Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 2

Ilya Maier

Minitest

Minitest

Password:

Kreise

Hamiltonkreis: Ein Kreis durch jeden Knoten genau einmal
Eulerzyklus: Ein geschlossener Weg durch jede Kante genau einmal

Ein zsmhgder Graph $G = (V, E)$ hat einen **Eulerzyklus** $\iff \forall v \in V : \deg(v) \equiv_2 0$
Ein zsmhgder Graph $G = (V, E)$ hat einen **Eulerweg** $\iff |\{v \in V | \deg(v) \equiv_2 1\}| \leq 2$

Kann man in $O(|E|)$ finden

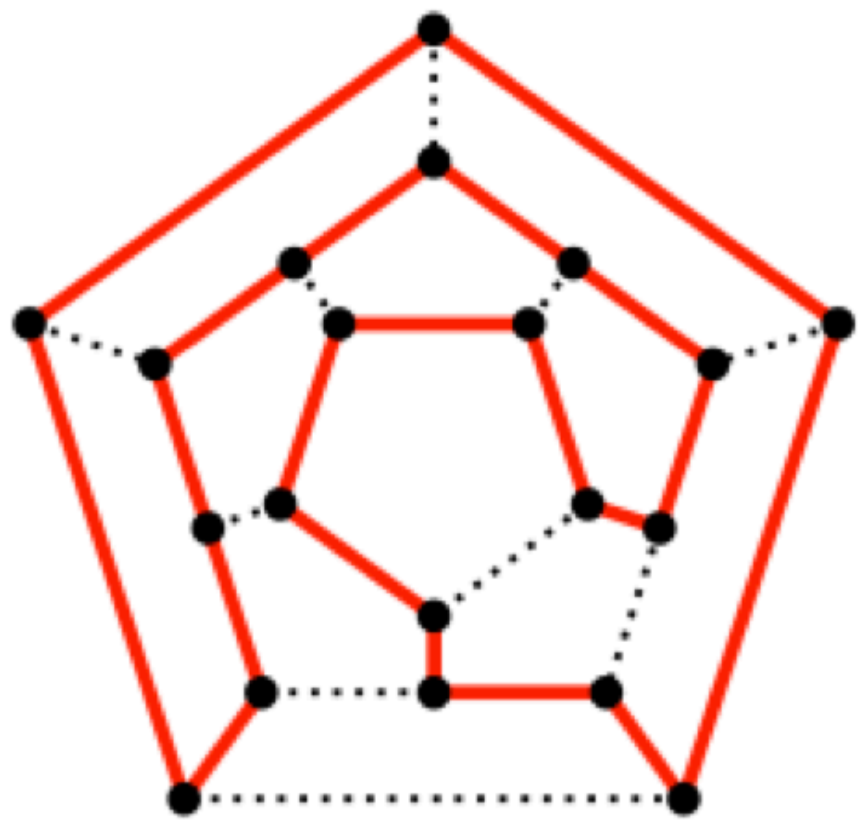
Ein $n \times m$ Gitter hat einen **Hamiltonkreis** $\iff n \times m \equiv_2 0$

d**-dimensional Hyperwürfel** H_d: - Knoten : $\{0,1\}^d$
- Kanten : Jedes Paar von Knoten, die sich nur an einem Ziffer unterscheiden

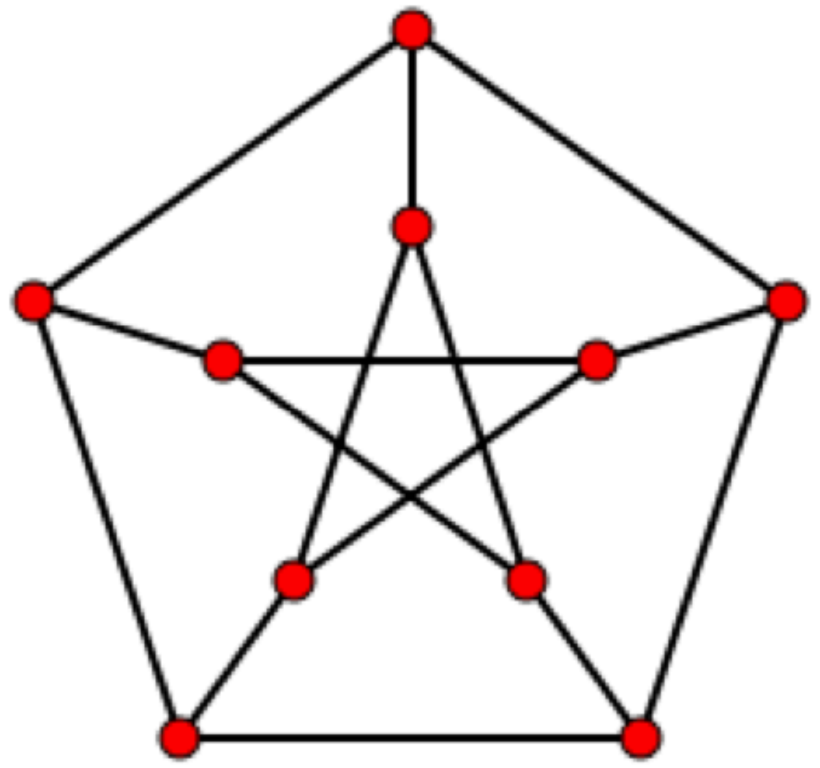
H_d hat einen **Hamiltonkreis**

Satz von Dirac: Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und Minimalgrad $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$ enthält einen Hamiltonkreis

Hamilton Kreise



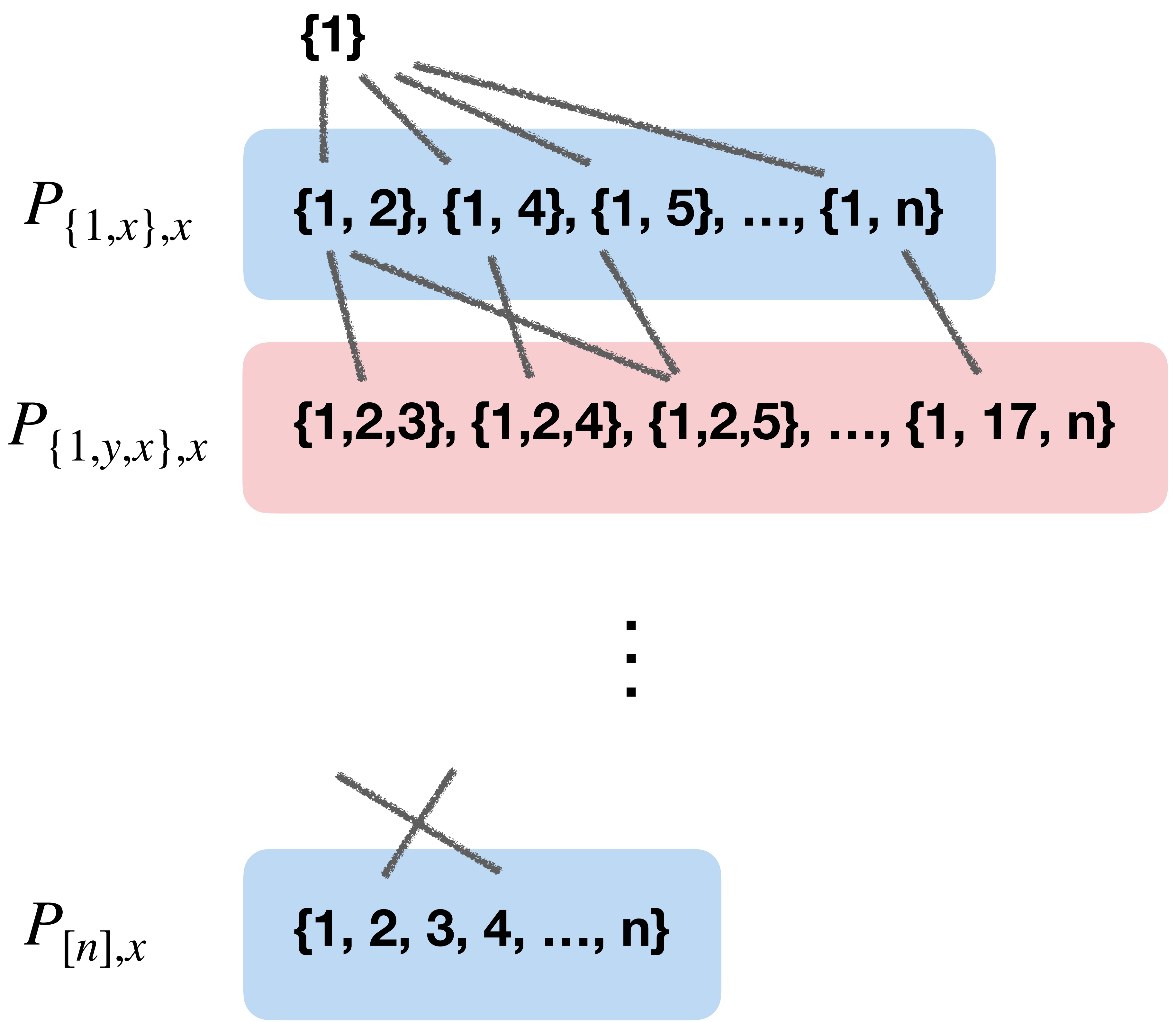
Ikosaeder



Petersengraph

DP-Hamiltonkreis

Visuelle Darstellung:



Für alle $S \subseteq [n]$ mit $1 \in S$ und alle $x \in S$ mit $x \neq 1$:

$P_{S,x} = 1 \iff$

$\exists$ 1-x-Pfad, der genau aus den Knoten von S besteht

Initialisierung:

$\forall x \in \{2,\ldots,n\} : P_{\{1,x\},x} = 1 \iff \{1,x\} \in E$

Berechnung:

for all $s = 3$ to n:
  for all $S \subseteq [n]$ mit $1 \in S$ und $|S| = s$:
    for all $x \in S$ mit $x \neq 1$:
      $P_{S,x} = \max\{P_{S \setminus \{x\},y} : y \in \mathcal{N}(x) \cap S, y \neq 1\}$

G hat einen Hamiltonkreis $\iff \exists x \in \mathcal{N}(1)$ und $P_{[n],x} = 1$

Laufzeit: $O(2^n \cdot n^2)$

Speicherplatz: $O(2^n \cdot n)$

NP-Vollständigkeit

“Für einen gegebenen Graphen G, besitzt G einen Hamiltonkreis?” Ist **NP-vollständig.**

P : die Menge an Problemen, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind
NP : die Menge an Problemen, die in polynomieller Zeit verifizierbar sind

Was ist der Unterschied zwischen ‘*entscheiden*’ und ‘*verifizieren*’?

Ist **420696967** keine Primzahl? (Dieses Problem ist nicht in NP, es ist nur zur Erklärung benutzt)

Entscheidung: möglicherweise $\sqrt{420696967}$ Divisionen

Verifizierung: nur eine Division

Ein Problem Π aus **NP** ist **NP-vollständig**, falls $\Pi \in P \implies P = NP$

Das Traveling Salesman Problem (TSP)

<u>Gegeben</u>: ein kompletter Graph K_n mit n Knoten & Distanzen zw. je zwei Knoten: $l : \binom{[n]}{2} \to \mathbb{N}_0$

<u>Gesucht</u>: Kürzester Hamiltonkreis: $\underset{C:\text{Hamiltonian cycle}}{\operatorname{argmin}} \sum_{e \in C} l(e)$

Reduktion von HK Problem auf TSP $\Longrightarrow$ TSP ist **NP-vollständig**

HK reduzierbar auf TSP mit $l(e) = \begin{cases} 0 & \text{falls } e \in E \\ 1 & \text{falls } e \notin E \end{cases}$

α-Approximation: $\sum_{e \in C} l(e) \leq \alpha \cdot \operatorname{opt}(K_n, l)$

Metrisches TSP 2-Approximation

Metrisch: $l(\{x,z\}) \leq l(\{x,y\}) + l(\{y,z\}) \quad \forall x,y,z \in [n]$

Eingabe: K_n, metrische Längenfunktion l

Output: Ein Hamiltonkreis, C, sodass $l(C) \leq 2 \cdot \mathrm{opt}(K_n, l)$

Laufzeit: $O(n^2)$

1. Finde den **MST** T von G.
2. **Verdopple** alle Kanten in T
3. Bestimmt **Eulertour** W
4. **Kürze** W **ab**, sodass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Longrightarrow$ Hamiltonkreis C

Analysis

1. Für eine Kante e im Hamiltonkreis H, $H - e$ ist ein Spannbaum. Von daher: $l(T) \leq \mathrm{opt}(K_n, l)$
2. Vom Verdoppeln: $2l(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, l)$
3. Eulertour $l(W) = 2l(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, l)$
4. Abkürzen: $l(C) \leq l(W) = 2l(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, l)$