1

Zeige, dass jeder Baum höchstens ein perfektes Matching hat.

Erstmal überlegen wir uns, dass jeder Baum auf $n > 1$ Knoten mindestens ein Blatt (also einen Knoten v mit $\deg(v) = 1$) haben muss. Wir können uns das wie folgt überlegen: wenn man BFS von einem beliebigen Knoten startet, kann das BFS nie auf einen schon besuchten Knoten kommen, weil sonst hätten wir einen Kreis. Somit muss BFS irgendwann aufhören, also auf einen Knoten stossen, der Grad 1 hat, also ein Blatt.

Wenn es in G ein perfektes Matching gibt, dann muss jedes Blatt v und sein Nachbar u in dem Matching ($\{u, v\} \in M$) sein, ansonsten wäre ja v nicht überdeckt und M wäre kein perfektes Matching. Somit können wir immer ein Blatt in G finden, dann die Knoten u und v und alle inzidenten Kanten aus G löschen und den Algorithmus auf allen Zusammenhangskomponenten von G wieder anwenden bis die Knotenmenge leer ist. Bzw. bis es einen isolierten Knoten gibt, was dann bedeutet, dass es kein perfektes Matching geben kann. So erhalten wir iterativ das einzige perfekte Matching, falls es das gibt. Es ist klar, dass es das einzige perfekte Matching ist, weil jede Kante, die wir zum Matching hinzugefügt haben, in jedem perfekten Matching sein muss, wie oben begründet. Also können wir keine Kante in unserem Matching entfernen oder ersetzen.

2

Wie viele perfekte Matchings gibt es in K_{2m}?

Wir beantworten die Frage auf zwei Weisen:

Variante 1: Wir konstruieren alle möglichen Matchings. Also fangen wir mit $M = \emptyset$ and und fügen eine beliebige Kante zu dem Matching hinzu. Dafür gibt es $\frac{2m(2m-1)}{2}$ Möglichkeiten. Dann entfernen wir die 2 Knoten und alle inzidenten Kanten und erhalten einen kompletten Graphen auf $2m-2$ Knoten K_{2m-2}. Dann wiederholen wir das ganze, bis wir einen leeren Graphen erhalten. Wir erhalten somit

$$\frac{2m(2m-1)}{2} \cdot \frac{(2m-2)(2m-3)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{(2m)!}{2^m}$$

viele perfekte Matchings. Nun haben wir aber einige Matchings mehrmals gezählt, da es für jedes Matching $m!$ viele Permutationen gibt ($|M| = m$). Somit ist die endgültige Anzahl der Matchings

$$\frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$$

Variante 2: Wir können auf das gleiche Resultat kommen, in dem wir vom Anfang an die Permutationen berücksichtigen. Dafür müssen wir dann einfach immer den Knoten mit dem kleinsten Index in jedem Schritt nehmen und uns nur die Kanten von diesem Knoten anschauen. Somit haben wir im ersten Schritt $2m - 1$ viele Möglichkeiten, im zweiten Schritt $2m - 3$ usw. Somit ist die gesamte Anzahl der perfekten Matchings gleich

$$\frac{(2m-1) \cdot (2m-3) \cdot \ldots \cdot 1}{1} \cdot \frac{2m \cdot (2m-2) \cdot \ldots \cdot 2}{2m \cdot (2m-2) \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{(2m!)}{2(m) \cdot 2(m-1) \cdot \ldots \cdot 2(1)} = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$$

3

Seien M und N zwei Matchings im Graphen G mit $|M| > |N|$. Zeige, dass es zwei Matchings M' und N' gibt mit $|M'| = |M| - 1$ und $|N'| = |N| + 1$, s.d. $M \cup N = M' \cup N'$ und $M \cap N = M' \cap N'$.

Wir wenden den Satz von Berge an, der besagt, dass es mindestens einen N-augmentierenden Pfad geben muss. Insbesondere hat $M \oplus N$ mindestens einen N-augmentierenden Pfad. Sei dieser Pfad $P = E_M \dot\cup E_N$, wobei E_M Kanten von diesem Pfad aus dem Matching M sind und analog für E_N. Dann gilt, dass $|E_M| = |E_N| + 1$, weil der augmentierende Pfad sowohl mit einer Kante aus M anfängt als auch endet. Somit können wir folgende zwei Matchings erstellen: $M' = M \oplus P$ und $N' = N \oplus P$. Somit haben wir die Kanten auf dem Pfad P zwischen M zu N ausgetauscht. Somit gilt, dass $|M'| = |M| - 1$ und $|N'| = |N| + 1$. Da wir dazu auch nur die Kanten aus P ausgetauscht haben und $E_M \cap E_N = \emptyset$, gilt $M \cap N = M' \cap N'$. Und genauso erhalten wir, dass $M \cup N = M' \cup N'$.