

Конспекты к экзамену по математическому анализу  
Лектор: Абжандадзе Зураб Леванович

Егор Федоров

Вадим Беловласка

Максим Барсуков

2022 — 2023

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Первый семестр</b>	<b>3</b>
1.1	Множество. Некоторые действия с множеством	3
1.2	Действительные числа. Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества	3
1.2.1	Аксиомы порядка	4
1.2.2	Ограниченные числовые множества	4
1.3	Неограниченность множества натуральных чисел. Теорема о числах $2^n$	4
1.4	Отношение эквивалентности. Счетные и несчетные множества	4
1.5	Модуль действительного числа	5
1.6	Комплексные числа	5
1.7	Модуль и аргумент комплексного числа	5
1.8	Формула Муавра, извлечение корня из комплексного числа	5
1.9	Линейное и Евклидово пространство, неравенство Коши-Буняковского	6
1.10	Метрическое пространство, открытые и замкнутые множества	6
1.11	Нормированное пространство	7
1.12	Определение предела числовой последовательности	7
1.13	Единственность предела числовой последовательности	7
1.14	Критерий Коши о существовании предела числ. последовательности	7
1.15	Теорема об ограниченности сходящихся последователей	8
1.16	Теорема о предельном переходе в неравенствах	8
1.17	Теорема о двух полицейских	8
1.18	Теорема Вейерштрасса. Число Эйлера	8
1.19	Бесконечно малые последовательности	9
1.20	Числовой ряд и его сумма. Критерии Коши его существования	9
1.21	Гармонический ряд, ряд геометрической прогрессии, абсолютная сходимость	9
1.22	Признаки Даламбера, Коши, Лейбница	9
1.23	Предел функции. Эквивалентность	10
1.24	Односторонние пределы	10
1.25	Связь между пределом, ее значением и бесконечно малой величиной	10
1.26	Непрерывные функции	11
1.27	Равномерная непрерывность. Компактное множество (опр, без док-ва). Теорема Кантора (без док-ва)	11
1.28	Различные формы записи непрерывности функции в точке	11
1.29	Классификация точек разрыва функции	12
1.30	Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых	12
1.30.1	Бесконечно малая функция	12
1.30.2	Бесконечно большая функция	12
1.30.3	Сравнение бесконечно малых	12
1.31	Свойства бесконечно малых функций	13
1.32	Первый замечательный предел	14
1.33	Второй замечательный предел	15
1.34	Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса (без док-ва)	16
1.34.1	Теоремы Вайерштрасса о непрерывных на отрезке функциях	16
1.35	Определение производной. Дифференциал функции	16
1.36		16
1.37		16
1.38		16
1.39		16
1.40	Производная обратной функции. Производная сложной функции. Логарифмическая производная	16
1.41	Таблица производных	17
1.42	Производные высших порядков	17
1.43	Теорема Ферма	17
1.44	Теорема Ролля (радость препода-тролля)	17
1.45	Теорема Коши	17
1.46	Теорема Лагранжа. Следствие теоремы Лагранжа	18
1.47	Правило Лопиталья	18

1.48	Признак монотонности функций . . . . .	19
1.49	Необходимые условия экстремума . . . . .	19
1.50	Достаточные условия экстремума . . . . .	19

# Глава 1

## Первый семестр

### 1.1 Множество. Некоторые действия с множеством

Множество — произвольная совокупность объектов, формального определения множества нет.

Множество, не содержащее ни одного элемента обозначается как  $\emptyset$ .

Способы задать множество:

- Перечисление элементов:  $X = \{1, 3, 7\}$

- По условию:  $Y = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 3\}$

Операции на множествах:

- $A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$  — пересечение
- $A \cup B := \{x \mid (x \in A \vee x \in B)\}$  — объединение
- $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$  — разность
- $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  — симметрическая разность
- Пусть  $U$  — универсум (объемлющее множество), тогда  $\bar{A} := \{x \in U \mid x \notin A\}$

### 1.2 Действительные числа. Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества

Поле действительных (вещественных) чисел. Обозначается за  $\mathbb{R}$ .

На нем определены операции сложения  $(+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  и умножения  $(\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ .

Имеет несколько свойств (аксиом):

1. Коммутативность сложения:  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
2. Ассоциативность сложения:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$ .
3. Существование нуля (нейтрального элемента по сложению):  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$ .
4. Существование противоположного (обратного по сложению) элемента:  $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ .
5. Коммутативность умножения:  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$
6. Ассоциативность умножения:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
7. Существование единицы (нейтрального элемента по умножению):  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. Существование обратного элемента по умножению:  $\forall a \in \mathbb{R} : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. Дистрибутивность:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
10. Нетривиальность поля:  $1 \neq 0$ .

### 1.2.1 Аксиомы порядка

- Рефлексивность:  $a \leq a$ .
- Антисимметричность:  $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$ .
- Транзитивность:  $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ .
- Линейная упорядоченность:  $\forall a, b \in \mathbb{R}: (a < b) \vee (a = b) \vee (b < a)$ .
- Связь сложения и порядка:  $\forall c \in \mathbb{R}: (a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$ .
- Связь умножения и порядка:  $(0 \leq a) \wedge (0 \leq b) \Rightarrow (0 \leq a \cdot b)$ .

Аксиома Архимеда:  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, \exists n \in \mathbb{N}: an > b$

### 1.2.2 Ограниченные числовые множества

**Определение 1.1.** Числовое множество  $X$  называется *ограниченным сверху*, если  $\exists b \in \mathbb{R}: \forall x \in X \Rightarrow x \leq b$

Числовое множество  $X$  называется *ограниченным снизу*, если  $\exists a \in \mathbb{R}: \forall x \in X \Rightarrow a \leq x$ .

Множество  $\mathbb{N}$  ограничено снизу числом 1. Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то отрезок  $[a, b]$  — ограниченное множество. Множества  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}$  — примеры неограниченных множеств.

## 1.3 Неограниченность множества натуральных чисел. Теорема о числе $2^n$ .

**Теорема 1.1.** Множество натуральных чисел не ограничено сверху.

*Доказательство.* Предположим обратное. Пусть  $s$  — верхняя граница  $\mathbb{N}$ . Тогда возьмем  $k \in \mathbb{N}: k \leq s, k \rightarrow \max$ . Заметим, что  $s < k + 1$ , а  $k + 1 \in \mathbb{N}$ . Получаем противоречие с предположением об ограниченности.  $\square$

$$(a + \alpha)^n \geq 1 + na, \alpha \geq -1 \parallel (a + \alpha)^n > 1 + na, \alpha > -1 \quad (1.1)$$

**Теорема 1.2** (Теорема о числе  $2^n$ ). Среди чисел вида  $2^n$  встречаются сколь угодно большие.

*Доказательство.* По неравенству 1.1  $2^n = (1 + 1)^n > 1 + n \in \mathbb{N}$ , а множество натуральных чисел не ограничено.  $\square$

## 1.4 Отношение эквивалентности. Счетные и несчетные множества

Пусть  $\sim$  — бинарное отношение на множестве  $X$ . Тогда  $\sim$  называется **отношением эквивалентности**, если для него выполнены следующие условия:

1. Рефлексивность:  $\forall x \in X: x \sim x$
2. Симметричность:  $\forall x \in X: x \sim y \Rightarrow y \sim x$ .
3. Транзитивность:  $\forall x \in X: (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$ .

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение.

- Если  $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , то  $f$  — **инъекция**.
- Если  $\forall y \in Y: \exists x \in X: f(x) = y$ , то  $f$  — **сюръекция**.
- Если  $f$  — инъекция и сюръекция одновременно, то  $f$  — **биекция**.

Если между двумя множествами существует биективное отображение, то множества называются **равномощными**.

Если между множеством  $X$  и  $\mathbb{N}$  существует биекция, то  $X$  называется **счетным множеством**.

Если между множеством  $X$  и  $\mathbb{R}$  существует биекция, то  $X$  называется **несчетным множеством**.

Конечное или счетное множество называется **не более чем счетным**.

Отображение называется обратимым тогда и только тогда, когда оно является биекцией.

## 1.5 Модуль действительного числа.

$$a \in \mathbb{R}, |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля:

- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

*Доказательство.*  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$ ,  $|x - y| = |y - x| \Rightarrow |y - x| \geq |y| - |x| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$   $\square$

- $|x - y| = |y - x|$

## 1.6 Комплексные числа

Поле комплексных чисел ( $\mathbb{C}$ ) — расширения поля вещественных чисел ( $\mathbb{R}$ ).

$$z \in \mathbb{C}, z = (a, b) = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - (b_1 b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

## 1.7 Модуль и аргумент комплексного числа

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = (a, b)$ . Тогда  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Обозначим за  $\varphi = \arg(z)$  такое число, что  $\cos(\arg(z)) = \frac{a}{r}$ ,  $\sin(\arg(z)) = \frac{b}{r}$ .

Тогда тригонометрическая форма записи комплексного числа —  $(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ .

Еще одна форма записи —  $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ .

Если модуль равен 1, то можно записать в экспоненциальной форме —  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ .

## 1.8 Формула Муавра, извлечение корня из комплексного числа

**Теорема 1.3** (Формула Муавра). Пусть  $z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ . Тогда:  $|z^n| = |z|^n = r^n$ ,  $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) = n \cdot \varphi$

Для нахождения корня степени  $n$  из комплексного числа  $z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$  решим следующее уравнение

$$a^n = z \tag{1}$$

Пусть  $\arg(a) = \psi$ ,  $|a| = p$ .

По Формуле Муавра

$$p = |a|^n = |a^n| = |z| = r \iff p = \sqrt[n]{r}$$

$$n \cdot \psi = n \cdot \arg(z) + 2\pi k = \varphi + 2\pi k \iff \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

В данном уравнении получается  $n$  различных решений при  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Тогда для данного числа  $z \neq 0$  существует ровно  $n$  корней степени  $n$ .

## 1.9 Линейное и Евклидовое пространство, неравенство Коши-Буняковского

Пусть  $K$  — поле,  $V$  — множество, над которым определены следующие операции:

- $+: V \times V \rightarrow V$
- $\cdot: K \times V \rightarrow V$

Также поле должно удовлетворять следующим условиям:

1. Ассоциативность сложения
2. Коммутативность сложения
3. Ноль
4. Обратный элемент
5. Дистрибутивность
6. Ассоциативность умножения
7. Нейтральный элемент по умножению:  $\exists 1 \in V: \forall a \in V: 1 \cdot a = a$

Евклидовым пространством называется такое векторное пространство, над которым задана операция скалярного умножения ( $V \times V \rightarrow K$ ), обладающая следующими свойствами:

- Коммутативность  $\forall x, y \in V: x \cdot y = y \cdot x$
- $\forall x, y \in V, \tau \in K: (\tau x)y = \tau(xy)$
- Дистрибутивность:  $\forall x, y, z \in V: (x + y)z = xz + yz$
- $\forall x \in V: x \cdot x \geq 0$ , причем  $xx = 0 \iff x = 0$

Нормой вектора  $x$  называется элемент поля  $K: \|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ .

$$\forall x, y \in V: |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (1)$$

Неравенство (1) называется неравенство Коши-Буняковского.

## 1.10 Метрическое пространство, открытые и замкнутые множества

Метрическим пространством называется упорядоченная пара  $(X, \rho)$ , где  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , причем  $\forall x, y \in X: \rho(x, y) \geq 0$ .

Также для  $\rho$  должны выполняться следующее:

- Аксиома тождества:  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- Аксиома симметрии:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- Аксиома треугольника:  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

**Определение 1.2** (Открытый шар). Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $r \in \mathbb{R}^+, a \in X$ . Тогда **открытый шар** — это множество  $V_r(a) = \{x \in X: \rho(a, x) < r\}$ .

**Определение 1.3** (Открытое множество). Множество  $U$  называется **открытым**, если

$$\forall x_0 \in U \exists \varepsilon > 0: V_\varepsilon(x_0) \subset U$$

То есть каждая точка этого множества входит в него вместе с какой-то окрестностью.

На  $\mathbb{R}$  интервал является открытым множеством, а отрезок — нет.

**Определение 1.4** (Замкнутое множество). Множество  $F \subset X$  называется **замкнутым** в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  если множество  $\bar{F} = X \setminus F$  — открыто.

Свойства замкнутых множеств:

- $X, \emptyset$  замкнуты.
- Если  $F_{\alpha \in A}, \forall \alpha \in A: F_\alpha$  — замкнуто, то  $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  — замкнуто.
- Если  $F_1, \dots, F_n$  — замкнуты, то  $\bigcup$

## 1.11 Нормированное пространство

**Определение 1.5.** *Нормированное пространство* — упорядоченная пара  $(X, |||)$ , где  $X$  — векторное пространство,  $|||: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , причем для  $|||$  должны выполняться следующие условия:

- $\forall x \in X: ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \iff x = 0.$
- $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}: ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
- $\forall x, y, z \in X: ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

## 1.12 Определение предела числовой последовательности

**Определение 1.6.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \iff \forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$$

## 1.13 Единственность предела числовой последовательности

**Теорема 1.4.** *Последовательность может иметь не более одного предела.*

*Доказательство.* Предположим, существует последовательность  $x_n$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , причем  $a \neq b$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon): \forall n > N_1(\varepsilon) |x_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon): \forall n > N_2(\varepsilon) |x_n - b| < \varepsilon \quad (2)$$

Выберем для (1) и (2) один и тот же  $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{|a-b|}{2} > 0$ .

Тогда  $\exists N_1(\frac{\varepsilon}{2}): \forall n > N_1(\frac{\varepsilon}{2}) |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\exists N_2(\frac{\varepsilon}{2}): \forall n > N_2(\frac{\varepsilon}{2}) |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

Возьмем  $n > \max(N_1(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(\frac{\varepsilon}{2}))$ .

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} & |x_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |x_n - a| + |x_n - b| &< \varepsilon \end{aligned}$$

По неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} |a - x_n + x_n - b| &< |x_n - a| + |x_n - b| \\ |a - b| &< |x_n - a| + |x_n - b| \\ \varepsilon = |a - b| &< |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon \\ \varepsilon &< \varepsilon \end{aligned}$$

Противоречие, значит предел последовательности единственен. □

## 1.14 Критерий Коши о существовании предела числ. последовательности

**Теорема 1.5** (Критерий Коши). *Пусть  $x_n$  — числовая последовательность с элементами из  $\mathbb{R}$ .  $x_n$  имеет предел в  $\mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m, n \in \mathbb{N}: |x_m - x_n| < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ :

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , нужно доказать что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m, n \in \mathbb{N} |a_m - a_n| < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

Возьмем два  $n, m > N(\frac{\varepsilon}{2})$ . Тогда справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} & |x_m - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |x_n - a| + |x_m - a| &< \varepsilon \end{aligned}$$

По неравенству треугольника  $|x_n - x_m| < |x_n - a| + |x_m - a|$ . Значит

$$|x_n - x_m| < |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ :

Пусть  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n, m > N(\varepsilon) |x_n - x_m| < \varepsilon$ . Необходимо доказать, что  $\exists a: \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon$ .

Предположим обратное, то есть

$$\forall a: \exists \varepsilon > 0 \forall N(\varepsilon) \exists n > N(\varepsilon): |x_n - a| > \varepsilon$$

□



## 1.15 Теорема об ограниченности сходящихся последовательностей

**Теорема 1.6** (Теорема об ограниченности сходящихся последовательностей). Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

*Доказательство.* Пусть последовательность  $x_n \in \mathbb{R}$  имеет конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Возьмем  $\varepsilon = 1$ . Тогда, начиная с некоторого  $n > N(\varepsilon)$   $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n < a + \varepsilon$ .

Возьмем максимум из чисел  $a_1, \dots, a_n$ . Пусть  $M = \max(a_1, \dots, a_n)$ . Тогда  $a_1, \dots, a_n \leq M$ . При этом все числа после  $a_n$  будут меньше, чем  $a + \varepsilon = a + 1$ . Тогда вся последовательность будет меньше, чем  $\max(a + 1, M)$ .

Возьмем минимум из чисел  $a_1, \dots, a_n$ . Тогда  $m = \min(a_1, \dots, a_n)$ ,  $m \leq a_1, \dots, a_n$ . При этом все числа после  $a_n$  будут больше, чем  $a - \varepsilon = a - 1$ . Значит вся последовательность будет больше, чем  $\min(a - 1, m)$ .

Таким образом, последовательность ограничена.  $\square$

## 1.16 Теорема о предельном переходе в неравенствах

**Теорема 1.7.** Если элементы сходящейся последовательности  $x_n$ , начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству  $x_n \geq b$ , то и предел этой последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  удовлетворяет неравенству  $a \geq b$ .

*Доказательство.* Предположим обратное, пусть  $a < b$ . Возьмем для предела  $\varepsilon = b - a > 0$ . Тогда для какого-то  $n > N(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< b - a \\ a - b &< x_n - a < b - a \\ 2a - b &< x_n < b \\ x_n &< b \end{aligned}$$

Противоречие с условием  $x_n \geq b$ , значит  $a \geq b$ .  $\square$

## 1.17 Теорема о двух полицейских

**Теорема 1.8** (Теорема о двух полицейских). Если последовательность  $a_n$  такая, что  $b_n \leq a_n \leq c_n$  начиная с некоторого  $n$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \forall n > N_1(\varepsilon): |b_n - A| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \forall n > N_2(\varepsilon): |c_n - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

Возьмем  $\varepsilon$  для обоих пределов и  $n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ .

$$\begin{aligned} |b_n - A| < \varepsilon \quad |c_n - A| < \varepsilon \\ A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon \quad A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \end{aligned}$$

Так как  $b_n \leq a_n \leq c_n$ , то

$$\begin{aligned} A - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < A + \varepsilon \\ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): |a_n - A| < \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

$\square$

## 1.18 Теорема Вейерштрасса. Число Эйлера.

**Теорема 1.9** (Теорема Вейерштрасса). Если неубывающая (невозрастающая) последовательность  $x_n$  ограничена сверху (снизу), то она сходится.

Рассмотрим последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Разложим по биному Ньютона:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \left(C_n^i \left(\frac{1}{n}\right)^i\right) = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

При переходе к  $x_{n+1}$  добавиться новый положительный член, а каждый из написанных членов увеличиться, так как любой множитель вида  $1 - \frac{s}{n}$  замениться большим множителем  $1 - \frac{s}{n+1}$ .

Таким образом,  $x_{n+1} > x_n$ , а значит последовательность возрастает.

Оценим выражение с помощью геометрической последовательности:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Тогда  $\sum_{i=1}^{n-1} 2^n < 1$ , а значит  $x_n < 3$ . При этом очевидно, что  $0 < x_n$ .

Значит, последовательность  $x_n$  монотонно возрастает и ограничена, а значит имеет предел. Предел данной последовательности обозначают числом Эйлера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

## 1.19 Бесконечно малые последовательности

## 1.20 Числовой ряд и его сумма. Критерии Коши его существования

**Определение 1.7.** Пусть дана последовательность  $a_n$ . Формальная сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  называется **числовым рядом**.

Для обозначения используется краткая форма записи:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Сумма  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  называется **частичной суммой ряда**.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **сходящимся**, если существует конечный предел  $S$  последовательности его частичных сумм:  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Число  $S$  называется **суммой ряда**, при этом пишут  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Теорема 1.10** (Критерий Коши). Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}: \left| \sum_{i=m}^{m+p} a_i \right| < \varepsilon$$

## 1.21 Гармонический ряд, ряд геометрической прогрессии, абсолютная сходимость

**Определение 1.8.** Ряд  $\sum a_n$  сходится **абсолютно**, если сходится ряд его модулей  $\sum |a_n|$ .

**Определение 1.9.** **Гармонический ряд** — сумма, составленная из бесконечного количества членов, обратных последовательным числам натурального ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Гармонический ряд **не сходится**.

**Определение 1.10.** **Геометрическая прогрессия** — последовательность вида  $a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 \dots$ . Общий член задается формулой  $a_n = a_1 \dots q^{n-1}$ .

Частичная сумма геометрической прогрессии  $\sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1}$  может быть найдена по формуле  $\sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

Если  $|q| < 1$ , то ряд геометрической прогрессии сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-a_1}{q - 1} \right) = \frac{a_1}{1 - q}$$

## 1.22 Признаки Даламбера, Коши, Лейбница

**Теорема 1.11** (Признак Даламбера). Пусть дан числовой ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ .  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . Если  $d > 1$ , то ряд расходится. Если  $0 < d < 1$ , то ряд сходится.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Теорема 1.12** (Признак Коши). Пусть дан числовой ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ .  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ . Если  $d > 1$ , то ряд расходится. Если  $0 < d < 1$ , то ряд сходится.

**Теорема 1.13** (Признак Лейбница). Пусть  $a_n$  — знакопеременный ряд,  $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, a_n > 0$ .

Тогда, если  $a_{n+1} < a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд сходится.

## 1.23 Предел функции. Эквивалентность

**Определение 1.11** (Предел функции по Коши).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

ИЛИ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0): f(x) \in U_\varepsilon(b)$$

$$\text{где } U_\delta(x_0) = U_\delta(x) \setminus x_0 = \{x \in R: 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

**Определение 1.12** (Предел функции по Гейне).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}: (x_n \rightarrow x_0) \wedge (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Теорема 1.14.** Определение предела функции по Коши эквивалентно определению по Гейне.

*Доказательство.* Докажем, что из определения по Коши следует определение по Гейне. Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . Тогда

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_1 \quad (1)$$

Пусть  $x_n$  — произвольная последовательность, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , и  $x_n \neq x_0$ .

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists N(\varepsilon_2): \forall n > N(\varepsilon): |x_n - x_0| < \varepsilon_2 \quad (2)$$

Тогда для всех  $n > N(\varepsilon_2)$  выполняется:  $0 < |x_n - x_0| < \varepsilon_2$ .

Положим  $N(\varepsilon) := N_2(\delta_1(\varepsilon))$ . Тогда  $\forall n > N(\varepsilon): 0 < |x_n - x_0| < \delta_1(\varepsilon)$ . Из этого по (2)

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

Значит для любой последовательности  $\{x_n\}: x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$  следует, что  $f(x_n) \rightarrow A$ , то есть из определения по Коши следует определение по Гейне.

Докажем, что из определения по Гейне следует определение по Коши. Предположим, что существует такая функция  $f(x)$ , что для нее выполняется определение по Гейне, но не выполняется определение по Коши.

Пусть  $\forall \{x_n\}: x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$ . При этом, раз не выполняется определение по Коши, то справедливо следующее выражение:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \forall \delta_1 > 0 \exists x(\delta_1): (0 < |x(\delta_1) - x_0| < \delta_1) \wedge (|f(x(\delta_1)) - A| \geq \varepsilon_1)$$

Возьмем последовательность  $\delta_n = \frac{1}{n}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} |x_n - x_0| &< \delta_n \\ x_0 - \frac{1}{n} &< x_n < x_0 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

По Теореме о двух полицейских тогда  $x_n \rightarrow x_0$ , Однако  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_1 > 0$ , а значит  $f(x_n) \not\rightarrow A$ .

Таким образом, мы построили последовательность, удовлетворяющую определению предела по Гейне, для которой  $f(x_n) \not\rightarrow A$ .

□

## 1.24 Односторонние пределы.

**Определение 1.13.** Левый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Правый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{Очевидно, что } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a \end{cases}$$

## 1.25 Связь между пределом, ее значением и бесконечно малой величиной.

**Теорема 1.15.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\alpha(x)$  — БМ

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_{x \neq x_0}: |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_{x \neq x_0}: |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\ \Rightarrow (f(x) - A) \text{ — БМ, } \Rightarrow f(x) - A := \alpha(x), \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x) \end{aligned}$$

## 1.26 Непрерывные функции.

**Определение 1.14.** Пусть функция  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и в самой точке  $x_0$ .  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Если функция определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , но не является непрерывной в данной точке, то говорят, что функция **терпит разрыв** в этой точке.

**Теорема 1.16.** Пусть функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда:

- функция  $h(x) = f(x) + g(x)$  непрерывна в  $x_0$
- функция  $u(x) = f(x)g(x)$  непрерывна в  $x_0$
- функция  $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывна в  $x_0$  если  $g(x_0) \neq 0$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = u(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = v(x_0)$$

□

## 1.27 Равномерная непрерывность. Компактное множество (опр, без док-ва). Теорема Кантора (без док-ва).

**Определение 1.15** (Равномерная непрерывность). Функция называется **равномерно непрерывной**, если

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_1, x_2: (|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

**Определение 1.16** (Компактное множество). Конечное множество — множество, в любом покрытии которого открытыми множествами найдется конечное подпокрытие. В  $\mathbb{R}$  компактами являются замкнутые ограниченные множества.

Отрезок  $[a, b]$  является компактным множеством. Интервал не является компактом.

**Теорема 1.17** (Теорема Кантора о равномерной непрерывности). Непрерывная функция, определенная на компакте, равномерно непрерывна на нем.

## 1.28 Различные формы записи непрерывности функции в точке.

**Определение 1.17.** Пусть функция  $f$  определена в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности  $U_\delta(x_0)$ .  $f$  - непрерывная в точке  $x_0$ , если она определена в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности  $U_\delta(x_0)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Остальные формы записи остаются загадкой

Еще одно определение найденное на просторах интернета:

**Определение 1.18.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$$

**Определение 1.19.** Если функция  $f$  не является непрерывной в точке  $x_0$ , то она называется разрывной.

**Следствие 1.17.1.** Функция разрывна, если:

1. Не определена в точке  $x_0$
2. Определена в точке  $x_0$ , но не определена в окрестности  $U_\delta(x_0)$
3.  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff (\nexists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)) \vee (\nexists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)) \vee (\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x))$
4.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

## 1.29 Классификация точек разрыва функции.

Если функция не является непрерывной в точке  $x_0$ , то она называется **разрывной**.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \vee \nexists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \vee \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

Например: Ф-ция Дирихле — разрывная в каждой точке

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x - \text{рациональное} \\ 0 & x - \text{иррациональное} \end{cases}$$

Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_1, x_2 \in E$ , тогда  $\omega(f, E) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$  — **колебания** функции  $f$  на  $E$ .

1. **Разрыв I-го рода (Устранимый разрыв)** — когда в одной точке  $x_0$   $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ . Пример:  $f(x) = \frac{x^2}{x}$
2. **Разрыв II-го рода** — когда в одной точке  $x_0$  функция  $f(x)$  не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

**Скачок функции**  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется разность пределов справа и слева  $\Delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ .

Если скачок функции в  $x_0 \neq 0$ , то это **разрыв функции I-го рода**.

## 1.30 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых.

### 1.30.1 Бесконечно малая функция

**Определение 1.20. Бесконечно малая** — числовая функция или последовательность, стремящаяся к (пределу которой равен) нулю.

Функция называется бесконечно малой в окрестности точки  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Функция называется бесконечно малой на бесконечности, если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  либо  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Также бесконечно малой является функция, представляющая собой разность функции и её предела, то есть если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , то  $f(x) - a = \alpha(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a) = 0$ .

Подчеркнём, что бесконечно малую величину следует понимать как переменную величину (функцию), которая лишь в процессе своего изменения [при стремлении  $x$  к  $a$  (из  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ )] делается меньше произвольного числа ( $\varepsilon$ ).

### 1.30.2 Бесконечно большая функция

**Определение 1.21. Бесконечно большая** — числовая функция или последовательность, стремящаяся к (предел которой равен) бесконечности определённого знака.

Функция называется бесконечно большой в окрестности точки  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

Функция называется бесконечно большой на бесконечности, если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$  либо  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .

Как и в случае бесконечно малых, необходимо отметить, что ни одно отдельно взятое значение бесконечно большой величины не может быть названо как «бесконечно большое» — бесконечно большая величина — это функция, которая лишь в процессе своего изменения может стать больше произвольно взятого числа.

### 1.30.3 Сравнение бесконечно малых

Допустим, у нас есть бесконечно малые при одном и том же  $x \rightarrow a$  величины  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , то  $\alpha$  и  $\beta$  — эквивалентные бесконечно малые.

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (предел конечен и не равен 0), то  $\alpha$  и  $\beta$  являются бесконечно малыми одного (одинакового) порядка. Обозначение:  $\alpha \asymp \beta$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , то  $\beta$  — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\alpha$ . Обозначение:  $\beta \prec \alpha$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , то  $\beta$  — бесконечно малая более низкого порядка, чем  $\alpha$ . Обозначение:  $\alpha \prec \beta$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha^m} = c$  (предел конечен и не равен 0), то бесконечно малая величина  $\beta$  имеет  $m$ -й порядок малости относительно бесконечно малой  $\alpha$ .

### 1.31 Свойства бесконечно малых функций.

- Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция ( $\alpha(x) \pm \beta(x)$  — БМ).
- Произведение бесконечно малых — бесконечно малая ( $\alpha(x) \cdot \beta(x)$  — БМ).
- Если  $f$  — ограничена в окрестности точки  $x_0$ , а  $\alpha(x)$  — бесконечно малая, то  $f(x_0) \cdot \alpha(x)$  — бесконечно малая.
- Как следствие, произведение бесконечно малой на константу — бесконечно малая.
- Если  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция, то  $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  — бесконечно большая функция и наоборот.

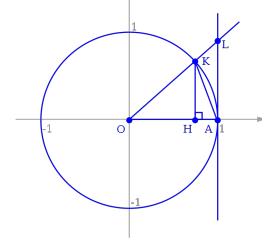
## 1.32 Первый замечательный предел.

**Теорема 1.18** (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.* Рассмотрим односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}$  и докажем, что они равны 1.

Рассмотрим случай  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ . Отложим этот угол на единичной окружности так, чтобы его вершина совпадала с началом координат, а одна сторона совпадала с осью  $OX$ . Пусть  $K$  — точка пересечения второй стороны угла с единичной окружностью, а точка  $L$  — с касательной к этой окружности в точке  $A = (1; 0)$ . Точка  $H$  — проекция точки  $K$  на ось  $OX$ .



Очевидно, что:

$$S_{\triangle OKA} < S_{\text{sect} KOA} < S_{\triangle OAL} \quad (1) \quad (\text{где } S_{\text{sect} KOA} \text{ — площадь сектора } KOA)$$

Поскольку  $|KH| = \sin x$ ,  $|LA| = \tan x$ :

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |KH| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\text{sect} KOA} = \frac{1}{2} \cdot |OA|^2 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |LA| = \frac{\tan x}{2}$$

Подставляя в (1), получим:  $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$

Так как при  $x \rightarrow +0$ :  $\sin x > 0$ ,  $x > 0$ ,  $\tan x > 0$ :  $\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$

Умножаем на  $\sin x$ :  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Перейдём к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Найдём левый односторонний предел (так как функция чётна, в этом нет необходимости, достаточно доказать это для правого предела):

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{u = -x \\ x = -u \\ u \rightarrow +0 \\ x \rightarrow -0}} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{-\sin(u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1.

**Следствие 1.18.1.**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

□

### 1.33 Второй замечательный предел.

**Теорема 1.19** (Второй замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

*Доказательство.* Зная, что второй замечательный предел верен для натуральных значений  $x$ , докажем второй замечательный предел для вещественных  $x$ , то есть докажем, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $x \rightarrow +\infty$ . Каждое значение  $x$  заключено между двумя положительными целыми числами:  $n \leq x < n+1$ , где  $n = [x]$  — это целая часть  $x$ .

Отсюда следует:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \iff 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому, согласно пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

2. Пусть  $x \rightarrow -\infty$ . Сделаем подстановку  $-x = t$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e.$$

Очевидно, из двух этих случаев вытекает, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  для вещественного  $x$ . □

**Следствие 1.19.1.**

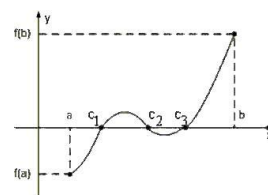
- $\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$  для  $a > 0$ ,  $a \neq 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x = e^{-k}$



## 1.34 Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса (без док-ва).

**Теорема 1.20** (Вторая теорема Больцано – Коши о промежуточном значении). Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и есть произвольное число  $C$ , находящееся между значениями функции на концах отрезка:  $A = f(a)$  и  $B = f(b)$ . Тогда существует точка  $\xi \in [a, b]$ , для которой  $f(\xi) = C$ .

**Теорема 1.21** (Первая теорема Больцано – Коши). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и принимает на его концах значения разных знаков ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), то среди внутренних точек отрезка имеется по крайней мере одна точка  $\xi$ , такая, что  $f(\xi) = 0$



**Следствие 1.21.1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $m = \min_{[a, b]} f$ ,  $M = \max_{[a, b]} f$ . Тогда функция принимает на отрезке все значения из  $[m, M]$  и только эти значения:  $m \leq f(x) \leq M$  при  $a \leq x \leq b$ .

### 1.34.1 Теоремы Вайерштрасса о непрерывных на отрезке функциях

**Теорема 1.22** (Теорема Вайерштрасса об ограниченности непрерывной функции). Функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , ограничена на этом отрезке. Другими словами,  $\exists M \in \mathbb{R}$  такое, что

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| < M$$

**Теорема 1.23** (Теорема Вайерштрасса о достижении точной верхней и нижней грани). Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает своей точной верхней грани и точной нижней грани:

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\exists \bar{\xi} \in [a, b] : f(\bar{\xi}) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

**Теорема 1.24** (Теорема Вайерштрасса). Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она принимает все промежуточные значения между  $f(a)$  и  $f(b)$

## 1.35 Определение производной. Дифференциал функции.

1.36

1.37

1.38

1.39

## 1.40 Производная обратной функции. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.

**Определение 1.22.**  $g : I \rightarrow I_1$   $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$   $(f \circ g)(a) = f(g(a))$  — композиция функций

**Теорема 1.25.** Если  $g$  дифференцируема в точке  $a$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $g(a)$ ,  $\Rightarrow (f \circ g)$  дифференцируема в точке  $a$  и  $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

**Определение 1.23.** Производная обратной функции

$$y = f(x), \quad x = \varphi(y), \quad y'_x = f'(x), \quad x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

**Определение 1.24.** Логарифмическая производная

$$y = f(x), \quad \ln y = \ln(f(x)), \quad \frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))', \quad y' = y(\ln(f(x)))'$$

Example:

$$y = x^x, \quad \ln y = x \ln x, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1, \quad y' = y \ln x + y$$

$$y' = x^x \cdot \ln x + x^x$$

## 1.41 Таблица производных

1.  $c' = 0$
2.  $y = u^\alpha, y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \parallel y = \sqrt{u} y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \parallel y = \frac{1}{u} y' = -\frac{u'}{u^2}$
3.  $y = a^u, y' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \parallel y = \exp^u y' = \exp^u \cdot u'$
4.  $y = \log_a u, y' = \frac{u'}{u \ln a} \parallel (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
5.  $y = \sin(u), y' = \cos(u) \cdot u'$
6.  $y = \cos(u), y' = -\sin(u) \cdot u'$
7.  $y = \operatorname{tg}(u), y' = \frac{u'}{\cos^2(u)}$
8.  $y = \operatorname{ctg}(u), y' = -\frac{u'}{\sin^2(u)}$
9.  $y = \arcsin(u), y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10.  $y = \arccos(u), y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11.  $y = \operatorname{arctg}(u), y' = \frac{u'}{1+u^2}$
12.  $y = \operatorname{arccotg}(u), y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

## 1.42 Производные высших порядков.

Не проходило на курсе

## 1.43 Теорема Ферма

**Теорема 1.26** (о равенстве нулю производной). Если дифференцируемая функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0 \in (a, b)$  имеет экстремум, то  $f'(x_0) = 0$

*Доказательство.* Предположим, что  $f(x_0) = \max_{x \in (a, b)} f(x)$ . Тогда  $\forall x \in (a, b): f(x) \leq f(x_0)$ .

Поэтому:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \geq 0$$
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \leq 0$$

Если производная  $f'(x_0)$  определена, то получаем  $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$ , то есть  $f'(x_0) = 0$ .

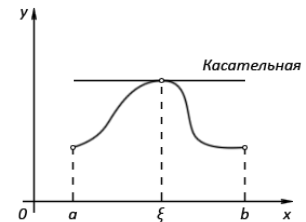
Если  $x_0$  — точка локального минимума функции  $f$ , то доказательство аналогично. □

## 1.44 Теорема Ролля (радость препода-тролля)

**Теорема 1.27.** Пусть функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема в  $(a, b)$  и на концах отрезка принимает одинаковое значение  $f(a) = f(b)$ , тогда  $\exists \xi, a < \xi < b : f'(\xi) = 0$ .

*Доказательство.* Если функция на отрезке постоянна, то утверждение очевидно, поскольку производная функции равна нулю в любой точке интервала.

Если же нет, поскольку функция непрерывна на  $[a, b]$ , то согласно теореме Вейерштрасса, она принимает своё наибольшее или наименьшее значение в некоторой точке интервала, то есть имеет в этой точке локальный экстремум, и по лемме Ферма производная в этой точке равна 0. □



## 1.45 Теорема Коши

**Теорема 1.28** (о среднем значении). Пусть функции  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируемы на интервале  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) g'(x) \neq 0$ . Тогда  $\exists \xi, a < \xi < b$ , такое что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

*Доказательство.* Для доказательства введём функцию  $\varphi(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$ .

Легко видеть, что для неё выполнены условия теоремы Ролля. Воспользовавшись этой теоремой, получим, что существует точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой производная функции  $\varphi$  равна нулю:

$$\varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$$

Перенеся в этом равенстве второе слагаемое вправо мы получим формулу из общей формулировки теоремы. В оригинальной формулировке остаётся разделить равенство на  $g'(ξ)$  и  $g(b) - g(a)$ . Оба эти числа будут ненулевыми. Значит,  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(ξ)}{g'(ξ)}$ .  $\square$

## 1.46 Теорема Лагранжа. Следствие теоремы Лагранжа

**Теорема 1.29 (Формула конечных приращений или теорема Лагранжа о среднем значении).** Пусть функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , тогда

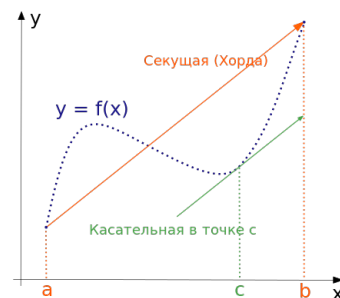
$$\exists \xi, a < \xi < b: \quad f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi) \iff f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Геометрически** это можно переформулировать так: на отрезке  $[a, b]$  найдётся точка, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка.

**Доказательство.** Для доказательства введём функцию  $g(x) = x$ . Заметим, что  $g'(x) = 1 \neq 0$ . Тогда по теореме Коши для функций  $f$  и  $g$ ,  $\exists \xi \in (a, b)$ , такое что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi)$$

$\square$



**Следствие 1.29.1.** Если  $f'(x) = 0$  на некотором промежутке  $(a, b)$ , то функция  $f(x) = \text{const}$  на этом промежутке.

**Доказательство.** Пусть  $f'(x) = 0$  для любого  $x \in (a, b)$ . Возьмем произвольные  $x_1$  и  $x_2$  из  $(a, b)$  и пусть  $x_1 < x_2$ . Тогда по теореме Лагранжа 1.29 существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . Но по условию  $f'(x) = 0$ , стало быть,  $f'(c) = 0$ , где  $x_1 < c < x_2$ . Поэтому имеем  $f(x_2) - f(x_1) = 0$  или  $f(x_2) = f(x_1)$ . А так как  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные точки из  $(a, b)$ , то имеем  $f(x) = c$ .  $\square$

**Следствие 1.29.2.** Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое ( $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + \text{const}$ ).

**Доказательство.** Пусть  $f'_1(x) = f'_2(x)$  при  $x \in (a, b)$ . Тогда  $(f_1(x) - f_2(x))' = f'_1(x) - f'_2(x) = 0$ . Следовательно, согласно следствию 1, функция  $f_1(x) - f_2(x)$  есть постоянная, т.е.  $f_1(x) - f_2(x) = c$  для  $\forall x \in (a, b)$ .  $\square$

## 1.47 Правило Лопиталя

**Теорема 1.30.** Если  $f(x), g(x)$  — действительнзначные функции, дифференцируемые в  $\dot{U}(a)$ , где  $a$  — действительное число или один из символов  $+\infty, -\infty, \infty$ , причём

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  или  $\infty$ ;
- $g'(x) \neq 0$  в  $\dot{U}(a)$
- существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ;

$$\text{тогда существует } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пределы также могут быть односторонними.

**Доказательство.** Раскрытие неопределенности  $\frac{0}{0}$ . До- или переопределяя функции  $f$  и  $g$  в точке  $a$ , можно считать, что  $f(a) = g(a) = 0$ . На пределы и производные это никак не повлияет, поскольку они не зависят от того, чему равны функции в точке  $a$ .

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dots$$

Применим теорему Коши к отрезку  $[a, x]$ . Существует такая точка  $c(x) \in (a, x)$ , что дробь под знаком предела равна  $\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$  (Теорема Коши для фиксированного отрезка даёт фиксированную точку  $c$ , а в нашем случае для каждого  $x$  свой отрезок, поэтому точка  $c$  зависит от  $x$ ).

Можно продолжить равенство:

$$\dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \dots$$

Заметим, что  $c(x) \rightarrow a$  при  $x \rightarrow a$  и  $c(x) \neq a$ , поскольку  $c(x) \in (a, x)$  (по теореме о двух милиционерах). Значит, можно использовать теорему о пределе сложной функции. Имеем:

$$\dots = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

□

## 1.48 Признак монотонности функций

**Определение 1.25.** Функция  $f(x)$  называется **возрастающей** на промежутке  $(a, b)$ , если для  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  из того, что  $x_1 < x_2$ , следует, что  $f(x_1) < f(x_2)$

Функция  $f(x)$  называется **убывающей** на промежутке  $(a, b)$ , если для  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  из того, что  $x_1 < x_2$ , следует, что  $f(x_1) > f(x_2)$

Для того чтобы функция  $f(x)$  была монотонной на  $(a, b)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$ , а  $f'(x)$  не меняла свой знак на всем промежутке. При этом, если  $f'(x) > 0$ , то функция возрастает на этом промежутке, а если  $f'(x) < 0$  — то убывает.

Если при этом допускается и равенство нулю производной в каких-то точках, то говорят о нестрогом возрастании или убывании.

## 1.49 Необходимые условия экстремума

Если дифференцируемая функция  $f$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум, то  $f'(x_0) = 0$ .

Точки, в которых  $f'(x_0) = 0$  — **стационарные точки**.

Точки, в которых  $f'(x_0) = 0$  или  $\nexists f'(x_0)$  — **критические точки**.

## 1.50 Достаточные условия экстремума

- Первое достаточное условие:** Если непрерывная функция  $f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности критической точки  $x_0$  и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума; с минуса на плюс — то  $x_0$  есть точка минимума.

*Доказательство.* Рассмотрим окрестность точки  $x_0$ . Пусть  $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$  и  $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ . Тогда функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $(x_0 - \delta; x_0)$ , а на интервале  $(x_0; x_0 + \delta)$  она убывает. Отсюда следует, что значение  $f(x)$  в точке  $x_0$  является наибольшим на интервале  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , т.е.  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ . Следовательно  $x_0$  есть точка максимума. □

- Второе достаточное условие:** Если в точке  $x_0$  первая производная функции  $f(x)$  равна нулю ( $f'(x_0) = 0$ ), а вторая производная в точке  $x_0$  существует и отлична от нуля ( $f''(x_0) \neq 0$ ), то при  $f''(x_0) < 0$  в точке  $x_0$  функция имеет максимум, а при  $f''(x_0) > 0$  — минимум.

*Доказательство.* Пусть  $f''(x_0) > 0$ . Т.к.  $f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ , то  $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$  в достаточно малой окрестности точки  $x_0$ . Если  $\Delta x < 0$ , то  $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ , если  $\Delta x > 0$ , то  $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ . Из этого следует, что при переходе через точку  $x_0$  первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно  $x_0$  есть точка минимума. □