Серия 5

1. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

2. Ребра связного кубического графа можно покрасить в 3 цвета правильным образом (то есть так, чтобы из каждой вершины выходили три ребра разных цветов). Одно ребро удалили. Докажите, что граф остался связным.

3. а) Докажите, что в любом двусвязном графе есть простой цикл, содержащий любые два заданных ребра.

б) Верно ли, что в любом трёхсвязном графе есть простой цикл, содержащий любые три заданных ребра без общих концов?

4. Пусть G — двусвязный, но недвудольный граф.

а) Докажите, что для любой вершины $a \in V(G)$ в G есть простой нечетный цикл, проходящий через a.

б) В G никакие два нечетных цикла не имеют общего ребра. Докажите, что этот граф является простым нечетным циклом.

5. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: “Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!”. Вторая сваха говорит: “А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!”. Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: “В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!”. Прав ли он?

7. Выведите теорему Кёнига ($\alpha'(G) = \beta(G)$) из теоремы Холла.

Серия 5

1. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

2. Ребра связного кубического графа можно покрасить в 3 цвета правильным образом (то есть так, чтобы из каждой вершины выходили три ребра разных цветов). Одно ребро удалили. Докажите, что граф остался связным.

3. а) Докажите, что в любом двусвязном графе есть простой цикл, содержащий любые два заданных ребра.

б) Верно ли, что в любом трёхсвязном графе есть простой цикл, содержащий любые три заданных ребра без общих концов?

4. Пусть G — двусвязный, но недвудольный граф.

а) Докажите, что для любой вершины $a \in V(G)$ в G есть простой нечетный цикл, проходящий через a.

б) В G никакие два нечетных цикла не имеют общего ребра. Докажите, что этот граф является простым нечетным циклом.

5. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: “Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!”. Вторая сваха говорит: “А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!”. Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: “В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!”. Прав ли он?

7. Выведите теорему Кёнига ($\alpha'(G) = \beta(G)$) из теоремы Холла.