

# Подготовка к контрольной работе №1

Группа Ромы

ДМ 2021

## 1 Задание. Метод здравого смысла

1.1 В строку выписывают цифры из множества  $\{1, 2, 3\}$  так, чтобы сумма никаких четырех записанных подряд цифр не делилась на 3. Сколькими способами можно так выписать 10 цифр?

1.2 В строку выписывают цифры из множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  так, чтобы сумма никаких трех записанных подряд цифр не делилась на 4. Сколькими способами можно так выписать 13 цифр?

1.3 Том Сойер должен покрасить забор из 10 досок. У него с собой есть краски 5 цветов. Он красит каждую доску в один из цветов так, чтобы соседние доски, а также доски, идущие через одну, были разного цвета. Сколькими способами он может покрасить забор?

1.4 Сколько существует тринадцатизначных чисел, удовлетворяющих следующим условиям: 1) первая цифра — не ноль; 2) соседние цифры всегда различны; 3) цифры на позициях через одну или через две также различны?

## 2 Задание. Бесконечности

2.1 . На плоскости отмечено бесконечное множество точек, все попарные расстояния между которыми больше 1. Докажите, что это множество счетно.

2.2 Рассмотрим на плоскости всевозможные несамопересекающиеся ломаные с конечным числом звеньев, все вершины которых — точки с целыми координатами. Докажите, что множество всех таких ломаных счетно. (Разные ломаные из этого множества могут пересекаться друг с другом, но никакая ломаная не пересекает сама себя.)

2.3 Рассмотрим в трехмерном пространстве множество всевозможных тетраэдров, вершины которых — точки с рациональными координатами. Докажите, что это множество счетно.

2.4 Докажите, что множество  $Z[x]$  всех многочленов с целыми коэффициентами — счетно.

### 3 Задание. Логика

3.1 . Не пользуясь таблицами истинности приведите к СКНФ и СДНФ следующую формулу

$$(((P \supset Q) \supset \neg R) \supset ((\neg Q \supset R) \supset P)).$$

3.2

$$(((R \supset \neg Q) \supset P) \supset ((R \supset Q) \supset \neg P))$$

3.3

$$(((\neg R \supset Q) \supset P) \supset ((P \supset \neg R) \supset \neg Q)).$$

### 4 Задание. Комбинаторика

Вычислите сумму

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n}$$

(В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от  $n$ .)

### 5 Задание. Гроб

Библиотекарь каждую минуту подходит к полке, на которой стоит 50-томное собрание сочинений, и меняет местами какие-то два соседних тома. Может ли он делать это так, чтобы по истечении некоторого времени оказалось, что все возможные варианты расстановки томов уже реализованы, причем каждый — ровно по одному разу?

## 6 Если для вас 5 был не гроб

### 6.1

а) В компании 101 человек. Оказалось, что любых 100 из них можно разбить на 50 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

б) В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

6.2 В  $n$ -элементном множестве  $X$  выбраны трёхэлементные подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , пересечение любых двух из которых состоит не более, чем из одного элемента. Докажите, что в множестве  $X$  найдётся подмножество  $A$ , состоящее не менее, чем из  $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$  элементов и не содержащее ни одного из подмножеств  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ .

6.3 Найдите количество способов покрыть прямоугольник  $3 \times n$  доминошками (то есть прямоугольниками  $1 \times 2$  или  $2 \times 1$ )

6.4 Докажите, что любое четное число больше двух можно представить в виде суммы двух простых