Последовательности. Основные определения

Последовательность $\{x_n\}$ называется:	
– ***неубывающей***, если $\forall n\ x_n \le x_{n+1}$;	– ***невозрастающей***, если $\forall n\ x_n \ge x_{n+1}$;
– ***возрастающей***, если $\forall n\ x_n < x_{n+1}$;	– ***убывающей***, если $\forall n\ x_n > x_{n+1}$;
– ***монотонной***, если она является неубывающей, невозрастающей, убывающей или возрастающей.	
– ***ограниченной сверху***, если $\exists c\ \forall n\ x_n \le c$;	– ***неограниченной сверху***, если $\forall c\ \exists n\ \ x_n > c$;
– ***ограниченной снизу***, если $\exists c\ \forall n\ x_n \ge c$;	– ***неограниченной снизу***, если $\forall c\ \exists n\ \ x_n < c$;
– ***ограниченной***, если $\exists c\ \forall n\ \lvert x_n\rvert \le c$;	– ***неограниченной***, если $\forall c\ \exists n\ \ \lvert x_n\rvert > c$;
– ***бесконечно большой* (ББП)**, если $\forall E>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ \lvert x_n\rvert > E$;	– ***не является бесконечно большой***, если $\exists E>0\ \forall n_0\ \exists n \ge n_0\ \ \lvert x_n\rvert \le E$;
– ***бесконечно малой* (БМП)**, если $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ \lvert x_n\rvert < \varepsilon$;	– ***не является бесконечно малой***, если $\exists \varepsilon>0\ \forall n_0\ \exists n \ge n_0\ \ \lvert x_n\rvert \ge \varepsilon$.
– ***сходящейся*** (или ***сходящейся к*** a), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;	
– ***сходящейся к*** ∞, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; – ***сходящейся к*** $+\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; – ***сходящейся к*** $-\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.	
– ***фундаментальной*** (или ***последовательностью Коши***), если $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \forall m \ge n_0\ \ \lvert x_n - x_m\rvert < \varepsilon$ или $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \forall k\in\mathbb{N}\ \ \lvert x_{n+k} - x_n\rvert < \varepsilon$.	

Примечание: В таблице n, n_0, m, k – натуральные, а остальные величины вещественные.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall E>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ x_n > E$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall E>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ x_n < -E$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall E>0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \lvert x_n\rvert > E$.	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne a \iff \exists \varepsilon>0\ \forall n_0\ \exists n \ge n_0\ \lvert x_n - a\rvert \ge \varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne +\infty \iff \exists E>0\ \forall n_0\ \exists n \ge n_0\ \ x_n \le E$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne -\infty \iff \exists E>0\ \forall n_0\ \exists n \ge n_0\ \ x_n \ge -E$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne \infty \iff \exists E>0\ \forall n_0\ \exists n \ge n_0\ \lvert x_n\rvert \le E$.
$\inf x_n = i \iff$ $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \ge i, \\ \forall \varepsilon>0\ \exists n\ \ x_n < i+\varepsilon \end{cases}$ или $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \ge i, \\ \forall i' > i\ \exists n\ \ x_n < i' \end{cases}$	$\sup x_n = s \iff$ $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \le s, \\ \forall \varepsilon>0\ \exists n\ \ x_n > s-\varepsilon \end{cases}$ или $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \le s, \\ \forall s' < s\ \exists n\ \ x_n > s' \end{cases}$
$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k \overset{df}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} x_k$	$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_k \overset{df}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} x_k$

Примечание: В таблице m, n, n_0 – натуральные, а остальные величины вещественные.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Основное свойство последовательностей. Конечное число элементов (их добавление или удаление) не влияет на сходимость последовательности, причем значение предела сходящейся последовательности остается неизменным.

2. Сходящаяся последовательность имеет только *один* предел.

3. Необходимое условие сходимости. Сходящаяся последовательность ограничена, или, другими словами, всякая неограниченная последовательность расходится.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ и $l \neq 0, x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ ограничена.

5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$. Тогда

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$; г) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда если

– $\forall n\ x_n > c$ (или $x_n \geq c$), то $a \geq c$.

– $\forall n\ x_n < c$ (или $x_n \leq c$), то $a \leq c$.

Замечание. Элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > c$ ($x_n < c$), однако при этом предел a может оказаться равным c.

7. Если $\forall n\ x_n \in [a,b]$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$.

8. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если, начиная с некоторого номера, элементы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, удовлетворяют неравенству $x_n < y_n$ (или $x_n \leq y_n$), то $a \leq b$.

9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Если, начиная с некоторого номера, элементы последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

10. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.

11. Лемма Больцано-Вейерштрасса. Каждая *ограниченная* последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Всякая *неограниченная* последовательность имеет *частичный* предел, равный либо $+\infty$, либо $-\infty$.

12. Критерий Коши сходимости последовательности). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

13. Критерий Коши расходимости последовательности). Для расходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0\ \exists m \geq n_0\ |x_n - x_m| \geq \varepsilon \text{ или } \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0\ \exists k\ |x_{n+k} - x_n| \geq \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей (БМП)

1. БМП ограничена.

2. Если $\{x_n\}$ БМП, то $\{|x_n|\}$ БМП, и наоборот.

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – БМП, то а) $\{x_n \pm y_n\}$ – БМП; б) $\forall\ c \in \mathbb{R}$ $\{cx_n\}$ – БМП.

Следствие. Алгебраическая сумма любого конечного числа БМП есть БМП.

4. Произведение БМП на ограниченную последовательность есть БМП.

Следствие. Произведение любого числа БМП есть БМП.

5. Если все элементы БМП $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c = 0$.

6. Если $\{x_n\}$ БМП и $\forall\ n$ $|y_n| \le |x_n|$, то $\{y_n\}$ БМП.

7. Если $\{x_n\}$ ББП (БМП) и $\forall\ n$ $x_n \ne 0$, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ БМП (ББП).

Свойства бесконечно больших последовательностей (ББП)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

2. Пусть $c > 0$. Если, начиная с некоторого номера,

а) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и $\exists n_0\ \forall\ n \ge n_0$ $x_n \ge cy_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ и $\exists n_0\ \forall\ n \ge n_0$ $x_n \le cy_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ и $\exists n_0\ \forall\ n \ge n_0$ $|x_n| \ge c|y_n|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$, $s \in \{+\infty, -\infty\}$. Если

а) $\exists n_0\ \forall\ n \ge n_0$ $y_n \ge c > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = s$;

б) $\exists n_0\ \forall\ n \ge n_0$ $y_n \le c < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -s$.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и $\exists n_0\ \forall\ n \ge n_0$ $|y_n| \ge c > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

5. Если $\{y_n\}$ ограничена

а) снизу и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

б) сверху и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

Теорема Штольца. Пусть

а) последовательность $\{x_n\}$ строго монотонна;

б) последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими;

в) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$.

Замечание. Теорема остается справедливой, если последовательность $\{x_n\}$ строго монотонна, начиная с некоторого номера.

Супремум и инфимум

Для *ограниченного* множества X :

$s=\sup X=\sup\limits_{x\in X} x \ \Leftrightarrow\ 1)\ \forall x\in X\ \ x\le s;\ 2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ x'>s-\varepsilon$ или $\forall s'<s\ \exists x'\in X\ \ s'<x'$.

$i=\inf X=\inf\limits_{x\in X} x \ \Leftrightarrow\ 1)\ \forall x\in X\ \ i\le x;\ \ 2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ x'<i+\varepsilon$ или $\forall i'>i\ \exists x'\in X\ \ x'<i'$.

Для *ограниченной* последовательности $\{x_n\}$

$s=\sup x_n=\sup\limits_{n} x_n \ \Leftrightarrow\ 1)\ \forall n\ \ x_n\le s;\ 2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists n\ \ x_n>s-\varepsilon$ или $\forall s'<s\ \exists n\ \ s'<x_n$.

$i=\inf x_n=\inf\limits_{n} x_n \ \Leftrightarrow\ 1)\ \forall n\ \ i\le x_n;\ \ 2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists n\ \ x_n<i+\varepsilon$ или $\forall i'>i\ \exists n\ \ x_n<i'$.

Для *ограниченной* на множестве X функции $f(x)$

$s=\sup\limits_{x\in X} f(x) \ \Leftrightarrow\ 1)\ \forall x\in X\ \ f(x)\le s;\ 2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ f(x')>s-\varepsilon$ или $\forall s'<s\ \exists x'\in X\ \ s'<f(x')$.

$i=\inf\limits_{x\in X} f(x) \ \Leftrightarrow\ 1)\ \forall x\in X\ \ i\le f(x);\ 2)\ \forall \varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ f(x')<i+\varepsilon$ или $\forall i'>i\ \exists x'\in X\ \ f(x')<i'$.

Свойства

1. **а)** $\sup\{-x\,|\,x\in X\}=-\inf X$, **б)** $\inf\{-x\,|\,x\in X\}=-\sup X$.

2 **а)** $\sup\{x+y\,|\,x\in X, y\in Y\}=\sup X+\sup Y$, **б)** $\inf\{x+y\,|\,x\in X, y\in Y\}=\inf X+\inf Y$.

3 **а)** $\sup\{x-y\,|\,x\in X, y\in Y\}=\sup X-\inf Y$. б) $\inf\{x-y\,|\,x\in X, y\in Y\}=\inf X-\sup Y$.

4 **а)** $\sup\{\lambda x\,|\,x\in X\}=\begin{cases}\lambda\sup X, & \lambda>0\\ -\lambda\inf X, & \lambda<0\end{cases}$, **б)** $\inf\{\lambda x\,|\,x\in X\}=\begin{cases}\lambda\inf X, & \lambda>0\\ -\lambda\sup X, & \lambda<0\end{cases}$.

5. Если $X\subset\{x\,|\,x\ge 0\}$, $Y\subset\{y\,|\,y\ge 0\}$, то

а) $\sup\{xy\,|\,x\in X, y\in Y\}=\sup X\sup Y$, **б)** $\inf\{xy\,|\,x\in X, y\in Y\}=\inf X\inf Y$.

Наиболее важные пределы

Последовательности		
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0,\ a>1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,\ a>1, k\in\mathbb{N}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$	$\lim\limits_{n\to\infty} na^n=0,\ \lvert a\rvert<1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0,\ a>1$ Если $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=+\infty$, $k_n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e$ Если $x_n\ge -1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $k\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{1+x_n}=1$

Функции			
Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$		**Второй замечательный предел** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$

Свойства нижних и верхних пределов

1. Для любых последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k + \varliminf_{k\to\infty} y_k \le \varliminf_{k\to\infty} (x_k + y_k) \le \varlimsup_{k\to\infty} (x_k + y_k) \le \varlimsup_{k\to\infty} x_k + \varlimsup_{k\to\infty} y_k .$$

2. Для любых последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ с неотрицательными членами:

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k \cdot \varliminf_{k\to\infty} y_k \le \varliminf_{k\to\infty} (x_k \cdot y_k) \le \varlimsup_{k\to\infty} (x_k \cdot y_k) \le \varlimsup_{k\to\infty} x_k \cdot \varlimsup_{k\to\infty} y_k .$$

3. Если $\forall n\ x_n > 0$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \le \varliminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} \le \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} \le \varlimsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$..

4. Для любой последовательности $\{x_k\}$ $\inf x_k \le \varliminf\limits_{k\to\infty} x_k \le \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k \le \sup x_k$.

5. Для любой последовательности $\{x_k\}$ $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \inf L$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = \sup L$, где $L \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ – множество всех частичных пределов последовательности.

Свойства левых и правых пределов

Пусть $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $B \in \{+\infty, -\infty\}$, $C = \{+\infty, -\infty, \infty\}$, тогда

1. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

4. Если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \in C$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \in C$.

4. Если $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \in C$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \in C$.

▸ Все эти свойства сразу следуют из определений соответствующих пределов. ◂

Теорема о пределе композиции функций. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b \in \mathbb{R}$, причем $f(x) \ne a$ при $x \ne x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = b = \lim_{y\to a} g(y).$$

Таким образом, если $g(y)$ определена в точке $y = a$, то

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to a} g(y) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

Теорема Коши о существовании предела функции в точке. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества A и $f : A \to \mathbb{R}$. Предел функции f в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in \overset{0}{B}(x_0, \delta) \cap A\ \ |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Связь между односторонними пределами и точными гранями для монотонных функций. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ возрастает (убывает) на ограниченном множестве X таком, что $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$, причем $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$, тогда

$$\lim_{x\to \alpha+} f(x) = \inf_{x\in X} f(x) \text{ и } \lim_{x\to \beta-} f(x) = \sup_{x\in X} f(x)$$

$$\left(\lim_{x\to \alpha+} f(x) = \sup_{x\in X} f(x) \text{ и } \lim_{x\to \beta-} f(x) = \inf_{x\in X} f(x)\right).$$

Предел показательно-степенной функции

$$\lim_{x\to S}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\exp\left\{\lim_{x\to S}\left[v(x)\cdot\ln u(x)\right]\right\}.$$

$\lim\limits_{x\to S} u(x)$	$\lim\limits_{x\to S} v(x)$	$\lim\limits_{x\to S}\left[u(x)\right]^{v(x)}$
$b>0$	c	b^c
0	$c>0$ (или $+\infty$)	0
	$c<0$ (или $-\infty$)	$+\infty$
	0	**неопределенность** 0^0
$0<b<1$	$+\infty$	0
	$-\infty$	$+\infty$
1	c	1
	$+\infty,\ -\infty,\ \infty$	**неопределенность** 1^∞
$b>1$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	0
$+\infty$	$c>0$ (или $+\infty$)	$+\infty$
	$c<0$ (или $-\infty$)	0
	0	**неопределенность** ∞^0

Примечание: $b,\ c\in\mathbb{R}$, для всех рассматриваемых значений $u(x)>0$.

Неопределенные выражения

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$$

Основные асимптотические разложения

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$