



CARIOCAN AIRLINES

Progetto di Ricerca Operativa

Greta Cavedon, matricola 1123054

A.A. 2019-2020

Abstract

In questo progetto verrà considerato un problema di programmazione lineare nell'ambito della ricerca operativa.

Il problema non è relativo ad un caso reale ma è stato ideato per il progetto.

Il tema trattato è relativo alla vendita di biglietti aerei; verrà identificato ed analizzato un problema seguendo un modello di programmazione lineare ed alla fine verrà risolto utilizzando AMPL come linguaggio di programmazione.

Cariocan Airlines è una compagnia aerea Brasiliana che vuole promuovere la nuova tratta internazionale diretta senza scali Rio de Janeiro (GIG) — New York (JFK).

Per l'evento, la compagnia ha acquistato tre velivoli ciascuno composto da tre diverse classi: Economy, Premium e Business.

Le tre classi offrono comfort diversi a prezzi differenti per ciascun biglietto.

Sapendo che la compagnia aerea ha delle spese fisse per volo, si cercherà di massimizzare il guadagno complessivo netto relativo al mese di Dicembre 2020 e Gennaio 2021 stabilendo quanti posti a sedere distribuire per ciascuna classe di ogni aereo.

Descrizione del Problema

La compagnia aerea Cariocan Airlines ha acquistato **tre nuovi velivoli** per la tratta Rio de Janeiro — New York:

- Alpha con capienza 250 posti,
- Beta con capienza 230 posti,
- Gamma con capienza 240 posti,

destinati a **tre voli mensili** (un volo per aereo) per i mesi di Dicembre 2020 e Gennaio 2021. Ciascun aereo è costituito dalle classi: **Economy, Premium e Business**.

Si sa che i prezzi per ciascun biglietto ammontano rispettivamente a:

	Economy	Premium	Business
Costo (IVA inclusa)	1450 €	2000 €	3100 €

Inoltre, dal costo di ciascun biglietto devono essere detratte le seguenti **spese fisse**:

	Economy	Premium	Business
Carburante	75%	70%	65%
Personale di Bordo/ Terra	8%	10%	15%
Cibo	0%	5%	10%

oltre a **40 € di tasse aeroportuali** ed al **25% di IVA** per biglietto.

Si vogliono stabilire **quanti posti destinare a ciascuna classe** per aereo nel mese di Dicembre e nel mese di Gennaio **affinché il guadagno sia massimo**, sapendo che:

- Se vengono occupati più del 95% dei posti, vi è uno sconto del 10% sul numero di biglietti venduti per la compagnia aerea,
- Affinché un aereo parta, la compagnia aerea deve vendere l'80% dei posti nel relativo aereo di quel volo,
- Il numero di posti occupati in Economy deve essere maggiore della quantità dei posti occupati tra Premium e Business sia in generale che per ciascun aereo,
- La quantità di posti occupati in Premium dei tre aerei deve essere almeno superiore al 15% dei posti disponibili e superiore al 10% dei posti in Business per ciascun aereo,
- Se la classe Economy del volo Alpha di Gennaio ha più di 120 passeggeri, allora la classe Economy del volo Beta di Gennaio non può avere più di 110 passeggeri,

- La quantità dei posti in Business per Dicembre deve essere superiore ad 1/4 rispetto i biglietti in Economy dello stesso volo,
- Se i posti in Business superano il 30% della capienza del relativo aereo per il mese di Dicembre, vi è uno sconto del 5% su quei posti,
- A Gennaio i posti in business devono essere superiori del 70% dei posti occupati in Business e Premium nello stesso volo, relativi al mese precedente.

Modellazione

Per questo problema si fa riferimento al modello di mix ottimo di produzione; infatti, si vuole massimizzare il profitto ottenuto dalla vendita dei biglietti al quale vengono sottratte le spese fisse che deve affrontare la compagnia aerea.

Verranno identificati principalmente i seguenti insiemi:

- aereo utilizzato,
- classe di riferimento,
- mesi.

Si identificheranno poi le costanti del problema:

- capacità di ciascun aereo,
- carburante,
- personale di bordo/terra,
- cibo,
- tasse aeroportuali,
- IVA,
- soglia per la classe Economy dell'aereo Alpha,
- soglia per la classe Economy dell'aereo Beta,
- soglia per sconto dieci.

Le variabili presenti saranno relative a:

- tipo di biglietto per classe (tale variabile è di tipo *integer*, poiché i biglietti/posti vengono considerati interi),
- variabile booleana che attiva lo sconto del 10%,
- variabile booleana relativa alla classe Economy degli aerei Alpha e Beta,
- variabile booleana che attiva lo sconto in classe Business dei voli di Dicembre.

Poiché le variabili possono assumere solo valori interi, questo modello di programmazione sarà di tipo lineare intera.

Insiemi

Definisco gli *insiemi* utilizzati per lo sviluppo del modello:

- $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: sono i tre aerei della compagnia aerea,
- $J = \{e, p, b\}$: sono le tre classi offerte per ciascun aereo (Economy, Premium, Business),
- $M = \{d, g\}$: i due mesi a cui si fa riferimento per il nostro modello (Dicembre, Gennaio).

Parametri

I *parametri* presenti sono:

- $capacity_i$ = capacità di ciascun aereo $i \in I$,
- $gasoline_j$ = carburante per ciascuna classe $j \in J$,
- $hostess_j$ = costo generico personale di bordo/terra $j \in J$,
- $food_j$ = costo del cibo per classe $j \in J$,
- tax = tasse aeroportuali,
- iva_j = iva per biglietto venduto $j \in J$.

Variabili Decisionali e Costanti

Le *variabili* decisionali e le *costanti* presenti nel problema sono le seguenti:

- $x_{i,j,m}$: tipo di biglietto aereo considerato, può assumere solo valori interi ≥ 0 , $i \in I$, $j \in J$, $m \in M$,
- z : variabile booleana che può assumere i seguenti valori:

$$z \begin{cases} 1 & \text{se vengono occupati più del 95\% dei posti complessivi tra Dicembre e Gennaio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- k_i : variabile booleana che può assumere i seguenti valori:

$$k_i \begin{cases} 1 & \text{se la classe Business supera il 30\% della capacità dell'aereo } i \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- v : variabile booleana che può assumere i seguenti valori:

$$v \begin{cases} 1 & \text{se la classe Economy del volo Alpha di Gennaio è superiore ad una certa costante} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Ma : costante, soglia per la classe Economy dell'aereo Alpha,
- Mb : costante, soglia per la classe Economy dell'aereo Beta,
- C : costante, è pari al 95% del totale dei posti disponibili tra Dicembre e Gennaio.

Funzione Obiettivo

$$\begin{aligned} \mathbf{max} \quad & 1450 * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,e',m} + 2000 * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,p',m} + 3100 * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,b',m} - 1160 * \\ & (gasoline_{e'} + hostess_{e'} + food_{e'}) * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,e',m} - 1160 * (gasoline_{p'} + hostess_{p'} + food_{p'}) * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,p',m} - 2480 * (gasoline_{b'} + hostess_{b'} + food_{b'}) * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,b',m} - iva_{e'} * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,e',m} - iva_{p'} * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,p',m} - iva_{b'} * \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} x_{i,b',m} - tax * \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} x_{i,j,m} + 0.1 * z * \\ & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} x_{i,j,m} - 2480 * 0.05 * \sum_{i \in I} k_i * x_{i,b',d'} \end{aligned}$$

Vincoli

i. Capacità di ciascun aeromobile:

$$\begin{aligned}\forall m \in M : \sum_{j \in J} x^{\text{'alpha' },j,m} &\leq \text{capacity}^{\text{'alpha' }} \\ \forall m \in M : \sum_{j \in J} x^{\text{'beta' },j,m} &\leq \text{capacity}^{\text{'beta' }} \\ \forall m \in M : \sum_{j \in J} x^{\text{'gamma' },j,m} &\leq \text{capacity}^{\text{'gamma' }}\end{aligned}$$

ii. Sconto sui biglietti venduti

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} x_{i,j,m} \geq C * z$$

iii. Quantità minima di riempimento

$$\begin{aligned}\forall m \in M : \sum_{j \in J} x^{\text{'alpha' },j,m} &\leq 0.8 * \text{capacity}^{\text{'alpha' }} \\ \forall m \in M : \sum_{j \in J} x^{\text{'beta' },j,m} &\leq 0.8 * \text{capacity}^{\text{'beta' }} \\ \forall m \in M : \sum_{j \in J} x^{\text{'gamma' },j,m} &\leq 0.8 * \text{capacity}^{\text{'gamma' }}\end{aligned}$$

iv. Posti in Economy

$$\begin{aligned}\forall m \in M : \sum_{i \in I} x_{i,\text{'e' },m} &\geq \sum_{i \in I} (x_{i,\text{'p' },m} + x_{i,\text{'b' },m}) \\ \forall m \in M : x_{\text{'alpha' },\text{'e' },m} &\geq \sum_{i \in I} (x_{\text{'alpha' },\text{'p' },m} + x_{\text{'alpha' },\text{'b' },m}) \\ \forall m \in M : x_{\text{'beta' },\text{'e' },m} &\geq \sum_{i \in I} (x_{\text{'beta' },\text{'p' },m} + x_{\text{'beta' },\text{'b' },m}) \\ \forall m \in M : x_{\text{'gamma' },\text{'e' },m} &\geq \sum_{i \in I} (x_{\text{'gamma' },\text{'p' },m} + x_{\text{'gamma' },\text{'b' },m})\end{aligned}$$

v. Posti in Premium

$$\begin{aligned}\forall m \in M : \sum_{i \in I} x_{i,\text{'p' },m} &\geq 0.15 * \sum_{i \in I} \text{capacity}_i \\ \forall m \in M : x_{\text{'alpha' },\text{'p' },m} &\geq 0.1 * x_{\text{'alpha' },\text{'b' },m} \\ \forall m \in M : x_{\text{'beta' },\text{'p' },m} &\geq 0.1 * x_{\text{'beta' },\text{'b' },m} \\ \forall m \in M : x_{\text{'gamma' },\text{'p' },m} &\geq 0.1 * x_{\text{'gamma' },\text{'b' },m}\end{aligned}$$

vi. Economy in Alpha e Beta — attivazione variabile booleana

$$\begin{aligned}x_{\text{'alpha' },\text{'e' },\text{'g' }} - Ma * v &\geq 0 \\ x_{\text{'beta' },\text{'e' },\text{'g' }} - Mb * v &\leq 0\end{aligned}$$

vii. Biglietti in Business minimi a Dicembre

$$\forall i \in I : x_{i,\text{'b' },d} \geq 0.25 * x_{i,\text{'b' },\text{'d' }}$$

viii. Sconto sui biglietti in Business per Dicembre

$$\forall i \in I : x_{i,\text{'b' },d} \leq 0.30 * \text{capacity}_i * k_i$$

ix. Posti in Business a Gennaio

$$\begin{aligned} X_{\text{'alpha','b','g'}} &\geq 0.7 * X_{\text{'alpha','b','d'}} + X_{\text{'alpha','p','d'}} \\ X_{\text{'beta','b','g'}} &\geq 0.7 * X_{\text{'beta','b','d'}} + X_{\text{'beta','p','d'}} \\ X_{\text{'gamma','b','g'}} &\geq 0.7 * X_{\text{'gamma','b','d'}} + X_{\text{'gamma','p','d'}} \end{aligned}$$

x. Alternativa — Applico un solo sconto (*utilizzato solo per uno scenario alternativo*)

$$\begin{aligned} \forall i \in I : k_i - C * v_2 &\leq 0 \\ z - C * (1 - v_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

con v_2 variabile booleana che attiva solamente uno sconto se ce ne sono due disponibili.

Ambiente di Lavoro

AMPL

È stato tradotto il problema nel linguaggio matematico AMPL il quale, mediante il solver CPLEX versione 12.9.0.0, ha risolto il problema riportando la soluzione ottima.

Risorse

Sono stati creati i seguenti file mediante l'ambiente AMPL IDE:

- `cariocanairlines.mod` contenente il modello originale e la definizione di parametri, insiemi, funzione obiettivo e vincoli,
- `cariocanairlines.dat` contiene i dati attribuiti ai parametri e agli insiemi del problema originale,
- `cariocanairlines.run` contiene i comandi per eseguire il programma con i dati del file `cariocanairlines.dat` e mostrare i risultati (soluzione ottima, guadagni e biglietti aerei per aereo/classe).

Alternativa al problema:

- `cariocanairlines_jet.dat` contiene i dati per un problema alternativo, in questo caso si considerano tre aerei più piccoli (detti “jet”) rispetto gli aerei del problema originale,
- `cariocanairlines_jet.run` contiene i comandi per eseguire il programma con i dati del file `cariocanairlines_jet.dat` e mostrare i risultati (soluzione ottima e biglietti per aereo/classe).

Risultati

Per capire meglio il problema sono state studiate alcune alternative; come descritto nella pagina precedente il file `cariocanairlines<_type>.dat` comprende dei dati alternativi al problema originale di partenza.

Questi dati possono essere elaborati, dunque visualizzarne la soluzione ottima e relativi valori delle variabili, mediante l'invocazione di `cariocanairlines<_type>.run`.

Il modello è rimasto invariato e lo si può consultare nel file `cariocanairlines.mod`.

Come già detto prima i risultati ottenuti derivano dai dati e dal modello del problema, il quale è stato inventato per questo progetto.

Caso Base

Il modello di partenza considera tutti i vincoli del problema cercando la soluzione ottima e la miglior disposizione dei posti sui relativi aerei, sia per il mese di Dicembre che per il mese di Gennaio.

Questa soluzione è una buona soluzione perché soddisfa tutti i requisiti richiesti ed occupa la maggior parte dei posti disponibili degli aerei.

In particolare, durante il mese di Dicembre per raggiungere la soluzione ottima devono essere occupati tutti i posti dei tre aerei (720 su 720) così da ottenere un guadagno pari a 117.649,60€.

Diverso è per il mese di Gennaio in quanto per raggiungere la soluzione ottima possono essere occupati fino a 710 posti su 720, questo è dato dal vincolo (vi) poiché se vengono occupati più di 120 posti nella classe Economy dell'aereo Alpha a Gennaio, allora la stessa classe dell'aereo Beta di Gennaio non può avere più di 110 posti occupati.

Nonostante ciò, il guadagno per il mese di Gennaio, che ammonta a 128.924€, è comunque superiore al mese di Dicembre poiché non vi è lo sconto del 5% dei posti in Business di Dicembre vincolo vii).

L'assegnazione dei posti nei vari aerei con questi dati è come segue:

DICEMBRE

	Economy	Premium	Business	Totale
Alpha	132	85	33	250
Beta	116	85	29	230
Gamma	120	90	30	240

GENNAIO

	Economy	Premium	Business	Totale
Alpha	125	42	83	250
Beta	110	30	80	220
Gamma	120	36	84	240

Il guadagno al netto per questi due mesi e con questi dati è pari a **246.502,60€** (che è la soluzione ottima) con l'attivazione dei vari sconti (vincoli *ii* — *viii* soddisfatti).

Se avessi voluto occupare tutti i posti disponibili nel mese di Gennaio (720 su 720), avrei potuto modificare il vincolo (*vi*) ed impostare la costante Mb ad almeno 115.

Così facendo avrei ottenuto:

	Economy	Premium	Business	Totale
Beta	115	35	80	230

Si noti che se, ad esempio, Mb fosse stato impostato con un valore molto basso, come ad esempio il 30, non ci sarebbero state soluzioni possibili.

Ad ogni modo, questa soluzione sarebbe migliore della precedente perché il guadagno ammonterebbe a **248.745,20€**, ben 2.242,6€ in più rispetto il caso base.

Per visualizzare la soluzione di questo modello, una volta su AMPL IDE dare il seguente comando:

```
model cariocanairlines.mod; data cariocanairlines.dat; include  
cariocanairlines.run; solve;
```

SCENARIO ALTERNATIVO: Il caso Jet

Un caso alternativo, usando sempre lo stesso modello, potrebbe essere quello di considerare degli aerei con capienza inferiore rispetto il modello di partenza, in particolare:

	Alpha	Beta	Gamma	Totale
Capacità	50	45	40	135

Gli altri parametri rimangono invariati, ad eccezione delle costanti: Ma=35, Mb=20 e C=256.

In questa situazione, il guadagno netto da parte della compagnia aerea è di **43.812,90€** e per raggiungere tale soluzione ottima il numero di posti da occupare è pari a 135 su 135 a Dicembre e 130 su 135 a Gennaio.

La suddivisione è come segue:

DICEMBRE

	Economy	Premium	Business	Totale
Alpha	36	5	9	50
Beta	28	10	7	45
Gamma	23	11	6	40

GENNAIO

	Economy	Premium	Business	Totale
Alpha	35	7	8	50
Beta	20	8	12	40
Gamma	20	6	14	40

Anche in questo caso, l'aereo Beta di Gennaio non sarebbe stato a carico pieno. Il guadagno al netto di Dicembre è pari a 20.751,40€ mentre quello di Gennaio è di 23.088€.

Per avere un guadagno ed un migliore sfruttamento delle capacità di ciascun aereo, avrei dovuto ad esempio impostare ad esempio $M_b=25$ (con costante $M_a=35$) ed avrei ottenuto:

DICEMBRE

	Economy	Premium	Business	Totale
Alpha	36	5	9	50
Beta	28	10	7	45
Gamma	20	15	5	40

GENNAIO

	Economy	Premium	Business	Totale
Alpha	35	5	10	50
Beta	23	10	12	45
Gamma	20	6	14	40

Con un guadagno totale di **44.945,40€** (20.995,80€ a Dicembre e 23.976,60€ a Gennaio).

Per visualizzare la soluzione di questo modello, una volta su AMPL IDE dare il seguente comando:

```
model cariocanairlines.mod; data cariocanairlines_jet.dat; include  
cariocanairlines_jet.run; solve;
```

SCENARIO ALTERNATIVO: No sconto extra

Tornando al caso base, uno scenario alternativo sarebbe quello di imporre di poter utilizzare solo uno sconto anziché due.

Ciò è possibile grazie al vincolo (x) ad esempio.

Imponendo tale vincolo si otterrebbe un guadagno pari a **246.359,60€** contro i **246.502,60€** del caso base poiché non verrebbe attivata la variabile booleana z (si ha dunque una perdita di 143€).

Altrimenti, senza imporre un nuovo vincolo per evitare lo sconto del 10% si sarebbe potuto alzare il limite della costante C a 1.431 così da annullare l'attivazione di z (anche in questo caso il risultato è il medesimo del precedente, la disposizione dei posti per aereo e per classe rimane inalterata).

SCENARIO ALTERNATIVO: Profitti Migliori

Per un miglior profitto nel caso base, si sarebbe potuto semplicemente rimuovere il vincolo (vi) così da non limitare in alcun modo la classe Economy degli aerei Alpha e Beta di Gennaio.

In tal caso, mantenendo attivi entrambi gli sconti, si arriverebbe ad ottenere un profitto di **248.745,20€** con una occupazione dei posti pari al 100% per entrambi i mesi.

Chiaramente se si potessero destinare tutti i posti ad una sola classe o anche a due sole classi su tre, azzerando i posti nella classe più economica, dunque rimuovendo i vincoli (iv) ed (vi) si otterrebbe un guadagno ancor migliore dato che la classe Business e la classe Premium sono le più fruttuose, in quanto il costo del biglietto è superiore.

Infatti, rimuovendo i vincoli (iv) ed (vi) nel caso base, si otterrebbe un guadagno di **293.040,00€**.

Conclusioni

Ciò che si osserva è che nonostante la capacità degli aerei nel caso base e nel caso jet, con il modello definito inizialmente non si riescono ad ottimizzare tutti i posti disponibili perché rimangono sempre cinque posti liberi in entrambi i casi.

Per evitare ciò, variando la soglia per la classe Economy dell'aereo Beta (nonostante la medesima costante per l'aereo Alpha sia fissata) si riesce a produrre un risultato migliore sia in termini di guadagno che di ottimizzazione delle sedute.

Inoltre, se si rimuovessero alcuni vincoli, come quelli per la classe Economy, si riuscirebbe ad ottenere un miglior profitto occupando tutte le sedute.