# АППРОКСИМАЦИЯ АПРИОРНО ЗАДАННЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК (LEAST-SQUARES METHOD, LSM))

Исходные данные: числовая зависимость $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, …, $(x_n, y_n)$.
Критерий оптимизации:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 \to \min \qquad (1)$$

## Случай 1. Линейная зависимость

Аппроксимация данных линейной функцией $f(x) = ax + b$.

Из (1) следует, что минимум функции $g(a, b)$ будет в том случае, если

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 0 \qquad (2)$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial b} = 0. \qquad (3)$$

Из (2) получаем

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - ax_i - b)^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2\sum_{i=1}^{n} a x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b x_i = -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad (4)$$

Аналогично, из (3) получаем

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - ax_i - b)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} (-y_i) + 2\sum_{i=1}^{n} a x_i + 2\sum_{i=1}^{n} b = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb = 0,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (5)$$

Выражения (4) и (5) образуют систему из двух линейных уравнений относительно $a$ и $b$, которую можно записать в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

Решение системы можно представить в виде $X = A^{-1}B$. С учетом того, что

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{n}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} & -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} & \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\end{bmatrix}$$

получаем

$$a=\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i=$$
$$=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$b=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i=$$
$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

Таким образом, искомые коэффициенты вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{b=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}$$

Примечание

Нахождение обратной матрицы для матрицы $2\times2$ общего вида:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ c & d & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & d-\frac{b}{a}\cdot c & -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{a}-\left(-\frac{c}{ad-bc}\right)\frac{b}{a} & -\frac{a}{ad-bc}\cdot\frac{b}{a}\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc}\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc}\\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}}$$

## Случай 2. Квадратичная зависимость

Аппроксимация данных квадратичной функцией $f(x)=ax^2+bx+c$.
Из (1) следует, что минимум функции $g(a,b,c)$ будет в том случае, если

$$\frac{\partial g}{\partial a}=0,\qquad(6)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b}=0\qquad(7)$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial c} = 0. \qquad (8)$$

Из (6) получаем

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2\right)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2}{\partial a}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i^2) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 2c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \qquad (9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2\right)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2}{\partial b}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (10)$$

$$\frac{\partial g}{\partial c} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2\right)}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2}{\partial c}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-1) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nc = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (11)$$

Выражения (9), (10) и (11) также образуют систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов $a, b, c$, записываемую в матричном виде как

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

Общее решение ввиду его громоздкости выводить не будем.

## Случай 3. Полиномиальная зависимость n-го порядка

Аппроксимация данных квадратичной функцией $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

По индукции можно записать общий вид системы уравнений, решение которой даст искомые коэффициенты функции.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{4} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}}_{(m+1)\times(m+1)}, \quad X = \begin{bmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

С целью удобства вычислений перепишем систему в следующем виде:

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{4} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix}}_{(m+1)\times(m+1)}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

Полученная система уравнений апробирована в программной системе PAE для аппроксимации временных затрат на синтез разбиений разными методами.

## Случай 4. Экспоненциальная зависимость

Аппроксимация данных экспоненциальной функцией $f(x) = ae^x + b$.

Минимум функции $g(a, b)$ наблюдается в том случае, если

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 0$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial b} = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - ae^{x_i} - b)^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ae^{x_i} - b)(-e^{x_i}) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i e^{x_i} + 2a\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} + 2b\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} + b\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i e^{x_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i - ae^{x_i} - b)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ae^{x_i} - b)(-1) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} + 2\sum_{i=1}^{n} b = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

В матричном виде полученная система уравнений имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} & \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} & n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i e^{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}.$$

Ее решение в матричном виде

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})^2} & -\frac{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}{n\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})^2} \\ -\frac{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}{n\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})^2} & \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i}}{n\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i e^{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, формулы для коэффициентов можно представить в следующем виде

$$\boldsymbol{a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i e^{x_i} - \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})^2}},$$

$$\boldsymbol{b = \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i e^{x_i}}{n\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} - (\sum_{i=1}^{n} e^{x_i})^2}}.$$

На самом деле показательную зависимость можно записать в еще более сложном виде

$$f(x) = ab^{cx+d} + h, \qquad (12)$$

однако часть коэффициентов в подобной записи оказывается «лишней». Покажем это. Во-первых,

$$ab^{cx+d} + h = ab^{cx}b^d + h = a_1 b^{cx} + h,$$

где $a_1 = ab^d$. Во-вторых,

$$a_1 b^{cx} + h = a_1 e^{cx\ln b} + h = a_1 e^{b_1 x} + h,$$

где $b_1 = c\ln b$.

Таким образом, путем преобразования коэффициентов зависимость вида (12) можно преобразовать к виду

$$f(x) = ae^{bx} + c. \qquad (13)$$

Однако для полученной зависимости (13) система уравнений, определяющая коэффициенты, получается уже нелинейной относительно коэффициента $b$. Покажем это:

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i - ae^{bx_i} - c)^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ae^{bx_i} - c)(-e^{bx_i}) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i} + 2a\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} + 2c\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} + c\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(y_i - ae^{bx_i} - c\right)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ae^{bx_i} - c\right)\left(-abe^{bx_i}\right) =$$

$$= -2ab\sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i} + 2a^2 b\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} + 2abc\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} + c\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i}, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial g}{\partial c} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(y_i - ae^{bx_i} - c\right)^2}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ae^{bx_i} - c\right)(-1) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} + 2\sum_{i=1}^{n} c = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (16)$$

С учетом того, что уравнения (14) и (15) совпадают, получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} + c\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i} \\ a\sum_{i=1}^{n} e^{bx_i} + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

В системе три неизвестных и два уравнения: она имеет неограниченное количество решений, которые можно получить с использованием численных методов.

## Случай 5. Логарифмическая зависимость

Аппроксимация данных логарифмической функцией $f(x) = a\log_b(cx + d) + e$.
Как и в предыдущем разделе, покажем, что часть коэффициентов является «лишней». Во-первых,

$$a\log_b(cx + d) + e = a\frac{\ln(cx + d)}{\ln b} + e = a_1\ln(cx + d) + e,$$

где $a_1 = \frac{a}{\ln b}$. Т.е. логарифм можно вычислять по произвольному основанию $(2, e, 10, \ldots)$. Во-вторых,

$$a_1\ln(cx + d) + e = a_1\ln\left(c\left(x + \frac{d}{c}\right)\right) + e = a_1\ln c + a_1\ln\left(x + \frac{d}{c}\right) + e$$
$$= a_1\ln(x + d_1) + e_1,$$

где $e_1 = a_1\ln c + e$ , $d_1 = \frac{d}{c}$ . Таким образом, аппроксимирующую функцию можно преобразовать к следующему виду:

$$f(x) = a\ln(x+b) + c.$$

Минимум функции $g(a,b,c)$ наблюдается в том случае, если

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = 0$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial c} = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i - a\ln(x_i+b) - c)^2}{\partial a} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ln(x_i+b) - c)(-\ln(x_i+b)) =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n} y_i\ln(x_i+b) + 2a\sum_{i=1}^{n}\ln^2(x_i+b) + 2c\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+b) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\ln^2(x_i+b) + c\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+b) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ln(x_i+b), \qquad (17)$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i - a\ln(x_i+b) - c)^2}{\partial b} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ln(x_i+b) - c)\left(-\frac{a}{x_i+b}\right) =$$

$$= -2a\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i+b} + 2a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(x_i+b)}{x_i+b} + 2ac\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+b} = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(x_i+b)}{x_i+b} + c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i+b}, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial g}{\partial c} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2\right)}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i - a\ln(x_i+b) - c)^2}{\partial c} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ln(x_i+b) - c)(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+b) + 2\sum_{i=1}^{n} c = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+b) + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (19)$$

Таким образом, уравнения (17)–(19) образуют систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}\ln^2(x_i+b)+c\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+b)=\sum_{i=1}^{n}y_i\ln(x_i+b) \\ a\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(x_i+b)}{x_i+b}+c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+b}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i+b} \\ a\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+b)+nc=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

Если положить $b=1$, то система уравнений становится линейной

$$A=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i & \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \\ \sum_{i=1}^{n}\ln x_i & n \end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}y_i\ln x_i \\ \sum_{i=1}^{n}y_i \end{bmatrix},$$

а ее решение можно представить в виде

$$X=\begin{bmatrix} \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2} & -\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2} \\ -\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2} & \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}y_i\ln x_i \\ \sum_{i=1}^{n}y_i \end{bmatrix}.$$

Другими словами, значения коэффициентов можно вычислить как

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_i\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$$

$$c=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i\ln x_i}{n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i-(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$$