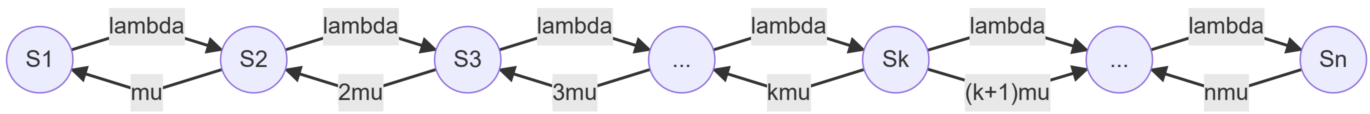
Лекция 9



Разметим граф, то есть расставим стрелки интенсивности соответствующих потоков. По стрелкам слева направо системы переводит один и тот же поток, это поток заявок с интенсивностью λ. Пусть система была в состоянии S1 и тогда как только закончится обслуживание заявки занимающего этот канал, система перейдет в состояние S0, интенсивность перехода m. Если занято 2 канала, а не один, то интенсивность перехода составит 2μ.

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ p_1'(t) = -(\lambda+\mu)p_1 + \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ p_2'(t) = -(\lambda+2\mu)p_2 + \lambda p_1 - 3\mu \\ \dots \\ p_k'(t) = -(\lambda+k\mu)p_k + \lambda p \end{cases}$$

Предельные вероятности состояний p0 и pn характеризую установившийся режим работы системы массового обслуживания при $t \to \infty$.

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} p_0$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!}\right]$$

$$p_k = \frac{p^k}{k!} p_0$$

λ/μ - среднее число заявок, приходящих в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

Зная все вероятности состояний $p_0, \dots, p_n$, можно найти характеристики СМО:

- вероятность отказа – вероятность того, что все n каналов заняты: $p_{1OE} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p^0$

- относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию:
  $q = 1 - p_n$
- среднее число заявок, обслуженных в единицу времени: $A = \lambda q$

Полученные выражения могут рассматриваться как базисная модель оценки характеристик производительности систем. Входящий в эту модель параметр $\lambda = \frac{1}{\text{время обработки}}$ является усредненной характеристикой пользователей, а параметр μ – это функция технических характеристик компьютера, не только их, но еще и решаемых задач. Связь между ними должна быть установлена с помощью интерфейсной модели.

В простейшем случае, когда время ввода / вывода информации по каждой задачи мало по сравнению с временем ее решения, то можно принять, что $\text{время решения} = \frac{1}{\mu}$, где время решения – среднее время решения задачи процессом. Оно равно дроби, в числителе которой будет равно среднее число операций, выполняемых процессом на одну задачу.

Немарковские случайные процессы, сводящиеся к марковским

Реальные процессы весьма часто обладают последействием и поэтому не являются марковскими. Очень редко удается воспользоваться методами, разработанными для марковских цепей. Наиболее распространённые:

- метод разложения случайного процесса на фазы (метод псевдосостояния);
- метод вложенных цепей Маркова.

Метод псевдосостояния

Сущность метода заключается в том, что состояние системы, потоки переходов из которых являются немарковскими, заменяются эквивалентной группой фиктивных состояний, потоки переходов из которых являются марковскими.

Условия статистической эквивалентности реального состояния и фиктивных в каждом конкретном случае подбираются индивидуально. Очень часто может использоваться следующее: $\min \int_{t_1}^{t_2} \left(\lambda_{экв}(\tau) - \lambda_i(\tau)\right) dt$, где λ – эквивалентная интенсивность перехода в i-ой группе переходов, заменяющей реальный переход, обладающий интенсивностью λ_i.

За счет расширения числа состояний системы некоторые процессы удается точно свести к марковским. Созданная таким образом система статистически эквивалентна или будет близка к реальной системе, и она подвергается обычному исследованию с помощью аппарата марковских цепей.

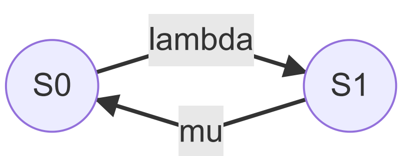
К числу процессов, которые введением фиктивных состояний можно точно свести к марковских, относятся процессы под воздействием потоков Эрланга. В случае потока Эрланга k-ого порядка интервал времени между соседними событиями представляет собой сумму k независимых случайных интервалов, распределенных по показательному закону. Поэтому переход потока Эрланга k-го порядка к пуассоновскому осуществляется введением k псевдосостояний. Интенсивности переходов между псевдосостояниями равны соответствующему параметру потока Эрланга. Полученный таким образом эквивалентный случайный процесс является марковским, так как интервалы времени нахождения его в различных состояниях подчиняются показательному закону.

Пример. Устройство S выходит из строя с интенсивностью λ, причем поток отказов пуассоновский. После отказа устройство восстанавливается и время восстановления распределено по закону Эрланга 3 порядка с функцией плотности $f_2(t) = 0.5\mu(\mu t)^2 e^{-\mu t}$.

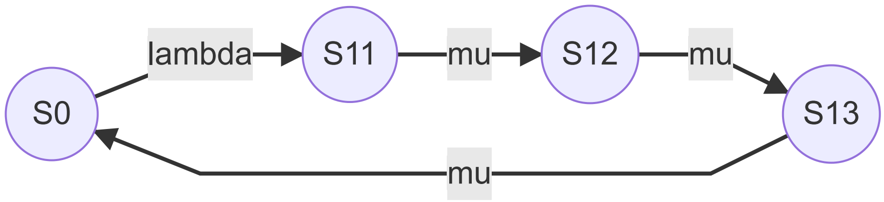
Система может принимать два возможных состояния:

- S_0 – устройство исправно;
- S_1 – устройство отказало и восстанавливается.

Переход из S_0 в S_1 осуществляется под воздействием пуассоновского потока, а обратный - потока Эрланга.



Представим случайное время восстановления в виде суммы 3х случайных временных интервалов, распределенных по показательному закону с интенсивностью μ.



$$\begin{cases} p_0' = 0 = -\lambda p_0 + \mu p_{13} \\ p_{11}' = 0 = -\lambda p_{11} + \mu p_0 \\ p_{12}' = 0 = -\lambda p_{12} + \mu p_{11} \\ p_{13}' = 0 = -\lambda p_{13} + \mu p_{12} \\ p_0 + p_1 = 1 \\ p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} \end{cases}$$

$$p_{13} = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_{11} = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_{12} = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_1 = \frac{3\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_0 + \frac{3\lambda}{\mu} p_0 = 1 \to p_0 = \frac{\mu}{\mu + 3\lambda}$$

$$p_1 = \frac{3\lambda}{\mu + 3\lambda}$$

Ответ: $P_0 = \dfrac{\mu}{\mu + 3\lambda}, P_1 = \dfrac{3}{3 + \frac{\mu}{\lambda}}$

Метод вложенных цепей Маркова.

Вложенные цепи Маркова образуются следующим образом: в исходном случайном процессе выбираются такие случайные процессы, в которых характеристики образуют марковскую цепь. Моменты времени обычно являются случайными и зависят от свойств исходного процесса. Затем обычными методами теории марковских цепей исследуются процессы только в эти характерные моменты. Случайный процесс называется полумарковским (с конечным или счетным множеством состояний) если заданы переходы состояний из одного состояния в другое и распределение времени пребывания процессов в каждом состоянии. Например, в виде функции распределения или функции плотности распределения.

Метод статистических испытаний. Метод Монте-Карло.

Преимущество метода статистических испытаний: его универсальность, обуславливающая его возможность всестороннего статистического исследования объекта. Но для реализации этого исследования необходимы довольно полные статистические сведения о параметрах элемента входящих в системы.

Недостаток: большой объем требующихся вычислений, равный количеству обращений к модели. Поэтому вопрос выбора величины n имеет важнейшее значение. Уменьшая n, повышаем экономичность расчетов, но одновременно ухудшаем их точность.