신호 및 시스템

박쥐가 쏘는 음파 / 동굴 / 동굴에 부딪혔다가 돌아오는(박쥐에게) 음파

input signal → system → output signal

domain
- continuous time
- discrete time
- frequency

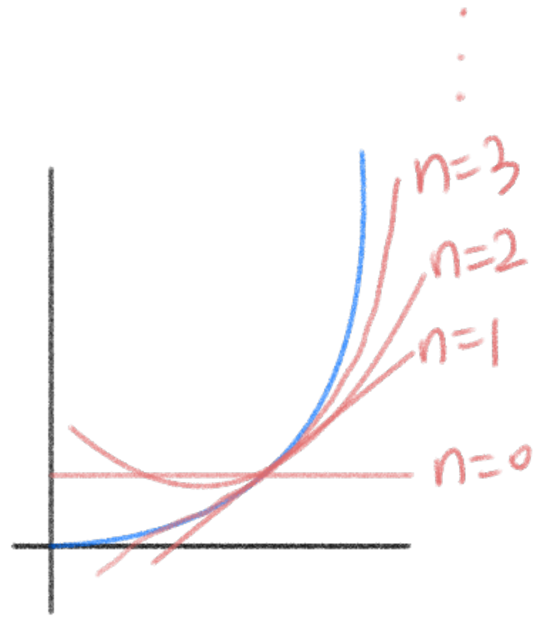
- 오일러 공식

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$$

증명

다항 함수의 합으로 어떤 함수를 표현하는 매클로린

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \rightarrow$$



$\downarrow$

$$f(0) = c_0$$

$$f'(0) = c_1$$

$$f''(0) = 2c_2$$

$$f'''(0) = 3\cdot 2c_3$$

$$\vdots$$

$$f^n(0) = n!\,c_n$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots$$

$e^{j\theta}$ 미분

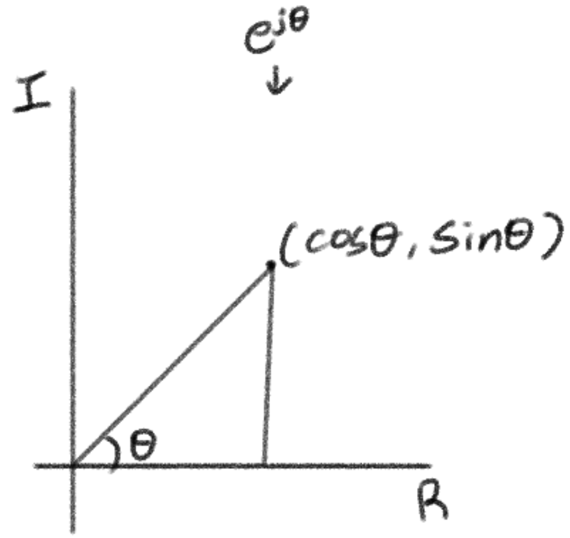
$$e^{j\theta} \rightarrow je^{j\theta} \rightarrow -e^{j\theta} \rightarrow -je^{j\theta} \quad \cdots$$

$$\therefore e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - j\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + j\frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots$$

$\downarrow$

$$\cos\theta + j\sin\theta$$

- 오일러 공식 좌표 표현



$$2e^{j\theta} = 2\cos\theta + 2j\sin\theta$$

$$\downarrow$$

$A \times e^{j\theta}$ (A는 양수, θ는 $0 \sim 2\pi$)

↳ 2D 평면의 모든 수 표현 가능

ex1) $-1 = 1 \times e^{j\pi}$

ex2) $z_1 = a_1 + b_1 j = A_1 e^{j\theta_1}$

$z_2 = a_2 + b_2 j = A_2 e^{j\theta_2}$ → $z_1 z_2 z_3 = A_1 A_2 A_3 e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$. 곱셈이 간단해진다.

$z_3 = a_3 + b_3 j = A_3 e^{j\theta_3}$

- 에너지와 파워

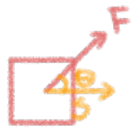
$t_1 \le t \le t_2$일 때, t 구간에서의 total energy

$$\boxed{\int_{t_2}^{t_1} |x(t)|^2 dt}$$

energy : 물체에 '일'을 했을 때 발생하는 물리량 (에너지 보존)

일·운동 에너지 정리 : 일의 양만큼 에너지가 변함

energy 단위 : $[J] = [\underbrace{N}_{\text{힘}} \cdot \underbrace{m}_{\text{거리}}]$

일 : 물체 이동 방향으로의 힘 × 물체 이동 거리 

$\rightsquigarrow \underbrace{F}_{F=m\cdot a} \cdot \cos\theta$

일률(Power) : 일의 미분 [J/sec] = [W]

- 인과성

↳ input과 output 사이의 관계성이 있는가?

① $y(t) = x(3t)$ 3초에서의 입력은 1초의 출력에 영향을 줄 수 없음.

↳ $y(1) = x(3)$
$t=1$

$\therefore$ non-causal

② $y(t) = x(t)\cos(t+1)$ $\cos(2)$는 그냥 '값'임

↳ $y(1) = x(1)\cos(2)$
$t=1$

$\therefore$ causal

③ $y(t) = x(-t)$

↳ $y(1) = x(-1)$ ⇝ causal인가?
$t=1$

↳ $y(-1) = x(1)$ $\therefore$ non-causal
$t=-1$

- LTI (Linear Time Invarient)

- Linear = Scaling + additivity
  = Superposition

- Scale : input이 A배이면 output도 A배인 system

- additivity : $x_1(t) \to \boxed{\text{system}} \to y_1(t)$, $x_2(t) \to \boxed{\text{system}} \to y_2(t)$ 일 때, $x_1(t) + x_2(t) \to \boxed{\text{system}} \to y_1(t) + y_2(t)$ 를 만족하는 system

---

- Time - Invarient : input이 time-shift 되면, output도 time-shift되는 시스템
  ↳ input이 1초, 2초, 3초일 때 언제나 output이 같다는 이야기 X ($x(t-t_0) \to y(t)$)
  ↳ $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

ex) $y(t) = x(-2t+2)$는 TI인가?

먼저, $x(t)$ 변화 생각해보기

$$x(t) \xrightarrow[\text{대칭}]{} x(-t) \xrightarrow[\text{2만큼 shrink}]{} x(-2t) \xrightarrow[\text{1 이동}]{} x(-2(t-1)) = x(-2t+2)$$

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow x_1(-2t+2) \text{ 을 } y_1(t)$$

$$x_1(t-t_0) \to x_1(-t-t_0) \to x_1(-2t-t_0) \to x_1(-2(t-1)-t_0)$$
$$= x_1(-2t-2-t_0)$$

$$y_1(t-t_0) = x_1(-2(t-t_0)+2) = x_1(-2t+2t_0+2)$$

∴ TI 아님

> 결론 : LTI는 예측 가능함을 다루는 것이다

- 컨볼루션 (convolution)

convolution　　　　impulse response

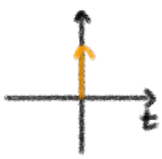
$$y(t) = f(x(t), h(t))$$

- Impulse function
  - discrete domain에서

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=o.w. \end{cases}$$

조건 $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta[n] = f(0) \right)$ 을 만족해야 함

  - continuous domain에서



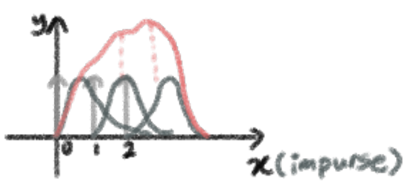
$$\delta(n) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t=o.w. \end{cases}$$

조건 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) = f(0) \right)$ 을 만족해야 함

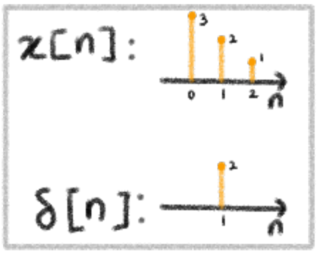
- Impulse response

$x_1(t) = \delta(t) \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow y_1(t) = h(t)$ → h(t)가 있으면,
임의의 $x(t)$에 대한 output $y(t)$를 알 수 있다

- Convolution



- discrete time Convolution



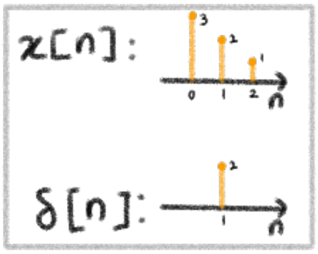
$x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n]$ (like taylor)

system

$y[n] = 3h[n] + 2h[n-1] + h[n]$

$$\therefore y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]}_{L}\,\underbrace{h[n-k]}_{TI}$$

- Continuous time Convolution



$x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n]$ (like taylor)

system

$y[n] = 3h[n] + 2h[n-1] + h[n]$

$$\therefore y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]}_{L}\,\underbrace{h[n-k]}_{TI}$$