Д. Условие коммутативности потоков. Пусть $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ – векторные поля на многообразии M.

Т е о р е м а. *Два потока A^t, B^s коммутируют тогда и только тогда, когда скобка Пуассона соответствующих векторных полей $[\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B}]$ равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если $A^t B^s \equiv B^s A^t$ то по лемме 1 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$ Если $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$ то по лемме 1 для любой функции φ в любой точке x

$$\varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x) = o(s^2 + t^2), \quad s \to 0, t \to 0$$

Мы покажем, что отсюда вытекает $\varphi(A^t B^s x) = \varphi(B^s A^t x)$ при доста- точно малых s и t.

Применяя это соотношение к локальным координатам $(\varphi = x_1, \ldots, \varphi = x_n)$, получим $A^t B^s \equiv B^s A^t$,

Рассомтрим прямоугольник $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$ (рис. 170) на плоскости (t, s). Каждому пути, ведущему из $(0, 0)$ в (t_0, t_0) и состоящему из конечного числа отрезков координатных направлений, сопоставим произведение преобразований потоков A^t и B^s.