МГТУ им. Н.Э.Баумана

**Моделирование микроэкономики на основе планово-производственной задачи Канторовича**

Материалы по учебному курсу «Экономика ч.2»

Преподаватель к.т.н., доц. Павлов В.А.

Кафедра МБМ-3

# 1. Основная планово-производственная задача Канторовича

# (закрытая задача)

Технический прогресс во многом основан на новых технологиях. Под технологией в расширенном понимании, или *технологическим способом* будем понимать создание одного или нескольких продуктов или услуг, сопровождающееся использованием других товаров или услуг.

Более совершенные технологические способы приходят на смену менее совершенным и появляются технологии создания новых товаров и услуг. Так, автоматические производственные линии более совершенны по сравнению с ручным производством, а Интернет позволяет передавать сообщения быстрее и дешевле традиционной почты.

В национальном хозяйстве функционирующие технологические способы взаимосвязаны, поскольку товары и услуги, используемые в одних технологиях создаются в других. Поэтому разработка новых технологических способов должна учитывать технологическую среду, где создаются используемые товары и услуги. В частности, Интернет мог развиваться только после массового распространения персональных компьютеров.

Один из путей анализа и планирования разработок новых технологий основан на количественных расчетах баланса товаров и услуг, создаваемых и потребляемых в системах технологических способов. Таким образом на ранних стадиях стратегического и долгосрочного планирования можно обосновывать выбор новых технологий, требующих дальнейшей разработки. Подобный анализ и планирование может выполняться в масштабах как отдельных предприятий, так и национальной экономики в целом.

Достаточно универсальная модель такого анализа и планирования использует понятия технологических способов и *ингредиентов*. Под ингредиентами понимаются факторы, расходуемые в технологических способах – товары, услуги, денежные средства и т.п. Ингредиенты являются ресурсами и имеют материальную природу в смысле закона сохранения количества: наличное количество равно начальному количеству плюс поступление минус расход. Ингредиенты рассматриваются как материальные ресурсы, в противоположность нематериальным ресурсам, таким, как патенты, лицензии и ноу-хау. (Нематериальные ресурсы имеют стоимость, могут продаваться и покупаться, но как факторы в технологических способах могут тиражироваться, отличаясь этим от материальных ресурсов. Так, патент, приобретенный предприятием, может использоваться во многих технологических процессах. Нематериальные ресурсы рассматриваются в настоящем учебном курсе на последующих занятиях).

В системе функционирующих технологических способов *хозяйствующего объекта* (предприятия, отрасли или экономики в целом) ингредиенты могут выступать в трех качествах: быть *конечным продуктом*, создаваться в одном технологическом способе и расходоваться в другом как *промежуточная продукция* и быть *исходными ресурсами*, поступающими извне.

Технологическим способом может быть не только производство продукции, но и транспортировка, хранение и оказание других услуг.

Техно-логический способ 2

Техно-логический способ 1

Техно-логический способ 4

Хозяйствующий объект, система технологических способов

Рис.1. Технологические способы и потоки ингредиентов

Будем рассматривать технологические способы с жестко определенной номенклатурой участвующих ингредиентов с заданными удельными размерами этого участия. Кроме того, считаем, что технологические способы могут функционировать в системе с разной интенсивностью. Один и тот же ингредиент может в каждом из технологических способов либо производиться, либо расходоваться, либо не участвовать вовсе (случай нулевого участия). Общие объемы расхода и создания участвующих ингредиентов изменяются в соответствии с удельными расходами при изменении интенсивности функционирования данного технологического способа. В одном и том же технологическом способе может создаваться и расходоваться более одного ингредиента. Один и тот же ингредиент может создаваться несколькими технологическими способами.

Из-за возможности создания и расходования одного и того же ингредиента одновременно в разных технологических способах имеет место их взаимозаменяемость, и, следовательно, возможность выбора.

Некоторый ингредиент может создаваться в одних технологических способах, а потребляться в других, откуда и следует взаимозаменяемость технологий.

В свою очередь, взаимозаменяемость и взаимодополняемость в конечном счете ведет к взаимозаменяемости ингредиентов в рамках хозяйствующего объекта, несмотря на жесткость определения ингредиентов-участников в каждом технологическом способе.

Участие ингредиента в технологическом способе характеризуется знаком «плюс» или «минус». Удельные показатели участия и соответствующие объемные показатели (при заданной интенсивности функционирования технологического способа), обозначающие выпуск, будут положительными, а изображающие расходование – отрицательными. Факт неучастия отражается нулевой величиной показателей.

Как следствие, технологии и хозяйствующий объект можно рассматривать с точки зрения обмена ингредиентами со средой: технологического способа с объектом и объекта с поставщиками и покупателями. Отрицательными величинами обозначается все, что поступает извне, положительными – все, что выдается вовне, нулевыми – отсутствие того и другого.

Введем следующие обозначения:

*i* – индекс ингредиента ( *i* = 1,2, … ,*m*);

*s* – индекс технологического способа ( *s* = 1,2, ... ,*r*);

*bi* – ограничение на общий объем обмена объекта со средой по *i*-му ингредиенту;

*ais*– норма участия *i*-го ингредиента в *s*-м технологическом способе на единицу интенсивности использования способа.

Если *i*-й ингредиент выпускается по *s*-й технологии, то *ais* >0 и норма участия есть ничто иное, как величина выпуска при единичной интенсивности использования технологического способа. Если *i*-й ингредиент расходуется в *s*-й технологии (затрачивается), то *ais* <0.

*ps* – коэффициент эффективности *s*-го технологического способа в расчете на единицу его интенсивности, например, прибыль от использования технологического способа с единичной интенсивностью;

*xs* – интенсивность *s*-го технологического способа, интенсивность использования технологии.

Экономико-математическая модель системы технологических способов хозяйствующего объекта известна как *основная планово-производственная задача Канторовича*:

требуется найти интенсивности использования технологических способов *xs , s = 1,2, ..., r*  так, чтобы эффективность системы технологий была максимальна при ограничениях на выпуск и потребление ингредиентов – конечных продуктов, промежуточной продукции и исходных материалов:

*bi*



*bi > 0*



*bi < 0*

0

 (1)

Если *i*-й ингредиент – конечный продукт и *bi*>0, то *bi* – минимально допустимый поток ингредиента из системы технологических способов в среду, например, задание на выпуск продукции. Если *i*-й ингредиент выступает в качестве исходного ресурса по отношению к объекту и  *bi*<0, то *bi* – максимально допустимый поток ингредиента из среды в систему технологических способов, например, фиксированный объем поставок по договору с поставщиком. Если *i*-й ингредиент целиком производится и потребляется внутри хозяйствующего объекта, то есть ингредиент является промежуточным продуктом и *bi*= 0, то нулевое значение *bi* требует равенства выпуска и потребления ингредиента технологическими способами внутри объекта.

Естественно считать результатом функционирования поток ингредиентов из системы технологических способов, а затратами – поток в обратном направлении. Тогда чем больше *bi*>0 , тем больше результат; чем меньше *bi*<0 , тем меньше затраты и условия решения задачи становятся более «жесткими».

Задача Канторовича является задачей линейного программирования. Решая эту задачу для множества технологических способов, реализуемых, известных и потенциально разрабатываемых в НИОКР, можно выявить те, которые наилучшим образом вписываются в условия функционирования хозяйствующего объекта. Выявленные технологические способы можно считать претендентами на дальнейшую более детальную разработку и доведение до практической реализации.

Обсудим более подробно, как измеряются интенсивности технологических способов. Поясним это на примере (Таблица 1).

Таблица 1 Измерение интенсивности технологических способов

| Ингредиенты | Единицы измерения | Варианты норм участия | | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| I | II | III |
| Конечная продукция А  Конечная продукция Б  Сырье  Электроэнергия  Оборудование  Труд  Емкость складов  Полуфабрикаты  Прибыль на единицу интенсивности | Шт.  Тонны  Тонны  Квт.час  Станко-час  Чел.час  М3  Шт.  Тыс.руб/ед.ин-  тенсивности | 0  1  -5  -7  -2  -10  -12  -6  20 | 0  0,5  -2,5  -3,5  -1  -5  -6  -3  10 | 0  0,2  -1  -1,4  -0,4  -2  -2,4  -1,21  4 |

В последней строке величина нормы прибыли учитывает общий итог выручки от реализации не только продукции, но и других ингредиентов. Все три варианта значений норм участия характеризуют один и тот же технологический способ, но по-разному. В первом варианте единицей интенсивности считается интенсивность, при которой выпускается 1 тонна продукции Б; во втором варианте – интенсивность при затратах 1-го станкочаса оборудования; в третьем – при выпуске 1-го метра полуфабрикатов. Следовательно, интенсивности использования технологических способов являются безразмерными величинами, а нормы участия и ограничения *bi* измеряются в единицах количества ингредиентов.

Очевидно, каждый вариант значений норм участия может быть получен из любого другого делением всех показателей на абсолютную величину нормы участия того ингредиента, который станет измерителем интенсивности данного технологического способа.

В качестве ингредиентов могут выступать экологические факторы, такие, как выбросы вредных веществ, на которые наложено ограничение *bi* для всей системы технологических способов.

Техно-логический способ 2

Техно-логический способ 3

Техно-логический способ 1

Хозяйствующий объект

Рис.2. Пример системы технологических способов

Исходный ресурс

Готовая прдукция

Трудовые ресурсы

Полуфаб-рикаты

В примере (рис.2 и Таблица 2) конечный продукт (*i* = 4) может производится двумя способами по технологии *s* = 2 или по технологии *s* = 3, потребляя промежуточный продукт (*i* = 2), выпускаемый по технологическому способу s =1. Все три технологических способа потребляют трудовые ресурсы (*i* = 3). Заданы удельные нормы участия ресурсов *ais*, а также ограничения на объемы использования трудовых ресурсов и исходного ресурса. Требуется найти интенсивности использования технологических способов, обеспечивающие максимум выпуска конечной (готовой) продукции.

Таблица 2. Нормы участия *ais* и ограничения обмена со средой *bi*, единиц ингридиента

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  | Технология 1  (*s*=1) | Технология 2  (*s*=2) | Технология 3  (*s*=3) | *bi* |
| 1 | Исходый ресурс | -1 | 0 | 0 | -2 |
| 2 | Полуфабрикаты собственного производства | 1 | -1 | -1 | 0 |
| 3 | Трудовые ресурсы | -1 | -1 | -4 | -6 |
| 4 | Готовая продукция | 0 | 1 | 2 | 0 |

Как видно из условий задачи, в Технологи 2 более экономно используются трудовые ресурсы, а Технология 3 предпочтительна с точки зрения расхода полуфабрикатов. Можно предположить, что выбор между этими двумя технологическими способами будет зависеть от величин ограничений на исходный ресурс или трудовые ресурсы, то есть от того, какой из поступающих извне ресурсов более «дефицитен».

Решение задачи сводится к решению задачи линейного программирования при положительных значениях неизвестных величин:



. (2)

Применяя оптимизатор ПОИСК РЕШЕНИЯ из системы EXCEL (рис.3) получено решение задачи:

*x1 =* 2

*x2 =* 1,33

*x3 =*0,66.



EXCEL-формулы нижней таблицы разработаны, используя аппарат абсолютных и относительных адресов ячеек. Формула вводится один раз в левую верхнюю ячейку, а остальные формулы нижней таблицы получены копированием. В исходной копируемой формуле записано произведение относительного адреса левой верхней ячейки верхней таблицы на комбинированный адрес левой ячейки строки xs . В комбинированном адресе символ столбца относительный, тогда как символ строки абсолютный, со знаком доллара. Легко запомнить: та часть адреса, которая при копировании остаётся неизменной, считается абсолютной.

В настройке ПОИСКА РЕШЕНИЯ ячейка 1 задавалась как критерий оптимальности, в ограничениях записывалось требование значений в столбце 2, больших или равных соответствующим значениям в столбце 3, значения в строке 4 варьировались.

При заданных параметрах задачи оптимальным является использование обеих технологий выпуска конечного продукта. Количество выпуска одинаково по обеим технологиям, по первой используется большая часть производимых полуфабрикатов, по второй – больше расходуется трудовых ресурсов.

С целью исследования задача решалась при различных значениях ограничения на исходный ресурс. Как видно (Таблица 3), при меньших значениях этого ограничения предпочтительной оказывается третья технология, использующая исходный ресурс более экономно. С ростом доступного объема использования исходного ресурса сначала оптимальным становится совместное использование технологий 2 и 3, а при дальнейшем росте - ограничивающим фактором оказываются трудовые ресурсы и оптимальным является применение только технологии 2.



# 2.Открытая задача Канторовича

Экономико-математическая модель задачи Канторовича (1) удобна для выбора технологий при известных плановых заданиях и ограничениях на поставки извне, представляемых с помощью параметров *bi*. Поэтому соответствующие постановки задач характерны в условиях существующих и функционирующих предприятий. В то же время, интерес представляют ситуации отсутствия всех или некоторых таких ограничений, например, на ранних стадиях выбора технологий до того момента, когда предприятие создано и функционирует, или, когда изучается возможность создания новых производств при реконструкции действующих предприятий.

Снижение жесткости ограничений разного рода в условиях либерализации хозяйственной жизни вообще характерны для развитой рыночной экономики. Развитые рынки и информационные технологии способствуют тому, что все (или почти все) необходимое можно приобрести, а на все (или почти на все) можно найти покупателя, если цены будут подходящими.

Применительно к ситуациям отсутствия ограничений задача Канторовича модифицируется и известна в варианте так называемой открытой задачи, в противоположность чему задача (1) называется закрытой. В открытой задаче Канторовича объемы обмена ингредиентами со средой рассматриваются как неизвестные величины, значения которых требуется найти. Факторами, влияющими на выбор объемов обмена часто выступают цены поставок и продаж, и в критериях оптимальности тогда учитываются соответствующие затраты.

В открытой задаче Канторовича требуется найти *xs* (*s* =1,2, … ,*r*) и *yi* (*i* = 1,2, … ,*m*):





 (6)

По сравнению с закрытой задачей параметры *bi* заменены на новые неизвестные величины *yi* , представляющие объемы обмена ингредиентами со средой, а знак неравенства заменен равенством. Единицы измерения *yi* те же самые, что и у *bi* , то есть единицы измерения количества ингредиентов. По каждому ингредиенту искомые объемы обмена со средой вообще говоря могут быть положительными, отрицательными и нулевыми. Поэтому в открытой задаче до получения решения нельзя подразделить ингредиенты на исходные ресурсы, полуфабрикаты собственного производства и готовую продукцию.

По сравнению с закрытой задачей в критерии оптимальности дополнительно к сумме взвешенных интенсивностей использования технологий появляется новое слагаемое – суммарный по всем ингредиентам денежный поток в связи с их приобретением или продажей, где *ci* – цены на ингредиенты. Положительные значения *yi* изображают продажи, - отрицательные – приобретение. Следовательно, критерий оптимальности имеет смысл финансового результата – разности результатов и затрат – и поэтому весовые коэффициенты *ps*при интенсивностях использования технологических способов рассматриваются как удельные издержки, суммарно учитывающие остальные менее значимые затраты.

После того, как решение задачи получено, ингредиенты можно подразделить на исходные ресурсы, полуфабрикаты и готовую продукцию и тогда в критерии оптимальности можно выделить выручку и затраты двух видов – на приобретение исходных ресурсов и затраты в технологических способах:



где обозначено *I1* – множество индексов ингредиентов – исходных материалов, *I2* – множество индексов ингредиентов – готовой продукции. Первые два слагаемых – совокупные затраты, а третье – выручка.

На основе открытой и закрытой задач можно конструировать различные гибридные варианты, например:





 (7)

Формулировка гибридной задачи возможна, лишь если известно подразделение ингредиентов на исходные ресурсы, полуфабрикаты и готовую продукцию.

Возможны гибридные варианты, в которых объемы обмена со средой являются искомыми неизвестными величинами не для всех, а лишь для некоторых ингредиентов.

Кроме того, любой из вариантов задачи при необходимости может дополняться ограничениями на значения искомых переменных величин, например, ограничениями на верхние значения интенсивностей использования технологий в связи с ограниченными производственными мощностями или емкостями рынков.

Пример открытой задачи рассмотрим, несколько видоизменяя условия исследованной закрытой задачи.

Задача заключается в обосновании выбора технологических способов при возможности приобретения ингредиентов на рынках (рис.5). Из всех четырех ингредиентов только полуфабрикаты могут как приобретаться, так и продаваться на рынке, поскольку только в случае полуфабрикатов возможно, как производство, так и потребление внутри хозяйствующего объекта. Известны цены на все ингредиенты и емкости рынков для тех ингредиентов, которые могут продаваться, то есть для готовой продукции и полуфабрикатов. Требуется обосновать выбор технологий при различных значениях цен исходных ресурсов и полуфабрикатов.

Обозначено *Z* – постоянные затраты предприятия, величина которых, очевидно, не влияет на выбор технологий, но определяет условия безубыточной работы предприятия; *R*4 и *R*2 – емкости рынков полуфабрикатов и готовой продукции соответственно. Заданы значения емкостей рынка на полуфабрикаты и готовую продукцию, постоянные затраты и удельные издержки реализации технологических способов на единицу их интенсивности *ps* (значения параметров см. рис.5 и Таблицу 5). Цены на использование трудовых ресурсов и на готовую продукцию известны и неизменны, тогда как для исходного ресурса и полуфабрикатов заданы возможные значения цен.

Требуется найти *xs* (*s* = 1,2,3) и *yi* (*i* = 1,2,3,4), так, чтобы



при



. (2)

Задача решалась в EXCEL с применением средства ПОИСК РЕШЕНИЯ. Ячейка 1 при настройке оптимизатора указывалась в качестве критерия оптимальности, строка и столбец 2 задавались как варьируемые, в качестве ограничений требовалось равенство столбцов 2 и 3.

Оптимальный выбор технологий при различных ценах по результатам решения задачи представлен в Таблице 5. Как видно, при достаточно высоких ценах на полуфабрикаты становиться выгодным не только производить их для нужд своего производства, но и продавать на рынке. При низких ценах на полуфабрикаты выгоднее их покупать. С ростом стоимости исходного ресурса наблюдается тенденция отказа от технологии Т2 (*s* = 2) в пользу технологии Т3 (*s* = 3), более экономно использующей ресурсы.



С ростом цен на исходный ресурс и полуфабрикаты финансовый результат снижается и становиться убытком в случае цены на исходный ресурс, равной 3-м единицам и цены на полуфабрикаты, равной 4-м единицам (самая правая ячейка таблицы в нижней строке).

