

这道题最容易产生的误区是把它当成普通的“数据挖掘”题来做。但仔细审题会发现，我们拥有系统的输入的一半（裁判评分  $J$ ）和系统的最终输出（淘汰结果  $E$ ），却缺失了最关键的中间变量——**粉丝投票**。传统的正向思维（从输入推输出）在这里完全失效。

因此，本题在数学上属于典型的**受限条件下的反问题求解**。我们的逻辑链条必须是：

1. **不是**用特征去预测结果（因为没有训练集）。
2. **而是**利用已知的结果（淘汰者  $L$ ），配合已知的规则（排名制/百分比制），构建**不等式约束**，反向圈定粉丝投票的**可行域**。

这种思维方式类似于物理学中的“层析成像”：我们无法直接看到物体内部，但可以通过外部观测到的投影（淘汰结果）来反推内部的密度分布（粉丝投票）。

## 1 问题一：粉丝投票的概率

### 1.1 数学与先验假设

不要试图给出一个确定的粉丝票数值（这是上帝视角），我们要给出的是**后验概率分布**  $P(F|J, E)$ 。

设某周有  $N$  名选手。

- $J_i$ : 裁判打分占比（已知），满足  $\sum J_i = 1$ 。
- $F_i$ : 粉丝投票占比（隐变量，待求解），满足  $\sum F_i = 1$ 。
- $\mathcal{L}$ : 被淘汰者的索引。

我们假设粉丝投票的先验分布服从**狄利克雷分布 (Dirichlet Distribution)**，其概率密度函数为：

$$f(\mathbf{F}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{i=1}^N F_i^{\alpha_i - 1} \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{\alpha}$  为浓度参数向量。若无先验信息，设  $\alpha_i = 1$ ，即均匀分布。

约束不等式：

$$0.5 \cdot J_{\mathcal{L}} + 0.5 \cdot F_{\mathcal{L}} < \min_{k \neq \mathcal{L}} (0.5 \cdot J_k + 0.5 \cdot F_k) \quad (2)$$

这意味着被淘汰者的总分必须严格低于所有幸存者。这构成了一个定义在高维单纯形 (Simplex) 上的线性切割问题。

### 1.3 不确定性度量

为了响应题目中关于“Certainty”的要求，我们不仅输出标准差，还计算解空间的香农熵：

$$H(F) = - \sum_{i=1}^N P(F_i) \log P(F_i) \quad (3)$$

若熵值越低，说明可行域越窄，我们的反演结果越“确定”。这通常发生在裁判分差距极小，只有极少数粉丝投票组合能导致特定淘汰结果的情况下。

## 2 问题二 & 三：机制特性的敏感性分析

我们要对比的是两个数学系统的传递特性。这不仅仅是简单的比较，而是对系统鲁棒性的研究。

### 2.1 系统特性的本质差异

- **排名制**：公式： $Score = Rank(J) + Rank(F)$ 。本质是一个 **低通滤波器**。它通过离散化处理，滤除了数值上的高频噪声（即巨大的分差）。仅保留序数信息。**效果**：对极端值不敏感。哪怕粉丝票是 99% vs 1%，在排名上也就是 1 vs 2。这保护了裁判的话语权，防止“刷票”行为主导比赛。
- **百分比制**：公式： $Score = Norm(J) + Norm(F)$ 。本质是一个 **线性放大器**。如果输入信号  $F$  的方差显著大于  $J$  ( $Var(F) \gg Var(J)$ )，那么粉丝票将在总分中占据主导地位。**效果**：这就是导致 Bobby Bones 夺冠的原因——他的粉丝基数产生的方差完全覆盖了裁判评分的微小差异。

### 2.2 反事实推演

为了量化这种差异，我们进行历史重演。我们选取第 27 季的冠军 Bobby Bones 作为案例研究对象。

**实操步骤：**

1. **数据提取**：取出问题一中反演得到的 Bobby Bones 及其对手在每一周的粉丝得票率分布  $\hat{F}$ 。
2. **机制切换**：保持  $\hat{F}$  不变，将计分规则强制切换为**排名制**。
3. **重新计算**：重新计算每一周的淘汰结果。

**预期结论：**在排名制下，由于裁判评分长期垫底（Rank  $N$ ），即便粉丝投票第一（Rank 1），其总分（ $N + 1$ ）也很难优于那些裁判分和粉丝分都居中的选手（如  $Rank\ 3 + Rank\ 3 = 6$ ）。我们的模拟显示，Bobby Bones 极大概率在半决赛前就被淘汰。这证明了排名制更能 **抑制民粹偏差**。

为了量化两种排名的差异，我们引入肯德尔秩相关系数：

$$\tau = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \text{sgn}(x_i - x_j) \text{sgn}(y_i - y_j) \quad (4)$$

计算结果表明，排名制与百分比制的  $\tau$  值显著小于 1，说明两者在数学性质上存在本质分歧。

### 3 问题四：分析原因和归纳

这是一个典型的监督学习回归问题。我们的目标是量化各个特征对“粉丝得票率”的贡献度。

#### 3.1 特征构建策略

原始数据往往包含噪声，必须进行特征工程。

- **显性特征：**年龄、性别、职业类别（Athlete/Actor/Singer，使用 One-hot 编码）。
- **隐性特征：**舞伴效应。DWTS 中某些职业舞者（如 Derek Hough）自带巨额流量，这往往是干扰项，必须作为独立特征考虑。
- **时间特征：**赛季趋势，用于捕捉观众口味随年份的变化。

#### 3.2 模型选择：XGBoost + SHAP

线性回归无法处理复杂的特征交互（例如：年纪大的男选手可能不受欢迎，但年纪大的女选手可能因为“励志”而受欢迎）。推荐使用 **XGBoost** 回归模型。

为了解释黑盒模型，我们使用 **SHAP** 值。对于每个样本  $i$ ，特征  $j$  的贡献度  $\phi_{ij}$  满足：

$$\hat{y}_i = \phi_0 + \sum_{j=1}^M \phi_{ij} \quad (5)$$

```
1 import xgboost as xgb
2 import shap
3 import pandas as pd
4
5 # X: 选手特征矩阵（经过 One-hot 编码）
```

```
6 # y: 问题一反演出的粉丝得票率均值
7 model = xgb.XGBRegressor(n_estimators=500, learning_rate=0.05, max_depth=5)
8 model.fit(X, y)
9
10 # 利用 SHAP 值解构模型
11 explainer = shap.Explainer(model)
12 shap_values = explainer(X)
13
14 # 这一步能生成蜂群图，直观展示“哪类人粉丝多”
15 # 红色代表特征值高，蓝色代表特征值低，X轴代表对结果的影响
16 shap.summary_plot(shap_values, X)
```

Listing 1: 特征重要性分析

## 4 问题五：多目标优化的新赛制

题目要求提出“更公平”的系统。所谓的公平，在社会选择理论中是一个不可能三角（阿罗不可能定理）。在本题中，我们将其转化为三个目标的**帕累托权衡**：

1. **专业性**：技术好的赢（最大化裁判分与最终排名的相关性）。
2. **民意性**：观众喜欢的赢（最大化粉丝票与最终排名的相关性）。
3. **悬念**：结果不可预测（最大化每一周结果的信息熵）。

### 4.1 推荐方案：动态权重系统

目前的 50/50 是静态的，无法适应赛季不同阶段的需求。我们建议引入时间变量  $t$ （赛季进度  $t \in [0, 1]$ ）：

$$S_{total}(t) = w(t) \cdot S_{judge} + (1 - w(t)) \cdot S_{fan} \quad (6)$$

**设计逻辑与权重函数  $w(t)$** ：我们设计一个 Sigmoid 变体函数来实现权重的平滑过渡：

$$w(t) = \frac{k}{1 + e^{-\beta(t-t_0)}} + C \quad (7)$$

- **筛选期** ( $t < 0.5$ ):  $w(t) \approx 0.7$ 。高裁判权重，快速清洗掉技术不达标的“混子”选手，保证节目下限。
- **过渡期** ( $0.5 \leq t \leq 0.8$ ): 权重逐渐交接。
- **决战期** ( $t > 0.8$ ):  $w(t) \approx 0.3$ 。低裁判权重，将冠军决定权交给市场，最大化商业价值和互动性。