Университет ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной техники

Математический анализ

1-й курс

Список вопросов по математическому анализу

(1-й семестр 2022-2023 учебного года)

Лектор: Абжандадзе З. Л.
Автор файла: Барсуков М., P3115

Дата сборки: `25 декабря 2022 г.`

Санкт-Петербург
2022г.

Содержание

1 Множества. Некоторые действия с множествами
Объединение, пересечение, дополнение, разность, свойства

1.1 Множества

Множество — это ~~множество~~ набор, совокупность каких-либо (вообще говоря любых) объектов — элементов этого множества.

Множества обычно обозначаются большими латинскими буквами (например, A, B), его элементы — малыми (то есть a, b).

- Элементы в множестве не повторяются
- Два множества равны ($A = B$) тогда и только тогда,
  когда содержат в точности одинаковые элементы.
- Порядок элементов в множестве не имеет значения
- $\varnothing$ — **пустое множество**, не содержащее ни одного элемента

$a \in A$ — означает, что элемент a принадлежит множеству A
$a \notin A$ — что не принадлежит
$A \subset B$ — A это **подмножество** B, то есть $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \subset A$ — всегда верно.

Пусть $a \in A, b \in B$. Упорядоченной парой (a, b) называется множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, при этом a называется первым элементом упорядоченной пары, а b — вторым.

1.2 Операции над множествами

- **Объединение** $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- **Пересечение** $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- **Разность** $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Симметрическая разность** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- **Дополнение** $A^C = \{x \in U : x \notin A\} = U \setminus A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \triangle B = B \triangle A$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $A \cup A^C = U$
- $A \cap A^C = \varnothing$
- $\left(A^C\right)^C = A$
- $A^C \setminus B^C = B \setminus A$
- $\varnothing^C = U$
- **Декартово произведение** $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

2 Действительные числа

Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества

Действительное число (вещественное число) — математический объект, возникший из потребности измерения геометрических и физических величин окружающего мира, а также проведения таких вычислительных операций, как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений, исследование поведения функций.

Вещественные числа предназначены для измерения непрерывных величин.

Множество вещественных чисел имеет стандартное обозначение — $\mathbb{R}$.

2.1 Аксиомы поля

На множестве $\mathbb{R}$ определено отображение (операция сложения) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов a, b из $\mathbb{R}$ некоторый элемент c из того же множества $\mathbb{R}$, называемый **суммой** a и b ($a + b$ эквивалентная запись элемента c множества $\mathbb{R}$).

Также, на множестве $\mathbb{R}$ определено отображение (операция умножения) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов a, b из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $a \cdot b$, называемый **произведением** a и b.

При этом имеют место следующие свойства:

- I_1. *Коммутативность сложения.* Для любых $a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$
- I_2. *Ассоциативность сложения.* Для любых $a, b, \in \mathbb{R}$: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- I_3. *Существование нуля.* Существует элемент $0 \in \mathbb{R}$, называемый **нулём**, такой, что для любого $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$
- I_4. *Существование противоположного элемента.* Для любого $a \in \mathbb{R}$, существует элемент $-a \in \mathbb{R}$ называемый **противополжным** к a, такой, что $a + (-a) = 0$
- I_5. *Коммутативность умножения.* Для любых $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$
- I_6. *Ассоциативность сложения.* Для любых $a, b, \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- I_7. *Существование единицы.* Существует элемент $1 \in \mathbb{R}$, называемый **единицей**, такой, что для любого $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$
- I_8. *Существование обратного элемента.* Для любого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, существует элемент $a^{-1} \in \mathbb{R}$ называемый **обратным** к a, такой, что $a \cdot a^{-1} = 1$
- I_9. *Дистрибутивный закон умножения относительно сложения.* Для любых $a, b, \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- I_{10} ?. *Нетривиальность поля.* Единица и ноль — различные элементы $\mathbb{R}$: $1 \neq 0$

2.2 Аксиомы порядка

- II_1. *Рефлексивность*: $a \leqslant a$
- II_2. *Антисимметричность*: $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow (a = b)$
- II_3. *Транзитивность*: $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow (a \leqslant c)$
- II_4. *Линейная упорядоченность*: $(a \leqslant b) \vee (b \leqslant a)$
- II_5. *Связь сложения и порядка*: $(a \leqslant b) \Rightarrow (a + c \leqslant b + c)$
- II_6. *Связь умножения и порядка*: $(0 \leqslant a) \wedge (0 \leqslant b) \Rightarrow (0 \leqslant a \cdot b)$

2.3 Аксиомы непрерывности

- III_1. *Аксиома полноты.* Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, такие, что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$, существует такое число $\xi \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leqslant \xi \leqslant b$

2.4 Другие аксиомы

- IV_1. *Аксиома Архимеда*: $\forall a, b : a \ll b, \exists n : na > b$

Этих аксиом достаточно, чтобы строго вывести все известные свойства вещественных чисел. ***Множеством вещественных чисел называется непрерывное упорядоченное поле.***

2.5 Ограниченные числовые множества

Числовое множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху**,
если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in E \Rightarrow x \leqslant b$

Числовое множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным снизу**,
если $\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in E \Rightarrow a \leqslant x$

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ является примером ограниченного снизу множества. Если a принадлежит $\mathbb{R}$ и b принадлежит $\mathbb{R}$, то отрезок $[a, b]$ представляет собой ограниченное множество. Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, иррациональных чисел $\mathbb{I}$ и $\mathbb{R}$ — примеры неограниченных множеств.

3 Неограниченность множества натуральных чисел Теорема о числах 2^n

Предположим, что $\mathbb{N}$ ограничено выше. Тогда самая низкая верхняя граница s существует для каждого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим, что k является наибольшим натуральным числом, которое меньше s. Тогда $k + 1 > s$, и s не является верхней границей $\mathbb{N}$, потому что $k + 1$ остаётся натуральным числом. В результате этого противоречия мы можем сделать вывод, что $\mathbb{N}$ не ограничено сверху. Снизу $\mathbb{N}$ ограниченно $min(\mathbb{N}) = 1$.

$$(a + \alpha)^n > 1 + n\alpha, \alpha \geqslant -1$$

Теорема о числах 2^n: Среди чисел вида 2^n встречаются сколько угодно большие.

$(1 + 1)^n > 1 + n$, $2^n > 1 + n$, т.к. $n \in N$ и $\mathbb{N}$ - неограниченное $\Rightarrow 2^n$ — неограниченное

4 Отношение эквивалентности
Счётные и несчётные множества

4.1 Эквивалентность

Бинарное отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

- *Рефлексивность*: $\forall x \in X : xRx$.
- *Симметричность*: $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$.
- *Транзитивность*: $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Отношение эквивалентности обозначают символом $\sim$. Запись вида $a \sim b$ читают как "a эквивалентно b".

Два множества называются **эквивалентными** (или **равномощными**), если между ними можно установить *взаимно однозначное соответствие*.

Примеры: отношение *равенства* в любом множестве, *параллельности* прямых на плоскости, *быть одного роста* на множестве людей.

4.2 Счётность

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются **конечными**, а состоящие из бесконечного числа — **бесконечными**.

Множество, эквивалентное множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называется **счетным**.

Теорема: Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно.

Док-во: Можно поставить в соответствие каждому натуральному числу n число $z_n = \frac{n}{2}$, если n — четное, и $z_n = -\frac{n-1}{2}$, если n — нечетное. Данное соответствие сопоставляет каждому натуральному числу n целое число z_n, причем каждое из целых чисел получается по этой формуле ровно один раз.

- Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
- Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.
- Объединение конечного и счетного множеств, объединение двух счетных множеств — счетные.
- Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.
- Декартово произведение конечного числа не более чем счётных множеств — не более чем счётно.
- Множество, не являющееся ни конечным, ни счетным, называется **несчетным** множеством.
- Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел несчетно.
- Мощность множества действительных чисел также называют **континуумом**, и по сравнению со счётными множествами это «более бесконечное» множество.

5 Модуль действительного числа
Свойства

5.1 Модуль

Модулем, или абсолютной величиной, числа $a \in \mathbb{R}$ называется число $|a| \in \mathbb{R}$, равное самому a, если a неотрицательно, и равное $-a$, если a отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0, \\ -a & a < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля a ясно, что $|a|$ — неотрицательное число.

5.2 Свойства

- $|x| = |-x|$
- $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$
- $|x - y| = |y - x|$

6 Комплексные числа
Определение, арифм. действия, алгебраическая форма

Комплексные числа — это расширение поля действительных чисел. Обозначается $\mathbb{C}$. Комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле, то есть многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней. Это **основная теорема алгебры**.

Формально, комплексное число z — это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y) с введёнными на них операциями сложения и умножения вида:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Арифметическая модель комплексных чисел как пар действительных чисел, предложенная У. Р. Гамильтоном, хотя и непротиворечива, но не удобна в вычислениях, поэтому для манипуляций с ними используют различные их представления.

В рамках гамильтоновского определения действительные числа имеют вид $(x, 0)$. Эта пара обозначается также просто x. В частности, $(0, 0) = 0$. Пара $(0, 1)$ имеет особый статус и называется **мнимой единицей**. Она обозначается как i.

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = -1$$

Алгебраическая форма комплексного числа: $(x, y) = x + i \cdot y$.

Сложение двух комплексных чисел в алгебраической $z_1 = x_1 + y_1i$ и $z_2 = x_2 + y_2i$ выполняется по следующему правилу: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, **произведение** аналогично $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y1_y2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$

7 Модуль и аргумент комплексного числа Тригонометрическая форма записи

7.1 Тригонометрическая форма комплексного числа

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ геометрически соответствует точка $M(x, y)$ на плоскости Oxy. Но положение точки на плоскости, кроме декартовых координат (x, y), можно зафиксировать другой парой — ее полярных координат (r, φ) в полярной системе.

Используя связь декартовых и полярных координат точки M: $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, из алгебраической формы записи комплексного числа $z = x + iy$ получаем **тригонометрическую форму**:

$$z = r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Возведение в степень: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

7.2 Показательная форма комплексного числа

Если обозначить комплексное число z, у которого $\operatorname{Re} z = \cos\varphi$, а $\operatorname{Im} z = \sin\varphi$, через $e^{i\varphi}$, то есть $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, то получим **показательную форму** записи комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Равенство $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ называется **формулой Эйлера**.

Заметим, что геометрически задание комплексного числа $z = (r, \varphi)$ равносильно заданию вектора $\overrightarrow{OM}$, длина которого равна r, то есть $\big|\overrightarrow{OM}\big| = r$, а направление — под углом φ к оси Ox.

7.3 Модуль и аргумент комплексного числа

Число r — длина радиуса-вектора точки $M(x, y)$ называется **модулем** комплексного числа $z = x + iy$. Обозначение: $|z| = r$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Геометрический смысл модуля комплексного числа Очевидно, что $|z| \geqslant 0$ и $|z| = 0$ только для числа $z = 0$ ($x = 0$, $y = 0$). Число $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

Полярный угол φ точки $M(x, y)$ называется **аргументом** комплексного числа $z = x + iy$. Обозначение: $\varphi = \arg z$.

В дальнейшем, если нет специальных оговорок, под $\arg z$ будем понимать значение φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Так, для точки $z = -1 - i$ $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$.

Аргумент числа $z = 0$ — величина неопределенная.

Для пары сопряженных комплексных чисел z и $\overline{z}$ справедливы следующие равенства: $|\overline{z}| = |z|, \qquad \arg\overline{z} = -\arg z$

8 Формула Муавра
Извлечение корней из комплексного числа

Формула Муавра для комплексных чисел $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ утверждает, что

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Исторически формула Муавра была доказана ранее **формулы Эйлера**: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, однако немедленно следует из неё.

Аналогичная формула применима также и при вычислении корней n-й степени из ненулевого комплексного числа:

$$z^{1/n} = \left[r\big(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)\big)\right]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Из этой формулы следует, что корни n-й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют, и их количество равно n. На комплексной плоскости, как видно из той же формулы, все эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в нуле.

9 Линейное, Евклидовое пространство
Неравенство Коши-Буняковского

9.1 Линейное пространство

Линейным (**векторным**) пространством называется множество V произвольных элементов, называемых **векторами**, в котором определены операции *сложения векторов* и *умножения вектора на число*, т.е. любым двум векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, называемый *суммой векторов* $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, любому вектору $\mathbf{v}$ и любому числу λ из поля действительных чисел $\mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\lambda \cdot \mathbf{v}$, называемый произведением вектора $\mathbf{v}$ на число λ; так что выполняются 8 **аксиом линейного пространства**: *коммутативность и ассоциативность сложения, существование нулевого вектора, существование противоположного вектора, унитарность, ассоциативность умножения, дистрибутивность относительно сложения векторов и скаляров*.

- Линейное пространство — это непустое множество, так как обязательно содержит единственный нулевой вектор.
- Векторное пространство является абелевой группой по сложению.

Скалярное произведение: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$.

9.2 Евклидово пространство

Вещественное линейное пространство $\mathbb{E}$ называется евклидовым, если каждой паре элементов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ этого пространства поставлено в соответствие действительное число $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, называемое скалярным произведением, причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}\,;$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}\,;$
3. $\langle \lambda \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}\,;$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{o} \;\wedge\; \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{o}\,.$

9.3 Неравенство Коши — Буняковского

Пусть дано линейное пространство L со скалярным произведением $\langle x,\ y\rangle$. Пусть $\|x\|$ — норма, порождённая скалярным произведением, то есть $\|x\| \equiv \sqrt{\langle x,\ x\rangle}$, $\forall x \in L$. Тогда для любых $x,\ y \in L$ имеем:

$$|\langle x,\ y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы (коллинеарны, или среди них есть нулевой).

10 Метрическое пространство, открытый замкнутый шар Открытое, замкнутое множество

10.1 Метрика и метрическое пространство

Пусть X — абстрактное множество.

$X \times X = \{(x_1, x_2) : x_i \in X\}$ — прямое произведение множества X на себя

Отображение $\rho : X \times X R^{+}$ — называется **метрикой** на X, если выполняются аксиомы

1. $\rho(x, y) \geqslant 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ — неравенство треугольника

Если на X определена метрика, то пара (X, ρ) называется **метрическим пространством**.

10.2 Открытые шары

Для метрических пространств основное значение имеют открытые шары.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, пусть $r \in \mathbb{R}, r > 0, a \in X$, тогда открытый шар радиуса r в точке a — это множество $V_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$

Пример открытого шара. На числовой оси: $X = \mathbb{R} : V_r(a) = (ar; a + r)$

Множество $M \subset X$ **ограничено**, если существуют $a \in X$ и $r \in (0; +\inf)$, такие, что $M \subset V_r(a)$. Иначе говоря, множество ограничено, если его *можно поместить в открытый шар конечного радиуса.*

10.3 Открытые множества

Множество $G \subset X$ называется открытым в метрическом пространстве, если его можно записать как некоторое объединение открытых шаров (в общем случае объединение может состоять из несчетного числа шаров).

τ — класс открытых множеств.
$\tau = G^{-}$открытые в МП(X, ρ)

10.4 Замкнутые множества

Множество F называется замкнутым в МП(X, ρ), если $\overline{F} = X \setminus F$ — открыто.
Свойства замкнутых множеств:

1. $X, \varnothing$ — замкнуты
2. Если F_α — замкнуто $\forall \alpha \in A$, то $\cap_{\alpha \in A} F_\alpha$ — замкнуто
3. Если $F_1 \dots F_n$ — замкнуты, то $\cup_{j=1}^{n} F_j$ — замкнуто

11 Нормированное пространство

-

12 Определение предела числовой последовательности

-

13 Единственность предела числовой последовательности

-

14 Критерий Коши о существовании предела числовой последовательности

-

15 Теорема об ограниченности сходящихся последовательностей

-

16 Теорема о предельном переходе неравенства

-

17 Теорема о двух полицейских

-

18 Теорема Вайерштрасса (без доказательства)

Число e

-

19 Бесконечно малые последовательности

-

20 Числовой ряд и его сумма

Критерий Коши его существования

-