Алгебра. Практика. 2021-22

Занятие 1. 06.09.2022.

0. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.

1. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

2. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.

3. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i\sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i\sin(\frac{4\pi}{7})$.
а) Найдите $(a+b)^4$.
б) А потом все корни, скажем, 3 степени из $(a+b)$.

4. Решите уравнение:
а) $z^5 = \overline{z}$;
б) $z^5 + \overline{z} = 0$.

5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.

6. Пусть $z \in \mathrm{C}$, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t, что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 13.09.2022.

1. Пусть $x + iy = (s+it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.
2. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
а) $(2453, 2007)$;
б) $(2376, 702)$.

3. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
а) Найдите (F_n, F_{n+1}).
б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}).

4. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты

5. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что $\varphi(n) \vdots 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 20.09.2022.

1. Решите в целых числах уравнение.
а) $258x - 172y = 112$;
б) $209x - 513y = 76$.
2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.
3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.
4. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?
б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 27.09.2022.

1. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.

2. Решите сравнение: Решите сравнение: $91x \equiv 154 \pmod{112}$.

3. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j} + \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{j}+4} + \ldots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).

а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^\mathrm{n})$.

б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3.

Занятие 5. 04.10.2022.

1. а) Решите систему сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 7 \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases}$.

2. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.

3. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n?

4. а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.

б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \dots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.

Занятие 6. 18.10.2022.

1. Вещественные числа p, q таковы, что $x^4 + px + q \,\vdots\, x^2 + 10x + 1$. Найдите p и q.

2. С помощью алгоритма Евклида, найдите $(x^7 + x^2 + 1, x^{12} - 1)$ и его линейное представление.

3. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

4. Найдите все многочлены степени 3, дающие остаток $2x$ приделении на $(x-1)^2$ и остаток $3x$ при делении на $(x-2)^3$.

Занятие 7. 25.10.2022.

1. Какую кратность корня 1 может иметь многочен $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$?

2. Пусть $n > m > 0$, $c > 0$. Докажите, что многочлен $ax^n + bx^m + c$ не может иметь корня кратности 3 и более.

3. Пусть $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_0$. Докажите, что многочлен $a_k x^{n_k} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} + \ldots + a_0 x^{n_0}$ не может иметь ненулевого корня кратности более k.

4. Многочлен
а) $f(x) \in \mathbb{C}[x]$;
б) $f(x) \in K[x]$, где K — поле
таков, что $f(x^n) \,\vdots\, x - 1$. Докажите, что $f(x^n) \,\vdots\, (x^n - 1)$.

Занятие 8. 01.11.2022.

1. Найдите интерподяционный многочлен по точкам:
$x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$,
$y_0 = 3$, $y_1 = -10$, $y_2 = 5$, $y_3 = 7$, $y_4 = 8$.

2. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:
$x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = i$, $x_3 = -i$,
$y_0 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$.

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$. Вычислите
а) $\frac{1}{(3-\alpha_1)} + \frac{1}{(3-\alpha_2)} + \frac{1}{(3-\alpha_3)}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.
б) $\frac{1}{(3-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_2)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_3)^2}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

4. Пусть $\varphi(t) = (t - x_1) \dots (t - x_n)$, числа $x_1, \dots, x_n$ различны, $n > 3$. Найдите $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.

Занятие 9. 08.11.2022.

1. Разложите в сумму простейших в $\mathbb{C}(x)$ и в $\mathbb{R}(x)$:

а) $\frac{x}{x^4-1}$;

б) $\frac{x}{x^n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2. Разложите в сумму простейших $\frac{x^3}{(x^2-1)^2}$.

3. а) Найдите многочлен деления круга $\Phi_p(t)$, где $p \in \mathbb{P}$.

б) Найдите многочлен деления круга $\Phi_{p^k}(t)$, где $p \in \mathbb{P}$.

Занятие 10. 22.11.2022.

1. Решите квадратное сравнение $x^2 + 4x + 6 \equiv 0 \pmod{17}$.

2. Найдите рациональные корни многочлена $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.

3. Докажите, что уравнение $x^3 = 1$ в $\mathbb{Z}_p$ имеет три решения при $p \equiv 1 \pmod 3$ и одно решение при $p \equiv 2 \pmod 3$.

4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k + 1$.

5. Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg(f) \leq n$ принимает целые значения в точках k, $k+1$, $\ldots$, $k+n$, где $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Занятие 11. 29.11.2022.

1. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ таков, что $f(1) = 111$ и $f(4) = 117$. Докажите, что f не имеет $\mathbb{Z}$ корней.

2. Докажите, что многочлен $x^4 + 2x^2 + 3x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

3. Даны различные целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что многочлен $f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$

а) при нечетном n; б) при четном n.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что многочлен $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \ldots + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Занятие 12. 6.12.2021.

1. Вектора x, y, z линейно независимы. Являются ли линейно независимыми следующие тройки векторов:

а) $x + y$, $x + z$, $y + z$;

б) $x - y$, $x - z$, $y - z$?

2. Какие из данных подпространств K^3 (где K — поле) являются линейными? А какие аффинными?

а) $\{(2z + 2x, z + x, z - x) \ : \ x, z \in K\}$.

б) $\{(2z + 2, z + x + 3, z - x) \ : \ x, z \in K\}$.

3. Пусть V_1, V_2, V_3 — линейные подпространства линейного пространства V, причем V_1 — подпространство V_3. Докажите, что $(V_1 + V_2) \cap V_3 = V_1 + V_2 \cap V_3$.

4. Пусть U, W — аффинные подпространства линейного пространства V. Докажите, что $U + W$ — тоже аффинное подпространства V.

5. Пусть W — k-мерное аффинное подпространство V (то есть $W = U + a$, где $a \in V$, а U — линейное подпространство размерности k).

а) Докажите, что в W любые $k + 2$ вектора линейно зависимы.

а) Докажите, что при $W \neq U$ в W есть $k + 1$ ЛНЗ вектор.

Занятие 13. 20.12.2021.

1. Пусть $(G, \cdot)$ — группа. Зададим операцию $* : G \times G \to G$ формулой $a * b := b \cdot a$. Докажите, что $(G, *)$ — группа.

2. Докажите, что $\mathrm{ord(g)} = \mathrm{ord(g^{-1})}$ для любого элемента $g \in G$.

3. Группа G такова, что $a^2 = e$ для любого $a \in G$. Докажите, что G абелева.

4. Пусть G — конечная группа, $|G|$ четно. Докажите, что существует такой $a \in G$, что $a \neq e$ и $a^2 = e$.

5. Какие элементы C_n порождают ее при

а) $n \in \mathbb{P}$;

б) произвольном n?