КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Метод ячеек

Приближенная оценка двукратного интеграла по прямоугольной области может быть дана следующим образом

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \approx S\ f(\bar{x},\bar{y})\ , \tag{6.1}$$

где $S=(b-a)(d-c),\quad \bar{x}=\dfrac{a+b}{2},\ \bar{y}=\dfrac{c+d}{2}$ - координаты центра прямоугольника площади S.

Для повышения точности разобьем область интегрирования на прямоугольные ячейки системой линий, параллельных осям координат, и построим обобщенную квадратурную формулу

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \approx \sum_i S_i\, f(\bar{x}_i,\bar{y}_i), \tag{6.2}$$

где $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ - координаты центра прямоугольной ячейки.

Оценим погрешность интегрирования. Пусть в обобщенной квадратурной формуле (6.2) стороны прямоугольника разбиты соответственно на N и M равных частей. Тогда погрешность этой формулы для единичной ячейки

$$R_i \approx \frac{1}{24} S_i [(\frac{b-a}{N})^2 f''_{xx} + (\frac{d-c}{M})^2 f''_{yy}]$$

.

Суммируя погрешность по всем ячейкам, получим суммарную погрешность

$$R_\Sigma = \frac{1}{24}[(\frac{b-a}{N})^2 \iint_G f''_{xx}dxdy + (\frac{d-c}{M})^2 \iint_G f''_{yy}dxdy] = O(N^{-2}+M^{-2})\,.$$

т.е. формула имеет второй порядок точности.

Если граница области интегрирования G криволинейная, то формулу (6.2) применяют, накладывая на область G прямоугольную сетку. Все ячейки разделяют на внутренние и граничные. Площадь внутренней ячейки равна произведению ее сторон.

Площадь граничной ячейки вычисляют приближенно, заменяя в пределах данной ячейки истинную границу области хордой. Значения этих площадей подставляют в (6.2).

Погрешность формулы (6.2) при этом будет такой. В каждой внутренней ячейке ошибка составляет $O(N^{-2})$, в каждой граничной ячейке относительная ошибка есть $O(N^{-1})$, так как центр тяжести прямоугольной ячейки не совпадает с центром тяжести входящей в интеграл части. Но граничных ячеек примерно в N раз меньше чем внутренних. Поэтому общая погрешность будет $O(N^{-2})$, т.е. имеем второй порядок точности.

Можно граничные ячейки вообще не включать в сумму. Погрешность при этом будет $O(N^{-1})$.

6.2. Последовательное интегрирование

Рассмотрим интеграл по прямоугольной области

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx \,, \tag{6.3}$$

где

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \,.$$

По каждой координате введем сетку узлов. Каждый однократный интеграл вычисляют на данной сетке по квадратурным формулам:

$$I = \sum_i A_i F(\, x_i \,) \,, \quad \text{где} \quad F(x_i) = \sum_j \bar{A}_j f(x_i, y_j) \,.$$

Тогда

$$I = \sum_i \sum_j A_i \bar{A}_j f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j g_{ij} f(x_i, y_j) \,.$$

Для разных направлений можно использовать квадратурные формулы разных порядков точности (трапеций, прямоугольников, средних, Симпсона и т.д.).

Можно также использовать формулы Гаусса, тогда

$$g_{ij} = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)\gamma_i\gamma_j \ ,$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i \ , \qquad y_j = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}\xi_j \ , \qquad 1 \le i, j \le n \ ,$$

где $\xi_i, \xi_j, \gamma_i, \gamma_j$ - нули многочленов Лежандра и веса формулы Гаусса.

Теперь пусть область интегрирования ограничена непрерывными однозначными кривыми

$$y = \varphi(x), y = \psi(x) \qquad (\varphi(x) < \psi(x))$$

и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$.

Имеем

$$I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b F(x)dx \ ,$$

где

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \ .$$

Отсюда

$$I = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i) \ , \ F(x_i) = \int\limits_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y)dy \approx \sum_{j=1}^{m} B_{ij} f(x_i, y_j) \quad ,$$

$$I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j) \ ,$$

где A_i, B_{ij} - известные постоянные.

Пример. Получить кубатурную формулу для вычисления двукратного интеграла $\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)dxdy$, используя по каждому направлению формулу Симпсона.

Пусть областью интегрирования является прямоугольник со сторонами (b-a) и (d-c). Разобьем каждую сторону данного прямоугольника на N и M интервалов, т.е. введем на каждой границе области сетку с N+1 и M+1 узлами. Соответствующие шаги сетки

$$h_x = \frac{b-a}{N}, \quad h_y = \frac{d-c}{M} \quad .$$

Согласно (6.3) получим

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b F(x)\,dx = \\ = \frac{h_x}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(F_{2i} + 4F_{2i+1} + F_{2i+2}\right), \tag{6.4}$$

где каждое слагаемое под знаком суммы

$$F_k = \int_c^d f(x_k, y)\,dy = \frac{h_y}{3} \sum_{j=0}^{M/2-1} \left[f(x_k, y_{2j}) + 4 f(x_k, y_{2j+1}) + f(x_k, y_{2j+2}) \right], \tag{6.5}$$

здесь $k = 2i,\ 2i+1,\ 2i+2$.

Чтобы получить представление о том, как выглядит формула численного вычисления двукратного интеграла в развернутом виде, рассмотрим частный случай, когда N=M=2. В данном случае имеем 9 узлов с координатами

$(x_0, y_0),\ (x_0, y_1),\ (x_0, y_2),\ (x_1, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_1, y_2),\ (x_2, y_0),\ (x_2, y_1),\ (x_2, y_2),$

Тогда с учетом (6.4) и (6.5) кубатурной формуле можно придать вид

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy == \frac{h_x}{3}\left(F_0 + 4F_1 + F_2\right) = \frac{h_x h_y}{9}[f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + \\ + f(x_2, y_2) + 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16 f(x_1, y_1)]. \tag{6.6}$$

При выводе принято во внимание, что

$$F_0 = \int_c^d f(x_0, y)\,dy = \frac{h_y}{3}[f(x_0, y_0) + 4 f(x_0, y_1) + f(x_0, y_2)],$$

$$F_1 = \int_c^d f(x_1, y)\,dy = \frac{h_y}{3}[f(x_1, y_0) + 4 f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2)],$$

$$F_2 = \int_c^d f(x_2, y)\,dy = \frac{h_y}{3}[f(x_2, y_0) + 4 f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)]$$

При построении алгоритма программы конструировать общие формулы типа (6.6) **нет нужды**. Рабочими формулами являются (6.4), (6.5), т.е. алгоритм расчета двукратного интеграла строится согласно (6.4), где каждое слагаемое определяется из (6.5), как это и показано в предыдущем примере.

Если область интегрирования криволинейная, то в самом простом варианте можно построить прямоугольник R, стороны которого параллельны осям координат и ввести вспомогательную функцию

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \in R - G \end{cases} .$$

В таком случае, очевидно

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f^*(x,y)dxdy \ .$$

Последний интеграл может быть вычислен по общей кубатурной формуле.

Подчеркнем еще раз, что вычисление интегралов по каждому направлению x и y выполняется независимо, т.е. по разным направлениям могут быть применены различные методы численного интегрирования, например, по одному направлению метод Симпсона, а по другому метод Гаусса.

Аналогично алгоритму вычисления двукратного интеграла, задаваемого формулами (6.4), (6.5), строятся алгоритмы численных расчетов интегралов более высокой кратности.