1

Es werden zwei Würfel geworfen. Sei A das Ereignis, dass die Summe der Augen ungerade ist. Sei B das Ereignis, dass die erste Zahl kleiner gleich 2 ist.

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \cap \bar{B}$.

Zuerst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit von A und B einzeln. $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, weil wir ja beim ersten Wurf eine beliebige Zahl kriegen dürfen und dann beim zweiten Wurf nur noch eine der beiden gerade/ungerade Kategorien, die beide mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{6}$ vorkommen. $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, da wir beim ersten Wurf die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}$ haben, eine Zahl kleiner gleich 2 zu werfen.

Nun überlegen wir, dass $A \cap B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5)\}$ ist und somit $\Pr[A \cap B] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$. A und B sind somit unabhängig und damit wissen wir auch, dass $\Pr[A \cap \bar{B}] = \Pr[A] \cdot \Pr[\bar{B}] = \Pr[A] \cdot (1 - \Pr[B]) = \frac{1}{3}$

Mit der Siebformel folgt dann auch, dass $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

2

Ein Test wird durchgeführt, um eine bestimmte seltene Krankheit zu diagnostizieren, die $\frac{1}{10'000}$ der Bevölkerung betrifft. Dieser Test ist recht zuverlässig und gibt in 99% der Fälle die richtige Antwort (d.h., wenn man krank ist, dann ist der Test in 99% der Fälle positiv und umgekehrt: wenn man gesund ist, dann ist der Test in 1% der Fälle positiv).

Wenn ein Patient einen positiven Test hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich krank ist?

Wir modellieren das Experiment mit folgender Ergebnismenge: $\Omega = \{(P,K),(P,G),(N,K),(N,G)\}$, wobei (P,K) für das Ereignis "Test ist positiv und der Patient ist krank", (P,G) für das Ereignis "Test ist positiv und der Patient ist gesund", (N,K) für das Ereignis "Test ist negativ und der Patient ist krank", (N,G) für das Ereignis "Test ist negativ und der Patient ist gesund" steht.

Dazu definieren wir 2 Ereignisse:

$P = \{(P,G),(P,K)\}$ das Ereignis, wenn der Test positiv ist

$K = \{(N,K),(P,K)\}$ das Ereignis, wenn der Patient krank ist

Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass $\Pr[K] = \frac{1}{10'000}$, $\Pr[P|K] = \frac{99}{100}$ und $\Pr[P|K^C] = \frac{1}{100}$. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[K|P]$, die wir mit dem Satz von Bayes finden können:

$$\Pr[K|P] = \frac{\Pr[K \cap P]}{\Pr[P]} = \frac{\Pr[P|K] \cdot \Pr[K]}{\Pr[P|K] \cdot \Pr[K] + \Pr[P|K^C] \cdot \Pr[K^C]} = \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{10'000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{10'000} + \frac{1}{100} \cdot \frac{9'999}{10'000}} \approx 0.0098$$

Wir konnten den Satz anwenden, weil K und K^C trivialerweise disjunkt sind und $P \subseteq \Omega = K \cup K^C$ ist. D.h. aber, dass wenn man einen positiven Test hat, ist man nur in knapp 1% der Fälle tatsächlich krank, was auf den ersten Blick unlogisch scheint. Jedoch wenn man sich überlegt, dass der Test knapp jede 100ste Person als krank bezeichnet und dabei nur jede 10'000ste Person krank ist, ist es nicht mehr so unlogisch. Die Teste für seltene Krankheiten müssen somit sehr akkurat sein.

Als Anreiz für die Wahrscheinlichkeiten möchte ich dazu noch erwähnen, dass diese Aufgabe 1 zu 1 aus dem Skript der 4. semestrigen Vorlesung "Wahrscheinlichkeit und Statistik" kommt. Wenn man also in AnW schon gut aufgepasst hat, dann hat man es später leichter :)

3

Es gibt 64 Mannschaften, die ein Ausscheidungsturnier spielen, also 6 Runden, und du musst die Gewinner aller 63 Spiele noch vor dem Turnier vorhersagen. D.h. du musst eine Tabelle vorlegen, wo bei jedem Spiel die zu gewinnen vorhersagte Mannschaft steht. Du fängst damit an, dass du die Gewinner ersten Runde vorhersagst, dann unter denen die Gewinner der 2. Runde usw.

Deine Punktzahl wird dann wie folgt berechnet: 64 Punkte für die richtige Vorhersage des Finalsiegers, 32 Punkte für jeden Gewinner der 5. Runde und so weiter bis hin zu 2 Punkte für jeden richtig vorhergesagten Sieger der 1. Runde. (Die maximale Punktzahl, die du erreichen kannst, ist also 384.)

Da du nichts über die Mannschaften weisst, wirfst du faire Münzen, um jede deiner 63 Wetten zu entscheiden.

Berechne die erwartete Punktzahl für deine Vorhersagen.

Seien $g_1, g_2, \ldots, g_{63}$ unsere Ereignisse, wobei jedes g_i ist das Ereignis, dass wir den Gewinner des i-ten Spiels richtig vorhergesagt haben. Wir definieren nun die Indikatorvariablen I_i für die Ereignisse $\{g_i\}$, also dafür, ob wir das i-te Spiel richtig vorhergesagt haben. Zusätzlich definieren wir auch die Variablen $X_i = 2^{r(i)} \cdot I_i$, die die Punktzahl angeben, wenn wir das i-te Spiel richtig vorhergesagt haben. Hier bezeichnet $r(i)$ die Runde vom i-ten Spiel (in der 1. Runde kriegen wir 2^1 viel Punkte, in der 2. 2^2 usw.)

Um nun den Erwartungswert auszurechnen, brauchen wir nur noch die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[g_i]$. Man überlegt sich dazu folgendes: in der 1. Runde haben wir die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu gewinnen. In der 2. Runde müssen wir nun den Gewinner in der 1. Runde schon vorhergesagt haben und jetzt auch in der 2. D.h. die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist somit $\frac{1}{2 \cdot 2}$, und allgemein kriegen wir also $\Pr[g_i] = \frac{1}{2^{r(i)}}$. Somit ist die erwartete Punktanzahl (wir verwenden die Linearität des Erwartungswertes):

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{63} X_i] = \sum\nolimits_{i=1}^{63} 2^{r(i)} \cdot \mathbb{E}[I_i] = \sum_{i=1}^{63} 2^{r(i)} \cdot \frac{1}{2^{r(i)}} = \sum_{i=1}^{63} 1 = 63$$

P.S. wir lassen dabei aus, wie Ω definiert ist. Im Skript definieren wir das meistens entweder gar nicht oder nur mit Worten, wie z.B. $\Omega = \{$alle möglichen vorhersagte Gewinner - Kombinationen$\}$. Es ist meistens klar, was damit gemeint ist. So können wir uns die Mühe sparen, mit Formalitäten zu arbeiten und können uns auf das Wesentliche fokussieren.

4

100 Prüfungen liegen auf dem Tisch, wobei zwei Fragen zu bewerten sind. Andy ist für die Benotung der ersten Frage zuständig und Patrick für die Benotung der zweiten Frage. Zunächst benotet Andy einige Prüfungen nach dem Zufallsprinzip; jede Prüfung hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,3 benotet zu werden. Patrick benotet nach dem gleichen Prinzip mit Wahrscheinlichkeit 0,5. Wir nehmen an, dass Andy und Patrick ihre Entscheidungen unabhängig voneinander treffen.

Ein "gutes Paar" ist ein Paar benachbarter Prüfungen, bei denen beide Fragen benotet werden. Sei P die Anzahl der guten Paare. Wie groß ist $\mathbb{E}[P]$?

Wir verwenden wieder das Konzept der Indikatorvariablen und zwar sei I_i die Indikatorvariable dafür, dass das i-te Paar ein gutes Paar ist ($1 \leq i \leq 99$). Dann ist $P = \sum_{i=1}^{99} I_i$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Paar ein gutes Paar ist ist gleich für alle Paare und ist $(0,3)^2 \cdot (0,5)^2$, da beide Klausuren sowohl von Andy als auch von Patrick korrigiert werden müssen. Da es insgesamt 99 mögliche Paare gibt, erhalten wir, dass $\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{99} I_i] = \sum_{i=1}^{99} \mathbb{E}[I_i] = \sum_{i=1}^{99} \Pr[i\text{-tes Paar ist ein gutes Paar}] = 99 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,5)^2 = 2,2275 \approx 2$. Dies gilt aufgrund der Linearität des Erwartungswertes.