1

Wie viele Kanten gibt es in K_n?

K_n steht für den kompletten Graphen auf n Knoten, d.h. jeder Knote ist mit jedem anderen verbunden. Daher folgt, dass die Summe aller Grade in K_n gleich $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = n(n-1)$ ist.

Wir erinnern uns an das Handshake Lemma: $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Somit erhalten wir: $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$

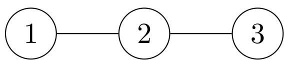
2

Wie viele Hamiltonkreise gibt es in K_n?

Wir können jeden Kreis als Reihenfolge seiner Knoten beschreiben, z.B. (v_3, v_2, v_4, v_1) wäre ein möglicher Hamiltonkreis in K_4. Da ein kompletter Graph alle mögliche Kanten besitzt, ist also eine beliebige Reihenfolge der Knoten ein Hamiltonkreis. Es gibt insgesamt $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$ Reihenfolgen von den Knoten von K_n. Jeder Hamiltonkreis kann dabei n Startknoten haben und 2 Durchlaufrichtungen, d.h. es gibt insgesamt $\frac{(n-1)!}{2}$ unterschiedliche Hamiltonkreise.

3

Finden einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, der keinen Hamiltonkreis enthält.

Wir betrachten den folgenden Graphen auf 3 Knoten: 

Es gilt: $|E| = 2 \geq \frac{(3-1)(3-2)}{2} + 1$

Im allgemeinen kann man einen kompletten Graphen auf $n-1$ Knoten, K_{n-1}, mit einem zusätzlichen Knoten über eine Kante verbinden ($\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist die Anzahl der Kanten in K_{n-1}).

4

Beweise, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit der Eigenschaft, dass $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ für $u, v \in V$ nicht adjazent, einen Hamiltonkreis enthält.

Das ist eine abgeänderte Version von Satz von Dirac. Wir können also den Beweis vom Satz von Dirac leicht abändern, um die Aussage zu zeigen. Dazu betrachten wir die 2 kritische Stellen, die die Eigenschaft $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ nutzen, und ersetzen sie durch unsere Eigenschaft:

Kritische Stelle 1: Wir müssen zeigen, dass G zusammenhängend ist. Dazu verwenden wir das gleiche Argument wie in Aufgabe 2: u und v haben nur $n-2$ Möglichkeiten für einen Nachbar, aber ihre Grade ergeben zusammen mind. n, also müssen sie einen gemeinsamen Nachbar haben.

Kritische Stelle 2: Wir müssen zeigen, dass der längste Pfad $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ zu einem Kreis verlängert werden kann. Dafür reicht es zu zeigen, dass es solch ein i $(2 \leq i \leq n)$ gibt, s.d. v_1 ein Nachbar von v_i ist und v_k ein Nachbar von v_{i-1}. Dann wäre nämlich $< v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_2 >$ ein Kreis, der immernoch durch alle $v_1, v_2, \ldots, v_k$ durchgeht.

Wir überlegen uns dazu, wie viele Nachbarn v_k höchstens haben könnte, wenn es kein solches i gäbe. Es gibt insgesamt $k-1$ Möglichkeiten, weil alle Nachbarn von v_k auf dem Pfad liegen müssen. Ansonsten könnten wir ja die Nachbarn zum Pfad hinten dran hinzufügen und somit bekommen wir einen längeren Pfad, Widerspruch. Wenn es kein solches i gibt, dann kann auch kein Knote, der unmittelbar vor einem Nachbar von v_1 auf dem Pfad liegt, ein Nachbar von v_k sein. Dies gilt, weil auch alle Nachbarn von v_1 auf dem Pfad liegen. Somit erhalten wir $\deg(v_k) \leq k - 1 - \deg(v_1)$ und somit auch

$$\deg(v_k) + \deg(v_1) \leq k - 1 < n$$

Widerspruch. Somit gibt es in G einen Hamiltonkreis.

5

Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ enthält einen Hamiltonkreis.

Wir zeigen erst, dass für alle $u, v \in V$ nicht adjazent gilt: $\deg(u) + \deg(v) \geq n$

Wenn das nicht gelten würde, hätten wir zwei Knoten u, v mit $\deg(u) + \deg(v) < n$. Dann können die restlichen $n-2$ Knoten höchstens $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Kanten untereinander haben (vollständiger Graph auf $n-2$ Knoten). Dazu müssen sie noch $\deg(u) + \deg(v)$ viele Kanten zu u und v haben, da u und v nicht adjazent sind. Jetzt analysieren wir, wie viele Kanten es dann höchstens geben kann (mit Hilfe von Handshake Lemma):

$$\begin{aligned} |E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2} &\leq \frac{2(\deg(u) + \deg(v)) + (n-2)(n-3)}{2} < \frac{2n + (n^2 - 5n + 6)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 6}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} + 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 = |E| \end{aligned}$$

was ein Widerspruch wäre. Wir schliessen den Beweis ab, indem wir die Aufgabe 4 anwenden.