Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Woche 12

Ilya Maier

Minitest

Minitest

Password: outplayed

Theory Recap

Anwendungen der Flüsse

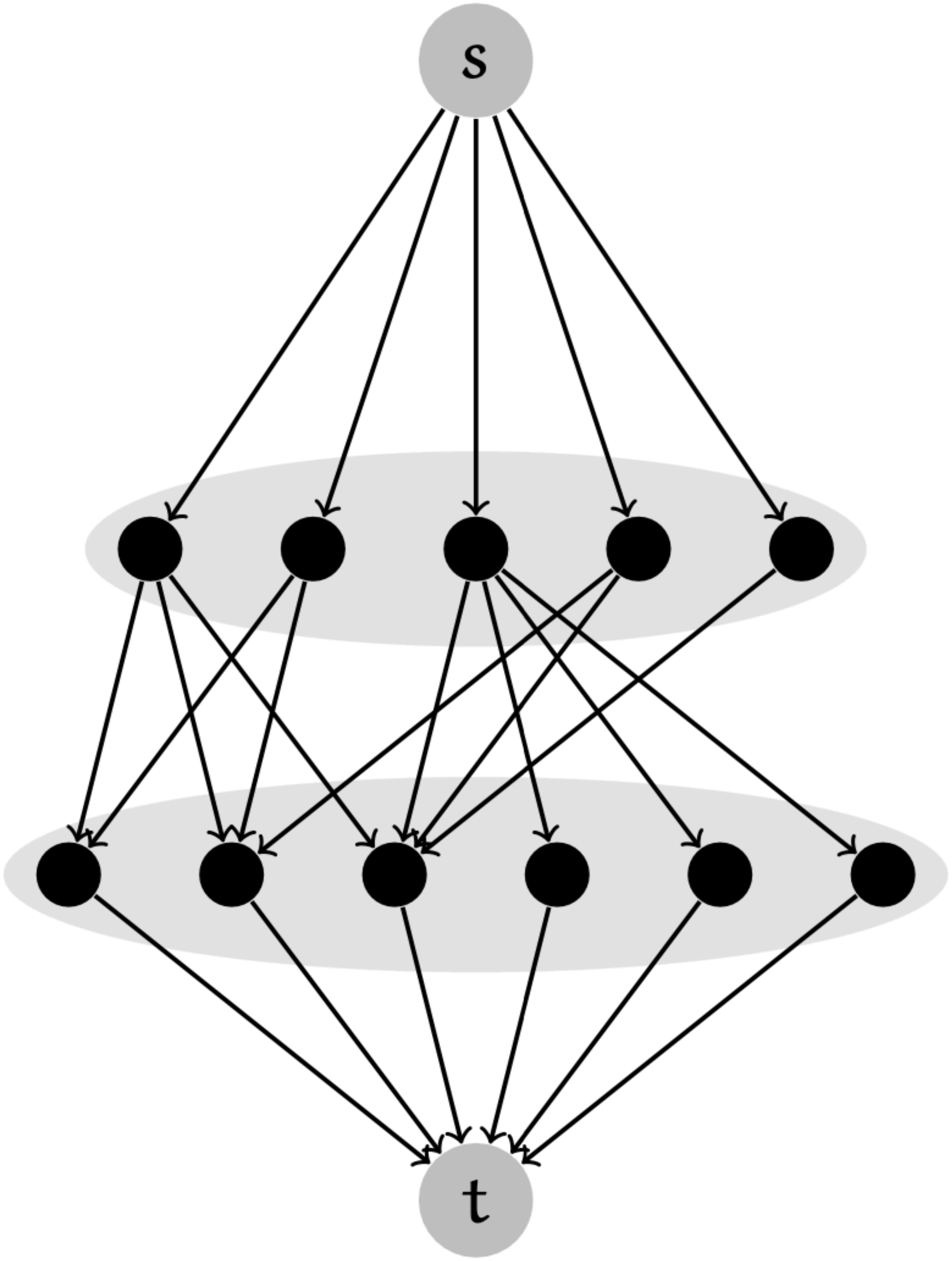
<u>**1. Matchings in bipartiten Graphen**</u>

$G = (A \uplus B, E)$
$\mapsto N_G = (V', E', 1, s, t)$

mit $V' = A \uplus B \uplus \{s, t\}$

und $E' = \{s\} \times A \quad \cup \quad \{(a, b) \in A \times B \mid \{a, b\} \in E\} \quad \cup \quad B \times \{t\}$

$$\max_{M \text{ Matching in } G} |M| = \max_{f \text{ Fluss in } N_G} \mathrm{val}(f)$$



Anwendungen der Flüsse

1. Matchings in bipartiten Graphen

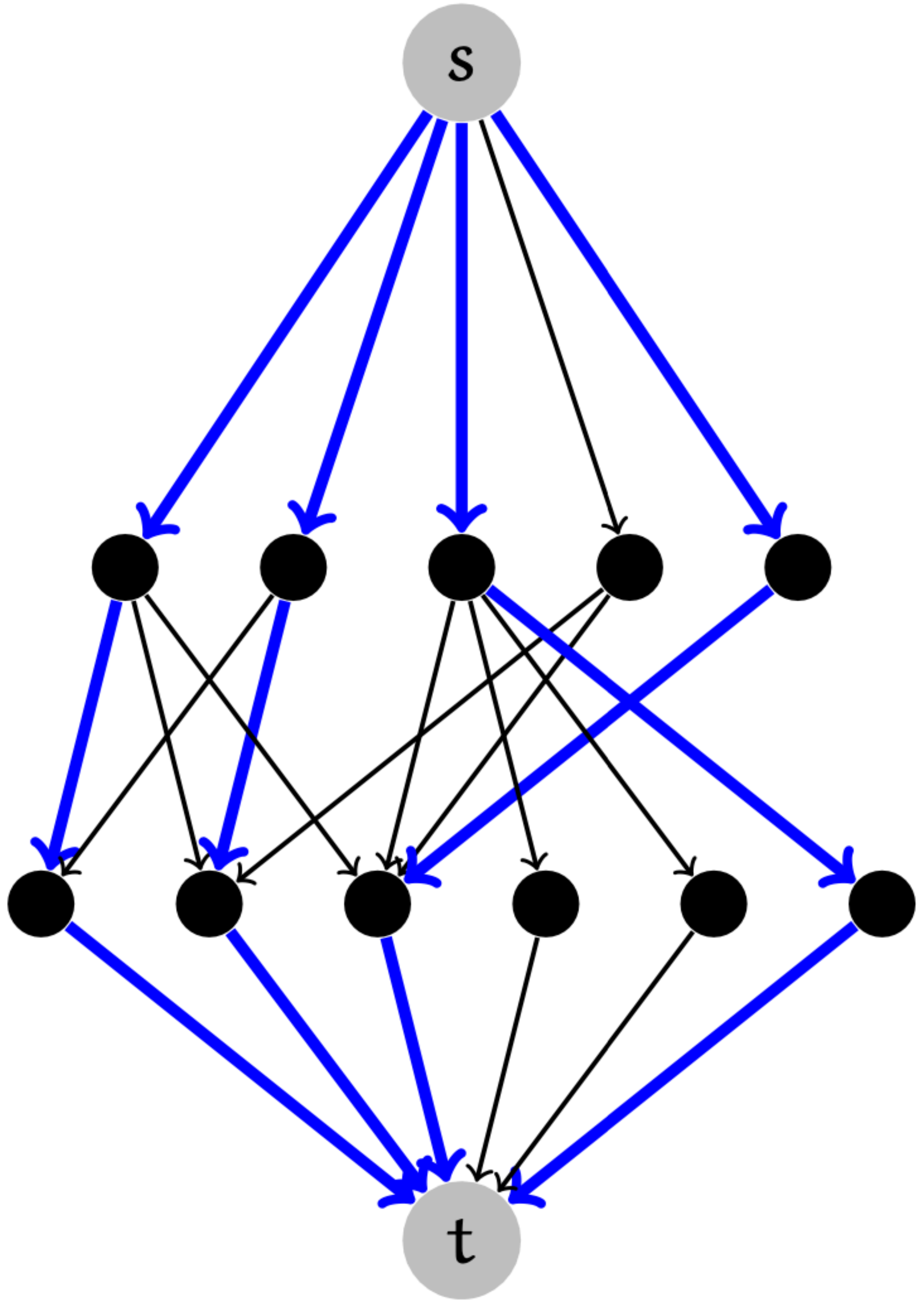
$G = (A \uplus B, E)$

$\mapsto N_G = (V', E', 1, s, t)$

mit $V' = A \uplus B \uplus \{s, t\}$

und $E' = \{s\} \times A \quad \cup \quad \{(a, b) \in A \times B \mid \{a, b\} \in E\} \quad \cup \quad B \times \{t\}$

$$\max_{M \text{ Matching in } G} |M| = \max_{f \text{ Fluss in } N_G} \mathrm{val}(f)$$



Anwendungen der Flüsse

2. Kantendisjunkte Pfade

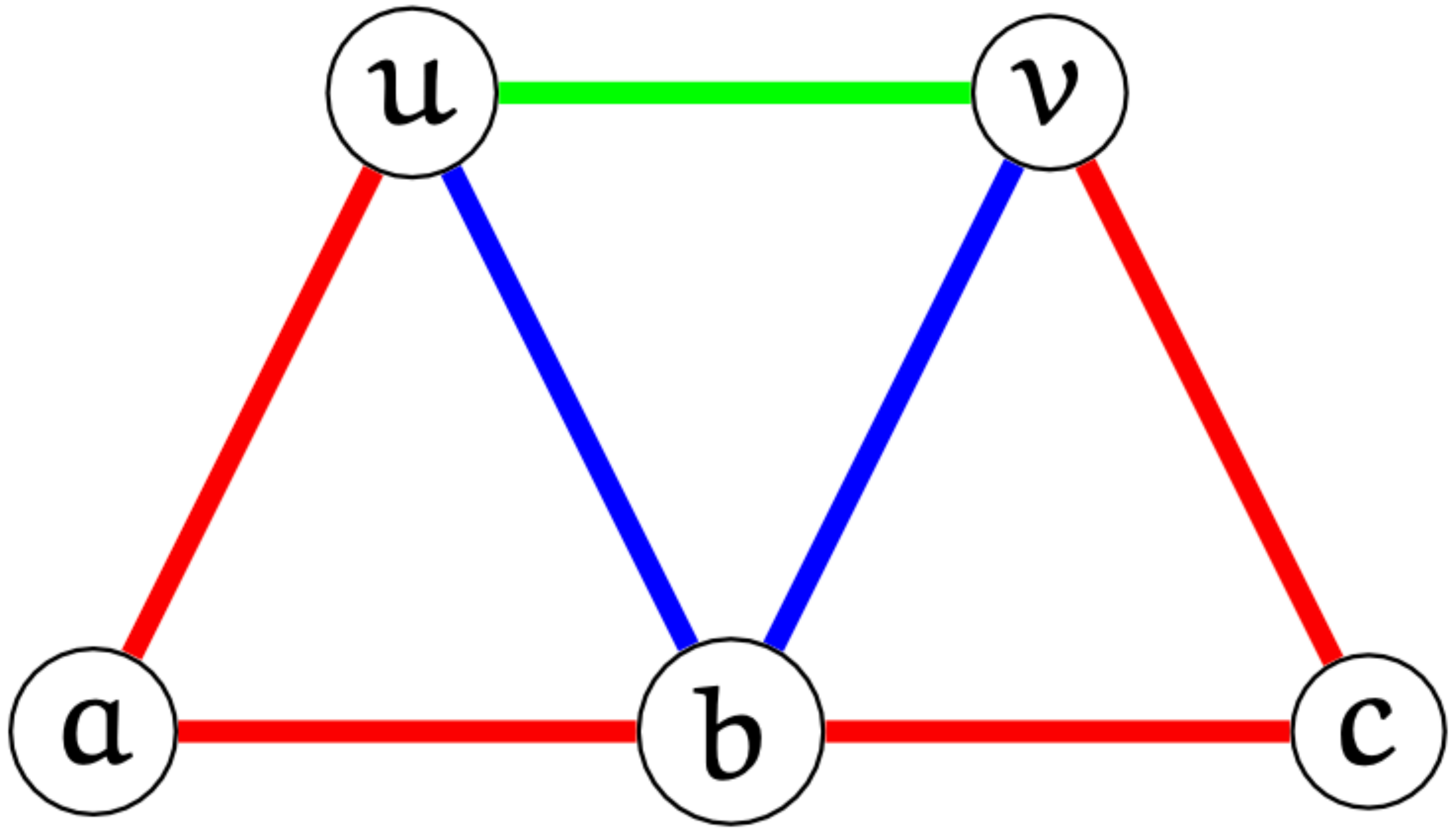
$G = (V, E), u, v \in V$

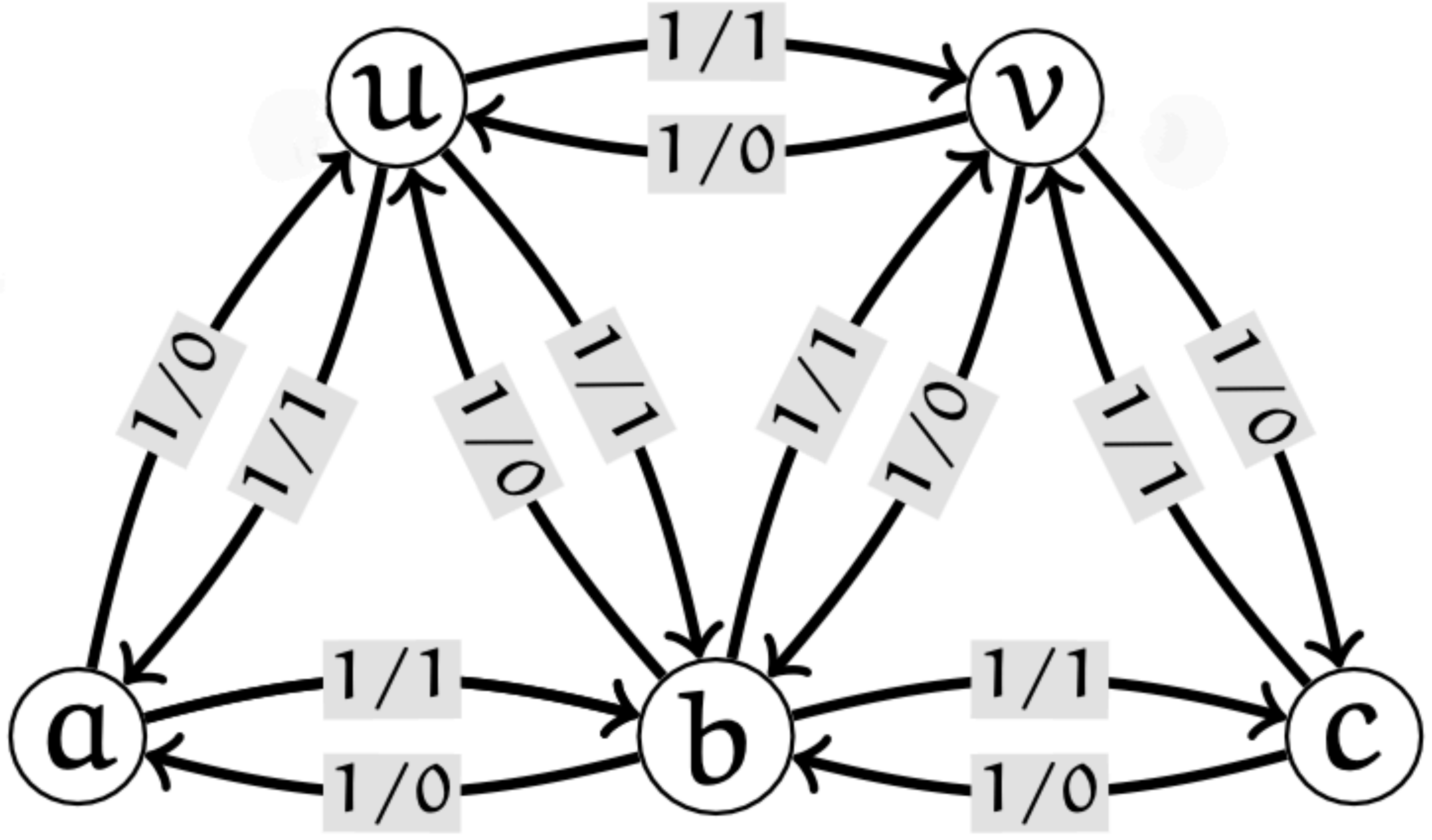
$\mapsto N_G = (V, \{(x, y), (y, x) \mid \{x, y\} \in E\}, 1, u, v)$

1. Finde ganzzahligen maximalen Fluss
2. Starte bei u und finde einen Pfad nach v durch noch nicht besuchte Kanten mit Fluss 1.
3. Markiere die Kanten besucht
4. Wiederhole val(f) mal

$\max\limits_{f \text{ Fluss in } N_G}$ val$(f) = \max$ #Kantendisjunkter Pfade zwischen u und v in $G = \min$ #Kanten, die u und v trennen

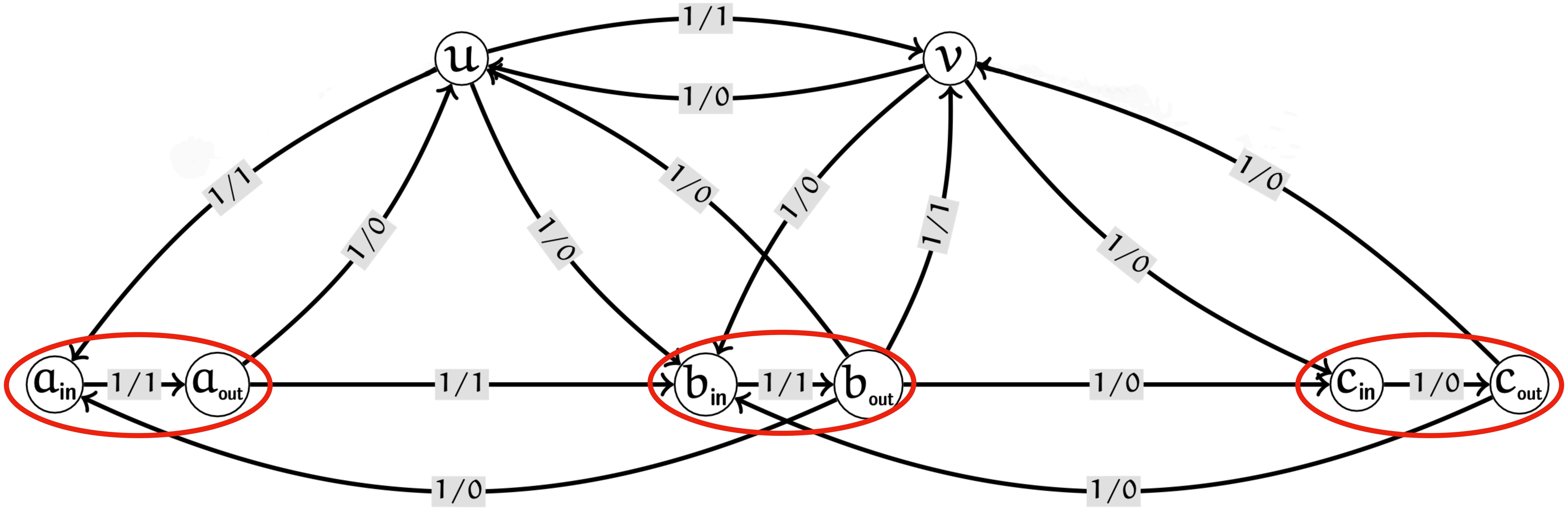
Anwendungen der Flüsse





Anwendungen der Flüsse

Knoten - disjunkte Pfade:



Anwendungen der Flüsse

3. Bildsegmentierung

Bild: ein Graph $G = (P, E)$ mit $\chi : P \to$ Farben

$\alpha : P \to \mathbb{R}_0^+$ α_p größer $\Longrightarrow$ eher im Vordergrund

$\beta : P \to \mathbb{R}_0^+$ β_p größer $\Longrightarrow$ eher im Hintergrund

$\gamma : E \to \mathbb{R}_0^+$ γ_e größer $\Longrightarrow$ eher im gleichen Teil

Qualitätsfunktion: $q(A, B) := \sum_{p \in A} \alpha_p + \sum_{p \in B} \beta_p - \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e$

Gesucht: eine Vorder-/Hintergrundspartition (A, B) die $q(A, B)$ maximiert

Anwendungen der Flüsse

$$
\begin{aligned}
\max q(A, B) &= \max\Big(\sum_{p \in A} \alpha_p + \sum_{p \in B} \beta_p - \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e \Big) \\
&= \max\Big(\sum_{p \in P} (\alpha_p + \beta_p) - \sum_{p \in A} \beta_p - \sum_{p \in B} \alpha_p - \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e \Big) \\
&= \sum_{p \in P} (\alpha_p + \beta_p) - \min\Big(\sum_{p \in A} \beta_p + \sum_{p \in B} \alpha_p + \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e \Big) \\
&=: \sum_{p \in P} (\alpha_p + \beta_p) - \min q'(A, B)
\end{aligned}
$$

Anwendungen der Flüsse

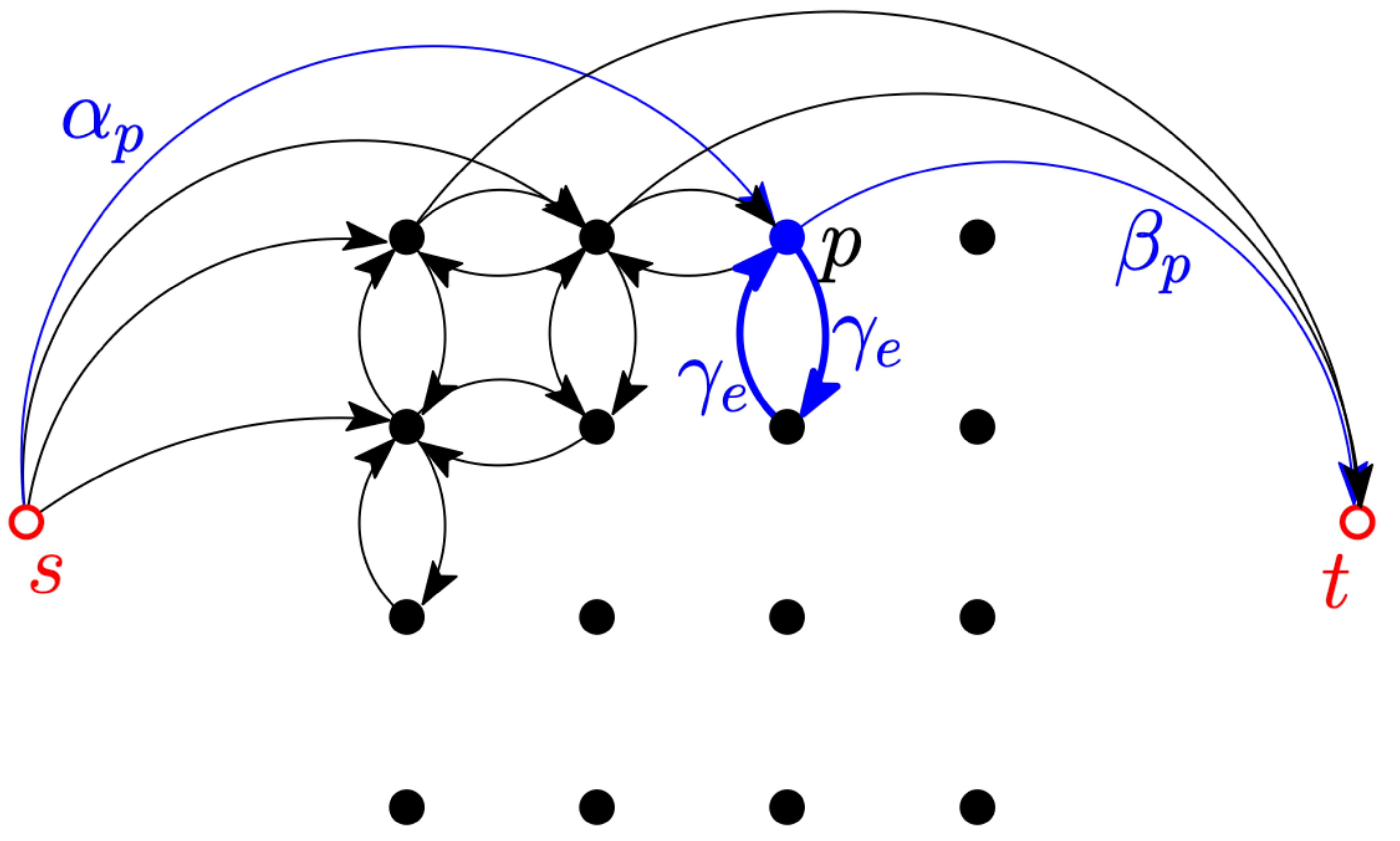
3. Bildsegmentierung

Bild: ein Graph $G = (P, E)$ mit $\chi : P \to$ Farben

$\alpha : P \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad \alpha_p$ größer $\Longrightarrow$ eher im Vordergrund

$\beta : P \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad \beta_p$ größer $\Longrightarrow$ eher im Hintergrund

$\gamma : E \to \mathbb{R}_0^+$ $\quad \gamma_e$ größer $\Longrightarrow$ eher im gleichen Teil



$$\mapsto N = (P \cup \{s, t\}, \overrightarrow{E}, c, s, t)$$

$$\forall p \in P, \exists (s, p) \in \overrightarrow{E} : c(s, p) = \alpha_p$$

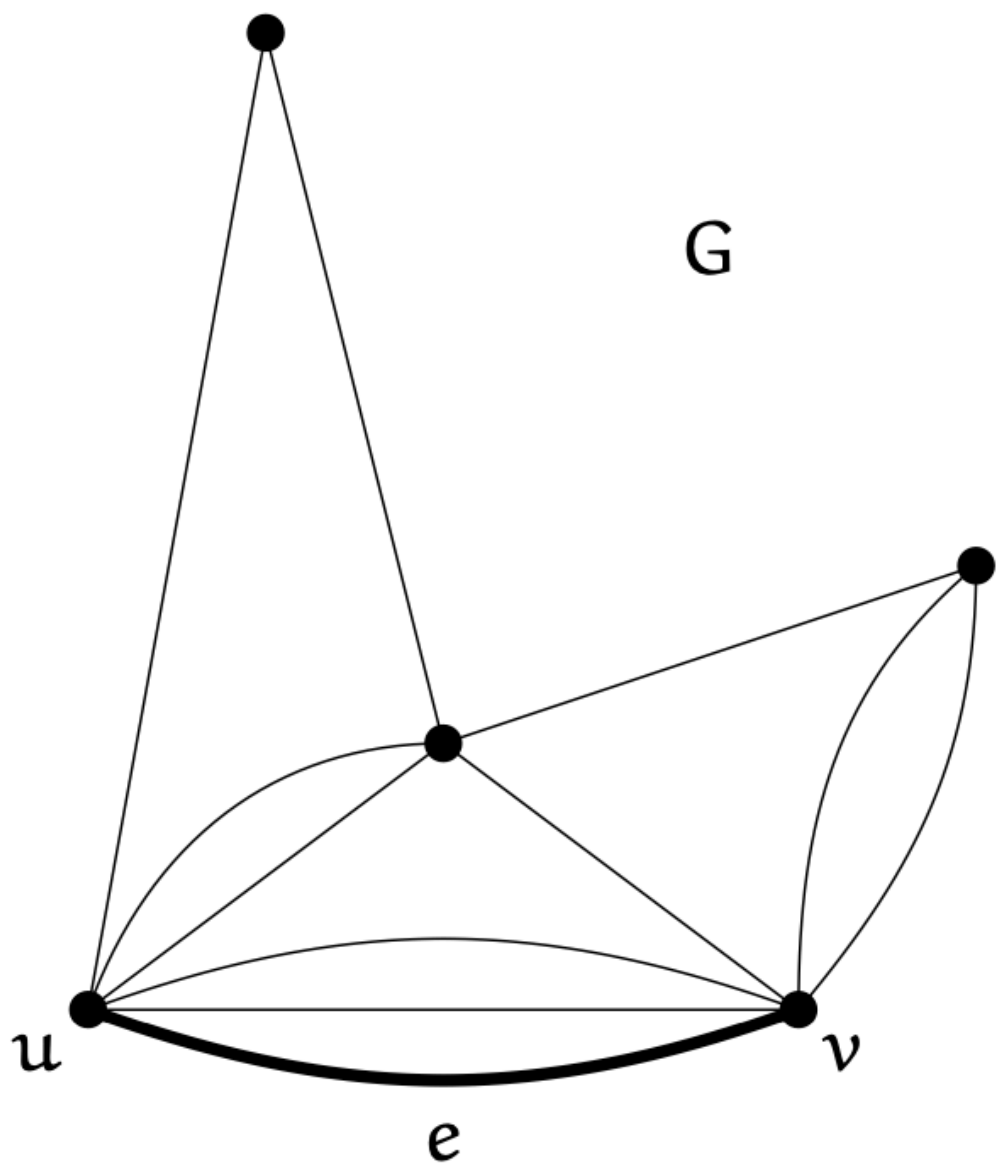
$$\forall p \in P, \exists (p, t) \in \overrightarrow{E} : c(p, t) = \beta_p$$

$$\forall e = \{p, p'\} \in E, \exists (p, p'), (p', p) \in \overrightarrow{E} : c(p, p') = c(p', p) = \gamma_e$$

für $A := S \backslash \{s\}$ und $B := T \backslash \{t\}$, $q'(A, B) = \text{cap}(S, T)$

$\to$ Mithilfe Maxflow Mincut finden!

Min-Cut Problem



Gegeben: Ein Multigraph G

Gesucht: $\mu(G) :=$ die Größe minimales Kantenschnitts

Kantenschnitt: Eine Kantenmenge C, s.d. $(V, E \backslash C)$ nicht zusammenhängend

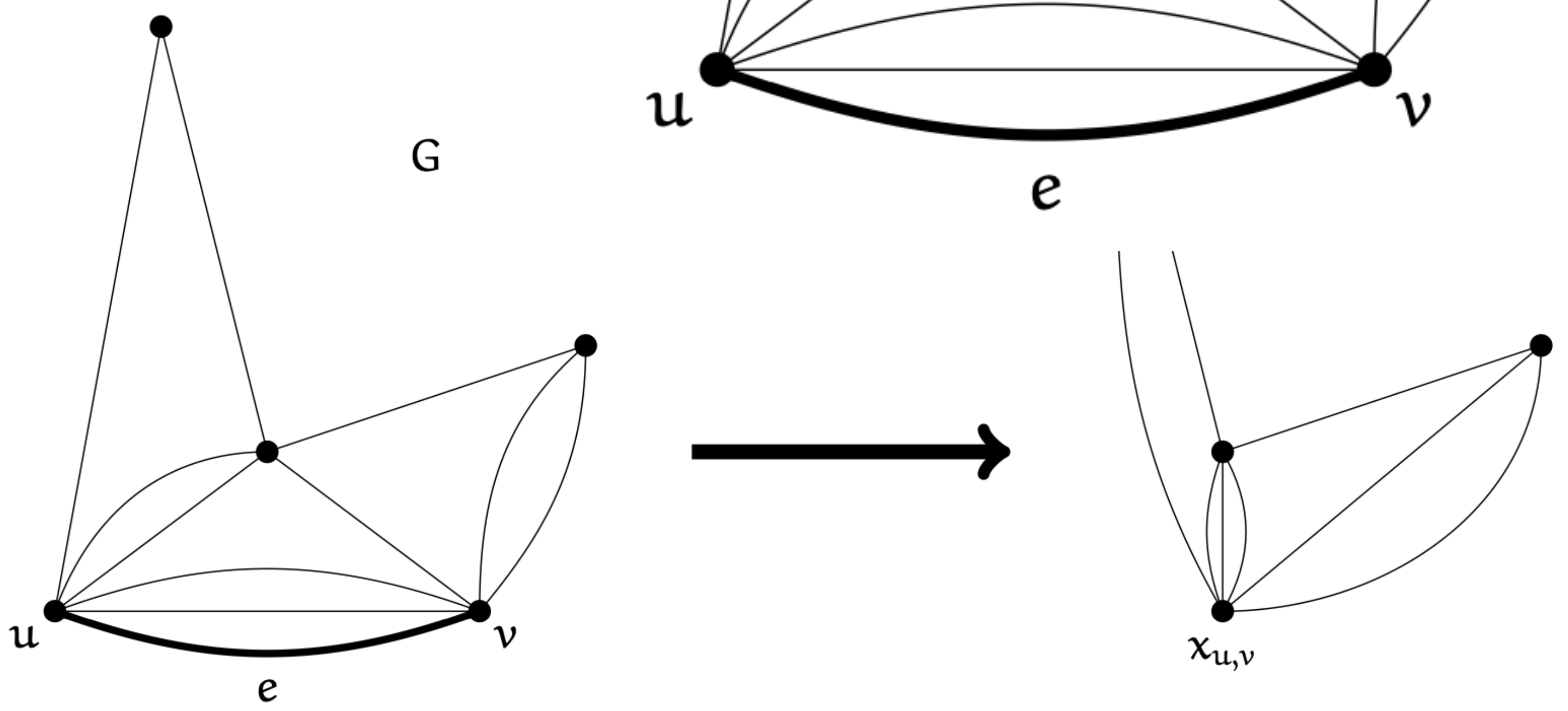
Ansatz 1: Mittels Flüsse (Dynamic trees)

$(n-1) \cdot \mathcal{O}(mn \log n) = \mathcal{O}(mn^2 \log n) = \mathcal{O}(n^4 \log n)$

Ansatz 2: Mittels Kantenkontraktion

Kantenkontrakion: Kontrahiere e von $G \to G/e$

- $\mu(G/e) \geq \mu(G)$
- $e \notin C \Longrightarrow \mu(G/e) = \mu(G)$



Min-Cut Problem

Cut(G)

1) $G' \leftarrow G$

2) **while** $|V(G')| > 2$ **do**

3) $e \leftarrow$ gleichverteilt zufällige Kante in G'

4) $G' \leftarrow G'/e$

5) **return** Größe des eindeutigen Schnitts in G'

Laufzeit: $O(n^2)$ wobei $n = |V(G)|$

Sei $p(G)$ die Erfolgswahrscheinlichkeit, also

$$p(G) := \Pr[\text{Cut}(G) = \mu(G)]$$

$$p(n) := \min_{G=(V,E),|V|=n} p(G)$$

$$\rightarrow p(G) \geq p(|V(G)|)$$

Lemmas

1) Wenn e gleichverteilt zufällig ist, $\Pr[\mu(G) = \mu(G/e)] \geq 1 - \frac{2}{n}$

2) $\forall n \geq 3 : p(n) \geq \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot p(n-1)$

3) $p(n) \geq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{1}{3} \cdot p(2) = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{\binom{n}{2}}$

Min-Cut Problem

<u>**Monte Carlo Wiederholungen von Cut**</u>

1) Wir wiederholen Cut(G) $\lambda\binom{n}{2}$ mal und nehmen den kleinsten Wert

2) <u>Laufzeit</u>: $\lambda\binom{n}{2} \cdot O(n^2) = O(\lambda n^4)$

3) <u>Fehlerwahrscheinlichkeit</u>: $\left(1 - \frac{1}{\binom{n}{2}}\right)^{\lambda\binom{n}{2}} \leq e^{-\lambda}$

4) Wenn $\lambda = \log n$, ist die Laufzeit $O(n^4 \log n)$ mit Fehlerw-keit $\leq 1/n$

Bootstrapping

n n-1 n-2 n-3 ... ... 4 3 2 $\rightarrow$ **Korrekter Output W-keit** $\geq \dfrac{1}{\binom{n}{2}}$

Bootstrapping

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

$\vdots$

n n-1 n-2 n-3 … … 4 3 2

$\lambda \binom{n}{2}$ **mal** $\rightarrow$ **F.W-keit** $\leq e^{-\lambda}$

Bootstrapping

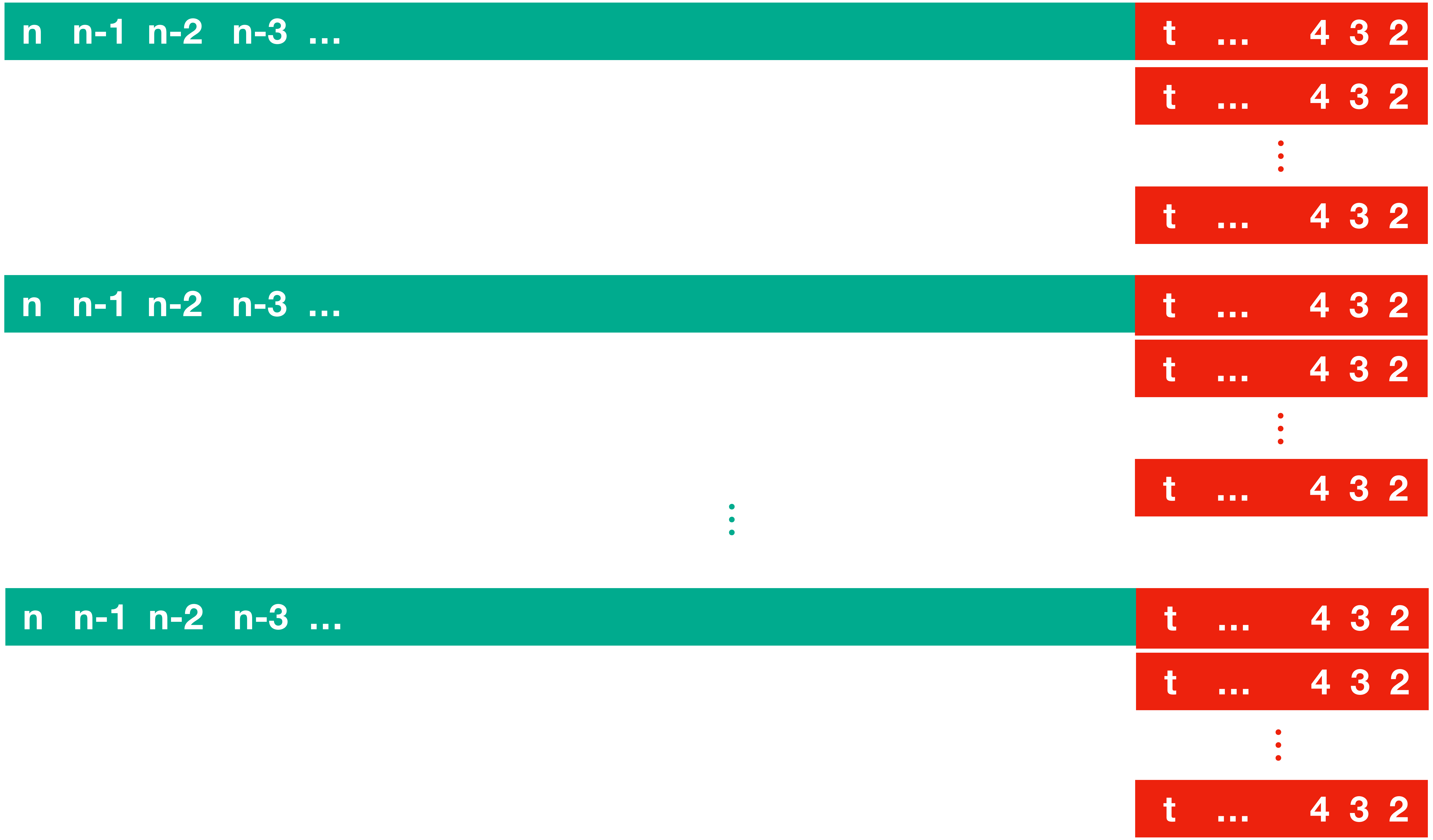
Bootstrapping

$\lambda \binom{n}{2}$ **mal**

t^4 **Algo**

$\rightarrow$ **K.W-keit** $\geq \dfrac{t(t-1)}{n(n-1)} \dfrac{e-1}{e}$

Bootstrapping



$\lambda \frac{n(n-1)}{t(t-1)} \frac{e}{e-1}$ **mal**

$\rightarrow$ **F.W-keit** $\leq e^{-\lambda}$

Laufzeit: $\overbrace{\lambda \frac{n(n-1)}{t(t-1)} \frac{e}{e-1}}^{\text{\#Wiederholungen}} \mathcal{O}(\underbrace{n(n-t)}_{\text{Reduktion auf } t \text{ Knoten}} + \overbrace{t^4}^{\text{Algo auf } t \text{ Knoten}}) = \mathcal{O}(\lambda(n^4/t^2 + n^2t^2)) \Longrightarrow_{\min} \mathcal{O}(\lambda n^3)$ when $t = \sqrt{n}$

Aufgaben

Code Expert

Aufgabe 1: 2/3 Überdeckung

Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph. Wir nennen eine Teilmenge der Kanten $U \subseteq E$ eine 2/3 - Überdeckung von G, falls für den Graphen $G' = (A \uplus B, U)$ folgendes gilt: $\deg_{G'}(a) = 2$ für alle $a \in A$ und $\deg_{G'}(b) = 3$ für alle $b \in B$.

Ein perfektes Matching entspricht einer 1/1 - Überdeckung

Aufgabe: beschreibe einen Algorithmus, der, gegeben $G = (A \uplus B, E)$, entscheidet, ob es eine eine 2/3 - Überdeckung von G gibt.

Aufgabe 2: Satz von Hall

Satz von Hall (Heiratssatz)

Ein bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$ hat ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$ **gdw.** $\forall X \subseteq A : |X| \leq |\mathcal{N}(X)|$

Aufgabe: Beweise den Satz von Hall mittels Flüsse.

Aufgabe 3: Mincut

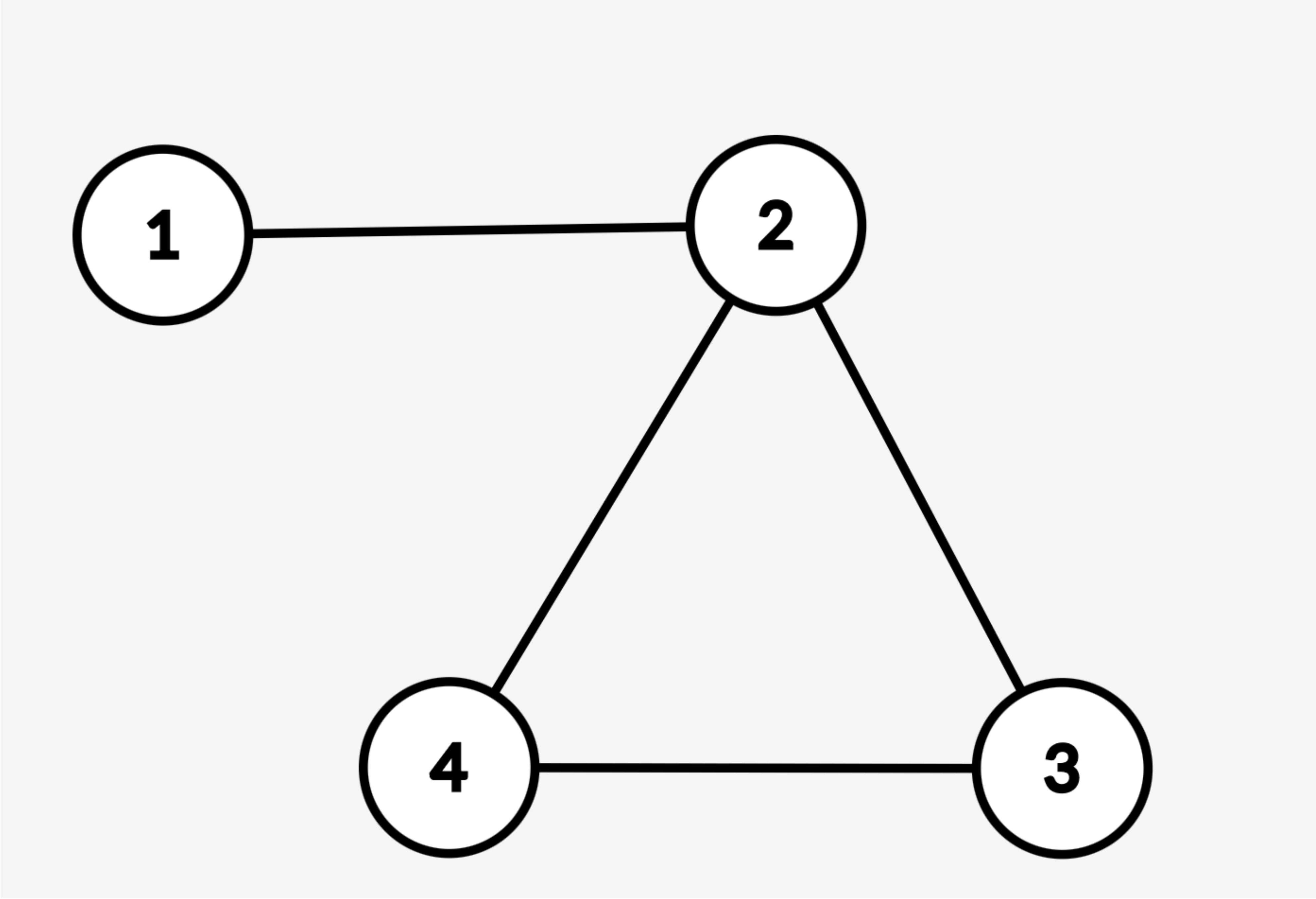
Was ist $\Pr[\mu(G/e) = \mu(G)]$ für e zufällig gleichverteilt im folgenden Graphen

a) 1/4

b) 1/2

c) 3/4

d) 1



Aufgabe 3: Mincut

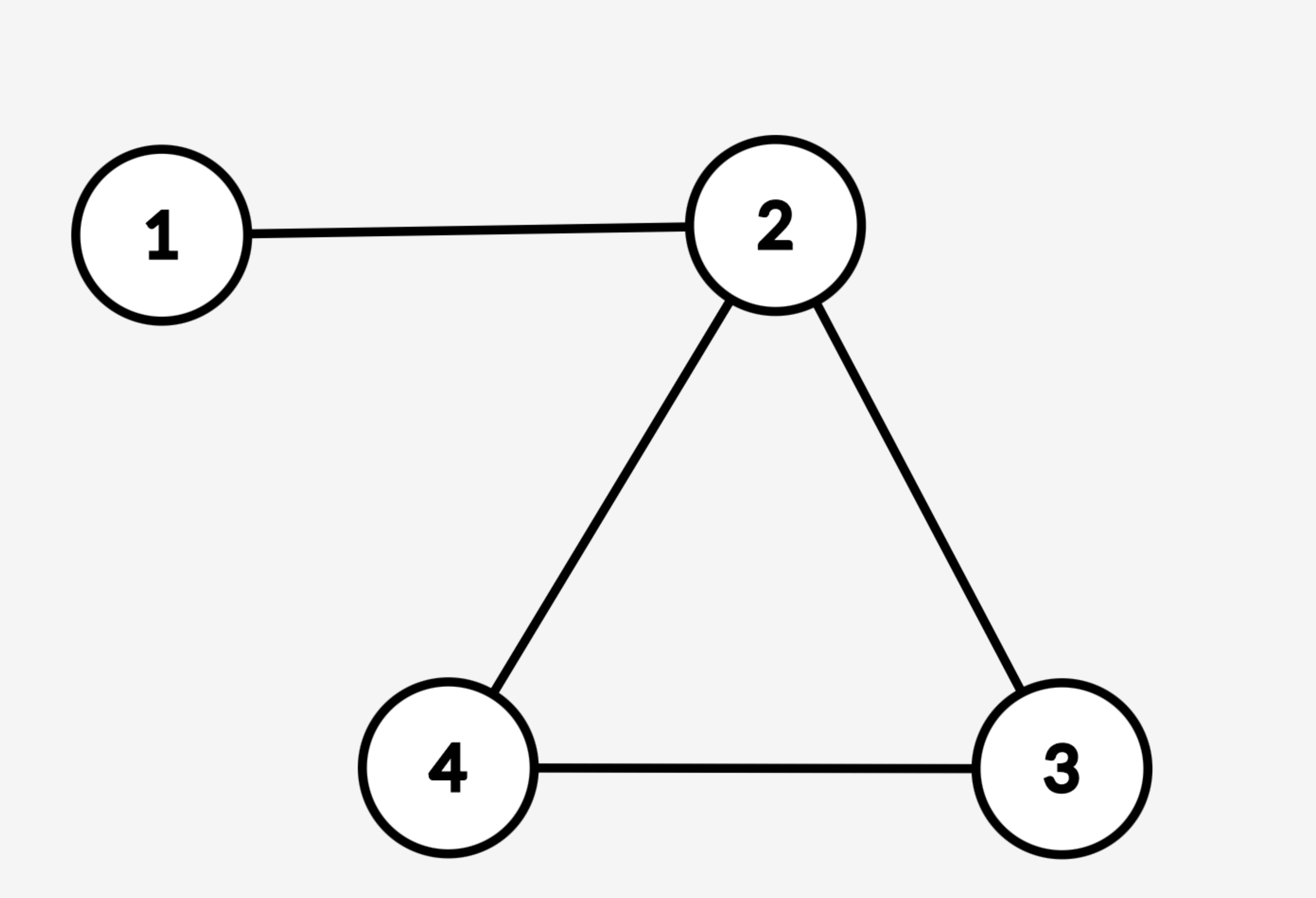
Was ist $\Pr[\mu(G/e) = \mu(G)]$ für e zufällig gleichverteilt im folgenden Graphen

a) 1/4

b) 1/2

c) 3/4

d) 1



Man darf die Kante $\{1{,}2\}$ nicht kontrahieren