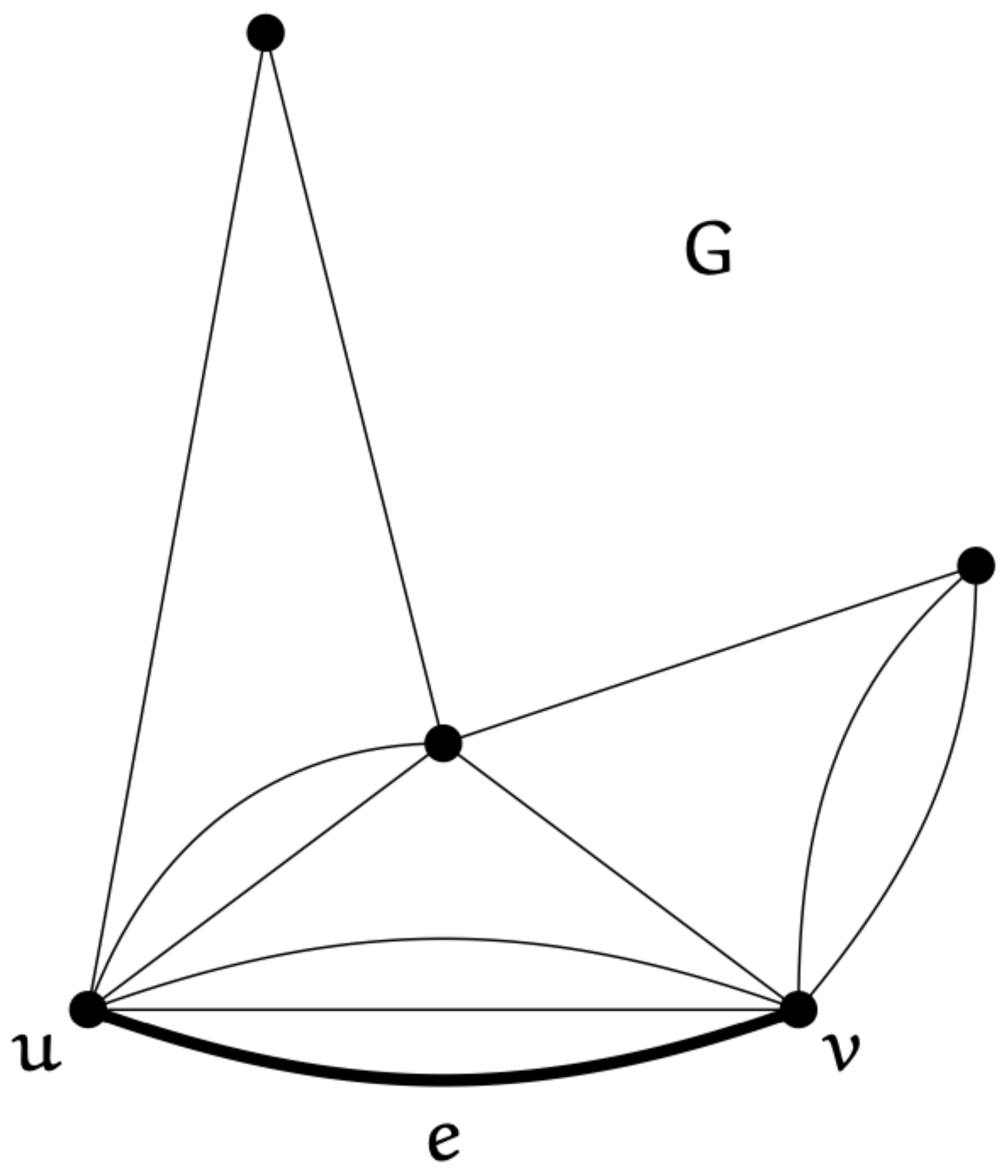
$\forall p \in P, \exists (p, t) \in \overrightarrow{E} : c(p, t) = \beta_p$

$\forall e = \{p, p'\} \in E, \exists (p, p'), (p', p) \in \overrightarrow{E} : c(p, p') = c(p', p) = \gamma_e$

für $A := S \backslash \{s\}$ und $B := T \backslash \{t\}$, $q'(A, B) = \text{cap}(S, T)$

$\to$ Mithilfe Maxflow Mincut finden!

Min-Cut Problem

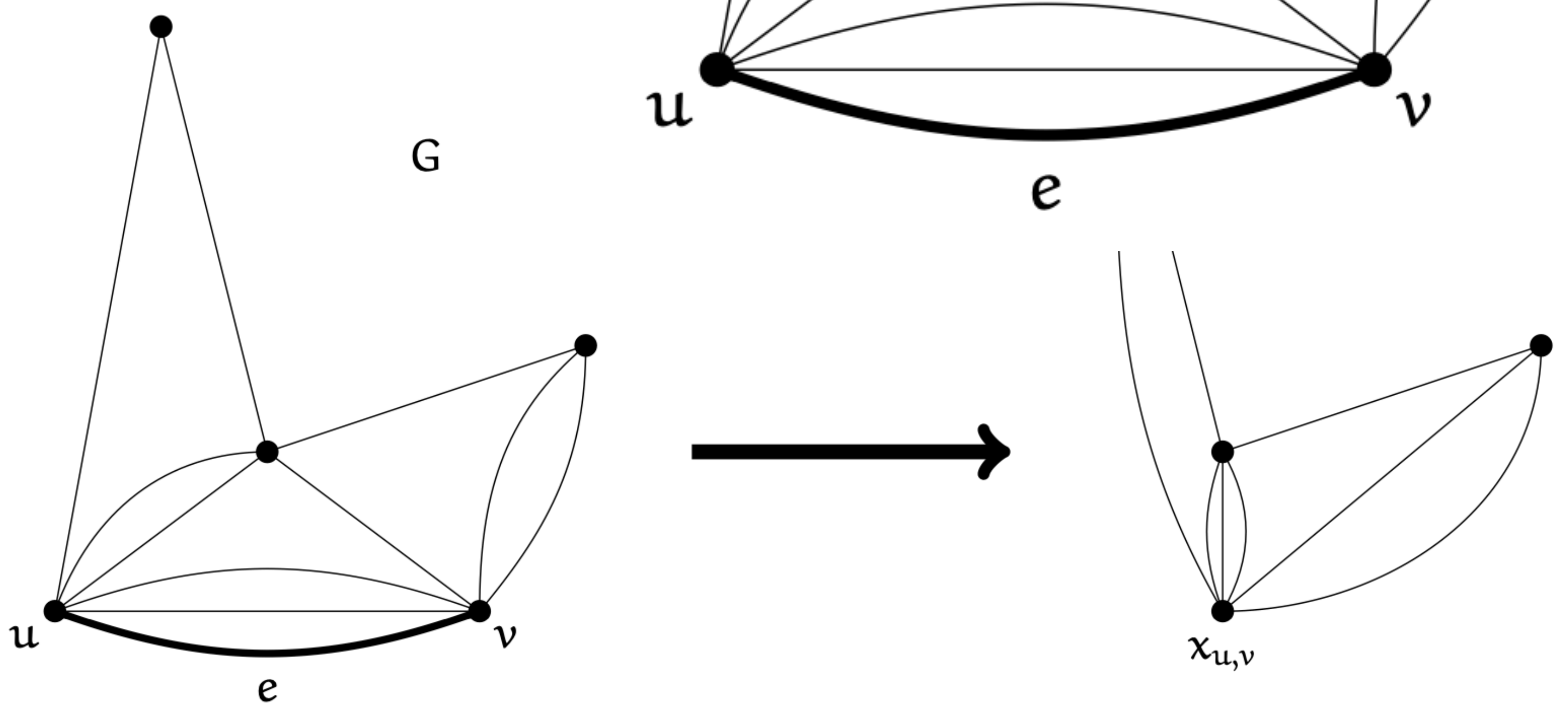


<u>Gegeben:</u> Ein Multigraph G
<u>Gesucht</u>: $\mu(G) :=$ die Größe minimales Kantenschnitts

<u>Kantenschnitt:</u> Eine Kantenmenge C, s.d. $(V, E \backslash C)$ nicht zusammenhängend

Ansatz 1: Mittels Flüsse (Dynamic trees)
$(n-1) \cdot \mathcal{O}(mn \log n) = \mathcal{O}(mn^2 \log n) = \mathcal{O}(n^4 \log n)$

Ansatz 2: Mittels Kantenkontraktion
<u>Kantenkontrakion:</u> Kontrahiere e von $G \to G/e$
- $\mu(G/e) \geq \mu(G)$
- $e \notin C \Longrightarrow \mu(G/e) = \mu(G)$



Min-Cut Problem

<u>*Cut*(G)</u>

1) $G' \leftarrow G$

2) **while** $|V(G')| > 2$ **do**

3) $\quad e \leftarrow$ gleichverteilt zufällige Kante in G'

4) $\quad G' \leftarrow G'/e$

5) **return** Größe des eindeutigen Schnitts in G'

<u>Laufzeit</u>: $O(n^2)$ wobei $n = |V(G)|$

$$\hat{p}(G) := \Pr[\text{Cut}(G) = \mu(G)]$$

$$\hat{p}(n) := \inf_{G=(V,E),|V|=n} \hat{p}(G)$$

$$\rightarrow \hat{p}(G) \geq \hat{p}(|V(G)|)$$

<u>Lemmata</u>

1) Wenn e gleichverteilt zufällig ist, $\Pr[\mu(G) = \mu(G/e)] \geq 1 - \frac{2}{n}$

2) $\forall n \geq 3 : \hat{p}(n) \geq \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \hat{p}(n-1)$

3) $\hat{p}(n) \geq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{1}{3} \cdot \hat{p}(2) = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}}$

Min-Cut Problem

<u>**Monte Carlo Wiederholungen von Cut**</u>

1) Wir wiederholen Cut(G) $\lambda\binom{n}{2}$ mal und nehmen den kleinsten Wert

2) <u>Laufzeit</u>: $\lambda\binom{n}{2} \cdot O(n^2) = O(\lambda n^4)$

3) <u>Fehlerwahrscheinlichkeit</u>: $(1 - \widehat{p}(G))^{\lambda\binom{n}{2}} \leq e^{-\lambda}$

4) Wenn $\lambda = \log n$, ist die Laufzeit $O(n^4 \log n)$ mit Fehlerw-keit $\leq 1/n$

Bootstrapping

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2 $\rightarrow$ **Korrekter Output W-keit** $\geq \dfrac{1}{\binom{n}{2}}$

Bootstrapping

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

$\lambda\binom{n}{2}$ mal $\rightarrow$ F.W-keit $\leq e^{-\lambda}$

⋮

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

Bootstrapping

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

⋮

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

$\lambda\binom{n}{2}$ mal

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

Kritischer Teil

Bootstrapping

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

$\lambda \binom{n}{2}$ mal

⋮

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

n n-1 n-2 n-3 … t … 4 3 2

t … 4 3 2

⋮

t … 4 3 2

t^4 Algo

$\rightarrow$ K.W-keit $\geq \dfrac{t(t-1)}{n(n-1)} \dfrac{e-1}{e}$

Bootstrapping

$\lambda \frac{n(n-1)}{t(t-1)} \frac{e}{e-1}$ **mal**

$\rightarrow$ **F.W-keit** $\leq e^{-\lambda}$

Laufzeit: $\overbrace{\lambda \frac{n(n-1)}{t(t-1)} \frac{e}{e-1}}^{\#\text{Wiederholungen}} \mathcal{O}(\underbrace{n(n-t)}_{\text{Reduktion auf } t \text{ Knoten}} + \overbrace{t^4}^{\text{Algo auf } t \text{ Knoten}}) = \mathcal{O}(\lambda(n^4/t^2 + n^2t^2)) \Longrightarrow_{\min} \mathcal{O}(\lambda n^3)$ when $t = \sqrt{n}$

Aufgaben