

Методы оптимизации. Домашняя работа 1.

Царькова Анастасия

1 Задача 1.

Построим двудольный граф, в котором в правой доле A вершины $1, \dots, 13$, а в левой B доле 13 вершин v_1, \dots, v_{13} отвечающие за стопки карт ($v_i = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$)

В полученном двудольном графе ребрами соединены вершины $i \in A$ и $v_j \in B$ если $i \in v_j = x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}$. Мы получили множество двудольных графов по 13 вершин в каждой доле и у каждой вершины 4 ребра.

Покажем, что по теореме Холла любой граф из построенного ранее множества имеет совершенное паросочетание.

Возьмем подмножества A' и B' , количество различных достоинств которые лежат в B' меньше либо равно $4|B'|$ и больше либо равно $|B'|$, что соответствует условию существования совершенного паросочетания в двудольном графе – множество B' переходит (по ребрам) в множество A' которое больше либо равно по размеру ($|A'| \geq |B'|$).

Получили, что при любом разбиении карт на кучки, мы строим вышеупомянутый граф, находим паросочетание, и берем из каждой кучки ту карту которая равна по достоинству с значению вершины в которую из стопки входит ребро.

2 Задача 2

Индуктивный шаг:

Рассмотрим вершину b такую, что $b \in B'$ и $b \notin M_A$ (если такая вершина существует). Тогда, возьмем ребро $e_b \in M_B$ такое между вершинами $b \in B'$ и $a \in A'$ и удалим его из нашего рассмотрения. Такая операция не нарушит паросочетания M_A и M_B .

Получается что если существует такая вершина b , то можно свести задачу к меньшей.

Аналогично если существует вершина a , такая что $a \in A'$ и $a \notin M_B$, то так же задачу можно свести к меньшей.

База индукции:

Осталось разобрать случай, когда не существует вышеописанных вершин в множестве A' и B' – значит все вершины из A' покрыты ребрами из M_B и вершины из B' покрыты M_A .

Поскольку все вершины из B' лежат в M_A , то $|A'| \geq |B'|$, аналогично для $A - |A'| \leq |B'|$, следовательно $|A'| = |B'|$

Получили, что паросочетание M_A исконое для множеств A' и B'

Теперь, что бы получить паросочетание для исходной задачи, надо раскрутить индукцию в обратную сторону (добавлять удаленные ребра обратно).

3 Задача 3

Сведем задачу к $Ax = b, x \geq 0, c^T x \rightarrow \min$

$$A = \left(M \left| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \end{array} \right. \right)$$

Где M – матрица унимодулярности, а единичная матрица и имеет размер $n \times n$ где n – количество ребер.

Вектор x ищется таким, что бы имел вид $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ где m – количество вершин и x_i и $y_i \geq 0$. Причем если x_i больше нуля, то значит мы берем i -ую вершину в паросочетание (очевидно что если мы будем решать задачу минимизации то $x_i \in [0, 1]$), а y_i просто какие то коэффициенты.

Вектор $b = (1, \dots, 1)$.

Вектор $c = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

Понятно, что мы получили задачу в которой минимизируем сумму "первых" (x_i) элементов вектора x .

Покажем, что матрица A тотально унимодулярная.

Очевидно, что матрица M тотально унимодулярна. Это так, потому что, поскольку граф двудольный, то значит матрицу M можно разделить на две части вдоль стороны отвечающей ребра. А так же в столбце отвечающем за ребро может стоять только две единицы, причем одна в первой половине, а вторая во второй. Получили что по лемме (не помню называется ли какнибудь она) данная матрица является тотально унимодулярной.

Теперь покажем, что добавление сбоку единичной матрицы не изменяет унимодулярности. Если мы взяли какой то минор и в него попал столбец из этой единичной матрицы то:

1. если в столбце есть -1, то просто разложим определитель по этому столбцу и так сведем к задаче к меньшему размеру, причем от такого перехода не определитель изменяет только знак, значит задача остается эквивалентной.

2. если там нет -1 то весь столбец равен 0 – значит определитель равен нулю – что является признаком тотальной унимодулярности.

Получили что матрица A тотально унимодулярна.

4 Задача 4

Так как ранг матрицы A меньше n , то строки данной матрицы линейно зависимы, следовательно для данной матрицы существует такой вектор d : $Ad = 0$, $d \neq 0$.

Получили что для любого элемента из множества P есть такое d , что $A(v+d) = Av + Ad = Av + 0 = Av \in P$ – следовательно нет вершин у данного полиэдра.