

# **Algorithmen und Wahrscheinlichkeit**

**Woche 10**

**Ilya Maier**

# Minitest

# Minitest

Password: enhance

# Nachbesprechung Serie

- $\Pr \left[ X \geq \frac{3}{4}k \right] = \Pr \left[ X - \frac{k}{2} \geq \frac{k}{4} \right] \leq \Pr \left[ \left| X - \frac{k}{2} \right| \geq \frac{k}{4} \right]$

# Theorie Recap

# Kleinsten umschliessender Kreis

**Gegeben:** eine endliche Punktenmenge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$

**Gesucht:** der Kreis des kleinsten Radius, der  $P$  umschliesst

**Lemma:** für jede Punktenmenge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $|P| \geq 3$  gibt es eine Teilmenge  $Q \subseteq P$  s.d.  $|Q| \leq 3 \wedge C(Q) = C(P)$

**Wir verwenden:**  $T :=$  Anzahl der Runden/Durchläufe der Schleife

Randomized PrimitiveVersion( $P$ )

- 1) **wiederhole unendlich**
- 2) wähle  $Q \subseteq P$  mit  $|Q| = 3$  gleichverteilt zufällig
- 3) finde  $C(Q)$
- 4) **if**  $P \subseteq C^\bullet(Q)$
- 5) **return**  $C(Q)$

**Erwartete Laufzeit:**  $T \sim \text{Geo} \left( 1 / \binom{n}{3} \right) \implies \mathcal{O}(n \cdot n^3)$

Randomized CleverVersion( $P$ )

- 1)  $P' \leftarrow P$
- 2) **wiederhole unendlich**
- 3) wähle  $Q \subseteq P'$  mit  $|Q| = 11$  gleichverteilt zufällig
- 4) finde  $C(Q)$
- 5) **if**  $P \subseteq C^\bullet(Q)$
- 6) **return**  $C(Q)$
- 7) **else** verdopple alle Punkte von  $P'$  ausserhalb von  $C(Q)$

**Erwartete Laufzeit:**  $\mathcal{O}(n \cdot T) = \mathcal{O}(n \cdot \log n)$

# Lemma 3.28

Lemma 3.28. Sei  $P$  eine Menge von  $n$  (nicht unbedingt verschiedenen) Punkten und für  $r \in \mathbb{N}$ ,  $R$  zufällig gleichverteilt aus  $\binom{P}{r}$ . Dann ist die erwartete Anzahl Punkte von  $P$ , die ausserhalb von  $C(R)$  liegen, höchstens  $3 \frac{n-r}{r+1} \leq 3 \frac{n}{r+1}$ .

Für  $p \in P$  und  $R, Q \subseteq P$

- $\text{out}(p, R) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \notin C^\bullet(R) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $\text{essential}(p, Q) := \begin{cases} 1 & \text{falls } C(Q - p) \neq C(Q) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $Y := \text{Anzahl Punkte ausserhalb von } C(R)$

$$\text{out}(p, R) = 1 \iff \text{essential}(p, R \cup \{p\}) = 1$$

# Beweis von Lemma 3.28

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R \in \binom{P}{r}} \sum_{p \in P \setminus R} \text{out}(p, R) \\
 &= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R \in \binom{P}{r}} \sum_{p \in P \setminus R} \text{essential}(p, R \cup \{p\}) \\
 &= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q \in \binom{P}{r+1}} \underbrace{\sum_{p \in Q} \text{essential}(p, Q)}_{\leq 3} \\
 &\leq \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q \in \binom{P}{r+1}} 3 = 3 \cdot \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = 3 \cdot \frac{n-r}{r+1}
 \end{aligned}$$

1. gehe über alle  $r$ -elementige Subsets durch und zähle die Punkte ausserhalb, am Ende bestimme den Durchschnitt
2.  $\text{out}(p, R) = 1 \iff \text{essential}(p, R \cup \{p\}) = 1$
3. im Schritt davor haben wir uns sowieso schon Mengen mit  $r + 1$  Elementen angeschaut
4. es kann höchstens 3 essentielle Punkte geben  
letzte Umformungen sind einfach Arithmetik



# Anzahl Punkte - Upper Bound

- $X_k :=$  Anzahl Punkte nach  $k$  Iterationen
- $X_0 = n$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k] &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_k | X_{k-1} = i] \cdot \Pr[X_{k-1} = i] \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{r+1}\right) \cdot i \cdot \Pr[X_{k-1} = i] \\ &= \left(1 + \frac{3}{r+1}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X_{k-1} = i] \\ &= \left(1 + \frac{3}{r+1}\right) \cdot \mathbb{E}[X_{k-1}] \\ \implies \mathbb{E}[X_k] &\leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n\end{aligned}$$

1. Def. bedingter Erwartungswert

2. Abschätzung durch Lemma 3.28

→ höchstens  $\frac{3i}{r+1}$  ausserhalb

3. die Klammer rausziehen

4. Def. Erwartungswert

5. Teleskopieren

# Anzahl Punkte - Lower Bound

- $X_k :=$  Anzahl Punkte nach  $k$  Iterationen
- $T :=$  Anzahl der Runden/Durchläufe der Schleife

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k] &= \mathbb{E}[X_k \mid T \geq k] \cdot \Pr[T \geq k] + \mathbb{E}[X_k \mid T < k] \cdot \Pr[T < k] \\ &\geq \mathbb{E}[X_k \mid T \geq k] \cdot \Pr[T \geq k] \\ &\geq 2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k]\end{aligned}$$

1. Def. bedingter Erwartungswert
2. Erwartungswert und Wahr-keit nicht negativ
3. mindestens einer der Punkte ist in mindesten  $k/3$  der Runden ausserhalb  
→ hat mindestens  $2^{k/3}$  Kopien

# Laufzeit

**Zusammen mit Lower und Upper bound:**

$$2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k] \leq \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n \quad \Rightarrow \quad \Pr[T \geq k] \leq \left(\frac{1 + \frac{3}{r+1}}{2^{1/3}}\right)^k \cdot n$$

# Laufzeit

**Zusammen mit Lower und Upper bound:**

$$2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k] \leq \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n \quad \Rightarrow \quad \Pr[T \geq k] \leq \min \left\{ 1, \left( \frac{1 + \frac{3}{r+1}}{2^{1/3}} \right)^k \cdot n \right\}$$

# Laufzeit

**Zusammen mit Lower und Upper bound:**

$$2^{k/3} \cdot \Pr[T \geq k] \leq \mathbb{E}[X_k] \leq \left(1 + \frac{3}{r+1}\right)^k \cdot n$$

$$\Rightarrow \Pr[T \geq k] \leq \min \left\{ 1, \left( \frac{1 + \frac{3}{12}}{2^{1/3}} \right)^k \cdot n \right\} \leq \min\{1, 0.995^k \cdot n\}$$

**Mit**  $k_0 := -\log_{0.995} n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \sum_{k \geq 1} \Pr[T \geq k] \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} 1 + \sum_{k > k_0} 0.995^k \cdot n \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} 1 + \sum_{k' \geq 1} 0.995^{k'} \cdot 0.995^{k_0} \cdot n \\ &= k_0 + \mathcal{O}(1) \leq 200 \ln n + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

1. Def. Erwartungswert, T nichtnegativ

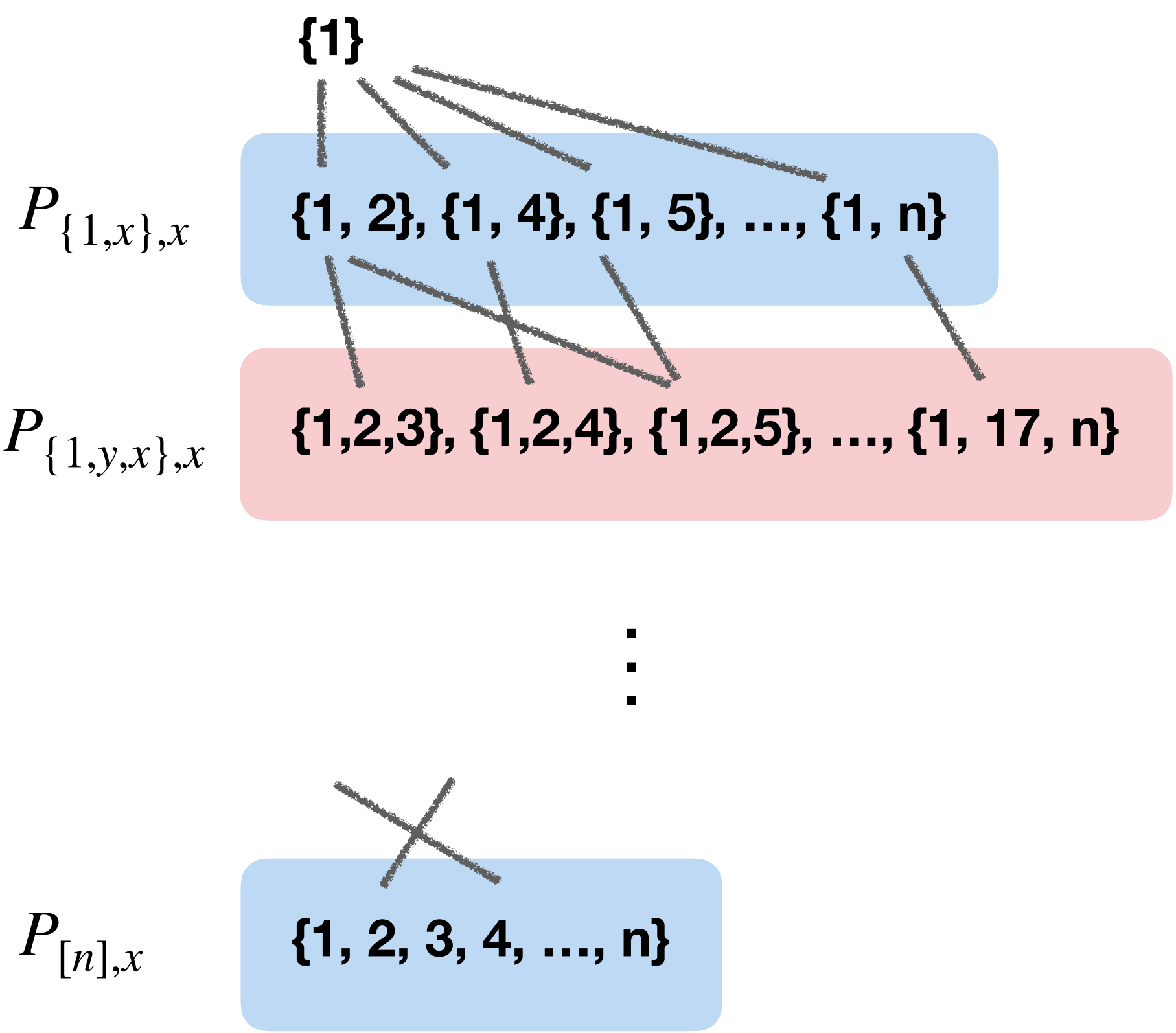
2.  $0.995^k$  dominiert erst ab  $k > k_0$

3.  $k = k_0 + k'$

4.  $0.995^{k_0} \cdot n = 1$   $\sum_{k' \geq 1} 0.995^{k'}$  ist eine geom. Reihe

# DP-Hamiltonkreis

Visuelle Darstellung:



Für alle  $S \subseteq [n]$  mit  $1 \in S$  und alle  $x \in S$  mit  $x \neq 1$ :

$$P_{S,x} = 1 \iff$$

$\exists 1$ -x-Pfad, der genau aus den Knoten von  $S$  besteht

Initialisierung:

$$\forall x \in \{2, \dots, n\} : P_{\{1,x\},x} = 1 \iff \{1,x\} \in E$$

Berechnung:

for all  $s = 3$  to  $n$ :  
  for all  $S \subseteq [n]$  mit  $1 \in S$  und  $|S| = s$ :  
    for all  $x \in S$  mit  $x \neq 1$ :  
       $P_{S,x} = \max \{ P_{S \setminus \{x\},y} : y \in \mathcal{N}(x) \cap S, y \neq 1 \}$

$G$  hat einen Hamiltonkreis  $\iff \exists x \in \mathcal{N}(1)$  und  $P_{[n],x} = 1$

Laufzeit:  $O(2^n \cdot n^2)$

Speicherplatz:  $O(2^n \cdot n)$

# Bunte Pfade

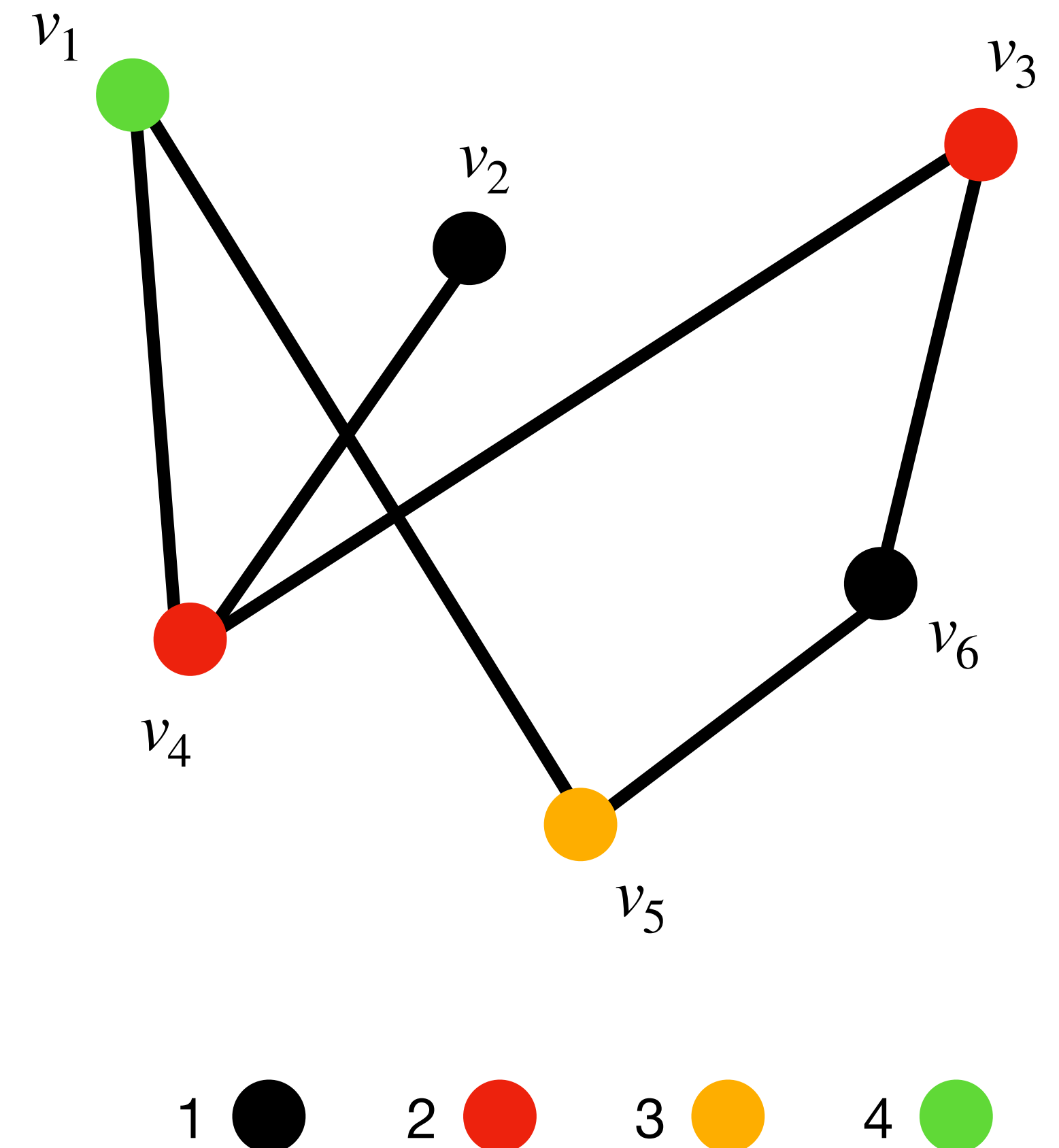
**Gegeben:** ein Graph  $G$  und eine Färbung  $\gamma : V \rightarrow [k]$   
die Färbung muss nicht auf die Kanten achten

**Gesucht:** ob  $G$  einen bunten Pfad der Länge  $k - 1$  enthält  
Bunter Pfad = alle Knoten haben verschiedene Farben

$P_i(v) :=$  alle Bunte Pfade der Länge  $i$ , die in  $v$  enden

$P_i(v) := \{S \in \binom{[k]}{i+1} \mid \exists \text{ bunter Pfad, der in } v \text{ endet und genau mit } S \text{ gefärbt ist}\}$

**Gesucht:** ob  $\bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \emptyset$



# Bunte Pfade

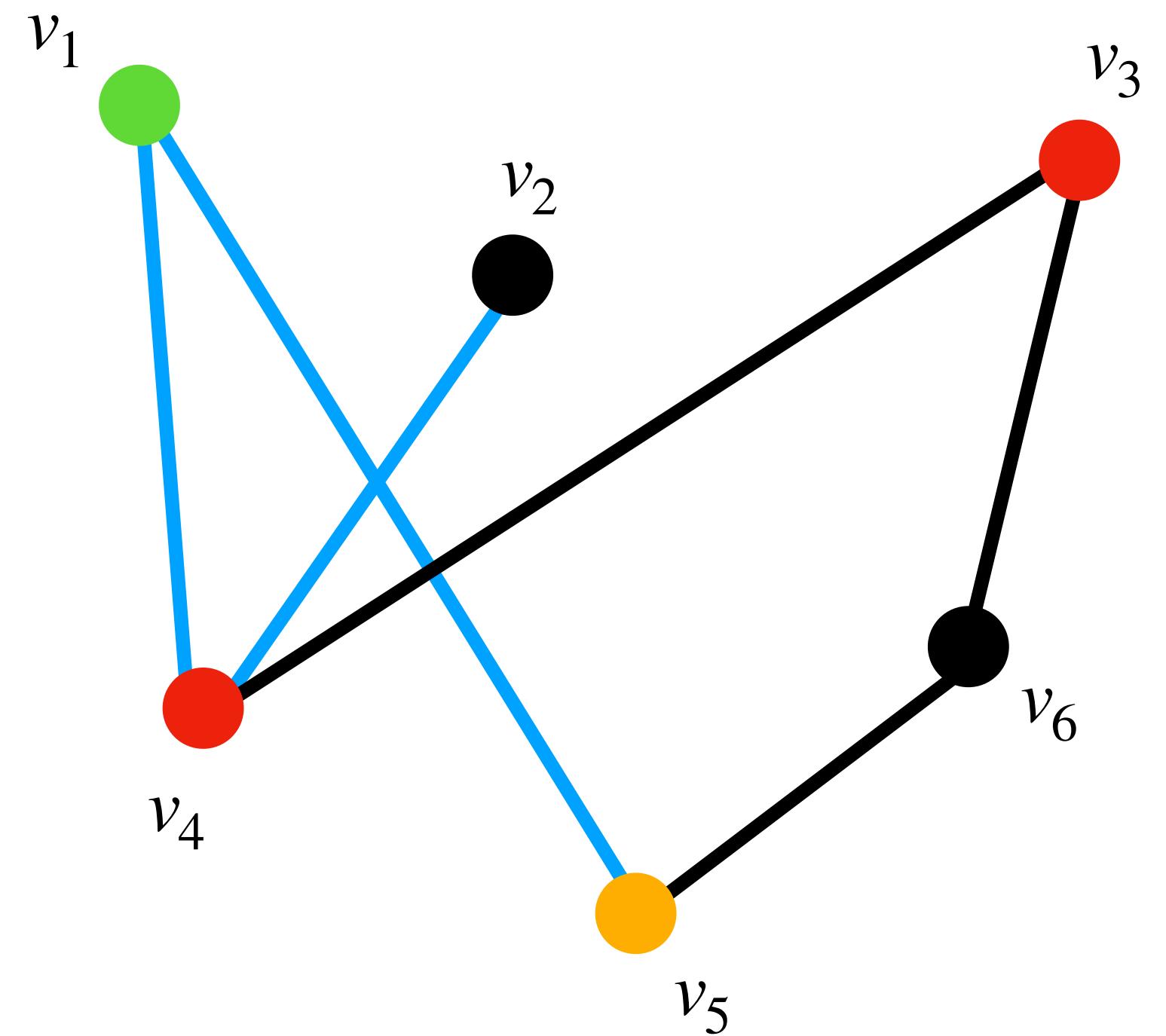
**Gegeben:** ein Graph  $G$  und eine Färbung  $\gamma : V \rightarrow [k]$   
die Färbung muss nicht auf die Kanten achten

**Gesucht:** ob  $G$  einen bunten Pfad der Länge  $k - 1$  enthält  
Bunter Pfad = alle Knoten haben verschiedene Farben

$P_i(v) :=$  alle Bunte Pfade der Länge  $i$ , die in  $v$  enden

$P_i(v) := \{S \in \binom{[k]}{i+1} \mid \exists \text{ bunter Pfad, der in } v \text{ endet und genau mit } S \text{ gefärbt ist}\}$

**Gesucht:** ob  $\bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \emptyset$



1 ● 2 ● 3 ● 4 ●

$n = 6$

$k = 4$

$P_3(v_5) = \{\{1,2,4,3\}\}$



# Bunte Pfade

Bunt( $G, i$ )

for all  $v \in V$  do

$P_i(v) \leftarrow \emptyset$

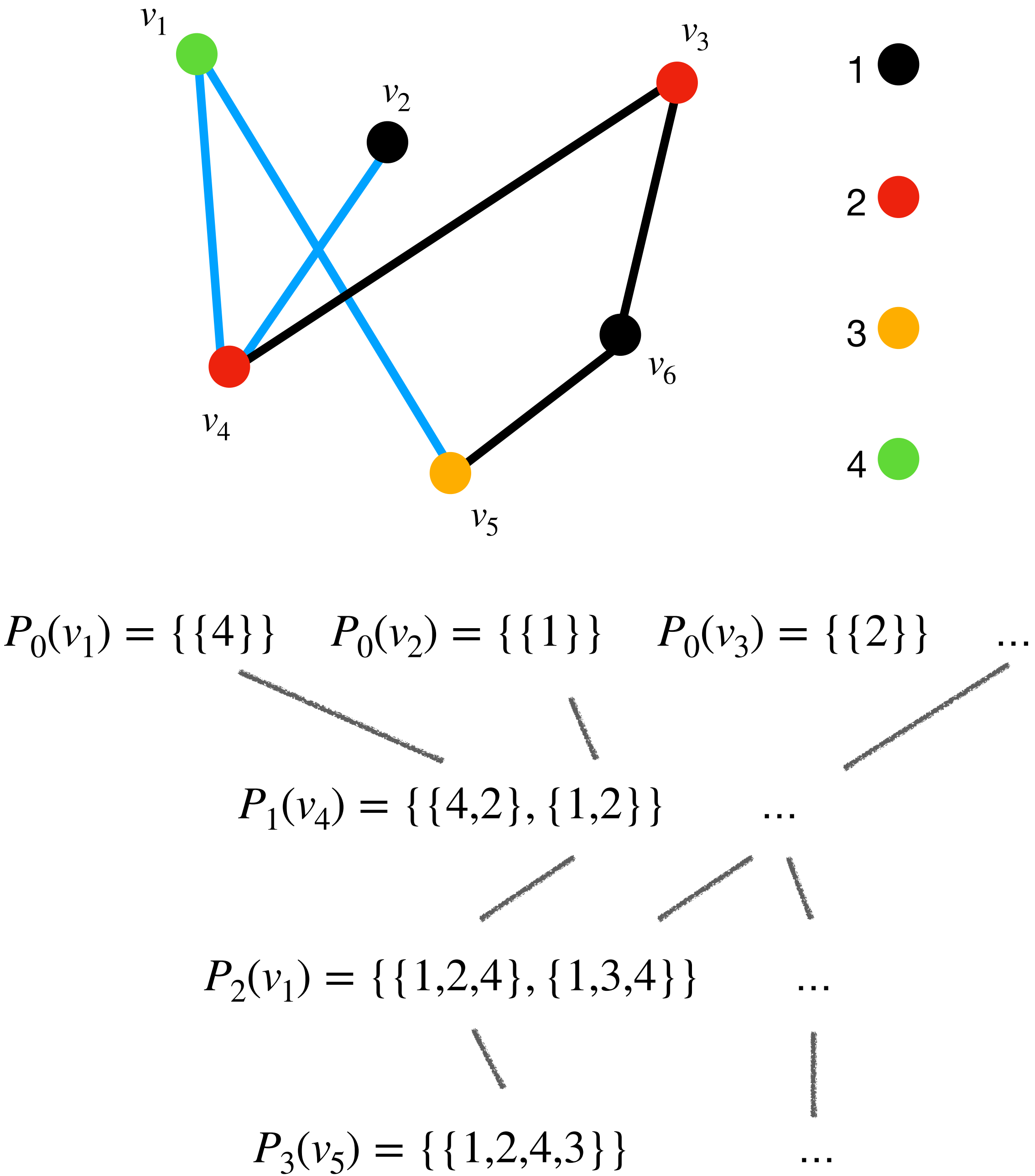
for all  $x \in N(v)$  do

for all  $R \in P_{i-1}(x)$  mit  $\gamma(v) \notin R$  do

$P_i(v) \leftarrow P_i(v) \cup \{R \cup \{\gamma(v)\}\}$

Beschreibung: findet alle bunte Pfade der Länge  $i$ ,  
basierend auf langen Pfaden der Länge  $i - 1$

Laufzeit:  $\mathcal{O} \left( \sum_{v \in V} \deg(v) \cdot \binom{k}{i} \cdot i \right) = \mathcal{O} \left( m \cdot \binom{k}{i} \cdot i \right)$



# Bunte Pfade

Bunt( $G, i$ )

**for all**  $v \in V$  **do**

$P_i(v) \leftarrow \emptyset$

**for all**  $x \in N(v)$  **do**

**for all**  $R \in P_{i-1}(x)$  mit  $\gamma(v) \notin R$  **do**

$P_i(v) \leftarrow P_i(v) \cup \{R \cup \{\gamma(v)\}\}$

**Beschreibung:** findet alle bunte Pfade der Länge  $i$ ,  
basierend auf langen Pfaden der Länge  $i - 1$

**Laufzeit:**  $\mathcal{O} \left( \sum_{v \in V} \deg(v) \cdot \binom{k}{i} \cdot i \right) = \mathcal{O} \left( m \cdot \binom{k}{i} \cdot i \right)$

Regenbogen( $G, \gamma$ )

**for all**  $v \in V$  **do**  $P_0(v) \leftarrow \{\{\gamma(v)\}\}$

**for**  $i = 1, \dots, k - 1$  **do** Bunt( $G, i$ )

**return**  $\bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \emptyset$

**Beschreibung:** findet, ob es einen bunten Pfad  
der Länge  $k - 1$  gibt

**Laufzeit:**  $\mathcal{O} \left( |V| + \sum_{i=1}^{k-1} \left( m \cdot \binom{k}{i} \cdot i \right) \right) = \mathcal{O}(2^k km)$

# Lange Pfade

## Long Path Problem

**Gegeben:** ein Graph  $G$  und  $k \in \mathbb{N}_0$

**Gesucht:** ob  $G$  einen Pfad der Länge  $k$  enthält

→ NP-schwer (Reduktion von HamiltonPfad-Problem)

## Lange Pfade → Bunte Pfade

Für  $\text{Longpath}(G, k)$  lösen wir  $\text{Regenbogen}(G, \gamma')$

wobei  $\gamma' : V \rightarrow [k + 1]$  ist eine gleichverteilt zufällige Färbung mit  $k + 1$  Farben

## Ein Versuch

Laufzeit:  $\mathcal{O}(2^k km)$

$$p_{\text{erfolg}} \geq e^{-k}$$

## $\lceil \lambda e^k \rceil$ Versuche

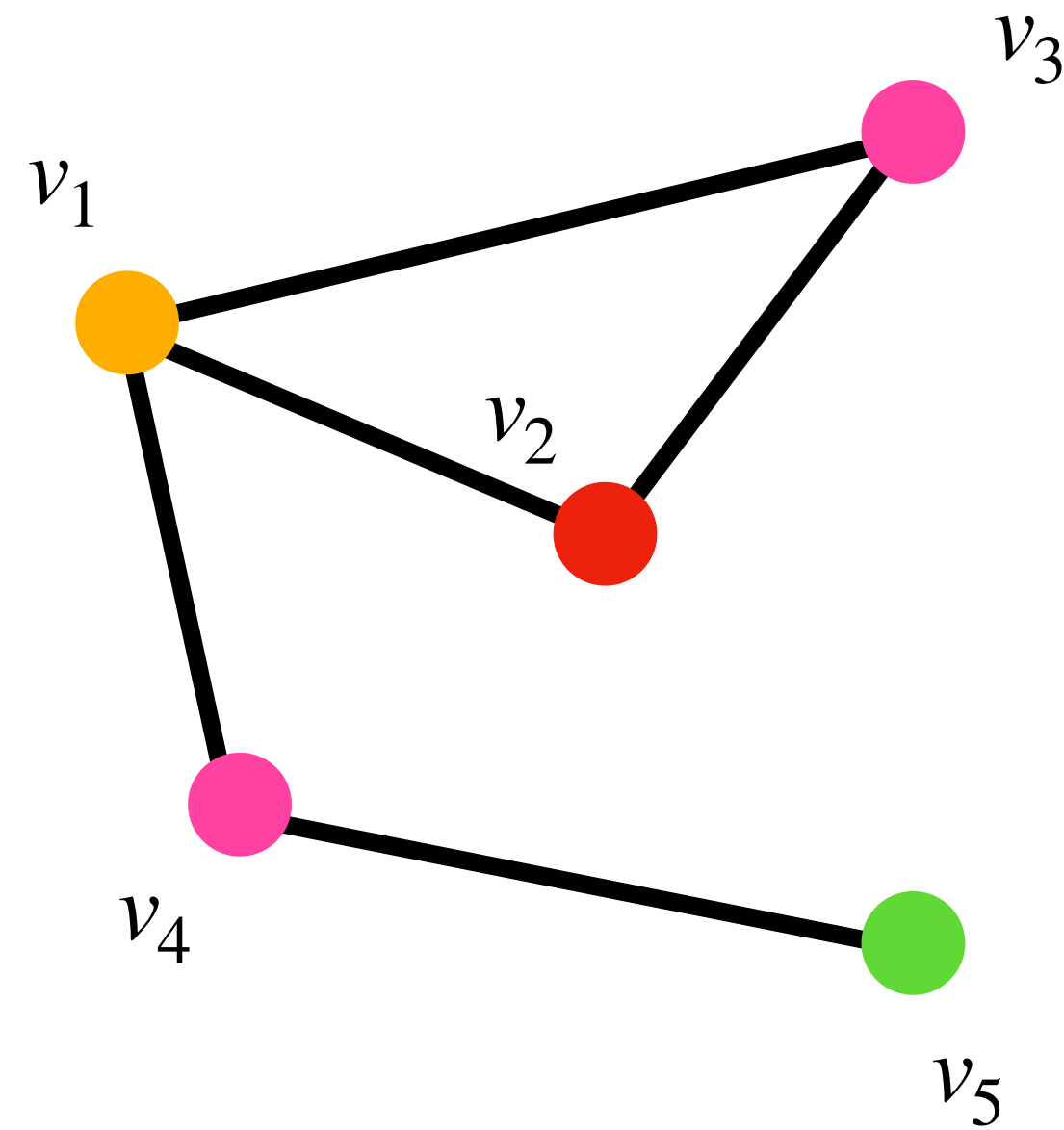
Laufzeit:  $\mathcal{O}(\lambda e^k \cdot 2^k km)$

$$p_{\text{erfolg}} \geq 1 - e^{-\lambda}$$

# Aufgaben

# Aufgaben

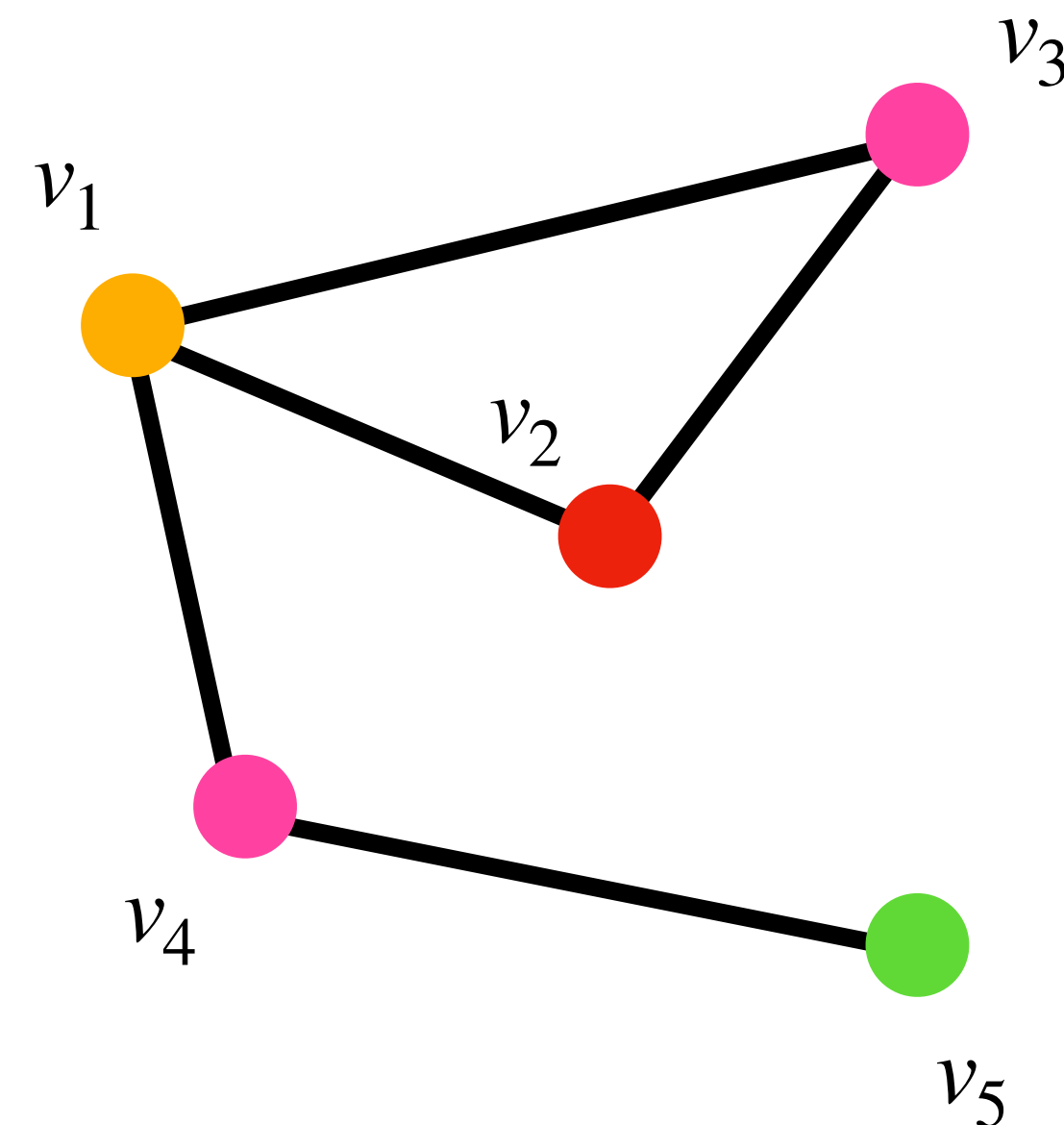
1. Führe auf diesem Graphen den Regenbogen Algorithmus aus:



1  2  3  4 

# Aufgaben

1. Führe auf diesem Graphen den Regenbogen Algorithmus aus:



1  2  3  4 

$$P_0(v_1) = \{\{3\}\}$$

$$P_1(v_1) = \{\{1,3\}, \{2,3\}\}$$

$$P_2(v_1) = \{\{4,1,3\}, \{2,1,3\}\}$$

$$P_3(v_1) = \emptyset$$

$$P_0(v_2) = \{\{2\}\}$$

$$P_1(v_2) = \{\{3,2\}, \{1,2\}\}$$

$$P_2(v_2) = \{\{1,3,2\}\}$$

$$P_3(v_2) = \{\{4,1,3,2\}\}$$

# Aufgaben

2. Vervollständige die Lücken in dem Algorithmus Bunt:

Bunt( $G, i$ )

**for all ... do**

$P_i(v) \leftarrow \emptyset$

**for all ... do**

**for all  $R \in P_{i-1}(x)$  mit  $\gamma(v) \notin R$  do**

$P_i(v) \leftarrow \dots$

# Aufgaben

2. Vervollständige die Lücken in dem Algorithmus Bunt:

Bunt( $G, i$ )

**for all ... do**

$P_i(v) \leftarrow \emptyset$

**for all ... do**

**for all  $R \in P_{i-1}(x)$  mit  $\gamma(v) \notin R$  do**

$P_i(v) \leftarrow \dots$

Bunt( $G, i$ )

**for all  $v \in V$  do**

$P_i(v) \leftarrow \emptyset$

**for all  $x \in N(v)$  do**

**for all  $R \in P_{i-1}(x)$  mit  $\gamma(v) \notin R$  do**

$P_i(v) \leftarrow P_i(v) \cup \{R \cup \{\gamma(v)\}\}$



# Aufgabe 3: Kleinster Umschliessender Ball

In dieser Aufgabe sollen Sie den Algorithmus zum kleinsten umschliessenden Kreis auf den dreidimensionalen Fall übertragen.

- (a) Zeigen Sie die dreidimensionale Variante des *Sampling Lemma*:  
Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Menge von  $n$  (nicht unbedingt verschiedenen) Punkten im dreidimensionalen Raum,  $r \in \mathbb{N}$ , und sei  $R$  zufällig gleichverteilt aus  $\binom{P}{r}$ . Sei  $X$  die Anzahl Punkte von  $P$ , die ausserhalb des kleinsten umschliessenden Balles  $B(R)$  von  $R$  liegen. Dann ist  $\mathbb{E}[X] \leq 4 \frac{n-r}{r+1}$ .
- (b) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der als Input eine Menge  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  von  $n$  Punkten im dreidimensionalen Raum bekommt, und der in erwarteter Zeit  $O(n \log n)$  den kleinsten umschliessenden Ball  $B(P)$  von  $P$  bestimmt.

Sie brauchen dabei nicht genau die Datenstrukturen zu spezifizieren, die Sie verwenden. Insbesondere dürfen Sie davon ausgehen, dass Sie für gegebene Zahlen  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$  in Zeit  $O(n)$  einen Index  $i$  mit Wahrscheinlichkeit proportional zu  $d_i$  ziehen können, also mit  $\Pr[i] = \frac{d_i}{D}$ , wobei  $D = \sum_{i=1}^n d_i$  ist.

# Aufgabe 3: Kleinsten Umschliessender Ball

*Hinweis:* Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Menge von  $n$  (nicht unbedingt verschiedenen) Punkten im dreidimensionalen Raum. Sie dürfen für die Aufgabe die folgenden Fakten ohne weitere Begründung verwenden.

1.  $B(P)$  ist eindeutig bestimmt.
2. Ist  $Q \subseteq P$ , so ist  $\text{Vol}(B(Q)) \leq \text{Vol}(B(P))$ .
3. Für jede endliche Menge  $Q \subseteq \mathbb{R}^3$  gibt es eine Teilmenge  $Q' \subseteq Q$  mit  $|Q'| \leq 4$  sodass  $B(Q') = B(Q)$ .

Insbesondere kann  $\text{essential}(p, Q) = 1$  nur für höchstens vier Punkte  $p \in Q$  erfüllt sein.

*Hinweis zu (a):* Gehen Sie wie im Beweis von Lemma 3.28 vor. Benutzen Sie dafür insbesondere die Grössen

$$\text{out}(p, R) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \notin B(R) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{essential}(p, Q) := \begin{cases} 1 & \text{falls } B(Q \setminus \{p\}) \neq B(Q) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$