

### Серия 1. Пути и деревья

1. В графе  $G$  101 вершина, а  $\delta(G) \geq 50$ . Докажите, что  $G$  связан.
2. В связном графе нашлись два простых пути максимальной длины. Докажите, что у них есть хотя бы одна общая вершина.
3. Пусть  $T$  — дерево с хотя бы 3 вершинами. Докажите, что  $T$  имеет хотя бы одну из двух следующих конфигураций:
  - (\*) два листа, смежных с одной и той же вершиной;
  - (\*) лист, смежный с вершиной степени 2.
4. В выпуклом  $n$ -угольнике провели несколько диагоналей, не имеющих общих внутренних точек, которые разбили его на треугольники (это называется *триангулировать многоугольник*).
  - а) Докажите, что получилось ровно  $n - 2$  треугольника.
  - б) Пусть каждый треугольник — вершина графа, а две вершины смежны, если треугольники имеют общую сторону. Докажите, что получилось дерево.
5. В вершинах графа расставлены числа  $\pm 1$  таким образом, что для каждой вершины произведение чисел в вершинах, соседних с ней, отрицательно. Чему может быть равно произведение чисел во всех вершинах?
6. Вершины дерева  $T$  покрашены в красный и синий цвет так, что любые две смежные вершины разноцветны, и красных не меньше, чем синих. Докажите, что у  $T$  есть красный лист.
7. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?