Лекция 8

В i-м приборе обслуживания имеем два потока:

1. Поток заявок – интервал времени между моментами появления заявки на входе канала k_i
2. Поток обслуживания – интервал времени между началом и концом обслуживания заявки в канале.

Заявки, обслуженные каналом, и заявки, покинувшие i-й прибор необслуженными, образуют выходной поток y_i. Процесс функционирования i-го прибора можно представить как *процесс изменения его состояния во времени*. Переход в новое состояние означает изменение количества заявок. Они могут находиться как в накопителе, так и в канале. Следовательно, вектор состояния для i-го прибора имеет следующий вид: $\overrightarrow{Z_i} = (Z_k^n, Z_i^k)$

Состояние накопителя:

- если 0, то, накопитель пуст;
- если Z_i равно емкости накопителя, то накопитель полностью занят.

Состояние канала:

- если 0, то канал свободен;
- если 1, то канал занят.

В практике моделирования сложных систем элементарные и сложные приборы обычно объединяются, при этом, если каналы различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место многоканальное обслуживание, если последовательное – то многофазное обслуживание. Поэтому для задания схемы необходимо использовать оператор сопряжения, отражающий взаимосвязь элементов между собой. Различают разомкнутые, замкнутые и смешанного типа.

Собственными внутренними параметрами Q-схемы будут являться:

- количество фаз
- количество каналов в каждой фазе

- количество накопителей в каждой фазе
- емкость i-ого накопителя

Для задания Q-схемы также необходимо описание алгоритма функционирования Q-схемы, который в данной интерпретации определяет поведение заявок в системе в различных ситуациях – неоднородность заявок. Следовательно, Q-схема, описывающая процесс функционирования системы массового обслуживания, может быть записана в виде кортежа:

$Q = (W, U, R, H, Z, A)$, где

1. **W** - подмножество входных потоков.
2. **U** - подмножество потоков обслуживания.
3. **H** - подмножество собственных параметров.
4. **Z** - множество состояний элементов системы.
5. **R** - оператор сопряжения элементов структуры (вектор сопряжения).
6. **A** - оператор алгоритмов обслуживания заявок.

Для получения соотношений, связывающих характеристики описывающих функционирование Q-схем, вводят некоторые допущения относительно входных потоков, функций распределения, длительности обслуживания запросов, дисциплин обслуживания. Для математического описания функционирования устройств развивающихся в форме случайного процесса, может быть с успехом применен математический аппарат в теории вероятности для, так называемых, марковских случайных процессов.

Случайный процесс, протекающий в некоторой системе S, называется **марковским**, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

> Марковских систем в реальности нет

Для марковского процесса обычно составляются уравнения Колмагорова:

$F = (p'(t), p(t), \Lambda) = 0$, где

- Λ – некоторый набор коэффициентов,

- p – вероятность,
- p' – производная вероятности.

$$\Phi = (p(t), \Lambda) = 0$$

$$p = p(\Lambda)$$

$$Y = Y(p(\Delta))$$

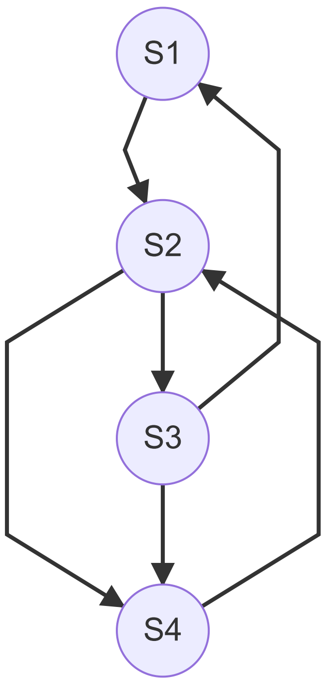
$$Y = Y(X, V, L)$$

Следовательно нам нужно осуществить связь внутренних параметров модели: Λ с конструктивными параметрами X, неуправляемыми параметрами V, учитывая по внутренним параметрам H. Таким образом:

$$\Lambda = \Lambda(X, V, L)$$

То есть получаем интерфейсную модель. Следовательно, математическая модель системы строится как совокупность базисной модели и интерфейсной, что позволяет использовать одни и те же базисные модели для решения разных задач по моделированию, осуществляя настройку на соответствующую задачу посредством изменения интерфейсной модели.

Определения вероятностей состояния. Пусть наша система S имеет 4 различимых состояния.



где имя стрелки $Sx - Sy == \Lambda_{xy}$.

Найдем вероятность P_1, то есть вероятность того, что система будет находится в состоянии S1.

Это можно найти двумя способами:

- в момент t система была уже в состоянии S1;
- в момент времени t уже была в состоянии S3 и за Δt пришла в состояние S1.

1. Вероятность первого способа как произведение вероятностей $P1(t)$ на условную вероятность того, что будучи в состоянии S1 система не перейдет в состояние S2.

Таким образом мы получаем первое уравнение Колмогорова:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)(1-\lambda_{12}\Delta t) + P_3(t)\Lambda_{31}\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -P_1(t)\lambda_{12} + P_3(t)\lambda$$

$$P_1'(t) = -P_1(t)\lambda_{12} + P_3(t)\lambda_{31}$$

2. Найдем вероятность того, что система находится в состоянии S2:

$$P_2(t+\Delta t) = P_2(t)(1-\lambda_{24}\Delta t - \lambda_{23}\Delta t) + P_1(t)\lambda_{12}\Delta t + P_4(t)\lambda_{42}\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} = -P_2(t)\lambda_{24} - P_2(t)\lambda_{23} + P_1(t)\lambda_{12} + P_4(t)\lambda_{42}$$

$$P_2'(t) = -P_2(t)\lambda_{24} - P_2(t)\lambda_{23} + P_1(t)\lambda_{12} + P_4(t)\lambda_{42}$$

3. Найдем вероятность того, что система находится в состоянии S3:

$$P_3'(t) = -P_3(t)\lambda_{31} - P_3(t)\lambda_{34} + P_2(t)\lambda_{23}$$

4. Найдем вероятность того, что система находится в состоянии S4:

$$P_4'(t) = -P_4(t)\lambda_{42} - P_2(t)\lambda_{24} + P_3(t)\lambda_{34}$$

Все уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -P_1(t)\lambda_{12} + P_3(t)\lambda \\ P_2'(t) = -P_2(t)\lambda_{24} - P_2(t)\lambda_{23} + P_1(t)\lambda_{12} + P_4(t)\lambda_{42} \\ P_3'(t) = -P_3(t)\lambda_{31} - P_3(t)\lambda_{34} + P_2(t)\lambda_{23} \\ P_4'(t) = -P_4(t)\lambda_{42} - P_2(t)\lambda_{24} + P_3(t)\lambda_{34} \end{cases}$$

Интегрирование данной системы дает искомые. Начальное условие берется в зависимости от того, какого было изначальное состояние системы. Обязательно нужно добавить условие нормировки.

Уравнения Колмогорова строятся по следующим правилам.

1. В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а в правой части содержится столько членов, сколько стрелок связано с этим состоянием.
2. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак "–", если в состояние, то знак "+".
3. Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода (интенсивность), соответствующий данной стрелке, и вероятности того состояния, из которого выходит стрелка.