Задание к семинару №10

Решить двумерное однородное уравнение теплопроводности с граничными условиями Дирихле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u(x, y, 0) = \mu(x, y) \\ u(0, y, t) = \mu(0, y), \qquad u(a, y, t) = \mu(a, y) \\ u(x, 0, t) = \mu(x, 0), \qquad u(x, b, t) = \mu(x, b) \end{cases} \tag{1}$$

в области $(x, y, t) \in [0; a] \times [0; b] \times [0; T]$.

Функция $\mu(x, y)$ задается следующим образом (`x` и `y` - вектора, содержащие координаты узлов прямоугольной сетки):

```
import numpy as np

def mu(x, y):
        z = np.zeros((len(y), len(x)))
        for i in range(len(x)):
          for j in range(len(y)):
            z[j, i] = -0.01 * np.sin(x[i]) + 0.05 * np.sin(y[j])
        return z
```

Параметры области: $a = 6\pi$, $b = 4\pi$, $T = 10$. Выбрать равномерную сетку с $h_x = h_y = \pi/30$ и шагом по времени $\tau = 0.1$. Коэффициент теплопроводности $k = 0.2$.

Указания

Для решения использовать эволюционно-факторизованную схему

$$\begin{cases} \left(E - \dfrac{\tau}{2}\Lambda_x\right)\nu = \Lambda_x u + \Lambda_y u \\ \left(E - \dfrac{\tau}{2}\Lambda_y\right)\Delta u = \nu \\ \hat{u} = u + \tau \Delta u \end{cases} . \tag{2}$$

Здесь Λ_x и Λ_y - операторы пространственного дифференцирования. Проблем с промежуточным граничным условием здесь не возникает, так как u на границе не меняется со временем, а значит на границе $\hat{u} - u = 0$ и $\nu = 0$.

Операторы $P_x = E - \frac{\tau}{2}\Lambda_x$ и $P_y = E - \frac{\tau}{2}\Lambda_y$ могут быть записаны в матричной форме с помощью замены Λ_x и Λ_y на соответствующие матрицы пространственного дифференцирования L_x и L_y. При этом надо помнить, что

$$\begin{aligned} \Lambda_x u &= u L_x \\ \Lambda_y u &= L_y u \end{aligned}, \tag{3}$$

т.е. матрицы пространственного дифференцирования L_x и L_y умножаются на матрицу значений в узлах сетки u с разных сторон. Аналогично при обращении операторов P_x и P_y надо использовать правое и левое матричное деление соответственно.

Не следует применять операторы пространственного дифференцирования Λ_x и Λ_y к крайним строкам и столбцам матрицы u, так как в таком случае в Δu в крайних строках и столбцах будут содержаться ненулевые значения, что приведет к нарушению граничных условий в расчете.

Примечание

Отображать двумерное решение на каждом временном слое можно с помощью функции `mesh`.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

x = np.linspace(0, 6*np.pi, 100)
y = np.linspace(0, 4*np.pi, 100)
x, y = np.meshgrid(x, y)
z = -0.01 * np.sin(x) + 0.05 * np.sin(y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

ax.plot_surface(x, y, z, cmap='viridis')

ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('U')

plt.show()
```