مقدمة

إن تدريس الرياضيات تطور كثيرا خلال العشريات الثلاث الأخيرة. نظريات أكثر قوة و مفاهيم أكثر شمولية و هو ما أدى إلى ظهور مفاهيم أكثر تجرد لهذا وجب اهتمام بشكل خاص بتدريس الرياضيات ذات التوجه التكنولوجي التطبيقي بعبارة أخرى فإن تدريس الطالب المهندس مفاهيم غاية في التعقيد و النظرية تفقده ثقته في إمكانية إستعاب هذه المفاهيم و من ثمة فإن إكساب الطالب وسائل رياضية مفيدة دون الإخلال بصرامة الرياضيات و هذا عن طريق مسائل مختارة و محددة بعناية أمر في غاية الأهمية.

كتبت هذا المرجع دون التركيز كثيرا على الدقة الدقيقة المطلوبة في الرياضيات حتى إذا حصل تعارف ثم تصاحب بين الطالب و الرياضيات وجد نفسه سائرا في طريق تعلمها، يكون عندئذ قد تجاوز مرحلة الشك إلى مرحلة اليقين.

قسمت هذا المرجع إلى ثلاث أجزاء

جزء خاص بالدروس، جزء لتمارين محلولة و جزء لتمارين غير محلولة.

بشار في 2005/07/03

بن بشير معمر
mbenbachir2001@yahoo.fr

إهــــــداء

إلى الحبيبة الغالية الجزائر تمليكا.

إلى كل أساتذتي عرفانا و تقديرا.

إلى الكريمين الوالدين إسترقاقا.

إلى الزوجة الطيبة الراضية بإعتكافي في الجامعة حبا.

إلى ريحاناتي نور الهدى، أسماء و شيماء.

إلى كل الأحبة و الأصدقاء من تبسة إلى تندوف إخلاصا.

إهداء خاص جدا إلى السيد شنقريحة السعيد لكل الأشياء الجميلة التي يصنعها لي إمتنانا.

الفهرس

1 المنطق الرياضي

1.1 مدخل

بالنسبة للكثير من المتعلمين، الرياضيات تثير كثير من الحسابات المعقدة أو البناءات الهندسية العجيبة، متبوعة ببراهين في غالب الأحيان تكون معقدة وغير مفهومة. كما يعتقد الكثير بأن الرياضيات هي علم يتميز بمعالجة الحالات البحتة المجردة فقط .
يجدر أن نميز في كل نظرية رياضية بين أمرين
أ) المحتوى: أي الأشياء التي تهتم بها النظرية.(Contenu)
ب) الشكل: و هو كل ما يتعلق ببنية البراهين.(Forme)
يجب أن نلاحظ ما يلي:
1) إن أهم شيء هو بنية البراهين، لأنها تطبق في حالات مختلفة وهو ما يؤدي بنا إلى اعتبار شروط الصحة من عدمها في كل بناء رياضي (براهين) وهو هدف المنطق الشكلي.(Logique formelle).
2) لكي نعبر عن شروط الصحة من عدمها في البراهين ولكي نربط بين العالم الإنساني والفيزيائي المحيط بنا وبين النظريات الرياضية المبنية، فإن اللغة العادية التي نستعملها وبسبب غموضها وعدم دقتها لن تكون مناسبة، لهذا وجب إيجاد وسيلة أخرى:لغة موسعة، بعدها سنكون ملزمين بترجمة الكلام العادي إلى هذه الرموز.
الهدف من هذا الفصل مزدوج:
1) إختراع لغة شكلية.
2) ترميز قواعد البراهين المنطقية.
نشير إلى أنه كما في جميع العلوم لا يمكننا اختراع من لاشيء فلابد من بداية، مفاهيم أولية (تعاريف)، طريقة الاستعمال و مسلمات النظرية.

قضية

القضية هي كل جملة يمكننا وصفها بالصحيحة وإما بالخاطئة

مثال

1) $30=1x1$ جملة خاطئة إذن هي قضية.
2) $15=1x15$ جملة صحيحة إذن هي قضية.
3) $2000=1+100$ هي جملة، لكن لا نستطيع وصفها بالصحيحة أو الخاطئة إذن ليست قضية.

1.2 جدول الحقيقة

إذا كانت القضية (P) صحيحة نرمز لها بالرمز 1 وإذا كانت خاطئة نرمز لها بالرمز0.
جدول الأعداد و جدول الحقيقة

0	1	P
F	V	P

1.3 نفي قضية منطقية

تعريف

نسمي نفي القضية (P) القضية $(\overline{P})$ المعرفة كما يلي
إذا كانت (P) صحيحة تكون $(\overline{P})$ خاطئة و إذا كانت (P) خاطئة تكون $(\overline{P})$ صحيحة.

مثال

$3\ x\ 2\ =6$ قضية صحيحة نفيها هو $(\overline{P})$ $3\ x\ 2 \neq 6$ قضية خاطئة.

1.4 الروابط المنطقية

الوصل "*Connecteur*"

نرمز بـ (P) للعبارة "الجو ممطر" و نرمز للعبارة (Q) للعبارة "إن الجو بارد" إن الجملة "الجو ممطر وإنه بارد" يمكن الرمز لها بالرمز $P \wedge Q$.

تعريف

وصل قضيتين P و Q هي القضية P و Q والتي لا تكون صحيحة إلا إذا كانت كلتا القضيتين P و Q صحيحتين معا نرمز بالرمز $P \wedge Q$.

الفصل "*Disjoncteur*"

نرمز بالرمز P للعبارة "أذهب إلى المكتبة" و بالرمز Q للجملة "أذهب في نزهة".
إن الجملة "أذهب إلى المكتبة أو أذهب في نزهة" تكتب $P \vee Q$.

تعريف

نعرف فصل قضيتين P و Q بالقضية Q أو P و التي لا تكون خاطئة إلا إذا كانت كلتا القضيتين P و Q خاطئتين معا نرمز بالرمز $P \vee Q$.

(P) بومدين رئيس للجزائر.

(Q) بومدين حي.

$Q\ V\ P$ قضية صحيحة لأن P صحيحة

مثال

نرمز للجملة

" إما أذهب إلى المكتبة إما أذهب في نزهة "

بالرمز :إما P، إما Q

ملاحظة

من الفصل فصلين فصل مانع (*exclusif*) و فصل متضامن (inclusif)أو (exaustif).

الفصل المتضامن يكون صحيحا إذا كانت قضية واحدة صحيحة على الأقل والفصل المانع لا يكون صحيحا إلا إذا كانت قضية واحدة و واحدة فقط صحيحة.

1.5 الاستلزام

"سأزورك في البيت إن لم أكن منشغلا"

(Q) سأزورك في البيت.

(P) إن لم أكن منشغلا:

إذا (P)، إذن (Q).

تعريف

لتكن (P) و (Q) قضيتين نسمي القضية $\left(\overline{P} \vee Q\right)$ استلزاما وندل عليه بالرمز

$$P \Rightarrow Q$$

ملاحظة

لا يكون الاستلزام خاطئا إلا إذا كانت القضية P صحيحة والقضية Q خاطئة.

مثال

(P) $1+2=3$، (Q) $-2=-3+1$

$P \Leftarrow Q$ و $P \Leftarrow Q$ قضية صحيحة.

(P) $25=2+23$، (Q) $14=1+23$

$(14=1+23) \Rightarrow (25=23+2)$ قضية خاطئة.

عكس الإلتزام

القضية $(P \Rightarrow Q)$ تسمى عكس القضية $(Q \Rightarrow P)$

العكس النقيض للإستلزام

$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ تسمى العكس النقيض للاستلزام $P \Rightarrow Q$

1.6 التكافؤ المنطقي

القضية $(Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)$ تسمى التكافؤ المنطق للقضيتين P و Q ونرمز بالرمز $P \Leftrightarrow Q$

ملاحظة

1) التكافؤ لا يكون صحيحا إلا إذا كانت القضيتين صحيحتين معا أو خاطئتين معا.

2) $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P} \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

خواص

1) $P = \overline{\overline{P}}$

2) $P \wedge P \Leftrightarrow P$

3) $P V P \Leftrightarrow P$

4) $P \wedge Q = Q \wedge P$

5) $PVQ = Q\ V\ P$

6) $(P\wedge Q)\ \wedge L = P\ V(Q \wedge L)$

7) $(PVQ)VL{=}PV(QVL)$

8) $P\wedge\ (QVL){=}(P\wedge Q)V(P\wedge L)$

9) $P\wedge\ (Q\wedge L){=}(PVQ)\ \wedge\ (PVL)$

قضية (Loi de De Morgan)

لتكن P و Q قضيتين لدينا

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} V \overline{Q} \text{ ، } \overline{PVQ} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

برهان

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	PVQ	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

أستعمل جدول الحقيقة.

1.7 المكممات

الجمل المفتوحة

تعريف

نسمي جملة مفتوحة معرفة على مجموعة E كل جملة تحتوي على المتغير "x" والتي
تصبح قضية إذا استبدل x بأي عنصر من E.

مثال

(1) $P(x){:}x{<}2$

(2) $P(x){:}\ x^2{-}1{=}0$

(3) $P(x,y){:}x.y{=}1{+}x^2$

المثال الثالث هو عبارة عن جملة مفتوحة ذات متغير x و y. كما يمكننا أن نعرف جمل مفتوحة ذات أكثر من متغيرين.

ملاحظة

كل الخواص المتعلقة بالقضايا تبقى صحيحة بالنسبة للجمل المفتوحة.

المكممات

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة معرفة على E.

المكمم الكلي (الشمولي)(Quantificateur universel)

إذا كانت الجملة المفتوحة صحيحة من أجل كل x من E نكتب اختصارا وترميزا.

$$\forall x \in E : p(x)$$

وهي تعني مهما كان العنصر x من E فإن $p(x)$ صحيحة.
أو من أجل كل عنصر من E فإن $p(x)$ صحيحة.
الرمز $\forall$ يسمى المكمم الشمولي.

المكمم الوجودي (Quantificateur existentiel)

إذا وجد عنصر واحد x من E أو أكثر بحيث تكون *p(x)* صحيحة فإننا نرمز ونكتب $(\exists x \in E): p(x)$

ونقرأ يوجد على الأقل عنصر x من E بحيث *p(x)* صحيحة. نرمز له بالرمز $\exists$.

ملاحظة مهمة

إن الجمل من الشكل $\left[\forall x \in E : p(x)\right]$ و $\left[\exists\ x \in E : p(x)\right]$
هي قضايا لأنه يمكننا التأكد من صحتها أو خطئها.
أمثلة

1) $\forall x \in R : x^2 + 1 > 1$ ق.ص
2) $\forall x, y \in R^+ x + y > 0$ ق.ص
3) $\exists x \in R : x^2 - 1 = 0$ ق.ص
4) $\forall x \in R : x^2 < -1$ ق.خ
5) $\exists x \in R : |x| + 1 = 0$ ق.خ

ملاحظة

تستعمل المكممات في بداية الجملة.
ترتيب المكممتين $\forall, \exists$ مهم، وهو يحدد كثير من الخصائص.
مثال

$\forall x \in R, \exists y \in N : x^2 > y$ صحيح.

$\exists y \in N, \forall x \in R : x^2 > y$ خطأ.
قضية

نفي القضية $\forall x \in E : p(x)$ هي $\exists x \in E : \overline{p(x)}$

نفي القضية $\exists x \in E : p(x)$ هي $\forall x \in E : \overline{p(x)}$

برهان (تمرين)
1.8 أنماط البراهين

الإستنتاج

تعريف

هو إستدلال يعتمد على القاعدة التالية:

$$\left[(si \quad P \quad est \quad Vraie) \wedge \left(p \Rightarrow Q\right) \quad est \quad vraie\right] \Rightarrow Q \quad vraie$$

البرهان بالخلف

لكي نبرهن على صحة P ، نفرض أن p خاطئة ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض.

البرهان باستعمال العكس النقيض

نعلم أن القضيتين $(p \Rightarrow Q)$ و $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ متكافئان.إذن البرهان على $p \Rightarrow Q$ يعود إلى البرهان على $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

البرهان بمثال مضاد
تعريف

لكي نبرهن على خطأ القضية $\forall x \in E : p(x)$ يكفي أن نجد عنصر x_0 من E بحيث *p(x)* غير صحيح.
البرهان بفصل الحالات
تعريف

من صحة القضية $(P \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ نستنتج صحة القضية Q.

البرهان بالتدريج

تعريف

للبرهان على صحة القضية $p(x):(\forall n \geq n_0) \quad (n \in IN)$

نتبع الخطوات التالية

a) نثبت صحة القضية $p(n_0)$

b) نفرض صحة القضية : $p(k):\left(n_0 \leq k \leq n\right)$

c) نثبت صحة $p(n+1)$

2 المجموعات

2.1 مقدمة

ما هي المجموعة ؟
طبعا، ستكون الفكرة الأولى لمحاولة تعريف المجموعة هي العبارة الشهيرة
"جمع أشياء من نفس الطبيعة".
ملاحظات عديدة تفرض نفسها:

* تبديل كلمة "مجموعة" بكلمة جمع تبدو كدعابة أو فكاهة.
* ظهور كلمة "أشياء" تحتاج هي بدورها إلى من يعرفها.
* عبارة من نفس الطبيعة هي بحد ذاتها شفافة (Limpide) فلم يبقى للعقل السليم إلا أن يتمرد.

فلا يمكن تكوين مجموعة من القمر وقطعة خيار مخلل ما لم تعتبرهم من نفس الطبيعة ؟
خيار أخر لشبه تعريف للمجموعة:" جمع أشياء لها نفس الخواص"
فكرة أخرى وهي القول بأن مفهوم المجموعة هي مفهوم بدائي بمعنى غير قابلة للتعريف. جيد لكن دون تدقيق إضافي سيكون هذا تملص ومراوغة (Dérobade) البعض يقول "المجموعة هي أي شيء وكل شيء".
إذن ما العمل؟
أولا: يجب أن نبين مالا يمكن أن يكون مجموعة ومنه يمكن التصور بأنه غير مقنع القول
"مجموعة الأذكياء"
لأن كل واحد سيظن نفسه منهم بالرغم من وجود الأغبياء في كل مكان.
وضعية محرجة...
"مجموعة الصلع"
متى يكون أحدنا أصلع (كم من شعرة...)
"أمواج البحر" هل يمكن أن تكون مجموعة ؟
سنوضح في هذا الفصل مفهوم المجموعة ونسنبين العلاقة المتينة الموجودة بين مفهوم المجموعة ومنطق القضايا المذكور في الفصل الأول.
كيف نعرف مجموعة ؟
لأنه لا يمكن اعتبار "جمع الأشياء" مجموعة فأننا سنذكر الاتفاقين المتعلقين بالمجموعات.
الإتفاق الأول

2.2 مجموعة معرفة بالتوسع "Ensemble définis en extension"

سنقبل بأنه عندنا مجموعة عندما يكون ممكننا عد (إحصاء) كل أشياء المجموعة.أشياء المجموعة تدعى عناصر المجموعة، بعبارة أخرى: إذا كان يمكن تشكيل قائمة مستفيظة (مستفذة) (دون تكرار) للعناصر، نقول عندها بأننا شكلنا مجموعة معرفة بالتوسع.
مثال

1) المجموعة ذات الحروف $a,b,d,e,f,$ نرمز بالرمز $A=\{a,b,d,e,f\}$.
2) المجموعة ذات الأعداد $488,255,100,90,21,11,0$
نرمز بالرمز $B=\{0,11,21,90,100,255,488\}$
3) المجموعة ذات الحروف b, a الأعداد 6,5 الرمز +، وكلمة جامعة:
$C=\{a,b,5,6,+,$ جامعة$\}$

الإنتماء

نرمز لانتماء عنصر إلى مجموعة بالرمز "$\in$" و نكتب $a\in A$ ونقرأ a ينتمي إلى A.
الإتفاق الثاني

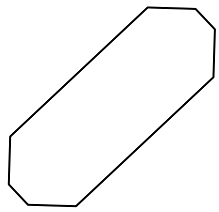
2.3 مجموعة معرفة بالسياق (En compréhension)

يستحيل أن نشكل قائمة بكل الأعداد الطبيعية أو الأعداد الحقيقية أو ما شابههما، وبالتالي فإن تعريف مجموعة بالتوسع غير كاف لاحتواء كل المجموعات، أكثر من ذلك حتى عندما تكون فيه إمكانية نظريا، علميا تكون غير محببة مطلقا.
أكتب كل الأعداد الطبيعية إلى 10^{10}، صعب كتابتها لكن يفهم من السياق شكل ومضمون هذه مجموعة.
بعبارة أعم كل الأشياء التي تجعل خاصية معينة صحيحة تشكل مجموعة و هذا غير صحيح عموما لأنه مثل إيجاد مجموعة العناصر x التي تجعل $x^2+1=0$ صحيحة.
إن لم يكن x مركبا فلا حل، ومنه فإن كان x حقيقيا فلا توجد مجموعة.حتى نتجنب مثل هذه العوارض، نفرض وجود مجموعة أكبر تدعى المجموعة الأم،(الكلية، الشاملة أو المرجع) بحيث كل قضية p تحدد مجموعتين:مجموعة العناصر التي تجعل من قضية p صحيحة و مجموعة العناصر التي تجعل من p قضية خاطئة. ($\overline{p}$ صحيحة)

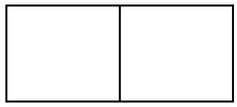
إذا رمزنا بـ U للمجموعة الأم وإذا كانت A المجموعة التي تجعل من p قضية صحيحة، نقول إن A هي جزء من U (مجموعة جزئية) ونقول أيضا بأن A معرفة بالسياق، نرمز بالرمز $A=\{x, x \in U, p\}$ و نقرأ A هي مجموعة العناصر x من U و التي تجعل p قضية صحيحة.

الرمز x يدعى بالعنصر المولد لـ A.

2.4 التمثيل البياني للمجموعات



مخطط Euler Venn



مخطط Carrol

ملاحظات

1) يمكن الانتقال من تعريف مجموعة إلى آخر (بالتوسع $\Leftrightarrow$ السياق).
2) كل مجموعة مشكلة من عنصرين تدعى زوج.
3) كل مجموعة مشكلة من عنصر واحد تدعى مفردة (Singleton).
4) $a \neq \{a\}, a \in \{a\}$.

تعريف

نقبل المسلمة التالية

توجد مجموعة وحيدة، تسمى المجموعة الخالية ولا تحتوي على أي عنصر.

نرمز بالرمز $\{\ \}$ أو ϕ

مثال

قواسم 21 من الأعداد الزوجية

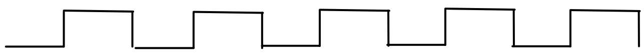
المتحصلين على جائزة Field في الرياضيات من الجزائريين.

خاصة التدريج

هناك حالة خاصة في تعريف مجموعة بالسياق وهي حالة تعريف مجموعة بعلاقة تدريجية

مثال

1)



معرفة جيد هناك 20 عنصر (قطعة)

2) $\{u_{n+1}=u_n+a, u_1=2, a=3\}$ متتالية حسابية

$$\Rightarrow U=\{2,5,8,11,......\}$$

3) $\left\{u_{n+1}=au_n, u_1=1, a=\frac{1}{2}\right\}$ متتالية هندسية.

2.5 تساوي المجموعات

تعريف

ليكن E و F مجموعتين، نكتب $F=E$ عندما يكون كل عنصر من E عنصرا من F و كل عنصرا من F عنصرا من E.

$E=F$ نقرأ F تساوي E.

2.6 الاحتواء

تعريف

ليكن E و F مجموعتين نكتب $F \subset E$ عندما يكون كل عنصر من E عنصرا من F ونقرأ E محتواه في F.

2.7 تقاطع مجموعات

تقاطع مجموعتين A و B هي المجموعة المكونة من العناصر المنتمية في نفس الوقت لـ A و لـ B.نرمز بالرمز $A \cap B$ ونقرأ A تقاطع B.

2.8 إتحاد المجموعات

تعريف

إتحاد مجموعتين A و B هي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين A أو B. نرمز بالرمز $A \cup B$ ونقرأ A إتحاد B.

خواص

1) $A \cup \phi = A$ 2) $A \cup C_U^A = U$

3) $A \cup A = A$ 4) $A \cup U = A$

5) $A \cup B = B \cup A$ 6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

7) $A \cap \phi = \phi$ 8) $A \cap B = B \cap A$

9) $A \cap U = A$ 10) 10) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

11) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

12) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

خواص الإحتواء

1) $A \subset A$ 2) $A \cap B \subset A$

3) $A \subset A \cup B$ 4) $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

5) $(C \subset A \wedge C \subset B) \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

6) $(A \subset C \wedge B \subset C) \Leftrightarrow A \cup B \subset C$

7) $A \subset B \Leftrightarrow C_U^B \subset C_U^A$

2.9 المجموعتان المنفصلتان

تعريف

نقول عن A و B بأنهما منفصلتان إذا حققت $A \cap B = \phi$

قانون دو مورقان

لتكن A و B مجموعتان من المجموعة المرجع U لدينا

1) $C_U^{A \cup B} = C_U^A \cap C_U^B$

2) $C_U^{A \cap B} = C_U^A \cup C_U^B$

2.10 تجزئة مجموعة

لتكن U مجموعة، نقول عن العائلة $(E_i)_{i=1,n}$ من المجموعات الجزئية من U بأنها تشكل تجزئة لـ U إذا وفقط إذا تحقق:

1) (E_i) ليست مجموعة خالية مهما كان i من $\{1,....,n\}$

2) $\overset{n}{\underset{i=1}{U}} E_i = U$

3) $E_i \cap E_j = \phi \forall i \neq j \quad ; \quad i,_j \in \{1,.....,n\}$

2.11 فرق مجموعتين

تعريف

لتكن A و B مجموعتين تسمى المجموعة فرق المجموعة B و A المجموعة المشكلة من العناصر المنتمية لـ B والتي لا تنتمي إلى A. $B - A = \{x; x \in B \wedge x \notin A\}$

2.12 الفرق التناظري لمجموعتين

تعريف

لتكن A و B مجموعتين نعرف الفرق التناظري بين A و B بالمجموعة المشكلة من

العناصـــر المنتميـــة إلـــى B و غيـــر المنتميـــة إلـــى A وكـــذلك العناصـــر المنتميـــة إلـــى A وغيـــر المنتميـــة إلـــى B نرمـــز

$$A\Delta B=\left\{\left(x\in A\right)\wedge\left(x\notin B\right)\right\}\cup\left\{\left(x\in B\right)\wedge\left(x\notin A\right)\right\}$$

ونقرأ A دلتا B.

2.13 مجموعة أجزاء مجموعة

مسلمة

مهما تكن المجموعة E فإن أجزاء E تشكل مجموعة جديدة، تسمى مجموعة أجزاء المجموعة E و يرمز لها بالرمز: $\left(P\left(E\right)\right)$

إذن $\left(P\left(E\right)\right)$ معرفة بالاتفاق كما يلي $P\left(E\right)=\left\{X;X\subset E\right\}$

بعبارة أخرى $X\subset E\Leftrightarrow X\in P\left(E\right)$

3 العلاقات

3.1 تعريف الثنائية

ليكن لدينا عنصرين x و y من المجموعة E نسمي ثنائية و نرمز بالرمز (x, y) العنصر الرياضي الجديد حيث: $(x, y) = (x', y')$ المعرف بـ

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

X يدعي بالمركبة الأولى و y بالمركبة الثانية أو X يدعي بالمبدأ (Origine) و y بالطرف (Extrémité) و لدينا $x = pr_1 u; y = pr_2 u$ حيث $u = (x; y)$ (pr_i يرمز للإسقاط).

3.2 الجداء الديكارتي

الجداء الديكارتي لمجموعة E مع مجموعة F هي مجموعة كل الثنائيات حيث المبدأ عنصر من E و الطرف عنصر من F. نرمز للجداء الديكارتي بالرمز ExF و نقرأ E جداء F. نكتب $ExF = \{u = (x, y); x \in E, y \in F\}$

3.3 العلاقة من مجموعة نحو أخرى

لتكن A و B مجموعتين ،كل جملة مفتوحة R معرفة على AxB تسمى علاقة من المجموعة A في B.

ملاحظة و تسمية

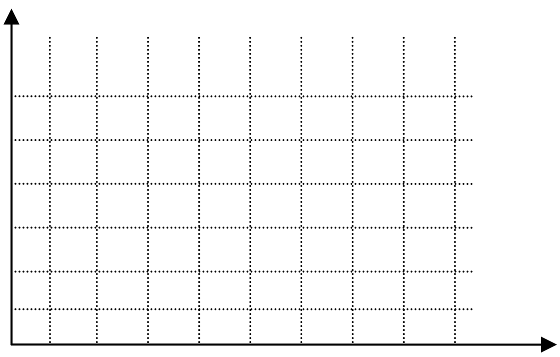
إذا كانت (x, y) من AxB حيث $R(x, y)$ صحيحة. نقول إن y يرتبط بالعنصر x وفق العلاقة R أو أن (x, y) يحقق العلاقة R.

3.4 تمثيل بيان علاقة

هناك عدة أشكال لتمثيل بيان و نكتفي بذكر أشهر أربع تمثيلات:

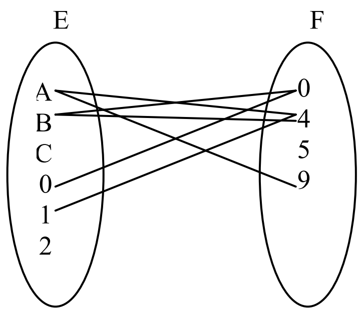
3.4.1 المخطط الديكارتي-الكارتيزي-

العنصر الأول و العنصر الثاني من كل زوج (ثنائية مرتبة) هي على التوالي الإحداثية (Abscise) و الترتيبة (Ordonnée).للنقطة الممثلة.



3.4.2 المخطط الثنوي

كل عناصر المجموعة E و المجموعة F ممثلة بنقاط حيث نربط بقطع مستقيمة بين المبدأ و الطرف. و هي تدعى بالمخطط الثنوي للمخطط الديكارتي لأن دور النقاط و المستقيمات انعكس.



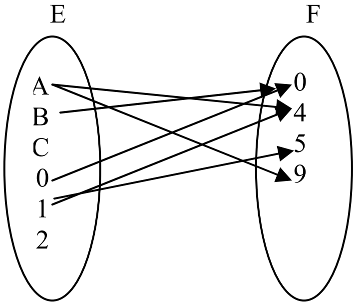
3.4.3 جدول ذي مدخلين

نكتب عناصر مجموعة البدأ عموديا و عناصر مجموعة الوصول أفقيا أو العكس و نؤشر المربعات المرفقة لعناصر البيان.

	A	B	C	0	1	2
0		x		x		
4	x	x			x	
5					x	
9	x					

3.4.4 مخطط سهي الشكل (Sagittal)

نمثل مجموعة البدأ و الوصول على شكل سحابة نقاط و نربط بين مبدأ الثنائية المرتبة و طرفها بسهم.



3.5 العلاقة العكسية

تعريف

لتكن R علاقة من المجموعة A نحو المجموعة B.

نعرف العلاقة العكسية لـ R بالعلاقة: $(\forall x \in A), (\forall y \in B): R^{-1}(y,x) \Leftrightarrow R(x,y)$

مثال

$$(\forall x \in IN), (\forall y \in IN): R(x,y) \Leftrightarrow x = y+1$$

إذن $(\forall x \in IN), (\forall y \in IN): R^{-1}(y,x) \Leftrightarrow y = x+1$

$$G_R = \{(x,y) \in INxIN \,/\, R(x,y)\}$$
$$= \{(y+1, y); y \in IN\}$$
$$G_R = \{(x,y) \in INxIN \,/\, R(x,y)\}$$
$$= \{(x, x+1); x \in IN\}$$

ملاحظة

بيان العلاقة R^{-1} هو نظير بيان العلاقة R.

نرمز للثنائية (x,y) المحققة للعلاقة R بالرمز xRy.

3.6 العلاقة في مجموعة

تعريف

كل علاقة من المجموعة E نحو المجموعة E تسمى علاقة في E.

3.7 الدالة

تعريف

نسمي دالة من المجموعة E نحو المجموعة F، كل علاقة من E نحو F ترفق بكل عنصر من E عنصرا واحدا على الأكثر من F.

مثال

1) $$(\forall x \in IN), (\forall y \in IN): R_1(x,y) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$$

2) $$(\forall x \in IN), (\forall y \in IN): R_2(x,y) \Leftrightarrow x = y^2$$

R_1 دالة، لكن R_2 ليست دالة لأن مثلا للعنصر *1* علاقة مع العنصرين *1* و *-1* في نفس الوقت.

ترميز

نرمز للدوال بالشكل

$f: E \longrightarrow F; E \xrightarrow{f} F$ أي $(R(x,y) \Leftrightarrow y = f(x))$

مثال

$$(\forall x \in IN),(\forall y \in IN): R(x,y) \Leftrightarrow x^2+5y=1$$

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto \frac{1}{5}(1-x^2)$$

تعريف

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto y=f(x)$$

y تسمى صورة x بواسطة الدالة f

3.8 مقصور دالة

تعريف

لتكن E' مجموعة جزئية من E و لتكن f دالة من E نحو F.

إن:

$$g: E' \longrightarrow F$$
$$x \mapsto g(x)=f(x)$$

تسمى إقتصار الدالة f على المجموعة E'.

نرمز بالرمز $g=f/E'$

3.9 تمديد دالة

لتكن E' مجموعة جزئية من E و لتكن f دالة من E' نحو F.

إن

$$f: E' \longrightarrow F$$
$$x \mapsto f(x)$$

تسمى امتداد الدالة f على المجموعة E، كل دالة h تحقق

$$h: E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto h(x)$$

و بحيث $\forall x \in E': h(x)=f(x)$

3.10 مجموعة تعريف دالة

لتكن لدينا دالة

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto y=f(x)$$

نسمي مجموعة تعريف الدالة f المجموعة الجزئية من E بحيث لـ f معنى على هذه المجموعة الجزئية.

نرمز بالرمز $D_f=\{x; x \in E / f(x) \quad existe\}$

3.11 تساوي دالتين

لتكن لدينا دالتان:

$$f: E \longrightarrow F \qquad\qquad g: E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto y=f(x) \qquad\qquad x \mapsto y=g(x)$$

تتساوى دالتان f و g إذا كانت لهما نفس مجموعة البدأ و نفس مجموعة الوصول و حققتا $\forall x \in E: g(x)=f(x)$

3.12 الصورة المباشرة لمجموعة بواسطة دالة

تعريف

لتكن $f: E \longrightarrow F$ دالة و لتكن $A \subset E$.

إن المجموعة $\{f(x)/x \in A\} \subset F$ تسمى الصورة المباشرة للمجموعة A و نرمز لها بالرمز $f(A)$.

مثال

$$f : IR \longrightarrow IR$$
$$x \mapsto x^2$$

الصورة المباشرة لـ IR هي $\{x^2 / x \in IR\} = IR^+$

3.13 الصورة العكسية لمجموعة بواسطة دالة

لتكن $f : E \longrightarrow F$ دالة و لتكن $B \subset F$.

إن المجموعة $\{x / f(x) \in B\} \subset E$ تسمى الصورة العكسية للمجموعة B و نرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$.

مثال

$$f : IR \longrightarrow IR$$
$$x \mapsto x^2$$
$$f^{-1}\{1,4,9\} = \{-1,-2,-3,1,2,3\}$$

f^{-1} لا تعنى أن f متقابل.

3.14 التطبيق

نسمي تطبيقا من المجموعة E نحو المجموعة F، كل علاقة من E نحو F ترفق بكل عنصر من E عنصرا واحدا و واحدا فقط من F.

مثال

$$f : IR \longrightarrow IR \qquad g : IR \longrightarrow IR$$
$$x \mapsto X + 401 \qquad x \mapsto \sqrt{X-1}$$

f تطبيق بينما g ليس تطبيق لأن العناصر الأصغر تماما من 1 ليس لها صورة.

ملاحظة

كل تطبيق هو دالة، لكن الدالة ليست دوما تطبيقا.

3.15 أنواع التطبيقات

التطبيق الثابت

إذا كانت E و F مجموعتين و b عنصرا من F، إن التطبيق الذي يرفق لكل عنصرا من E عنصرا b من F يسمى تطبيقا ثابتا.

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto b$$

التطبيق الحيادي

لتكن E مجموعة كيفية، إن التطبيق الذي يرفق لكل عنصرا من E العنصر ذاته يسمى تطبيقا حياديا على المجموعة E

$$f : E \longrightarrow E$$
$$x \mapsto x$$

التطبيق الغامر

إذا كانت E و F مجموعتين، نقول عن تطبيق $f : E \longrightarrow F$ بأنه غامر إذا كانت لكل صورة سابقة

$$\forall y \in F \Rightarrow \exists x \in E : y = f(x)$$

التطبيق المتباين

إذا كانت E و F مجموعتين، نقول عن تطبيق $f : E \longrightarrow F$ بأنه متباين إذا كان اختلاف السوابق يستلزم اختلاف الصور.

$\forall x, x' \in E / f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ أو $\forall x, x' \in E / x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

التطبيق المتقابل

هو كل تطبيق غامر و متباين في آن واحد.

التطبيق العكسي لتقابل

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا متقابلا. بما أن لكل عنصر من F سابقة وحيدة من E، فإن العلاقة العكسية للعلاقة f ترفق بكل عنصر من F عنصرا وحيد من E فهي إذن تطبيق. نسمي هذا التطبيق بالتطبيق العكسي للتقابل f و نرمز له بالرمز f^{-1}

خواص

1) $f^{-1}: E \longrightarrow F$ تقابل

2) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

3) $f0f^{-1} = 1_F , f^{-1}0f = 1_E$.

حيث 1_E و 1_F يرمزان للتطبيق الحيادي في E و F على الترتيب.

3.16 تركيب التطبيقات

ليكن لدينا التطبيقان $f: E \longrightarrow F \;,\; g: F \longrightarrow G$

نقول عن الطبيق $h: E \longrightarrow G$

المعرف كما يلي $\forall x \in E : h(x) = f(g(x))$

بأنه التطبيق تركيب التطبيقين f و g و نرمز له بالرمز: $f0g$

3.17 العلاقة الثنائية المعرفة على نفس المجموعة

لتكن E مجموعة و لتكن R علاقة معرفة من E على E نكتب xRy بدلا من $R(x,y)$.

خواص

الإنعكاس

نقول عن العلاقة R بأنها انعكاسية إذا تحقق $\forall x \in E : xRx$

التناظر

نقول عن العلاقة R بأنها تناظرية إذا تحقق $\forall x, y \in E : xRy \Leftrightarrow yRx$

التعدي

نقول عن العلاقة R بأنها متعدية إذا تحقق:

$$\forall x, y, z \in E : \begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow xRz$$

ضد التناظر

نقول عن العلاقة R بأنها ضد تناظرية إذا تحقق:

$$\forall x, y \in E : \begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow x = y$$

علاقة دائرية

نقول عن العلاقة R بأنها دائرية إذا تحقق:

$$\forall x, y, z \in E : \begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow zRx$$

علاقة التكافؤ

تكون العلاقة R علاقة تكافؤ إذ حققت الإنعكاس التناظر و التعدي.

مثال

$$\forall x \in IZ, \forall y \in IZ, xRy \Leftrightarrow \exists n \in IZ : x - y = 7n$$

أصناف التكافؤ

لتكن R علاقة تكافؤ في مجموعة E غير خالية و ليكن x عنصرا من E نسمى صنف تكافؤ العنصر x المجموعة:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \{y, y \in E : xRy\} \\ &= \{y, y \in E : yRx\} \end{aligned}$$

ملاحظة

$$xRy \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$$

مجموعة حاصل القسمة

لتكن R علاقة تكافؤ في مجموعة E.

تعريف

المجموعة $\{\overline{x}, x \in E\}$ تسمى مجموعة حاصل القسمة و نرمز إليها بالرمز

$$E / R = \left\{\overline{x}, x \in E\right\} \text{ أو } E / R$$

مثال

$$\forall x \in IZ, \forall y \in IZ, xRy \Leftrightarrow \exists n \in IZ : x - y = 7n$$

$$E / R = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\right\}$$

نظرية

لتكن R علاقة تكافؤ في مجموعة E فإن E / R تجزئة للمجموعة E.

برهان

1) $\overline{x} \neq \phi; \forall x \in E; x \in \overline{x}$

2) $\forall x, y \in E; \overline{x} = \overline{y} \vee \overline{x} \cap \overline{y} = \phi$

3) $E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}$

علاقة ترتيب

هي كل علاقة R تحقق الانعكاسية، ضد التناظرية و متعدية.

علاقة ترتيب كلي

نقول عن علاقة ترتيب R بأنها علاقة ترتيب كلي إذا تحقق $\forall x, y \in E : \left(xRy\right) \vee \left(yRx\right)$

فإن لم تكن علاقة ترتيب كلي فهي علاقة ترتيب جزئي.

4 البنى الجبرية

4.1 مقدمة

إن الفكرة الأساسية للبنى الجبرية هي أن كل مجتمع مهما كان يخضع لقوانين منها الوضعية ومنها المنزلة، منها الطبيعية اللازمة بالضرورة، ومنها المقترحة.
لعبة الشطرنج:
إذا اعتبرنا مجموعة المربعات الأربعة والستون فإن تحريك حجر الشطرنج يخضع لقوانين، هذه القوانين تدعى قوانين داخلية.
قانون المرور: إذا اعتبرنا مجموعة كل الطرق الوطنية فإن إشارة المرور تعرف قانون داخلي.
القوانين الفيزيائية: إذا اعتبرنا كل المخلوقات من جماد، حيوان وإنسان فإن القانون الذي يخضعون له من مرض، صحة، موت وحياة يخضع لقوانين.إذن كل قانون ينظم مجموعة ما يدعى بقانون تركيب داخلي.

4.2 العمليات الداخلية

تعريف

كل تطبيق من المجموعة $E^2 = E \times E$ نحو E يدعى بقانون تركيب داخلي .

أمثلة

$$f_1 : IN x IN \to IN \qquad f_2 : IN x IN \to IN$$
$$(a,b) \mapsto (a+b) \qquad (a,b) \mapsto ab$$
$$f_3 : P(E)xP(E) \to P(E) \qquad f_4 : P(E)xP(E) \to P(E)$$
$$(A,B) \mapsto A \cap B \qquad (A,B) \mapsto A \cup B$$
$$f_5 : P(E)xP(E) \to P(E) \qquad f_6 : P(E)xP(E) \to P(E)$$
$$(A,B) \mapsto C_E^A \qquad (A,B) \mapsto C_E^B$$

ترميز

نرمز عموما للتطبيق f بالرمز T، *، D.
وتكتب مثلا : $A * B = A \cup B.$
و نقرأ: Extoile: * ، Truc :T ، $\perp$: Anti truc , delta أو Δ:Tri

تعريف (جدول فيتاغورس)

نعريفه كما يلي

*	a	---	---	c	d
a	a*a	....	....	....	a*d
...	....	....	...	....	....
c	c*a	.....	.....	c*c	c*d
d	d*a	....	....	d*c	d*d

السطر الأول يحتوى على العناصر الأول للزوج.
السطر الأول يحتوى على العناصر الثانية للزوج.
وعند تقاطع السطر و العمود نجد العنصر المركب.

4.3 خواص

التجميعية

نقول عن عملية تركيب داخلي * بأنها عملية تجميعية في المجموعة E إذا حققت: $\forall a,b,c \in E : (a*b)*c = a*(b*c).$

التبديلية

ونقول عن العملية الداخلية * بأنها تبديلية إذا حققت.
$\forall a,b \in E : a*b = b*a$

ملاحظة

عندما لا تكون العملية تبديلية توجد أحيانا عناصر تبديلية

العنصر الحيادي

في المجموعة E، نقول عن العنصر E بأنه عنصر حيادي بالنسبة للعملية الداخلية * إذا حقق: $\forall x \in E : x*e = e*x = x$

العنصر الاعتيادي

في مجموعة E وبالنسبة للعملية الداخلية * نقول عن العنصر a بأنه اعتيادي من اليمين (على التوالي من الشمال) إذا حققت:

$$(\forall x, y \in E : x * a = y * a \Rightarrow x = y)$$

$$(\forall x, y \in E : a * x = a * y \Rightarrow x = y)$$

ومنه فالعنصر الاعتيادي (قابل للاختزال) هو كل عنصر اعتيادي من اليمين ومن الشمال معا.

العنصر الشاذ (الماص)

هو كل عنصر S من E بحيث $\forall x \in E / S * x = x * S = S$

العنصر النظير

ليكن x عنصر من المجموعة E، نقول عن العنصر x' من E بأنه نظير العنصر x بالنسبة للعملية الداخلية *، إذا وجد العنصر الحيادي بالنسبة للعملية * وحقق $x * x' = x' * x = e$

توزيعية عملية بالنسبة لأخرى

في مجموعة E، ليكن لدينا قانون تركيب داخلي * و T، نقول إن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون T إذا حقق:

$$\forall a, b, c \in E : a * (\ bTc\ ) = (a * b)T(a * c) ....(1)$$

$$\forall a, b, c \in E : (bTc) * a = (b * a)T(c * a) \quad ....(2)$$

ملاحظة

إذا تحققت العلاقة (1) نقول بأنه توزيعي من الشمال.
إذا تحققت العلاقة (2) نقول بأنه توزيعي من اليمين.

4.4 مفهوم الزمرة وبنيتها

ليكن لدينا G مجموعة كيفية، مزودة بقانون تركيب داخلي، نقول بأن للثنائية (G,*) بنية زمرة إذا تحقق:

1) العملية * تجميعية
2) العملية * يوجد عنصر حيادي e من G بالنسبة للعملية *.
3) كل عنصر من G يقبل نظير من G بالنسبة للعملية *.

ملاحظة

إذا كانت * زيادة على ما سبق تبديلية نقول عنها بأنها زمرة تبديلية.

خواص

1) في الزمرة، كل عنصر هو عنصر اعتيادي.
2) في الزمرة كل معادلة تقبل حلا وحيدا حسب الشكل التالي

$$\forall a, b \in G, \exists ! x \in G \quad / \quad a * \alpha = b.$$

تمييز

في كل زمرة (G,*)، ومهما كان العنصر a من G مثبت فإن التطبيق f_a متقابل

$$f_a : G \to G$$
$$x \mapsto a * x$$

4.4.1 الزمرة الجزئية

تعريف

إذا كانت (G,*) زمرة ، وكان $H \subset G$ فإننا نقول بأن لـ (H,*) بنية زمرة جزئية من G إذا كانت (H,*) زمرة.

تمييز

يمكن البرهان على أنه تكون لـ H بنية زمرة جزئية من الزمرة (G,*) إذا و فقط إذا نحقق

$$H \neq \phi$$

$$\forall x, y \in H \Rightarrow x * y' \in H / y * y' = y' * y = e$$

4.5 بنية الحلقة

تعريف

لتكن لدينا A مجموعة كيفية مزودة بقانونين داخليين نرمز لإحداهما بالرمز + (ونقول قانون جمعي) ونرمز للأخر بالرمز * وتقرأ قانون جدائي، نقول عن الثلاثية
(A،+،.) بأنها حلقة إذا تحقق

1) (A,+) زمرة تبديلية.

2) القانون الجدائي تجميعي.
3) القانون الجدائي توزيعي على القانون الجمعي.

تعاريف و رموز

العنصر الحيادي بالنسبة للقانون الجمعي يدعى بالعنصر المعدوم ويرمز له عموما بالرمز 0.
نظير عنصر a من A بالنسبة للقانون الجمعي يدعى بالعنصر النقيض (opposé)، ويرمز له عموما بالرمز a–.
إذا كان القانون الجدائي تبديلي نقول حلقة تبديلية.
إذا وجد عنصر حيادي بالنسبة للقانون الجدائي نقول حلقة واحدية ونسمي العنصر الحيادي بعنصر الوحدة (Unité)
إذا وجد العنصر النظير للعنصر b بالنسبة للقانون الجدائي نقول مقلوب b ونرمز له بالرمز b^{-1} ونقول عن b بأنه قابل للقلب.

خواص أساسية

1) في كل حلقة فإنه مهما كان a فإن $a.0 = 0.a = 0$

برهان

$$a.(b+0) = a.b + a.0 = ab \Rightarrow a.0 = 0$$

2) في كل حلقة فإن $\forall a, b \in A : a.(-b) = -(a.b)$.

برهان

$$a(b+(-b)) = 0 \Rightarrow ab + a(-b) = 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab)$$

4.5.1 حلقة جزئية

تعريف

لتكن $(A,+,.)$ حلقة، وليكن $A' \subset A$ نقول عن $(A',+,.)$ بأنها حلقة جزئية من $(A,+,.)$ إذا كانت $(A',+,.)$ حلقة.

تمييز

$(A',+,.)$ حلقة جزئية من $(A,+,.)$ إذا
1) $(A',+)$ زمرة جزئية من $(A,+)$.
2) A' مستقرة بالنسبة للقانون الجدائي.

4.6 بنية الحقل

$(IK, +, .)$ حقل إذا:
1) $(IK, +, .)$ حلقة واحدية.
2) $((IK - \{0\}), .)$ زمرة.

ملاحظة

إذا كان القانون الجدائي تبديلي نقول حقل تبديلي.

خواص

1) في كل حقل فإنه مهما كان a فإن $a.0 = 0.a = 0$

برهان

$$a.(b+0) = a.b + a.0 = ab \Rightarrow a.0 = 0$$

2) في كل حقل فإن $\forall a, b \in A : a.(-b) = -(a.b)$

برهان

$$a(b+(-b)) = 0 \Rightarrow ab + a(-b) = 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab)$$

3) في كل حقل لدينا $\forall a,b \in IK : ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

برهان

ليكن $a \neq 0$ إذن

$$\ni a' \in IK / a * a' = e \Rightarrow a' * (a * b) = a' * 0 = 0 \Rightarrow (a' * a) * b = 0$$
$$\Rightarrow e * b = 0 \Rightarrow b = 0$$

في كل حقل لدينا $\forall a,b \in IK / a \neq 0 \Rightarrow \exists ! x \in IK : a * x + b = 0$

برهان(تمرين)

تعاريف

4.6.1 الحلقة التامة

هي كل حلقة (.,*,A) بحيث $\forall x, y \in A : x.y = 0_A \Rightarrow \left(x = 0_A \vee y = 0_A \right)$

4.7 تشاكل الحلقات

لتكن $(A,*,.)$ و $(A',+,x)$ حلقتان و ليكن $f : A \to A'$ تطبيق

يكون f تشاكل إذا حقق

$$\forall x, y \in A : f(x * y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x.y) = f\left(x\right) x f(y)$$

4.7.1 نواة تشاكل

هي المجموعة $Kerf = \left\{ x \in A / f(x) = 0_A \right\}$

4.7.2 صورة تشاكل

هي المجموعة $\operatorname{Im} gf = \left\{ f(x) / x \in A \right\}$

5 أنظمة العد(التعداد)

5.1 نظام العد في الأساس *10*

نقوم بتمثيل العدد الطبيعي n في نظام تعدادي أساسه x.
ليكن الأساس x (نستعمل رموز لتمثيل هذا العدد الطبيعي (هي الأرقام) في النظام العشري: لدينا 10 رموز إذا $x=10$ الرموز هي $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
في أساس كيفي x الرموز هي: $\{0,1,2,3,4,5,........,x-1\}$.

الحالة الأولى

$m \le x$ نمثله بأحد الأرقام $\{0,1,2,3,4,5,........,x-1\}$.

الحالة الثانية

$m \succ x$ حيث x هو الأساس
نقسم m على x بحيث:

$$m = k_1 x + r_0 \quad / \quad 0 \le r_0 \prec x$$

التمثيل $m = \overline{k_1 r_0}_{(x)}$

مثال

$$m = 4, x = 5 \Rightarrow m = 4$$
$$m = 23, x = 5 \Rightarrow m = 4(5) + 3 = k_1 x + r_0$$

إذن $23 = \overline{43}_{(5)}$

خلاصة

إذا كان k_1 أقل من x نمثله بأحد الرموز $\{0,1,2,3,4,5,........,x-1\}$
إذا كان k_1 أكبر من x فإننا نجري عملية القسمة من جديد

$$k_1 = k_2 x + r_1 \quad / \quad 0 \le r_1 \prec x$$

يكون التمثيل $m = \overline{k_2 r_1 r_0}_{(x)}$

مثال

$$m = 47, x = 5 \Rightarrow m = 9(5) + 2 = k_1 x + r_0$$

لكن $k_1 = 9 = k_2 x + r_1 = 1(5) + 4$
إذن $47 = \overline{142}_{(5)}$
بصفة عامة لدينا
ليكن k_n هو حاصل القسمة بحيث:

$$k_{n-1} = k_n x + r_{n-1} \quad / \quad 0 \le r_{n-1} \prec x$$

إذن $m = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + ... + r_{n-1} x^{n-1} + k_n x^n$
و منه فالتمثيل هو $m = \overline{k_n r_{n-1} ... r_1 r_0}_{(x)}$

مثال

أكتب العدد 67 في النظام الثنائي

$$m = 1 + 1(2) + 0(2^2) + 0(2^3) + 0(2^4) + 0(2^5) + 1(2^6)$$
$$= \overline{100011}_{(2)}$$

5.2 نظام العد في الأساس 12

$m \in IN, x = 12$
نكتب $m = r_0 + r_1(12) + r_2(12^2) + + r_{n-1}(12^{n-1}) + k_n(12^n)$
فيكون $m = \overline{k_n r_{n-1} ... r_1 r_0}_{(12)}$

مثال

أكتب العدد 951 في الأساس 12

لدينا $951=79(12)+3$ لكن $79=6(12)+7$

إذن يكون التمثيل $951=\overline{673}_{(12)}$

مثال

أعط جدول الضرب و الجمع في الأساس 5،2.

الجمع في الأساس 2

+	0	1
0	0	1
1	1	$\overline{10}$

الجداء في الأساس 2

+	0	1
0	0	0
1	0	1

الجمع في الأساس 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	$\overline{10}$
2	2	3	4	$\overline{10}$	$\overline{11}$
3	3	4	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
4	4	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$

الجداء في الأساس 5

x	0	1	2	3	
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	$\overline{11}$	$\overline{13}$
3	0	3	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$
4	0	4	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{31}$

2) أنجز العمليات التالية

$\overline{1101}_{(2)}x\overline{11011}_{(2)}=$ $\qquad$ $\overline{10011}_{(2)}-\overline{11011}_{(2)}=$

$\overline{342002}_{(5)}+\overline{123401}_{(5)}=$

3) أوجد الأعداد x و y بحيث تكتب: $\overline{yx}_{(10)}$ و $\overline{xy}_{(7)}$

4) يكتب $\overline{4x3}_{(5)}$ و $\overline{x30}_{(9)}$

جد x بحيث $\overline{x30}_{(9)}=\overline{4x3}_{(5)}$.

5.3 الانتقال من أساس إلى أخر

ننتقل من الأساس x إلى الأساس 10 ثم من الأساس 10 إلى الأساس y.فنحصل على الكتابة للعدد الطبيعي m في الأساس x و في الأساس y.

مثال

في الأساس 16

الرموز هي $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

حول كتابة العدد m المعرف كما يلي: $\overline{1111101000}_{(2)}$
إلى الأساس 16
حل

$$\overline{1111101000}_{(2)} = 1000 = \overline{3E8}_{(16)}$$

6 مجموعة الأعداد الطبيعية

6.1 إنشاء المجموعة IN

العناصر الخاصة بمجموعة مرتبة

لتكن E مجموعة مرتبة ترتيبا كليا، نعرف عليها علاقة ترتيب R $(\leq)$ و لتكن A مجموعة جزئية من E.

العنصر الأكبر (Elément maximum)

نقول عن العنصر a من A إنه العنصر الأكبر إذا حقق $(x \leq a)$ $\forall x \in A : xRa$

العنصر الأصغر (Elément minimum)

نقول عن العنصر b من A إنه العنصر الأصغر إذا حقق $(b \leq x)$ $\forall x \in A : bRx$

الحاد من الأعلى (Majorant)

نقول عن العنصر a من E إنه حاد من الأعلى إذا حقق $(x \leq a)$ $\forall x \in A : xRa$

الحاد من الأسفل (Minorant)

نقول عن العنصر b من E إنه حاد من الأسفل إذا حقق $(b \leq x)$ $\forall x \in A : bRx$

تعريف

نسمى أصغر الحواد من الأعلى يدعى الحد الأعلى (borne supérieure).
نسمى أكبر الحواد من الأسفل يدعى الحد الأسفل (borne inférieure).

ملاحظة

قد يصير الحد الأعلى عنصرا أكبر، و الحد الأسفل عنصرا أصغر.

المجموعة الأعداد الطبيعية

نقبل بوجود مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية و نرمز لها بالرمز IN.

6.2 مسلمات IN

عاقب عدد طبيعي (Successeur)
يوجد تطبيق $S : IN \longrightarrow IN$ يسمى عاقب.
صورة عدد طبيعي n بالتطبيق S يسمى عاقب n.

6.3 الطبيعي 0

يوجد عنصر من IN يرمز له بالرمز 0 (صفر) و الذي لا سابق له بالتطبيق S.
1عاقب 0، 2عاقب 1، نرمز بالرمز $IN^* = IN - \{0\}$ لمجموعة الأعداد الطبيعية الغير معدومة.

سابق عدد طبيعي غير معدوم (Prédécesseur)

التطبيق S متقابل من IN نحوى IN^*
كل n من IN^* هو عاقب لـ m وحيد من IN.
m يسمى سابق لـ n.

مسلمة التراجع (التدريج)

لتكن A جزء من IN بحيث $\left(0 \in A, \forall n \in IN, n \in A \Rightarrow S(n) \in A\right) \Rightarrow A = IN$

بعبارة أخرى إذا كانت A مجموعة جزئية من IN تحتوي على الصفر و على عاقب كل عنصر من عناصرها فإن $A=IN$. و هذا ما يسمح بتعريف عملية الجمع على IN بالكيفية التالية: $\forall m, n \in IN, m + 0 = m, m + S(n) = S\left(m + n\right)$

نلاحظ ما يلي نضع $n=0$ في التعريف السابق $\forall m \in IN, S(m) = m + 1$

n-1 هو سابق لـ n.

خلاصة

لتكن A جزء من IN بحيث $\left(0 \in A, \forall n \in IN, n \in A \Rightarrow n + 1 \in A\right) \Rightarrow A = IN$

6.4 المجموعات المتساوية القدرة

تعريف

تكون المجموعتان E و F متساويي القدرة إذا وجد تطبيق تقابلي من المجموعة E نحو

المجموعة F.

6.5 المجموعة المنتهية

لتكن E مجموعة غير خالية.
نقول إن المجموعة E منتهية إذا و فقط إذا كان كل تطبيق متباين من E نحوى E تطبيقا تقابليا.

قضية

تكون E مجموعة منتهية إذا و فقط إذا كان كل تطبيق غامر من E نحو E تطبيقا تقابليا.

قضية

مهما يكن العدد الطبيعي n الغير معدوم فإن المجموعة $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ منتهية

برهان

بالتدريج

n =1 $A_1 = \{1\}$

كل تطبيق متباين من $A_1 = \{1\}$ نحو $A_1 = \{1\}$ فهو غامر و بالتالي تقابل.

نفرض أن كل تطبيق متباين من A_n نحوى A_n فهو متقابل

ليكن $f : A_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ تطبيق متباين

لدينا حالتان

الحالة الأولى: $f(A_n) \subset A_n$

ليكن $g : A_n \longrightarrow A_n$ التطبيق المتباين المعرف كما يلي $\forall n \in A_n : g(n) = f(n)$

بما أن A_n منتهية فإن g تطبيق تقابلي و بالتالي

$$\forall y \in A_n, \exists x \in A_n : y = g(x) = f(x)$$

و بما أن f متباين فإن $f(n+1) \subset A_n$

إذن $f(n+1) = n+1$ و بالتالي f تطبيق غامر.

الحالة الثانية: $\exists x_0 \in A_n : f(x_0) = n+1$

ليكن $f' : A_n \longrightarrow A_n$ التطبيق المتباين المعرف كما يلي:

$$\forall x \in A_n : f'(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ n+1 & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

بما أن A_n مجموعة منتهية فإن f' تطبيق تقابلي إذن $\forall y \in A_n, \exists x \in A_{n+1} : y = f(x)$

و بما أن $f(x_0) = n+1$ فإن التطبيق f غامر و بالتالي تقابلي.

نظرية

تكون مجموعة E منتهية إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي n غير معدوم و تطبيق تقابلي من المجموعة E نحو المجموعة A_n .

6.6 أصلي مجموعة

تعريف

لتكن E مجموعة غير خالية.
العدد n حيث المجموعتين E و A_n متساويا القدرة يسمى أصلي المجموعة E و نرمز إليه بالرمز *Card(E)*.
لدينا *Card(E)*=n و إذا كانت المجموعة خالية فإن أصليها يساوي 0.

أمثلة

$$Card\{0,1\} = 2, Card\{0,1,2,...,n\} = n+1$$

6.7 المجموعة العدودة (Dénombrable)

تعريف

تكون المجموعة E مجموعة عدودة إذا وفقط إذا كانت E و IN مجموعتان متساوتيي القدرة.

خواص

1) كل مجموعة جزئية من IN إما منتهية و إما عدودة.

2) $IZ, Q, INxIN$ مجموعات عدودة.

3) $\{B_n\}_{n\in IN}$ عائلة مجموعات جزئية من E حيث B_n عدودة أو منتهية فإن $\bigcup_{n\in IN} B_n$ عدودة أو منتهية.

4) الجداء الديكارتي لمجموعتين عدودتين،هو مجموعة عدودة.

علاقة الترتيب في IN

نضع $\forall n,m \in IN, m \le n \Leftrightarrow \exists p \in IN : m+p=n$

خواص

1) "$\le$" تعرف علاقة ترتيب كلي على IN.

2) 0 هو الحد الأصغر minimum.

3) كل جزء غير خال من IN، يقبل حادا من السفل

4) كل جزء غير خال من IN محدود من الأعلى يقبل حادا من الأعلى.

5) العلاقة "$\le$" متلائمة مع عمليات + و x.أي:

$$\forall m,n,p \in IN : m \le n \Rightarrow (m+p \le n+p)\ \ ;(mp \le np)$$

6.8 العمليات في IN و خواصها

كل العمليات على مجموعة الأعداد الطبيعية IN يمكن تعريفها بالتدريج.

الجمع في IN.

العملية + تجميعية: $\forall m,n,p \in IN : m+(n+p)=(m+n)+p$

العملية + تبديلية: $\forall m,n \in IN : m+n=n+m$

العنصر الحيادي 0: $\forall n \in IN : 0+n=n+0$

كل عناصر IN إعتيادية

$$\forall m,n,p \in IN : m+p=n+p \Rightarrow m=n$$

$$\forall m,n \in IN : m+n=0 \Rightarrow m=n=0$$

الجداء في IN.

نعرف على IN جداء كما يلي $\forall m,n \in IN : m0=0; m(n+1)=mn+m$

عملية الجداء تجميعية، تبديلية، كل عنصر عدا العنصر المعدوم هو اعتيادي و العنصر 1 هو العنصر الحيادي.

العاملي

نعرف عاملي n كما يلي: $0!=1, \forall n \in IN^* : n!=n(n-1)!$

الرفع إلى قوة

نعرف الرمز m^n كما يلي: $\forall n,m \in IN : m^0=1, m^{n+1}=m^n m$

خواص

$$\forall n,m,p \in IN : \begin{cases} m^n m^p = m^{n+p} \\ \left(m^n\right)^p = m^{np} \\ (mn)^p = m^p n^p \end{cases}$$

$$\forall n \in IN : n^1=n, \quad 1^n=1$$

$$\forall n \in IN : 0^n=0, \quad 0^0=1(convention)$$

$$\forall m,n \in IN : mn=0 \Leftrightarrow m=0 \vee n=0$$

$$\forall m,n \in IN : mn=1 \Leftrightarrow m=1 \wedge n=1$$

6.9 القسمة الإقليدية في IN

نظرية تمهيدية

ليكن العددان الطبيعان بحيث a من IN و b من IN^*.

$$a(b+1)=ab+b, \quad b\in IN^{*}$$
$$\Rightarrow (a+1)b \succ ab \geq a$$
$$\Rightarrow (a+1)b \geq a$$

نضع $p=a+1$

نص النظرية

$$\forall\left(a,b\right)\in INxIN^{*} \Rightarrow \exists p\in IN\,/\,pb\succ a$$

تعريف القسمة الإقليدية في IN

ليكن لدينا المجموعة المعرف كما يلي: $G=\left\{x,x\in IN\,/\,\exists a,b\neq 0: a\prec xb\right\}$

1) G ليست خالية.
2) G محدودة من الأسفل (G محتواة في IN) بالعنصر a. إذن يقبل عنصر.
3) هذا العنصر يختلف عن الصفر(0).

ليكن (k+1) هو أصغر عنصر لهذه المجموعة و بحيث $k\in IN$.

لدينا: $a\prec(k+1)b\Rightarrow k\notin G$ إذن $a\succ kb$

ومنه $kb\prec a\prec(k+1)b$ ....(1)

نضع $a-kb=r\Rightarrow a=kb+r$

لدينا

$$kb\prec a \Leftrightarrow a-kb\geq 0\Rightarrow r\succ 0$$
$$a\prec kb+b\Rightarrow a-kb\prec b$$

إذن

$$\begin{cases} r=a-kb\Leftrightarrow a=kb+r \\ 0\leq r\prec b \end{cases}$$

نظرية

$$\forall\left(a,b\right)\in INxIN^{*} \Rightarrow \exists!(k,r)\in INxIN\,/\begin{cases} a=kb+r \\ 0\leq r\prec b \end{cases}$$

العملية التي انتقلنا بها من (a,b) إلى $\left(k,r\right)$ هي القسمة الإقليدية في IN.

حيث a هو المقسوم، k هو حاصل القسمة، b هو القاسم،r هو باقي القسمة.

مثال: $512=72(7)+8$ أي $a=512, b=72, k=7, r=8$

قاسم عدد طبيعي

إذا كان r=0 فنقول عن b بأنه قاسم للعدد a.

مضاعف عدد طبيعي

إذا كان r=0 فنقول عن a بأنه مضاعف للعدد الطبيعي b.

6.10 الأعداد الأولية

نقول عن العدد m من IN بأنه أولي إذا كان يقبل قاسمين و هما 1 و m.

مثل 2,3,5,7,11,13,17,19

ملاحظة

و 1 ليسا أوليان

نظرية

كل عدد طبيعي m أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا.

البرهان

الحالة الأولى

m أولي فهو يقبل القسمة على نفسه،أي يقبل قاسما أوليا.

الحالة الثانية

m غير أولي، إذن فهو يقبل قواسم أخرى غير 1 و m. ليكن d هو أصغر هذه القواسم و أكبر تماما من 1. معنى هذا:$m=d.k$.

1) إما d أولي و هو المطلوب
2) إما d غير أولي و بالتالي يقبل قاسم d_1 و منه d_1 قاسم لـ m.يناقض الفرضية إذن d أولي.

نتيجة

كل عدد طبيعي $(n \succ 1)$ غير أولي يقبل على الأقل قاسما أوليا d بحيث: $d^2 \leq n$.

برهان

ليكن d أصغر قواسم m إذن $m = dk$ مع d أولي.
إذن k يقسم m و منه $d \leq k$ أي $d^2 \leq kd = m$ و هو المطلوب.

نظرية

إن مجموعة الأعداد الأولية غير منتية.

طريقة الغربال (Crible) لمعرفة أولية عدد طبيعي

11	10	9	8	**7**	6	**5**	4	3	**2**	1
22	21	20	**19**	18	**17**	16	15	14	**13**	12
33	32	**31**	30	**29**	28	27	26	25	24	**23**
44	**43**	42	**41**	40	39	38	**37**	36	35	34
55	54	**53**	52	51	50	49	48	**47**	46	45
66	65	64	63	62	**61**	60	**59**	58	57	56
77	76	75	74	**73**	72	**71**	70	69	68	67
88	87	86	85	84	**83**	82	81	80	**79**	78
99	98	**97**	96	95	94	93	92	91	90	89
									…	100

6.11 الأعداد الأولية فيما بينها

تعريف

نقول عن a و b بأنهما أوليان فيما بينها إذا كان a لا يقبل القسمة على b و b لا يقبل القسمة على a.

نظرية

كل عدد أولي، فهو أولي مع كل الأعداد الأصغر منه.

نظرية

عددان أوليان مختلفان هو أوليان فيما بينهما و العكس غير صحيح.

نظرية (بيزوت)

يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما إذا وجد عددان صحيحان α, β بحيث $\alpha a + \beta b = 1$

ترميز

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in IZ^2 / \alpha a + \beta b = 1$$

6.12 قواسم عدد طبيعي

ليكن العددان a و b بحيث b عدد طبيعي غير معدوم نقول إن b يقسم a إذا وجد عدد طبيعي k بحيث $a = kb$

6.12.1 البحث المنظم عن محموعة قواسم عدد طبيعي

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

نظرية

كل عدد طبيعي أكبر تماما من 1 يحلل بطريقة واحدة و واحدة فقط إلى جداء عوامل أولية

$$n = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}.a_3^{\alpha_3}.....a_p^{\alpha_p}$$

حيث a_1 ,...,a_p. أعداد أولية و $\alpha_1,.....,\alpha_p$ أعداد طبيعية.

وجود التحليل

كل عدد طبيعي n يقبل قاسما أوليا على الأقل (نظرية) ليكن d_1 هو أصغر هذه القواسم الأولية: $n = kd_1 / 1 \prec d_1 \prec n$

1) إذا كان k أولي. انتهى.
2) إذا كان k غير أولي.لدينا:
يقبل k قاسما أوليا على الأقل و ليكن d_2 القاسم الأولي الأصغر لـ k: $k = k_1 d_2$
أي $k = k_1 d_1 d_2$
و نكمل بنفس المنطق حتى $k = d_1 d_2 ......d_k$

وحدانية التحليل

نفرض وجود تحليلين $n = d_1^{\alpha_1}.d_2^{\alpha_2}.d_3^{\alpha_3}.....d_p^{\alpha_p}$ $n = c_1^{\beta_1}.c_2^{\beta_2}.c_3^{\beta_3}.....c_k^{\beta_k}$
إذن $n = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}.a_3^{\alpha_3}.....a_p^{\alpha_p} = c_1^{\beta_1}.c_2^{\beta_2}.c_3^{\beta_3}.....c_k^{\beta_k}$
d_1 يقسم $c_1^{\beta_1}.c_2^{\beta_2}.c_3^{\beta_3}.....c_k^{\beta_k}$ لكن $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$.عوامل أولية.
إذن حتما $d_1 = c_i$.تناقض مع الفرضية.

نظرية أساسية

البحث عن قواسم عدد طبيعي n.
ليكن $n = d_1^{\alpha_1}.d_2^{\alpha_2}.d_3^{\alpha_3}.....d_p^{\alpha_p}$
فإن قواسم العدد n تساوي

$$\left(d_1^0 + d_1^1 + .. + d_1^{\alpha_1}\right)\left(d_2^0 + d_2^1 + .. + d_2^{\alpha_2}\right)......\left(d_p^0 + d_p^1 + .. + d_p^{\alpha_p}\right)$$

عددها يساوي $\left(1+\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right).......(1+\alpha_p)$

مثال

30=2x3x5
عدد القواسم يساوي
(1+1)(1+1)(1+1)=8
و هي

$$\begin{aligned}
&(1+2)(1+3)(1+5) = (1+2+3+6)(1+5)\\
&= (1+5+2+10+3+15+6+30)\\
&= \{1,2,3,5,6,10,15,30\}
\end{aligned}$$

قواسم 120
لدينا $120=2^3x3x5$
عدد القواسم يساوي 16=(4x2x2)
و هي

$$\begin{aligned}
&(1+2+4+8)(1+3)(1+5)\\
&= (1+3+2+6+4+12+8+24)(1+5)\\
&= (1+3+2+6+4+42+8+24+5+15+10+30+\\
&20+60+40+120)\\
&= \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\}
\end{aligned}$$

6.13 مجموعة مضاعفات عدد طبيعي

$$M_n = \{kn, k \in IN\}$$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين *d (pgcd)*

ليكن $n_1 = d_1^{\alpha_1}.d_2^{\alpha_2}.d_3^{\alpha_3}.....d_p^{\alpha_p}, n_2 = b_1^{\beta_1}.b_2^{\beta_2}.b_3^{\beta_3}.....b_q^{\beta_q}$
القاسم المشترك الأكبر للعددين n_1 و n_2 نرمز له بالرمز $n_1 \wedge n_2$ مساويا لجداء كل العوامل المشتركة و بأصغر أس.
المضاعف المشترك الأصغر *m (ppcm)*

تؤخذ كل العوامل و بأكبر أس (الموجودة في n_1 أو n_2) $m = n_1 \wedge n_2$

العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف الأصغر

$$n_1.n_2 = d.m$$

برهان

لدينا: $n_1 \vee n_2 = m$ و $n_1 \wedge n_2 = d$

$n_1 \wedge n_2 = d \Rightarrow \exists a,b / n_1 = da \quad et \quad n_2 = bd / a \wedge b = 1$

$m = \alpha n_1, m = \beta n_2$

لكن $\alpha n_1 = \beta n_2 \Rightarrow \alpha da = \beta db \Rightarrow \alpha a = \beta b$

حسب نظرية غوس فإن:

a يقسم β إذن $\beta = ka$.

و b يقسم α إذن $\alpha = kb$.

إذن $m = \beta n_2 = kadb = k(adb)$

m مضاعف للعدد adb و لكن $adb = n_1 b = n_2 a$.

adb مضاعف للعدد n_1 .و adb مضاعف للعدد n_2 .

adb مضاعف لمضاعفها المشترك الاصغر adb مضاعف لـ m.

لدينا: m مضاعف للعدد adb و adb مضاعف للعدد m

و منه فإن $m = adb$

إذن $md = (da)(db) = n_1 n_2$

الفضاءات الشعاعية

7 الفضاء الشعاعي

تعريف

ليكن IK حقلا تبديلا مثل: Q,IR,……و ليكن E مجموعة كيفية و + قانون تركيب داخلي في E بحيث (+, E) زمرة تبديلية.

$$.: IK \times E \rightarrow E$$
$$(\lambda , x) \rightarrow \lambda . x$$

بحيث يحقق

a) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in IK : \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

b) $\forall x \in E, \forall x, \lambda \in IK : (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$

c) $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in IK; (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

d) $\forall x \in E : 1.x = x$

عندما يتحقق 1 و 2 نقول أن الثلاثي (.,+,E) يشكل فضاء شعاعيا على الحقل IK

أمثلة

1) مجموعة الأشعة الحرة في الفضاء.

+ : جمع الأشعة.

. جداء الشعاع بسلمي.

(.,+,E) ف.ش على على IR.

2) $E = IR^n$

$$\forall a, b \in E : a+b = (a_1,...,a_n) + (b_1,...,b_n) = (a_1+b_1,...,a_n+b_n)$$

$$\forall a, \in E, \forall \lambda \in IR : \lambda(a_1,...,a_n) = (\lambda a_1,...,\lambda a_n)$$

(.,+,E) ف.ش على الحقل IR

3) $E = \{f : IR \longrightarrow IR\}$

نعرف على مجموعة التطبيقات عملية جمع تطبيقين و جداء تطبيق بسلمي كمايلي

$$\forall f, g \in E : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in IR, \forall f \in E : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

(.,+,E) ف.ش على IR

4) $E = \{u_n \in IR, n \in IN, (u_n)_n \quad convergente\}$ (مجموعة المتتاليات الحقيقية المتقاربة) مزودة بالعمليتين +:

$(u+v)_n = u_n + v_n$ ، $.: (\lambda u)_n = \lambda u_n$

(. ,+ ,E) ف.ش على الحقل IR

5) $E = \{f : IR \rightarrow IR, deux \quad fois \quad dérivable\}$

$$+: (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$.: (\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$$

(.,+,E) ف.ش على الحقل IR

الحساب في الفضاء الشعاعي

في فضاء شعاعي لدينا:

1) $\lambda(x+y+) = \lambda x + \lambda y + \lambda z$

لأن

$$\lambda(x+y+z) = \lambda\left[(x+y)+z\right]$$
$$= \lambda(x+y) + \lambda z = (\lambda x + \lambda y) + \lambda z$$
$$= \lambda x + \lambda y + \lambda z$$

2) $\lambda . O_E = O_E$

لأن

$$\lambda x = \lambda(x+0 \Rightarrow \lambda x + \lambda 0 = \lambda x$$

$$\Rightarrow -(\lambda x)+(\lambda x)+\lambda 0=-(\lambda x)+\lambda x$$
$$\Rightarrow 0+\lambda 0=0 \Rightarrow \lambda 0=0$$

3) $0_{IK}.x=0$

لأن

$$(1+0)x=1x+0x$$
$$(1+0)x=1x \Rightarrow 1x+0x=1x$$
$$\Rightarrow -(1x)+(1x)+0x=-(1x)+(1x)$$
$$\Rightarrow O_{IK}.x=O_E$$

4) $-(\lambda x)=(-\lambda).x$ لأن $\lambda x+(-(\lambda x))=0$

7.1 الفضاء الشعاعي الجزئي

ليكن E ف.ش على الحقل IK و ليكن F جزء من E .

تعريف: نقول عن F أنه فضاء شعاعي جزء من E إذا تحقق:

1) $F \neq \phi$

2) $\forall x,y \in F : x-y \in F$

3) $\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x \in F$

مثال

ليكن $E=IR^2$ فضاء شعاعيا على IR و نعتبر $F=\{(a,\ b)\ IR^2 / 2a\text{-}3b=0\}$

F هو ف.ش.ج من E لأن:

1) $(0.0) \in F$

2) $\forall x=(a_1,b_1), y=(a_2,b_2) \in F \Rightarrow \text{x-y}=(a_1\text{-}a_2,b_1\text{-}b_2) \in F$

لأن $2(a_1-a_2)-3(b_1-b_2)=2a_1-3b_1)-(2a_2-3b_2)=0-0=0$

3) $\forall x=(a_1,b_1) \in F,\ \ \forall \lambda \in IR \Rightarrow \lambda x=(\lambda a_1,\lambda b_1) \in F$

لأن $2(\lambda a_1)-3(\lambda b_1)=\lambda(2a_1-3b_1)=\lambda 0=0$

قضية

ليكن F جزء من E فضاءا شعاعيا على الحقل IK:

F ف.ش.ج من E

1) $F \neq \Phi$

2) $\forall \varepsilon,\beta \in IK, \forall x,y \in F \Rightarrow \alpha x+\beta y \in F$

برهان

$x-y \in F \Leftarrow \alpha=-\beta=1$

$\alpha x \in F \Leftarrow \alpha \in IK \quad \beta=0$

ملاحظة

$\{O_E\}$ و E هما أبسط فضائين شعاعين من E.

7.1.1 فضاء شعاعي جزئي مولد عن طريق مجموعة

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل IK، ليكن A مجموعة جزئية من E نسمي فضاء شعاعي جزئي مولد عن طريق المجموعة A.من E أصغر فضاء شعاعي جزئي من E و يحوي A.(أصغر بمعنى الاحتواء) و نرمز بالرمز < A >

ملاحظة

1) $<\phi>=\{0\}$)

2) إذا كان A فضاء شعاعي جزئي فإن $\langle A\rangle=A$

7.1.2 فضاء شعاعي جزئي مولد عن طريق عائلة منتهية من الأشعة

تعريف

لتكن لدينا العائلة $\{x_1,...x_n\}$ من الأشعة من فضاء شعاعي E على الحقل IK نسمي مزجا خطيا للأشعة $\{x_1,...x_n\}$ كل عبارة من الشكل $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+........+\lambda_n x_n$

حيث $\{\lambda_1,........,\lambda_n\}$ سلاميات و x شعاع من E

تعريف

تكن لدينا العائلة $\{x_1,...x_n\}$ من الأشعة إن الفضاء الشعاعي الجزئي المولد عن طريق هذه العائلة معرفا بـ

$$<\{x_1,...,x_n\}>=\{\lambda_1 x_1+.....+\lambda_n x_n / \lambda_1,....,\lambda_n \in IK\}$$

7.1.3 تقاطع الفضاءات الشعاعية الجزئية

لتكن $(F_i)_{i\in I}$ عائلة من فضاءات شعاعية جزئية من E إن $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ هي ف.ش.ج من E.

برهان

1) لأن $\forall i\in I, 0_E \in F_i \Rightarrow 0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$

2) ليكن x, y من F $\overset{?}{\Leftarrow}$ x-y من F

$$x\in F \Leftrightarrow x\in \bigcap_{L\in I} F_i \Leftrightarrow x\in F_i, \forall i\in I \Leftrightarrow -x\in F_i, \forall i\in I$$

$$y\in F \Leftrightarrow y\in \bigcap_{L\in I} F_i \Leftrightarrow y\in F_i, \forall i\in I$$

$$\Rightarrow x-y\in F_i \quad \forall i \Rightarrow x-y\in \bigcap_{L\in I} F_i = F$$

3) ليكن $x\in F, \lambda\in IK \Rightarrow \lambda x\in F$

$$x\in F \Leftrightarrow x\in F_i, \forall i\in I \Rightarrow \lambda x\in F_i, \forall i\in I$$

لأن F_i ف.ش.ج من E

$$\Rightarrow \lambda x_i \in \bigcap_{L\in I} F_i \Rightarrow \lambda x\in F$$

7.1.4 اتحاد فضاءات شعاعية

إن اتحاد فضائين شعاعين جزئيين F_1 و F_2 من فشاء.شعاعي E ليس دوما فضاءا شعاعيا جزئيا.

مثال

في الفضاء الشعاعي IR^2 اتحاد مستقيمين ليس فضاءا شعاعيا جزئيا

نظرية

ليكن E ف.ش على الحقل IK و ليكن F_1 و F_2 ف.ش.ج من E لدينا:

$F_1\cup F_2$ ف.ش.ج من E $\Leftrightarrow$ $F_1\subset F_2$ أو $F_2\subset F_1$

برهان

$\Rightarrow$

$$F_1\subset F_2 \quad \Rightarrow F_1\cup F_2 = F_2$$
$$F_2\subset F_1 \quad \Rightarrow F_1\cup F_2 = F_1$$

$\Leftarrow$

نفرض أن $F_1\cup F_2$ ف.ش.ج لكن $F_1\not\subset F_2$ و $F_2\not\subset F_1$

ليكن $x,y\in F_1\cup F_2$ بحيث $x\in F_1-F_2, y\in F_2-F_1$

$\Rightarrow x-y'\notin F_1$ و $y-x'\notin F_2$

تناقض و.هـ.م

7.1.5 جمع الفضاءات الشعاعية الجزئية

تعريف

ليكن F_1 و F_2 فضائين.شعاعيين.جزئيين من E. نسمي جمع F_1 و F_2 و نرمز بالرمز F_1+F_2 العبارة التالية $F_1+F_2=<F_1\cup F_2>$

نظرية

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 / x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\} \subset E$$

تعريف (تعميم)

ليكن لدينا $P\ F_1, \ldots\ldots, F_p$ فضاء.شعاعي.جزئي من E نعرف جمع هذه الفضاءات الشعاعية الجزئية و نرمز بالرمز $\sum_{i=1}^{P} Fi$ لعبارة التالية $\sum_{i=1}^{p} F_i = < F_1 \cup F_2 \cup \ldots\ldots \cup F_P >$

نظرية

$$F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_P = \{x_1 + \ldots\ldots\ldots + x_P / x_i \in F_i, \forall i = \overline{1, p}\}$$

7.1.6 الجمع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية

تعريف

يكون الجمع $F_1+\ldots+F_p$ $(P \geq 2)$ لـ p فضاء.شعاعي.جزئي من E مباشرا إذا كان نشر كل شعاع x إلى جمع أشعة من كل الفضاءات الشعاعية الجزئية وحيدا و نكتب: $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus F_P$

نظرية (تمييز)

(P=2)

يكون الجمع F_1+F_2 مباشرا إذاا $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

(P>2)

يكون الجمع $F_1+F_2\ldots.+F_P$ مباشر إذاا $F_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{P} F_k = \{0_E\}, \forall i = \overline{1, P}$

ملاحظة

لا يجب أن نعتقد بأن الشرط $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ كاف في حالة $P > 2$ و إن كان ضروريا.

7.1.7 فضاء شعاعي إضافي

تعريف

ليكن E فضاء.شعاعي عل الحقل IK نقول عن فضائين شعاعين F_1 و F_2 بأنهما إضافيان إذا و فقط إذا $E = F_1 \oplus F_2$

أي $\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \ / \ x = x_1 + x_2$

ملاحظة

يجب أن لا نخلط بين إضافيا و مكملا.

7.2 أساس فضاء إشعاعي –بعده

تعريف

نقول عن n شعاع $x_1 \ldots x_n$.من فضاء شعاعي E أنها مستقلة خطيا (IK مستقلة خطيا) إذا و فقط إذا تحقق

$$\forall \lambda_1, \ldots., \lambda_n \in IK / \lambda_1 x_1 + \ldots. + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_n = 0$$

نقول أيضا بأن الجزء $\{x_1 \ldots.. x_n\}$ مستقل أو حر.

تعريف

نقول عن n شعاع $x_1, \ldots, x_n$ بأنها مرتبطة خطيا إذاا تحقق

$$\lambda_1 x_1 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \exists i_0 \in \{1, \ldots., n\} \quad tq \quad \lambda_{i_0} \neq 0$$

نقول أيضا بأن الجزء $\{x_1 \ldots.. x_n\}$ مرتبط.

تعريف

نقول عن مجموعة A من E بأنها مولدة لـ E إذا تحقق ما يلي E=<A>

في حالة $A=\{x_1,.....,x_n\}$ فإنها A مولدة لـ E إذا تحقق

$$\forall x\in E,\exists\lambda_1,...,\lambda_n\in IK\quad tq\quad x=\lambda_1x_1+....+\lambda_nx_n$$

نظرية

ليكن E فضاء شعاعي على IK إذن:

1) كل جزء من E يحوي جزء مرتبط فهو مرتبط.
2) كل جزء من جزء حر فهو حر.

برهان

1) ليكن $A=\{x_1,...,x_n\}$ جزء مرتبط من E و ليكن B جزء من E بحيث $A\subset B$

نفرض بالخلف بأن B جزء حر

إذن $\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$

لكن $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$ تعني أن A حر تناقض.

2) ليكن C جزء من E حر نفرض أنها تحتوي على جزء D مرتبط حسب (1) تناقض

7.2.1 أساس فضاء شعاعي

تعريف

نقول عن جزء من E إنه أساس لـ E إذا كان حر و مولد.

ملاحظة

الأساس ليس وحيدا.

تعريف

نسمي بعد ف.ش E على الحقل IK أصلي إحدى مجموعات أساسه و نرمز بالرمز $\dim E=n$

مثال

$$E=\{a_0+a_1x+a_2x^2, a_0,a_1,a_2,\in IK\}$$

إن $\{1,x,x^2\}$ أساس لـ E و بعده يساوي 3.

نظرية

ليكن E فضاء شعاعي منته.نفرض وجود جزء منته A مولد لـ E

نفرض وجود $L=\{x_1,.........,x_p\}\subset A$ حر.

إذن توجد قاعدة (أساس) B بحيث $L\subset B\subset A$.

برهان(تمرين)

قضية

كل فضاء شعاعي ذو بعد منته يملك أساس.

برهان

ليكن $E\neq\{0_E\}$ ⇐ وجود r من E و $r\neq 0$ بحيث $L=\{r\}\subset E$

حسب النظرية السابقة

$$\Rightarrow\exists\quad B\quad tq: L\subset B\subset E$$

7.3 نظرية الأساس غير التام

ليكن E فضاء.شعاعي ذو بعد يساوي n.ليكن $x_1,...,x_p$, $(p<n)$ أشعة

مستقلة خطيا إذن يمكننا أن نجد أشعة $x_{p+1},...,x_n$ من E بحيث $\{x_1,...,x_n\}$

تشكل أساسا لـ E.

برهان

ليكن $L=\left\{x_1,...,x_p\right\}$ لتكن A_1 مجموعة الأشعة المولدة لـ E و ليكن $A=L\cup A_1$

إن $L\subset A$ و حسب النظرية السابقة يمكن أن نجد أساس B بحيث $L\subset B\subset E$

نظرية

ليكن E فضاءا شعاعيا بعده يساوي n $(n\neq 0)$.

1) كل جزء حر من E يكون عدد عناصره أقل أو يساوي n.
2) جملة أشعة من E، مكونة على الأقل من n +1 شعاع تكون حتما مرتبطة.
3) جملة من E حرة مكونة من n شعاع تشكل حتما أساس لـ E.
4) كل جزء من E مولد لـ E يتشكل حتما من n أو أكثر شعاع.
5) جملة أشعة من E، مكونة على الأكثر من n-1 شعاع لا يمكنها أن تكون جزء مولد لـ E.
6) جملة مولدة لـ E مكونة من n شعاع هي حتما أساس.

برهان

نتيجة مباشرة للنظرية السابقة

نظرية

ليكن E فضاء شعاعي بحيث $\dim E = n$.

ليكن F فضاء شعاعيا جزئيا من E لدينا

1) $\dim F\leq \dim E$.

2) $$\left.\begin{array}{l} F\subset E \\ \dim F=\dim E\end{array}\right\}\Rightarrow E=F$$

بعد جمع فضائين جزئيين

ليكن لدينا $F_1,...,F_n$ n فضاء شعاعي جزئي من E

لدينا ما يلي:

$$\dim\left(F_1\oplus .....\oplus F_n\right)=\dim F_1+....+\dim F_n$$

$$\dim\left(F_1+F_2\right)=\dim F_1+\dim F_2-\dim\left(F_1\cap F_2\right)$$

8 التطبيقات الخطية

ليكن E و F فضائين شعاعين على نفس الحقل IK.

تعريف

نقول عن تطبيق من E و F بأنه خطي إذا حقق الخاصتين

1) $\forall x, y \in \mathrm{E} \quad , T(x+y) = T(x) + T(y)$

2) $\forall \lambda \in IK, \forall x \in \mathrm{E} : T(\lambda x) = \lambda T(x)$

مثال 1

$$f : IR \to IR$$
$$x \to ax$$

مثال 2

$$f : IR^3 \longrightarrow IR^4$$
$$(x, y, z) \mapsto (x+y, x, y, z+x)$$

مثال 3

ليكن $E = \{ f : f \in C^\infty(I), I \in IR \}$

$$g : E \longrightarrow E$$
$$f \mapsto g(f) = f'$$

نظرية

حتى يكون T تطبيق من E و F خطي يلزم و يكفى أن يتحقق

$$\forall \alpha, \beta \in IK, \forall x, y \in E \Rightarrow T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

برهان

من أجل $\alpha = \beta = 1$ يتحقق الشرط الأول

من أجل $\beta = 0$ و α كيفي يتحقق الشرط الثاني

ملاحظة و تعاريف

1) يمكن لـ E و F أن يكونا ذا بعد كيفي (منته أو غير منته).
2) عندما يكون E =F نقول عن التطبيق الخطي بأنه باطني.
3) عندما يكون التطبيق متقابل من E في F نقول عنه بأنه تشاكل.
4) عندما يكون التطبيق متقابل و E = F نقول عنه بأنه ذاتي.

نظرية

1) إن تركيب تطبيقين خطين تطبيق خطي.
2) إن تركيب تطبيقين تشاكلين على نفس الحقل هو تشاكل.
3) إن تركيب تطبيقين باطنيين هو تطبيق باطني.
4) إن تركيب تطبيقين ذاتيين هو تطبيق ذاتي.

برهان (تمرين)

قضية

ليكن لدينا تطبيق خطي

$$f : E \to F$$
$$x \to f(x) = y$$

إن حل $f(x) = y$ يعود إلى حل $f(z) = 0$ حيث $z = x - x_0$

برهان

حل $y_0 = f(x)$ يستلزم وجود x_0 بحيث $y_0 = f(x_0)$

إذن $f(x_0) = f(x) = y_0$ و منه $f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x - x_0) = 0$

يكفي فقط وضع $z = x - x_0$ و.هـ.م

8.1 نواة تطبيق خطي

تعريف

ليكن f تطبيق خطي من E في F إن المجموعة $\{x, x \in E : f(x) = 0\}$ تسمى نواة f و يرمز لها بالرمز Ker f

8.2 صورة تطبيق خطي

تعريف

ليكن f تطبيق خطي من E في F إن المجموعة $\{f(x), x \in E\}$ تسمى صورة التطبيق الخطي و يرمز لها بالرمز $\operatorname{Im} gf$

لدينا $\operatorname{Im} g \quad f = \{y, y \in F / \exists x \in E : f(x) = y\}$

نظرية

ليكن f تطبيق خطي من E في F لدينا:

1) $f \Leftrightarrow Kerf = \{0_E\}$ متباين

2) $f \Leftrightarrow \operatorname{Im} gf = F$ غامر

برهان

1) ليكن x و $x^{/}$ من E بحيث $f(x) = f(x')$

$$Kerf = \{0_E\} \Leftrightarrow f(x) - f(x') = 0_F, x, x' \in E$$

$$\Leftrightarrow f(x - x') = 0_F \Leftrightarrow x - x' = 0_E \Leftrightarrow x = x'$$

2) $f(E) = F \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$ أي أن f غامر

قضية

ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي

إن Ker f فضاء شعاعي جزئي من E.

إن $\operatorname{Im} gf$ فضاء شعاعي جزئي من F.

برهان (تمرين)

مثال

$$f : IR^2 \to IR^2$$
$$(x, y) \to (2x + 5y, 3x + 8y)$$

يمكننا أن نتبين بسهولة بأن f خطي

$$Kerf = \left\{(x, y); (x, y) \in IR^2 / \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x + 8y = 0 \end{cases}\right\}$$
$$= \{(0, 0)\}$$

إذن *f* متباين.

8.3 رتبة تطبيق خطي

تعريف

نسمي رتبة تطبيق خطي $f : E \to F$ بعد الفضاء الشعاعي الجزئي *f (E)* ونرمز بالرمز $rgf = \dim(f(E))$.

نظرية

ليكن E و F فضائين شعاعين على الحقل التبديلي IK ببعدين منتهيين و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي لدينا

$$rgf = \dim E - \dim Kerf \Leftrightarrow \dim E = rgf + \dim Kerf$$

مثال

$$f : E \longrightarrow E$$
$$P \mapsto f(p) = (x^2 + x + 4)p''$$

حيث $p^{//}$ يرمز لمشتقة p مرتين و $E = \{p \in IR[x], d^\circ p \leq 3\}$

برهن أن f تطبيق باطني.
أحسب رتبته.

حل

ليكن P_1 و P_2 من E و ليكن β,α سلمين لدينا:

$$f(\alpha p_1+\beta p_2)=(x^2+x+4)(\alpha p_1+\beta p_2)''=\alpha f(p_1)+\beta f(p_2)$$

إذن f خطي

هو باطني لأن $p(x)=\sum_{i=1}^{3}a_ix^i \Rightarrow p''(x)=6a_1x+2a_2$

$$\Rightarrow f(p)=(2x^2+x+4)(6a_1x+2a_2)=6a_1x^3+(6a_1+2a_2)x^2+(24a_1+2a_2)x+8a_2\in E$$

أي $E=E$ إذن f باطني

حساب رتبة f: لدينا $rgf=\dim E-\dim Kerf$

لكن بعد E يساوي 4.

و $\ker f=\{p,p\in E/f(p)=0\}=\{a_1x+a_2,a_1,a_2\in IK\}\Rightarrow \dim Kerf=2$ منه $rgf=4-2=2$

نتائج

1) إن التطبيق العكسي لتشاكل تشاكل.
2) من أجل f خطي لدينا

$$\forall x\in E: f(-x)=-f(x)$$
$$f(0_E)=0_F.$$

3) إذا كانت A عائلة مرتبطة من E فإن $f(A)$ عائلة مرتبطة من F.
4) إذا كانت A عائلة مولدة لـ E فإن $f(A)$ عائلة مولدة لـ $\operatorname{Im} gf$.
5) إذا كان f متباين و كان B جزء حر من E فإن $f(B)$ جزء حر من F.
6) إذا كان f متقابل و كانت B أساس لـ E فإن $f(B)$ أساس لـ F.
7) إذا كان $B=\{e_1,....,e_n\}$ أساس لـ E فإن $\operatorname{Im}f=\langle f(e_1),....,f(e_n)\rangle$.

8.4 فضاء التطبيقات الخطية

ليكن E و F فضائين شعاعين على IK و لتكن Hom (E,F) مجموعة التطبيقات الخطية $f:E\rightarrow F$ نزود هذه المجموعة بالقانونين التالين:

$$+: Hom(E,F)\times Hom(E,F)\rightarrow Hom(E,F) \qquad .IK\times Hom(E,F)\rightarrow Hom(E,F)$$
$$(f,g)\mapsto f+g \qquad (\lambda,f)\mapsto \lambda f$$

إن $(Hom(E,F),+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل IK.

8.5 الإشكال الخطية – ثنوى فضاء شعاعي

تعريف

نسمى شكل خطي على IK(أو IK.شكل خطي) كل تطبيق خطي من الشكل $f:E\rightarrow IK$

مثال

$$f: IR^3\rightarrow IR$$
$$(x,y,z)\rightarrow x-y+2z$$

تعريف

نسمي فضاء ثنوي لـ فضاء شعاعي E على الحقل IK، مجموعة كل الأشكال الخطية على E و نرمز بالرمز E*=Hom (E, IK)

9 المصفوفات

تعريف

نسمي مصفوفة ذات عناصر من الحقل IK (الحلقة A) كل جدول مستطيل أو مربع لعناصر $a_{ij} \in IK$ (أو $a_{ij} \in A$) i يدل على رقم السطر و j يدل على رقم العمود.

نرمز للمصفوفات بالرمز M أو $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$

$$M=(a_{ij})_{1\le j\le n}^{1\le i\le p}=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{p1} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}$$

1) نسمي مصفوفة مستطيلة من الصنف p x n كل مصفوفة مشكلة من p سطر و n عمود.

2) نسمي مصفوفة مربعة من الصنف n كل مصفوفة مشكلة من n سطر و n عمود.

3) نسمي القطر الأساسي لمصفوفة مربعة مجموعة العناصر $\left\{a_{ii}\right\}_{1\le i\le n}=\left\{a_{11},...,a_{nn}\right\}$

أما القطر الثانوي هو $\left\{a_{i(n+1-i}\right\}_{1\le i\le n} = \left\{a_{1n},\dots,a_{n1}\right\}$

9.1 تساوي المصفوفات

تعريف

لتكن لدينا مصفوفتان $(A)=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$، نقول أنهما متساويان إذا وفقط إذا كانت A و B من نفس الصنف و $\forall i,j \quad a_{ij}=b_{ij}$

9.2 مصفوفات خاصة

1) المصفوفة المعدومة:هي كل مصفوفة عناصرها معدومة كليا

مثال

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},0$$

2) مصفوفة الوحدة:هي مصفوفة مربعة بحيث عناصر قطرها تساوي 1 أي ($a_{ii}=1$) أما باقي العناصر فمعدومة.

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},1$$

3) مصفوفة سلمية هي كل مصفوفة مربعة بحيث عناصرها تحقق $a_{ii}=d \quad 1\le i\le n \ , \ a_{ij_{\,i\neq j}}=0$

مثال

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad 14$$

4) مصفوفة قطرية:هي كل مصفوفة مربعة بحيث على الأقل أحد عناصر قطرها الرئيسي غير معدوم أما باقي العناصر فمعدوم

$$\begin{cases} \exists\, i_0 \in \overline{1,n} \quad / \quad a_{i_0 i_0} \neq 0 \\ a_{ij\, i\neq j} = 0 \quad \forall\, i,\, j \in \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5) مصفوفة سطر :هي كل مصفوفة من الصنف $1\ x\ p$.

6) مصفوفة عمود:هي كل مصفوفة من الصنف $q\ x\ 1$.

7) مصفوفة متناظرة:هي كل مصفوفة مربعة بحيث $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}}$

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

8) مصفوفة مثلثية

مصفوفة مثلثية هي مصفوفة مربعة بحيث كل عناصرها الموجودة على إحدى الجهتين من القطر الرئيسي معدومة كليا،ونميز صنفين:

مصفوفة مثلثية سفلية $i \prec j \quad a_{ij} = 0$

مصفوفة مثلثية علوية $i \succ j \quad a_{ij} = 0$

9) مصفوفة جوردان(Jordan)

هي مصفوفة مربعة بحيث كل عناصر القطر الأساسي تكون متساوية و كل عناصر القطر الموازي للقطر الأساسي تكون مساوية لـ 1 بينما باقي العناصر تكون معدومة كليا أي

$$\begin{cases} a_{ii} = b, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ a_{i\, i+1} = 1 \qquad 1 \le i \le n-1 \\ a_{ij} = 0 \qquad \text{Ailleurs} \end{cases}$$

هناك مصفوفات خاصة أخرى

9.3 مصفوفة تطبيق خطي

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل IK ببعد مساو لـ p و F فضاءا شعاعيا ببعد مساو لـ n و ليكن $f : E \to F$ تطبيقا خطيا

تعريف

نسمي مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{e_i\}$ لـ E و $\{w_j\}$ لـ F الجدول المربع (المستطيل) للمعاملات a_{ij} للصور

$$f\left(e_i\right) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{ni} w_n, i = \overline{1, p}$$

مكتوبة في أعمدة

$$M = Mat(f, e_i, w_j) = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{np} \end{pmatrix}$$

ملاحظة

مصفوفة التطبيق الخطي لديها $dimF=n$ سطر و $dimE=p$ عمود.

إذا بدلنا الأساس تتبدل معاملات المصفوفة.

مثال

ليكن $E = \{\ p, p \in IR[x],\ \ d^o p \le 2\}$

$$f : E \longrightarrow E$$
$$p \to 3p + (x-3)p'(2x^2 - x - 4)P''$$

جد مصفوفة f بالنسبة للأساس $\{1, x, x^2\}$

حل

لدينا

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(x)=4x-3 \\ f(x^2)=9x^2-8x-8 \end{cases}$$

و منه

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

مصفوفة ثلاثية علوية

و بالعكس فكل مصفوفة $\mathrm{M}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}}$ يمكن إرفاقها لتطبيق خطي $f: IK^n \to IK^p$ بحيث $f(e_i)=\sum_{i=1}^{P} a_{ij}Wj$ حيث $\{e_i\}$ أساس لـ IK^n و $\{w_j\}$ أساس لـ IK^p

مثال

المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

يمكن إرفاقها بتطبيق خطي

$$f: IR^3 \to IR^2$$

بحيث

$$\begin{cases} f(e_1)=2w_1+3w_2 \\ f(e_2)=w_1+0w_2 \\ f(e_3)=0w_1+6w_2 \end{cases}$$

حيث $\{e_1,e_2,e_3\}$ أساس لـ IR^3 و $\{w_1,w_2\}$ أساس لـ IR^2

9.4 مرتبة مصفوفة

تعريف

نسمي مرتبة مصفوفة مرتبة التطبيق الخطي المرفق لهذه المصفوفة.

ملاحظة

نعلم أن مرتبة التطبيق الخطي $f: IK^p \to K^n$ هو $rgf=\dim f(IK^P)$

لكن $\{f(e_i)\}$ مولدة لـ $f(Ik^p)$ و منه فإن المرتبة تساوي عدد أشعة العمود $f(e_i)$ المستقلة خطيا.

نظرية

لتكن A مصفوفة مربعة مرفقة لتطبيق خطي باطني $f: IK^n \to IK^n$

لدينا F ذاتي $\Leftrightarrow\ ngA=n$

برهان

ليكن: $f: IK^n \to IK^n$ تطبيق ذاتي إذن:

$(1 \Leftarrow)\ rg\ \ f=n \Rightarrow rg\ \ A=ng\ \ f=n$

$(2 \Rightarrow)\ f: IK^n \to IK^n$ تطبيق باطني و $rgA=n$ لكن $rgA=rgf=n$

إذن f متقابل ومنه فـ f ذاتي.

9.5 الفضاء الشعاعي للمصفوفات

ملاحظة

إن العمليات على المصفوفات مشتقة من العمليات على التطبيقات الخطية.

تعريف

إن جمع مصفوفتين A و B من نفس الصنف هي المصفوفة C بحيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ و نكتب $C=A+B$.

تعريف

لضرب مصفوفة A بسلم λ نقوم بضرب كل عناصر المصفوفة A.أي $\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

نظرية

إن المجموعة $M(n,p)$ للمصفوفات من الصنف nxp (n سطر و P عمود) ذات عناصر من الحقل التبديلي IK، هي فضاء شعاعي ذو بعد يساوي np.

برهان

إن الجمع و الجداء المعرفين هما عمليات IK فضاء.شعاعي.

لحساب بعد $M(n, p)$ نبحث عن أساس، نختار الأساس التالي $A_{ij} = (a_{\alpha\beta})$ بحيث

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} = 0 & si(\alpha,\beta) \neq (i,j) \\ a_{\alpha\beta} = 1 & si(\alpha,\beta) = (i,j) \end{cases}$$

و منه فإن $M = n_{11}A_{11} + n_{12}A_{12} + \ldots\ldots + n_{np}A_{np}$

نلاحظ بأن العائلة $\{A_{11},\ldots\ldots,\ldots\ldots, A_{np}\}$ عائلة حرة و مولدة لـ $M(n,p)$ و بالتالي فهي أساس و عليه $\dim M(n,p)=np$

مثال

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.6 ضرب المصفوفات

$$\begin{tikzcd} IK^n \arrow[r, "f \text{ خطي}"] \arrow[dr, "gof"'] & IK^p \arrow[d, "g\text{خطي}"] \\ & IK^q \end{tikzcd}$$

ليكن: IK حقل تبديلي

$\{e_i\}$ أساس لـ IK^n

$\{w_j\}$ أساس لـ IK^p

$\{\ell_k\}$ أساس لـ IK^q

$$A = M(f, e_i, w_j), B = M(g, w_j, \varphi_k), C = M(gof, e_i, \varphi_k)$$

لدينا

$$f(e_i) = b_{1i}w_1 + \ldots + b_{pi}w_p \qquad 1 \leq i \leq n \qquad (1)$$

$$f(w_j) = a_{1i}\varphi_1 + \ldots + a_{qj}\varphi_q \qquad 1 \leq j \leq p \qquad (2)$$

$$(gof)(e_i) = C_{1i}\varphi_1 + \ldots + C_{qj}\varphi_q \qquad 1 \leq i \leq n \qquad (3)$$

إن خطية f و g و العلاقتين (1) و (2) تعطيان

$$(gof)(e_i) = g(b_{1i}w_1 + \ldots\ldots + b_{pi}w_p)$$

$$= b_{1i}g(w_1) + \ldots\ldots + b_{pi}g(w_p) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$= b_{1i}(a_{11}\varphi_1 + \ldots + a_{q1}\varphi_q) + \ldots + b_{pi}(a_{1p}\varphi_1 + \ldots + a_{pq}\varphi_q)$$

مقارنة (4) و (3) تعطي $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$

تعريف

إن مصفوفة gof هي جداء مصفوفة g بمصفوفة f أي $AB=C$

مثال

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 32\\ 32 & 77\end{pmatrix}$$

عدد الأعمدة مساوي لعدد الأسطر

نظرية

إن المجموعة $M(n,n)$ للمصفوفات المربعة على الحقل IIK تبديلي تعرف حلقة واحدية، غير تبديلية و غير تامة

غير تامة لأنه لدينا $\exists \neq 0, B \neq 0 \quad / \quad AB = 0$ $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

9.7 المصفوفات القابلة للقلب

لكل تطبيق ذاتي f لـ IK^n (فضاء شعاعي) نرفق مصفوفة A=M(f) و للتطبيق العكسي f^{1} نرفق المصفوفة $B=M(f^{-1})$ إذن

$$AB = BA = I \ \Leftarrow\ fof^{-1} = f^{-1}of = Id$$

و منه التعريف التالي

تعريف

نقول عن مصفوفة A أنها قابلة للقلب إذا كانت مربعة من الصنف n و بحيث وجدت

مصفوفة B مربعة من نفس الصنف و تحقق $AB = BA = I_n$

نرمز بـ A^{-1} لمقلوب A.

مثال

أحسب المصفوفة العكسية لمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}5 & 16\\ 4 & 13\end{pmatrix}$$

إن وجدت.

حل

لتكن $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ بحيث نعتبرها مقلوب A

$AB=BA=I_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}5a+16c=1\\ 4a+13c=0\end{cases}\\ \begin{cases}5b+16d=0\\ 4b+13d=1\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=13,\quad b=-16\ ,c=-4,\quad d=5$$

قضية

لتكن A مصفوفة مربعة من الصنف n على الحقل IK لدينا:

A قلوبة $\Leftrightarrow$ $rgA = n \Leftrightarrow$ الأعمدة مستقلة خطيا.

قضية

إن مجموعة المصفوفات A من الصنف n القابلة للقلب تشكل زمرة جدائية غير تبديلية.

9.8 تغيير الأساس

ليكن $\{ei\}$ و $\{ei'\}$ أساسين لـ E (ف.ش على IK) و $\{wj\}$ و $\{wj'\}$ أساسين لـ F (ف.ش على IK) و ليكن $f: E \to F$ تطبيق خطي.لتكن $A = M(f, ei, wj)$ و $B = M(f, ei', wj')$

ما العلاقة بين هاتين المصفوفتين؟

توطئة

ليكن $\{ei\}$ و $\{ei'\}$ أساسين لـ E (ف.ش على IK) بعده يساوي n

نبحث عن العلاقة الموجودة بين إحداثيات الشعاع في الأساس $\{ei\}$ و $\{ei'\}$ اصطلاحا نقول الأساس القديم و الأساس الجديد لهذا نعرف الأساس $\{ei'\}$ بالنسبة الأساس $\{ei\}$

إذن $j=\overline{1,n}$ $\quad e_j' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$

و منه فإن المصفوفة P لجملة الأشعة $\{e_i'\}$ تساوي

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .... & \alpha_{2n} \\ .... & ..... & .... & .... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & .... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

إن هذه المصفوفة تعرف كليا تغيير الأساس من $\{e_i\}$ إلى $\{e_i'\}$ و تسمى بمصفوفة العبور.

9.9 أثر تغيير الأساس بالنسبة لشعاع u

ليكن $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ و $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}$ كتابتي u في الأساسيين $\{e_i\}$ و $\{e_i'\}$

لدينا تعريفا

$$u = x_1e_1 + ... + x_ne_n = x_1'e_1' + ... + x_n'e_n'$$
$$= x_1'(\alpha_{11}e_1 + ... + \alpha_{n1}e_n) + x_2'(\alpha_{12}e_1 + ... + \alpha_{n2}e_n) + x_n'(\alpha_{1n}e_1 + ... + \alpha_{nn}e_n)$$

و منه

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + ... + \alpha_{1n}x_n' \\ x_2 = \alpha_{21}x_1' + \alpha_{12}x_2' + ... + \alpha_{2n}x_n' \\ .... \\ x_n = \alpha_{n1}x_1' + \alpha_{n2}x_2' + ... + \alpha_{nn}x_n' \end{cases}$$

و هذا الأخير يوضح أثر تغيير الأساس على شعاع

$$X = PX' \quad \Leftrightarrow \quad X' = P^{-1}X$$

9.10 أثر تغيير الأساس بالنسبة لتطبيق خطي

ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي و (ei) و (ei') أساسين لـ E و $(wj),(wj')$ أساسين لـ F و ليكن: $A = M(f, ei, wj)$ ، $B = M(f, e_i', w_j')$ نرمز بالرمز Q لمصفوفة العبور من (w_j) إلى (w_j') و بالرمز P لمصفوفة العبور من (ei) إلى (ei'). ليكن X من E لدينا $X = PX'$ حيث X' هو الشعاع في الأساس (ei')

ليكن Y من F لدينا $Y = QY'$ حيث Y' هو الشعاع في الأساس (w_j')

لدينا إذن $Y = QY', \quad X = PX', \quad Y = AX$

إذن $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = Q^{-1}APX' = BX'$

لقد برهنا النظرية التالية

نظرية

ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي و (ei) و (ei') أساسين لـ E و $(wj),(wj')$ أساسين لـ F و ليكن: $A = M(f, ei, wj)$ و $B = M(f, e_i', w_j')$. إن $B = Q^{-1}AP$ حيث Q هي مصفوفة المرور (w_j) إلى (w_j') و P مصفوفة العبور من (ei) إلى (ei').

مثال

ليكن لدينا التطبيق الخطي $f : IR^3 \to IR^2$ ذا المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

بالنسبة للأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ لـ IR^3 و $\{w_1, w_2\}$ لـ IR^2 نعتبر الأساس الجديد:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ e_3' = 2e_1 - e_2 + 3e_3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1' = 4w_1 - w_2 \\ w_2' = 3w_1 - 2w_2 \end{cases}$$

جد مصفوفة f في الأساس $\{ei'\}$ و $\{wj'\}$

حل

لدينا

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 25 \\ 14 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

تعاريف

1) تكون مصفوفتين A و B متكافئين إذا وفقط إذا كانتا من نفس الصنف، مربعتين ووجدت مصفوفتان Q و P بحيث $B = Q^{-1}AP$

2) و تكون مصفوفتان A و B متشابهتين إذا وجدت p قلوبة بحيث $B = p^{-1}AP$.

3) نقول على مصفوفة مربعة بأنها متناظرة إذا حققت $A = {}^tA$.

4) نقول على مصفوفة مربعة بأنها متناظرة إذا حققت $A = -{}^tA$.

9.11 منقول مصفوفة

نسمي مصفوفة منقولة أو منقول مصفوفة $A=(a_{ij})$ من الصنف pxq، المصفوفة $B=(b_{ij})$ من الصنف pxq و التي نحصل عليها بتبديل السطور أعمدة: $b_{ij} = a_{ij}$ أي $B = {}^tA = {}^t(a_{ij}) = \left(a_{ji}\right)$

9.12 اثر مصفوفة

لتكن لدينا A مصفوفة مربعة من الصنف n، نسمي أثر المصفوفة A مجموعة كل عناصرها الموجودة في القطر الأساسي، نكتب و نرمز: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

نظرية

لتكن لدينا A و B مصفوفتان لدينا.

1) ${}^t\left(AB\right) = {}^tB\,{}^tA$. في حالة إمكان إجراء الجداء.

2) $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ في حالة إمكان إجاء الجداء و وجود المقلوب.

10 المحددات

10.1 عموميات

تعودنا على دراسة الدوال لمتغير حقيقي، سندرس في الفصل الموالي دالة خاصة و هي دالة حقيقية لمتغير مصفوفي و تدعى دالة المحدد.

تعريف

كل ترتيب كيفي للمجموعة $\{1,...,..n\}$ يدعى تبديلية (دون حذف أو تكرار)

مثال

للمجموعة $\{1,2,3\}$ لدينا 6=!3 تبديلات و هي:

$\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\},\{3,2,1\}$ سنكتب $(j_1,j_2,...,j_n)$ لنرمز للتبديلة العامة للمجموعة *(1,...,n)* حيث j_1 يرمز للعدد الذي يأتي أولا، j_2 للذي يأتي ثانيا و هكذا...، نقول إن انعكاسا قد حدث كلما تقدم عدد أكبر عدد أصغر، يمكننا أن نحصل على العدد الكلي للانعكاسات كما يلي

نحسب عدد الأرقام الأصغر من j_1 و التي تأتي بعده ثم $j_{n-1},...,j_2$ و بعدها نجمعها فنحصل على العدد الكلي للانعكاسات في التبديلة.

مثال

جد عدد الانعكاسات في التبديلة التالية:*(2،5،4،3،1،6)*

عدد الانعكاسات هو: *5+0+1+1+1=8*

تعريف

نسمي تبديلة زوجية إذا كان مجموع الانعكاسات زوجي و إلا فهي فردية.

مثال

(2،1) عدد الانعكاسات يساوي 0 و منه فالتبديلة زوجية.

(2،1) عدد الانعكاسات يساوي 1 و منه فالتبديلة فردية.

10.2 المحدد (محدد مصفوفة)

نعتبر مصفوفة من الصنف n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

تعريف

نسمي حاصل ضرب أولي من A أي حاصل ضرب لعدد n من عناصر A.

بحيث لا يأتي أي اثنين من هذه العناصر من نفس الصنف أو نفس العمود.

مثال

جد حواصل الضرب الأولية للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

حل

حواصل الضرب الأولية هي $a_{11}a_{22},\ a_{21}a_{12}$

تعريف

نسمي حاصل ضرب أولي مميز منA أي حاصل ضرب $a_{1j_1}...a_{nj_n}$ مضروبا في *1* أو *-1* تبعا لشفعية التبديلة $(j_1,...,j_n)$

تعريف

لتكن A مصفوفة مربعة نسمي محدد A (نرمز بـ $detA$) حاصل جمع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من A.

مثال

$$\det A=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

بصفة عامة لدينا:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\varphi} (-1)^{I(\varphi)} a_{1j_1} \dots\dots a_{nj_n}$$

حيث φ: تبديلة و $I(\varphi)$ عدد انعكاسات التبديلة φ.

$(-1)^{I(\varphi)}$ يدعى تأشيرة التبديلة و يرمز له بالرمز $\sigma(\varphi) = (-1)^{I(\varphi)}$

في حالة مصفوفة من الصنف 2 أو 3 لدينا:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

طريقة SARRUS

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

و لا يمكن تعميم ما سلف

10.3 الأشكال المتعددة الخطية المتناوبة

تعريف

ليكن E ف.ش بعده n على الحقل IK.نسمي شكل n خطي على E كل تطبيق

$$f : ExEx....xE \longrightarrow IK$$
$$(v_1,......,v_n) \mapsto f(v_1,......,v_n)$$

حيث f خطي بالنسبة لكل مركبة من مركباته.

تعريف

نقول عن n شكل خطي بأنه متناوب إذا كان تبادل شعاعين من $(v_1,...,v_n)$ يغير إشارة $f(v_1,...,v_n)$ أي:

$$f(v_1,...,v_i,v_{i+1},...,v_j,v_n) = -f(v_1,...,v_j,v_{i+1},...,v_i,....,v_n)$$

ملاحظة

إذا كان $f(v_1,...,v_i,...,v_j,....,v_n) = 0 \Leftarrow v_i = v_j$

10.4 محدد أشعة بالنسبة لأساس معطي

ليكن $B = (e_1,e_2,...,e_n)$ أساس لـ E إذن لدينا

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \Rightarrow f(v_1,....,v_n) = \sum_{j_1=1}^{n} a_1 j_1 f(e_{j_1},v_2,...,v_n)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_n=1}^{n} a_1 j_1 a_2 j_2 ....a_n j_n f(ej_1,ej_2....,ej_n)$$

$$= \left[\sum_{\ell} \sigma(\varphi)(a_1 j_1 a_2 j_2 ...a_n j_n)\right] \quad f(e_1,e_2,...,e_n)$$

نلاحظ بأن قيمة f عند $(v_1,...,v_n)$ من E^n معرفة جيدا إذا عرفنا قيمة $f(e_1,...,e_n) = \lambda$

$\lambda = 0$ ليس له أهمية $(f = 0)$

$\lambda \neq 0 \Leftarrow \Delta = \frac{1}{\lambda} f(v_1,....,v_n)$ و هو يتعلق فقط بـ a_{ij}

أي $\Delta = \sum_{\ell} \sigma(\varphi) a_1 j_1 ......a_n j_n$

إن Δ هو محدد الأشعة $v_1,...,v_n$ بالنسبة للأساس $(e_1,...,e_n)$ عموما نختار

$$\lambda = f(e_1,...,e_n)$$

إذن $\Delta = f(v_1 ..., v_n)$

نقول كذلك إن Δ هو محدد المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

و نكتب

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

10.5 محدد تطبيق خطي

تعريف

نسمي محدد تطبيق خطي داخلي $F : E \to E$ محدد إحدى مصفوفاته.

10.6 خصائص المحددات

1) لتكن A مصفوفة مربعة من الصنف n لدينا: $\det A = \det {}^t A$
2) عمودان مساويان $\Leftarrow \det A = 0$
3) سطران مساويان $\Leftarrow \det A = 0$
4) عمود يكتب كمزيج خطي للبقية $\Leftarrow \det A = 0$
5) لا يتغير المحدد إذا أضفنا لعمود ما مزج خطي للبقية.
6) قيمة المحدد لا يتغير إذا أضفنا لـ (n -1) عمود مضاعفات للعمود رقم n.
7) $\det(\lambda a_{ij}) = \lambda^n \det(a_{ij})$
8) $\det(AB) = \det A . \det B$

10.7 حساب محدد حسب سطر

لتكن A مصفوفة مربعة من الصنف n لعناصر من الحقل IK، نسمي المحدد المتمم للعنصر a_{ij} محدد المصفوفة الجزئية من A التي تبقى بعد حذف الصف i و العمود j من A و نرمز له بالرمز M_{ij}، نسمي المتمم المميز للعنصر a_{ij} العنصر $(-1)^{i+j} M_{ij} = C_{ij}$

حساب المحدد حسب السطر i يساوي

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} + M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in}$$

مثال

حساب المحدد

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

المحدد المتمم للعنصر a_{11} هو M_{11} (mineur)

المتمم المميز لـ a_{11} هو $(-1)^{1+1} M_{11} = C_{11}$ (cofacteur)

تعريف

إذا كان A مصفوفة مربعة من الصنف n و كان c_{ij} المتمم المميز لـ a_{ij} فإن المصفوفة

$$Comatrice(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

تدعى بمصفوفة المتممات لـ A.

منقول المصفوفة المتممة لـ A يدعى بالمصفوفة المرتبطة بـ A و يرمز له بالرمز

$$Adj(A) = \left(com(A)\right)^t = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Comt(A) = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

نظرية

إذا كانت A قابلة للقلب فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

11 القيم و الأشعة الذاتية

تعريف

ليكن لدينا f تطبيق خطي باطني للفضاء الشعاعي E على الحقل IK نقول عن السلمي λ بأنه قيمة ذاتية لـ f إذا وفقط إذا وجد شعاع u غير معدوم بحيث $f(u) = \lambda u$

$f(u)$ و u متوازيان.نقول أيضا عن u أنه شعاع ذاتي لـ f مرفق للقيمة λ

نلاحظ أن مجموع كل الأشعة الذاتية المرفقة للقيمة الذاتية λ هي نواة التطبيق $(f - \lambda I)$ هو إذن فضاء شعاعي جزئي من E، يدعى بالفضاء الشعاعي الذاتي و نرمز له بالرمز $E_\lambda = Ker(f - \lambda I)$

11.1 البحث عن القيم الذاتية في حالة بعد منته

إذا كان بعد E يساوي n، نحتار أساس $(e_1,...,e_n)$ لـ E.عندئذ يكون f ممثلا بمصفوفة A و القيم الذاتية هي السلاميات λ بحيث

$$Ker(f - \lambda I) \neq \{0\} \Rightarrow \det(f - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = 0$$

بصفة عامة إذا كان $A = (a_{ij})$ فإن محددها المستقل عن كل أساس يكتب من الشكل

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

يدعى $\varphi(\lambda)$ بكثير الحدود المميز للتطبيق f.

$\varphi(\lambda)=0$ تدعى بالمعادلة المميزة.

مثال

أعط القيم و الأشعة الذاتية للتطبيق f المعرف بالمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

لدينا $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10$

و منه $\varphi(\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$

من أجل: $\lambda_1 = 5$.

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = x(1,1)$$

إذن $E_{\lambda 1} = \{x(1,1), x \in IR\}$

من أجل $\lambda_2 = -2$ $E_2 = \{y(3,-4), y \in IR\}$

12 تبسيط المصفوفات (تقطير، تثليث)

12.1 عموميات

مثال

نستعيد المثال السابق

لدينا قيمتين ذاتيين $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -2$ بحيث

$f(u_2) = -2u_2$ و $f(u_1) = 5u_1$ مع $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (3,-4)$

إن المصفوفة المرفقة لـ f في الأساس (u_1, u_2) هي

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

نقول بأن الأساس الذاتي يمكننا من تقطير f أو A و لدينا كذلك $P^{-1}AP = D$ مع

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

بصفة عامة لدينا النتيجة التالية

نظرية

1) إذا كان لدينا تطبيق خطي f (أو مصفوفة A) على فضاء شعاعي بعده n.و كانت لدينا n قيمة ذاتية مختلفة أي أن كثير الحدود المميز كل جذوره من المرتبة 1 فإنه يوجد أساس مكون من الأشعة الذاتية المرفقة للقيم الذاتية بحيث f أخذ شكل قطري في الأساس المكون من الأشعة الذاتية:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & . \\ . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2) ليكن لدينا تطبيق باطني f على فضاء شعاعي بعده n.(A مصفوفة f).

لكي يكون f قابلا للتقطير يلزم و يكفي أن يكون كل فضاء شعاعي ذاتي مرفق لقيمة ذاتية لـ f ببعد يساوي درجة تضاعف الجذر.

3) في الحالة (2) إذا لم يكن لدينا بعد فضاء شعاعي جزئي مساو لدرجة تضاعف الجذر فإننا نكون في حالة تثليث المصفوفة أي أنه يوجد أساس بحيث المصفوفة A تكتب على الشكل

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 \ldots\ldots\ldots & \alpha_n \\ 0 & a_{22} \ldots\ldots\ldots & \\ & & a_{2n} \\ . & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال

هل المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

قابلة للتقطير؟ للتثليث؟

حل

لدينا

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

لدينا

$\lambda_1 = 3$ جذر بسيط

$\lambda_2 = -1$ جذر مضاعف من الدرجة *2*

نبحث عن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق لـ $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3_I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 10y + 8z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = y = z$$

و منه فـ $u_1 = (x, 2x, 2x) = x(1, 2, 2); x \in IR$

نبحث عن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرفق لـ $\lambda_2 = -1$

(يكون ذو بعد 1 أو 2).

1) إذا كان البعد يساوي 2 عندنا تقطير.

2) إذا كان البعد يساوي 1 عندنا تثليث.

$$(A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 6y + 8z = 0 \\ 6x + 7y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = x \ , \quad y = 2x$$

$$\Leftrightarrow u_2 = (x, y, z) = (x, 2x, x) = x(1,2,1)$$

إذن بعده يساوي 1،و منه فلدينا تثليث.

نعتبر الأساس (u_1, u_2, u_3) حيث u_3 شعاع كيفي من $E = IR^3$ مستقل عن u_1 و u_2. تكون المصفوفة المتشابهة مع A

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

حتى نجد مصفوفة العبور P و a و b نختار u_3 شعاع كأبسط ما يكون نأخذ مثلا

$$(u_1, u_2, u_3 = e_1)$$

لأنه من IR^3 و المجموعة تشكل أساس

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

إذن مصفوفة العبور هي

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد a و b كما يلي

بحل هذه الجملة نجد:$a=4$ و $b=-2$

كان ممكن أن نحل فقط $PT = AP$ لأنها تجنبنا حساب P^{-1}.

12.2 مصفوفة جوردان " Réduction de Jordan "

نعود إلى المثال السابق إن الشعاعين u_1 و u_2 مفروضين علينا و هما يشكلان أساس غير تام، هل يمكننا اختيار الشعاع u_3 بحيث تكون المصفوفة T من الشكل

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أي أنه إذا فرضنا أن

$$u_3 = (\alpha , P , \gamma)$$

فإن

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0u_1 + u_2 - u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

أي أن

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \gamma = 0, \alpha = -1, \beta = -1$$

ومنه

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و يكون الشكل المختصر لـ A

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

13 الجمل الخطية

13.1 عموميات

نسمي جملة ذات n معادلة بـ p مجهول على الحقل IR (عموما IR أو C) جملة من الشكل

$$(s)\begin{cases} a_{11}x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1P}x_P = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

أو على الشكل المصفوفي

أي $AX=B$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1p} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots\ldots\ldots a_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

13.2 جملة كرامر

كل جملة ذات n معادلة بـ n مجهول تسمى جملة كرامر حيث المصفوفة A تكون قابلة للقلب $(Det \quad A \neq 0)$ و هي محدد الجملة (S)

عندئذ فإن (S) تقبل حلا وحيدا

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}.^{t}(comA)$$

أو بالتفصيل

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad ,i = \overline{1,n}$$

حيث $D = Det(A) \neq 0$

و $D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

D_i يعبر عن محدد الجملة (S) بحيث نعوض العمود رقم i بالعمود B.

13.3 رتبة جملة خطية

نسمي محدد من الرتبة r مستخرج من مصفوف A من الصنف (n, p) محدد أي مصفوف مربعة من الصنف r مستخرجة من A بحذف $n-r$ سطر و $p-r$ عمود.

نسمي رتبة مصفوفة A، أكبر رتبة لمحدد غير معدوم مستخرج من A.

تعريف

نسمي رتبة جملة خطية رتبة المصفوفة المرفقة لهذه الجملة.

نتيجة

يمكننا البرهان بأن رتبة مصفوفة $A \quad ; \quad (A \in M(n,p))$ هي رتبة الجملة الخطية و هي نفسها رتبة جملة أشعة الأعمدة لـ A.

13.4 الجملة الخطية المتجانسة

نقول عن جملة خطية أنها متجانسة إذا كان الشعاع B معدوم.

الجملة المتجانسة لها حل وحيد إذا كانت رتبة (S) هي p

$x_1=x_2=\ldots\ldots\ldots=x_p=0$

إذا كانت (S) ذات رتبة أصغر من P فلدينا مالا نهاية من الحلول.

13.4.1 النظرية العامة (fonténé –rouché)

لتكن لدينا الجملة ذات الرتبة r و نكتبها بحيث يكون محدد معاملات r مجهول الأولى غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+......+a_{1v}x_v+......+a_{1p}x_p=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+........+a_{2v}x_v+......+a_{2p}x_p=b_2 \\ .... \\ a_{v1}x_1+a_{v2}x_2+.........+a_{vv}x_v+........+a_{vp}x_p=b_v \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+.........+a_{nv}x_v+........+a_{np}x_p=b_n. \end{cases}$$

تعريف

نسمي محدد مميز للجملة (S) الـ *$(n-r)$* محدد التالي

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11}... & a_{1r} & ... & b_1 \\ .... & & & \\ a_{r1}... & a_{rr}... & & b_r \\ a_{k1}... & a_{kv}... & & b_k \end{vmatrix} k=r+1,....,n$$

نظرية (Fontené-Rouché)

ليكن *(S)* جملة خطية لـ n معادلة بـ p مجهول و ذات رتبة تساوي r.

1) إذا كان $r=n$، فإن الجملة *(S)* تقبل حل وحيد (كرامر) بـ $p-r$ وسيط.

2) إذا كان $r \prec n$، و وجد على الأقل محدد مميز غير معدوم فإن الجملة غير قابلة للحل.

3) إذا كان $r \succ n$ و كان الـ $n-r$ محدد مميز لـ (S) كلها معدومة فإن (S) تحول إلى جملة لـ r معادلة و تحل كما في (1)

مثال

حل الجملة التالية

$$(S)\begin{cases} x+y+2z=-2........(1) \\ x+2y+3z=a.......(2) \\ 3x+5y+8z=2.......(3) \\ 5x+9y+14z=b......(4) \end{cases}$$

b, a وسيطين.

رتبة هذه الجملة تساوي 2، نعتبر كمتغيرات رئيسية x, y و نعتبر z وسيط

لدينا محددين مميزين هو:

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 9 & b \end{vmatrix}=-4a+b+2 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=-2a+4$$

حتى يكون (S) قابل للحل $\Leftrightarrow D_1=D_2=0 \Leftrightarrow (a=2, b=6)$

ومنه

$$\begin{cases} x=-z-6 \\ y=-z+4 \end{cases} \qquad z\in IR \Leftrightarrow (S)\begin{cases} x+y=-2z-2 \\ x+2y=-3z+2 \end{cases}$$

14 الجمل الخطية التفاضلية

14.1 عموميات و طرائق

إن الجملة

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{at} = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{cases}$$

تدعى بجملة لـ n معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة ذات n مجهول $X_n(t),....,X_1(t)$ غير متجانسة، و يمكن كتابته.

$$\frac{dX}{dt} = X' = AX + \phi$$

إذا قمنا بتقطير المصفوفة A أو تثليثها فيكون لدينا $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$

و بتعويضها نحصل على $X' = PBP^{-1}X + \phi$

نضع $Y = P^{-1}X$ فنحصل على

$$(P^{-1}X)' = B(P^{-1}X) + P^{-1}\phi$$

$$\Leftrightarrow Y' = BY + \psi ....(*)$$

حيث B مثلثية أو قطرية

و يكون حل (*) بسيط ثم حل $P^{-1}X = Y$

مثال

لتكن لدينا الجملة الأتية

$$\begin{cases} x' = 1x - 3y + 1z. \\ y' = 4x - 7y + 8z. \\ z' = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$$

بعد الحسابات لدينا بطريقة جوردان

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال

حل الجملة التالية

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ....1 \\ ....2 \\ ....3 \end{matrix}$$

حيث

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$1.et.3 \Rightarrow x_1 = \alpha e^{3t} z_1 = \gamma \overset{-t}{e}. \quad / \quad \alpha, \gamma. \in IR$$

المعادلة المتبقية تكتب

$$\frac{dy_1}{dt} + y_1 = \gamma e^{-t}$$

$\beta \overset{-t}{e}$ هو الحل العام بدون طرف ثاني.

و بطريقة تغيير الثابت مثلا نجد الحل العام $y_1 = (\beta + \gamma t)\overset{-t}{e}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} \\ (\beta+\gamma t)\overset{-t}{e} \\ \gamma \overset{-t}{e} \end{pmatrix}, \qquad \alpha,\beta,\gamma \in IR$$

ملاحظة

يمكن تطبيق ما سبق لمعادلة خطية من الدرجة n .

14.2 الأشكال الثنائية الخطية

تعريف

شكل ثنائي الخطية لفضاء شعاعي E على الحقل IK هو تطبيق خطي φمن ExE على IK بحيث

$$\varphi : ExE \to IK$$
$$(u,v) \mapsto y(u,v)$$

يحقق

1) $\forall u_1,u_2,v \in E : \varphi(u_1+u_2,v) = \varphi(u_1,v)+\varphi(u_2,v)$

2) $\forall u,v_1,v_2 \in E : \varphi(u,v_1+v_2) = \varphi(u,v_1)+\varphi(u,v_2)$

3) $.\forall \in K, \forall u,u \in E : \varphi(\lambda u,v) = \varphi(u,\lambda v) = \lambda\varphi(u,v)$

إذا كان E بعده n حيث أساسه معطى بـ $\beta = \{e_1,........,e_n\}$

إذا كان u و v ممثلان في الأساس B بـ

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

فإن ثنائية الخطية

$$\varphi(u,v) = \varphi(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i,e_j)$$

φ معرف جيدا إذا عرفنا $\varphi(e_i,e_j) = a_{ij}$

أي المصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} & . & \\ & . & \\ ...... & aij & ...... \\ & . & \\ & . & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(u,v) = {}^t XAY$$

حيث A هي مصفوفة φ في $B.$

يمكن أن نبرهن أن

$$\varphi(u,v) = \left({}^tY\right)\left({}^tA\right)X$$

مثال

من أجل

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

نحصل على

$$\varphi(u,v) = (x_1 x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

لتكن P مصفوفة تغيير الأساس لـ E.

X' , Y' و A' هي مصفوفات φ في الأساس الجديد β'

$$X = PX' \quad , \qquad Y = PY'$$

$$\varphi(u,v) = \left({}^tX\right)AY = \left({}^tX'\right)\left({}^tP\right)APY'$$

$$= \left({}^tX'\right)A'Y'$$

$$\Rightarrow A' = {}^tPAP$$

14.2.1 الأشكال ثنوية الخطية المتناظرة- الشكل التربيعي المرفق

تعريف

نقول عن φ شكل ثنوي الخطية أنه متناظر إذا $\forall u,v \in E : \varphi(u,v) = \varphi(v,u).$

نسمي شكل تربيعي مرفق لـ φ التطبيق: $.\upsilon \to Q(u) = \varphi(u,u)$

شكل مصفوفي لشكل تربيعي هو $Q(u) = {}^tXAX$ حيث A مصفوفة متناظرة.

تعريف

لتكن A مصفوفة مربعة من الصنف n.

نسمي A مصفوفة متناظرة إذا تحقق ${}^tA=A$

نسمي A شبه متناظرة إذا تحقق ${}^tA=-A$

14.2.2 التعامد

لتكن φ شكل ثنوي الخطية تربيعي. نقول عن شعاعين u و v أنهما متعامدان (مترافقان) بالنسبة لـ $\varphi(u,v)$ إذا $\varphi(u,v) = 0$ ونرمز بـ $.u \perp v$

ليكن F ف.ش.ج من E،نسمي عمودي F و نرمز بالرمز $F^{\perp}$ للمجموعة المعرفة

$$F^{\perp} = \left\{ v \in E, \varphi(u,v) = 0, \qquad \forall u \in F \right\}$$

ملاحظة نواة تطبيق تربيعي ما هي سوى $F^{\perp}$.

لدينا $(F^{\perp})^{\perp} = F$ و $\dim(F^{\perp}) + \dim F = \dim E$

بصفة عامة $F^{\perp}$ و F ليست متكاملة.

تمرين

لتكن لدينا المجموعة التالية $E=\{e,i,j,k\}$ ، نعرف على المجموعة E العملية الداخلية T كما يلي:

T	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	j	k	e
j	j	k	e	i
k	k	e	i	j

حاصل تركيب عنصرين نحصل عليه عند تقاطع السطر و العمود.

1) برهن بأن T تعرف بنية زمرة تبديلية.

2) جد زمرة جزئية من E

حل

T 1) عملية تبديلية لأن الجدول متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي

2) T تجميعية.

لكون T تبديلية فسنقتصر عل التحقق من أن.

$(ij)k=i(jk)=(ki)j=j$ ، $(ii)j=i(ij)=e,(ii)k=i(ik)=i$ ، $(jj)i=j(ji)=i,(kk)i=k(ki)=k$

$(kk)j=k(kj)=e$

3) العنصر الحيادي هو e لأن $ie=ei=e,ee=e,je=ej=j,ke=ek=k$

4) العنصر النظير

العنص النظير لــــ e هو e

العنص النظير لــــ j هو j

العنص النظير لــــ i هو k

العنص النظير لــــ k هو i

الزمر الجزئية من E.

(E,T) زمرة جزئية , $(\{e\},T)$ زمرة جزئية , $(\{e,j\},T)$ زمرة جزئية.

تمرين

ليكن لدينا زمرة تبديلية $(G,.)$، و لتكن G_1 و G_2 زمرتين جزئيتين من G. برهن على التكافؤ التالي $G_1\bigcup G_2$ زمرة جزئيـة من G $\Leftrightarrow$ $G_1\subset G_2$ أو $G\supset G_2$

حل

برهان أن $G_1\bigcup G_2$ زمرة جزئية من G $\Leftrightarrow$ $G_1\subset G_2$ أو $G\supset G_2$

1) $G_1\bigcup G_2$ زمرة جزئية من G $\Rightarrow$ $G_1\subset G_2$ أو $G_1\supset G_2$

دون التقليل من عمومية البرهان يمكن أن نفرض أن $G_1\subset G_2$ و هذا يستلزم أن $G_1\bigcup G_2=G_2$ و هي زمرة فرضا

2) $G_1\bigcup G_2$ زمرة جزئية من G $\Leftarrow$ $G_1\subset G_2$ أو $G_1\supset G_2$

بالخلف نفرض أن $G_1\bigcup G_2$ زمرة و مع هذا $G_1\not\subset G_2$ و $G_2\not\subset G_1$

ليكن $x\in G_1-G_2\ et\ y\in G_2-G_1$

هذا يستلزم أن $x.y\in G_1\cup G_2\Leftarrow x.y\in G_1\ ou\ x.y\in G_2$

نفرض أن $x.y\in G_1$ فهذا يستلزم أن x ينتمي إلى G_1 و y ينتمي إلى G_1 لأن G_1 زمرة جزئية و هو ما يشكل تناقض

نفس البرهان إذا كان $x.y\in G_2$

تمرين

نعتبر المجموعة الجزئية $G=Q-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ من مجموعة الأعداد الناطقة و نزودها بالقانون * المعرف كما يلي.

$$\forall a,b\in G: a*b=a+b+2ab$$

1) أثبت أن هذا القانون داخلي.

2) برهن أن $(G,*)$ زمرة تبديلية

حل

1) نفرض أن القانون غير داخلي
إن جمع و جداء عددين ناطقين هو عدد ناطق. بقي أن نبرهن أن

$$\forall a,b \in G : a * b = a + b + 2ab \neq -\frac{1}{2}$$

بالخلف نفرض أن

$$\forall a,b \in G : a * b = a + b + 2ab = -\frac{1}{2}$$

إذن

$$a + b + 2ab = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a(1+2b) = -\frac{1}{2} - b$$
$$\Leftrightarrow a(1+2b) = -\frac{(1+2b)}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تناقض. و لكون a,b متناظران فهذا ينهي البرهان.

2) نبرهن أن $(G,*)$

العملية $*$ تبديلية لأن

$$\forall a,b \in G : a * b = a + b + 2ab = b + a + 2ba = b * a$$

العملية $*$تجميعية لأن

$$\begin{aligned}\forall a,b,c \in G : (a*b)*c &= (a+b+2ab)*c \\ &= a+b+2ab+c+2(a+b+2ab)c \\ &= a+b+c+2ab+2ac+2bc+2abc\end{aligned}$$

من جهة.
و من جهة أخرى لدينا

$$\begin{aligned}\forall a,b,c \in G : a*(b*c) &= a*(b+c+2bc) \\ &= a+b+c+2bc+2a(b+c+2bc) \\ &= a+b+c+2bc+2ac+2ab+2abc\end{aligned}$$

و هو ما ينهي الإجابة.
العملية $*$ تقبل عنصر حيادي

$$\exists! e \in G, \forall a \in G : a * e = e$$

لدينا

$$a*e = a+e+2ae = a \Rightarrow e(1+2a) = 0 \Rightarrow e = 0 (a \neq -1/2)$$

لكل عنصر نظير بالعملية $*$.

$$\forall a, \exists b \in G : a*b = a+b+2ab = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{1+2a}$$

تمرين
ليكن التطبيق

$$\begin{aligned} f : IZ &\longrightarrow IN \\ x &\mapsto 2|x|+1 \end{aligned}$$

1) هل التطبيق متباين، غامر.علل.
2) أحسب $f\{-1,2\}$ و $f^{-1}\{3,4,8\}$.

حل
1) هو ليس متباين لأن $f(-1) = f(1)$ و ليس غامر لأنه لاتوجد سابقة للصورة صفر.(بصفة عامة لا توجد سوابق لكل الأعداد الزوجية)
2) $f(\{-1,2\}) = \{3,5\}, f^{-1}(\{3,4,8\}) = \{1,-1\}$.

تمرين

لتكن لدينا العلاقة الثنائية R_1 المعرفة على فضاء التطبيقات الخطية كمايلي:

$$f \quad R_1 \quad g \Leftrightarrow \ker f = \ker g$$

1) برهن أن R_1 علاقة تكافؤ

لتكن لدينا العلاقة الثنائية R_2 المعرفة على فضاء التطبيقات الخطية كمايلي:

$$f \quad R_2 \quad g \Leftrightarrow \ker f \subset \ker g$$

هل R_2 *علاقة ترتيب ؟*

تمرين

نعتبر تطبيقين $f : E \longrightarrow F; g : F \longrightarrow G$

برهن ما يلي:

$g0f$ تباين يستلزم أن f تباين

$g0f$ غامر يستلزم أن g غامر

تمرين

نعرف علاقة ثنائية على QxQ كمايلي $(a,b)\Re(a_1,b_1) \Leftrightarrow ab_1 = a_1b$

1) برهن أن $\Re$ علاقة تكافؤ.

2) جد أصناف التكافؤ.

تمرين

لتكن *(A, .)* زمرة برهن على التكافؤ التالي

(A, .) زمرة تبديلية $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (x.y)^2 = x^2.y^2$

تمرين

عين من بين قوانين التركيب التالية على حقل الأعداد الحقيقية ما هو منها تبديلي أو تجميعي.

$$x\mathrm{T}y = 0,\ 2)x\mathrm{T}y = \frac{1}{2}(x+y),\ 3)x\mathrm{T}y = y, 4)x\mathrm{T}y = x+y-1$$

تمرين

برهن على أن

$$(x,y)+(t,z) = (x+t, y+z+2yz)$$

يشكل قانون تركيب تبديلي و تجميعي على $IR^2 = IR \times IR$ و أنه يقبل عنصر حيادي

تمرين

لتكن المجموعة $A = \{1,2,3,4,6\}$ مزودة بقانون التركيب التالي xTy القاسم المشترك الأعظم لـ x و y . برهن على أن هذا القانون تبديلي و تجميعي على A.

هل يوجد عنصر حيادي بالنسبة لهذا القانون في A.

تمرين

ليكن T قانونا تجميعيا على A و كانت $x_1,...,x_n$ متتالية منتهية من عناصر A .

برهن على أنه إذا كان لكل عنصر x_i نظير x_i' فان

$$\left(x_1\mathrm{T}x_2\mathrm{T}..........\mathrm{T}x_n\right)' = x_n'\mathrm{T}.............\mathrm{T}x_1'$$

برهن على أنه إذا كان x نظير x' فان $\left(\overset{n}{\mathrm{T}}x\right)' = \overset{n}{\mathrm{T}}x'$

تمرين

هل المجموعات التالية زمر بالنسبة لقانون التركيب الموافق لها؟

$$A = Z; xTy = \inf(x,y), A = IR; xTy = x+y-xy, A = Z; xTy = \sup(x,y)$$

$$A = Z \times Z; (x,y)T(t,z) = (x+t, y+z)$$

تمرين

برهن على أن IR زمرة تبديلية بالنسبة لقانون التركيب المعرف كما يلي

$$xTy = \sqrt[3]{x^3+y^3}$$

تمرين

برهن على أن المجموعة $A=\{-1,1,i,-i\}$ مزودة بعملية الجداء المعرف على حقل الأعداد المركبة تشكل زمرة جزئية من زمرة يطلب تعيينها

تمرين

برهن على أن $(Z,*,\circ)$ حلقة تبديلية حيث

$$x*y=x+y-1,\ x\circ y=x+y-xy$$

تمرين

برهن أن IR مزود بعملية الجمع و الجداء العاديتين يشكل حقل تبديلي .

تمرين

لتكن لدينا المجموعة $E=\{(a,b);a\in IR^*,b\in IR\}$

نعرف على E قانون تركيب داخلي جدائي معرف كمايلي

$$(a,b).(c,d)=(ca,cb+d)$$

1 جد العنصر الحيادي
2 جد العنصر النظير
3 برهن بأن E مزود بالقانون السابق يشكل زمرة
4 هل الزمرة تبديلية؟
5 ليكن $F=\{(a,b)\ \ ;a=1,b\in IR\}$ هل F زمرة جزئية من E

تمرين

ليكن لدينا التطبيق التالي :

$$\Phi:C^0[a,b]\longrightarrow IR$$
$$f\mapsto\int_a^b f(x)dx$$

حيث $C^0[a,b]$ يمثل مجموع التطبيقات المستمرة على المجال [[a,b]].

-1 برهن أن Φ تشاكل غامر.
-2 جد نواته.هل هو متباين.

تمرين

برهن صحة القضية التالية

$$P(n):\forall n\in IN;1+3+3^2+...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

تمرين

نعرف على مجموعة أزواج الأعداد الصحيحة A القانونين "+"و"x " كما يلي

$$\forall(a,b),(c;d)\in A:(a,b)+(c;d)=(a+c,b+d)$$
$$\forall(a,b),(c;d)\in A:(a,b)x(c;d)=(ac+bd,ad+bc)$$

1 برهن أن (A,+,x) حلقة واحدية تبديلية.
2 جد عناصر A التي تقبل مقلوب بالنسبة للقانون x.
3 في أي حالة لدينا

$$(a,b)x(u,v)=(a,b)x(w,z)\Rightarrow(u,v)=(w,z)$$

تمرين

أثبت أن

$(IR,+,x)$ حلقة تبديلية.
$(Z,+,x)$ حلقة تبديلية و تامة.
$(IN,+,x)$ ليست حلقة.
$(Z_n,+,x)$ حلقة تبديلية (زمرة النسبة).
$(Z_7,+,x)$ حلقة تامة.
$(Z_n,+,x)$ حلقة تامة إذا كان n أوليا.

تمرين

ليكن

$$f : IR^2 \to IR$$
$$(a,b) \mapsto a+b$$

1) هل هو تشاكل؟
2) عين نواته.
3) عين صورة التطبيق ثم بين أنه غامر.

تمرين

لتكن IR مجموعة الأعداد الحقيقة. نزود المجموعة IR بالقانونين الداخليين T و * المعرفين كما يلي:

$$\forall (a,b) \in IR^2 : aTb = a+b-1$$
$$a*b = a+b-ab$$

1) برهن أن $(IR,T,*)$ حقل.
2) أحسب من أجل كل a من IR العدد $a*1$
3) أدرس المعادلات في المجهول x التالية $A(x)*B(x)=1$ حيث $A(x)$ و $B(x)$ عبارات كيفية متعلقة بـ x.
4) حل المعادلتين التاليتين $(xTa)*(xTb) \; =1, (xTx)*(aTa) \; =1$

حيث a و b وسيطين.

تمرين

1) لتكن $M = \left\{ A=[a_1, a_2]; a_1, a_2 \in R \right\}$

نعرف M بالعلاقة $\forall A, B \in M : ARB \Leftrightarrow A \subset B$

هل R علاقة ترتيب جزئي أم كلي؟

2) من أجل أي عنصر $a \in IR$ نعرف التطبيق: $f_a : IR \to IR$ بالشكل $f_a(x) = ax+d$ حيث d عنصر معين من IR.

أثبت انه اذا كان $a \neq 0$ فإن التطبيق f_a تقابلي عين التطبيق العكسي له

تمرين

أعط تعريف مجموعة منتهية.

برهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية.

تمرين

نعرف التطبيق

$$f :]-1, \quad 1[\longrightarrow IR$$
$$x \mapsto tg(\frac{\pi}{2}x)$$

1) برهن أن f تقابل.
2) إستنتج أن IR و $]-1 \quad 1[$ متساويا القدرة.

تمرين

أجري العملية $\overline{1012020011}_{(3)} + \overline{101234}_{(8)}$

تمرين 4

1) برهن ما يلي $\forall a,b \in IR, \forall n \in IN^* \Rightarrow \left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.
2) إستنتج قيمة $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.
3) إستنتج أن $\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n$ عدد صحيح.

إرشاد لدينا $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

تمرين

برهن أنه إذا كانت R علاقة تكافؤ في مجموعة E فإن E/R تمثل تجزئة للمجموعة E

تمـرين

نعرف المجموعة E كالآتي $E=\{0,1,2\}$

عين $P(E)$

R علاقة من E نحـو $P(E)$ معرفـة كمايلي $R(x,y) \Leftrightarrow x \in y$

-1 عين بيان R

-2 هـل R تطبيـق

تمـرين

نعرف التطبيق f بما يلي

$$f: IR-\{5\} \longrightarrow IR-\{2\}$$
$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-5}$$

1) أثبت أن f تقابلي

2) عين الصورة المباشرة للمجموعات التالية

$B=\{x \in IN, 1 \le x \le 5\}$ A={-2,-1,0}

3) عين التطبيق العكسي

4) عين الصورة العكسية للمجموعة C={0,3,4,5,7} هل الصورة العكسية للمجموعة C تساوي الى الصورة المباشرة لـهـا بـالتطبيق f^{-1} و لماذا؟

تمـرين

R علاقة معرفة في IZ كالتالي $R(x,y) \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$

1) بين أن R علاقة تكـافـؤ

2) عـيـن صـنـف تكـافـؤ العـنـصـر 1

3) كـم عنصرا يوجد في صـنـف تكـافـؤ العـدد x ؟

تمرين

لتكن لدينا الحلقة A بحيث $\forall x \in A, x^2 = x$.

1) برهن أن $x+x=0$

2) برهن أن الحلقة A تبديلية.

3) نعرف العلاقة $\le$ كما يلي $x \le y \Leftrightarrow x = xy$

برهن أن العلاقة $\le$ هي علاقة ترتيب.

تمرين

ليكن f تطبيقا متقابلا من IR نحوى IR

لنعرف العمليتين التاليتين على IR:

$$*: \forall x, y \in IR \Rightarrow x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$*: \forall x, y \in IR \Rightarrow x \perp y = f(x).y$$

1) جد f بحيث يكون $(IR, *, \perp)$ فضاءا شعاعيا على الحقل IR

حل

1) $(IR, *)$ زمرة تبديلية

2)

2.1) $\forall\ a \in IR\ , \forall x, y \in IR:\ a \perp (x * y) = (a \perp x) * (a \perp y)$

2.2) $\forall\ a \in IR\ , \forall x, y \in IR:\ (a * b) \perp x = (a * x) \perp (b * x)$

$$\Leftrightarrow\ f(a+b) = \sqrt[3]{f(a)^3 + f(b)^3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

2.3) $\forall a, b \in IR, \forall x \in IR:\ a \perp (b \perp x) = (a.b) \perp x$

$$\Leftrightarrow\ f(a)\, f(b) = f(a\, b)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

2.4) $\forall\ x \in IR,\ 1 \perp x = x \Leftrightarrow 1 \perp x = f(1)x = x$

$$\Leftrightarrow f(1) = 1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

يجب أن تتحقق الشروط (1)،(2) و (3) في التطبيق f حتى يكون $(IR, *, \perp)$ فضاءا شعاعيا على الحقل IR.

تمرين

برهن أن العائلة $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ حرة في الفضاء الشعاعي IR على حقل الأعداد الناطقة Q.

حل

هل الاستلزام التالي صحيح ؟

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Q / \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

لدينا

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Q / \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = -\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3}\right)^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 2\beta\gamma\sqrt{6} = \alpha^2 - 2\beta^2 - 3\gamma^2$$

إذا كان $\gamma \neq 0$ و $\beta \neq 0$

فإن $\sqrt{6} = \dfrac{\alpha^2 - 2\beta^2 - 3\gamma^2}{2\beta\gamma}$ عدد ناطقا.

تناقض مع الفرضية إذن حتما $\beta = 0 \vee \gamma = 0$

1) إذا $\gamma = 0$ فإن $\sqrt{2} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ يصبح عددا ناطقا، تناقض إذن $\beta = 0$ و منه $\alpha = 0$.

2) إذا $\beta = 0$ نفس الطريقة.

أي أن العائلة $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ حرة في الفضاء الشعاعي IR على حقل الأعداد الناطقة Q.

تمرين

بين أي المجموعات التالية تملك بنية فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية مع التعليل.

$$A_2 = \left\{f \in C^0(IR, IR) / f(0) = 0\right\},\ A_1 = \left\{f \in C^1(IR, IR) / f' + 2f = 0\right\}$$

$$A_4 = \left\{p \in IR[X] / d^0 p \geq 3\right\}\quad A_3 = \left\{f \in C^0([a,b], IR) / \int_a^b f(x)dx = 0\right\}$$

$$A_5 = \left\{p \in IR[X] / \ni q \in IR[X] : \frac{p}{p'} = q\right\}$$

حل

لدينا

$$A_1 \subset C^1(IR, IR)$$
$$A_2 \subset C^0(IR, IR)$$
$$A_3 \subset C^0(IR, IR)$$
$$A_5, A_4 \subset IR[X]$$

نعلم أن $C^1(IR,IR)$ ، $C^0(IR,IR)$ و $IR[X]$ فضاءات شعاعية على الحقل IR، يكفي إذن إثبات أن A_i فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي المحتوى فيه.

1) A_1 فضاء شعاعي جزئي

لدينا $\forall f \in A_1, \forall g \in A_1, \forall \alpha IR \Rightarrow \alpha f + g \in A_1$

لأن و $(\alpha f + g)' + 2(\alpha f + g) = (\alpha f' + f) + (\alpha g' + g) = 0 + 0 = 0$

2) A_2 فضاء شعاعي جزئي لدينا $\forall f \in A_2, \forall g \in A_2, \forall \alpha IR \Rightarrow \alpha f + g \in A_2$

لأن $\alpha f + g \in C^0$ و $(\alpha f + g) = (\alpha f' + f)(0) = \alpha f(0) + f(0) = 0 + 0 = 0$

3) A_3 فضاء شعاعي جزئي : لدينا $\forall f \in A_3, \forall g \in A_3, \forall \alpha IR \Rightarrow \alpha f + g \in A_3$

لأن $\alpha f + g \in C^0([a,b], IR)$ و $\int_a^b (\alpha f + g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = 0$

4) A_4 ليس فضاء شعاعي لأن

$\exists f(x) = -x^3, g(x) = x^3 \in A_4$ ،لكن $f(x) + g(x) = 0 \notin A_4$

5) A_5 ليس فضاء شعاعي لأن

$\exists f(x) = x, g(x) = x^2 \in A_5$ ، لكن $f(x) + g(x) = x + x^2 \notin A_5$

تمرين

ليكن لدينا

$E_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 / x = y = z\}$ $E_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 / x = y + z\}$ و $E_3 = \{(x,y,z) \in IR^3 / x + y + z = 0\}$

1) برهن أن E_1 ، E_2 و E_3 تشكل فضاءات شعاعية على الحقل IR.

2) جد أساسا لكل منها و استنتج بعد كل منها.

3) هل E_1 و E_2 متكاملان؟

4) أدرس $E_1 \cap E_3$.

حل

I) لدينا $E_1, E_2, E_3 \in IR^3$ و نعلم أن IR^3 فضاء شعاعي على الحقل IR و بالتالي فيكفي فقط أن نثبت أن E_1, E_2, E_3 فضاءات شعاعية جزئية من IR^3

1) لدينا $\forall X, Y \in E_1, \forall \alpha \in IR \Rightarrow \alpha X + Y \in E_1$

لأن $\alpha X + Y = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3) \in IR^3$ و يحقق $\alpha x_1 + y_1 = \alpha x_2 + y_2 = \alpha x_3 + y_3$

2) لدينا $\forall X, Y \in E_2, \forall \alpha \in IR \Rightarrow \alpha X + Y \in E_2$

لأن $\alpha X + Y = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3) \in IR^3$

و يحقق $\alpha x_1 + y_1 = (\alpha x_2 + y_2) + (\alpha x_3 + y_3)$

3) لدينا $\forall X, Y \in E_3, \forall \alpha \in IR \Rightarrow \alpha X + Y \in E_3$

لأن $\alpha X + Y = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3) \in IR^3$

و يحقق $(\alpha x_1 + y_1) + (\alpha x_2 + y_2) + (\alpha x_3 + y_3) = 0$

II)

أساس لكل فضاء شعاعي جزئي

بعد حسابات بسيطة نجد

$B_{E_1} = \{(1,1,1)\}$ ، $B_{E_2} = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$ و $B_{E_3} = \{(1,1,0),(1,1,0)\}$

الأبعاد

$$\dim E_1 = 1 \text{ و } \dim E_2 = E_3 = 2$$

III) نعم E_1 و E_2 متكاملان لأن

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = IR^3 \\ \dim E_1 + \dim E_2 = 3 \end{cases}$$

IV)

لدينا $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$

تمرين

هل المجموعات التالية فضاءات شعاعية؟ علل.

1) $(IR,+,o)$ حيث العملية الداخلية + و الخارجية o معرفتين كما يلي

$$+ : IRxIR \longrightarrow IR \qquad ,o : IRxIR \longrightarrow IR$$
$$(x,y) \mapsto x+y \qquad (\alpha,x) \mapsto x^{\alpha}$$

2) $(IR^2,+,o)$ حيث العملية الداخلية + و الخارجية o معرفتين كما يلي

$$+ : IR^2xIR^2 \longrightarrow IR^2 \qquad , \ o : IRxIR^2 \longrightarrow IR^2$$
$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1.x_2, y_1.y_2) \qquad (\alpha,(x_1,x_2)) \mapsto (x_1,x_2)$$

3) $(IR^2,+,o)$ حيث العملية الداخلية + و الخارجية o معرفتين كما يلي

$$+ : IR^2xIR^2 \longrightarrow IR^2 \qquad , \ o : IRxIR^2 \longrightarrow IR^2$$
$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1+x_2, y_1+y_2) \qquad (\alpha,(x_1,x_2)) \mapsto (\alpha x_1, 0)$$

حل

1) ليس فضاء شعاعيا لأن

$$\forall \alpha \in IR, \forall x,y \in IR : \alpha o(x+y) \neq \alpha ox + \alpha oy$$
$$\left[(x+y)^{\alpha} \neq x^{\alpha} + y^{\alpha} \right]$$

2) ليس فضاء شعاعيا لأن $(0,0)$ لا يقبل نظير.

3) ليس فضاء شعاعيا لأن

$$\forall (x_1,x_2) \in IR^2 : 1o(x_1,x_2) = (x_1,0) \neq (x_1,x_2)$$

تمرين

في الفضاء الشعاعي IR^3 ، نعتبر المجموعتين

$$E = \left\{(x,y,z) \in IR^3 ; x - y + 2z = 0\right\}, F = \{(x,2x,x), x \in IR\}$$

1) برهن أن E, F فضاءين شعاعيين.

2) برهن أن E, F إضافيان في IR^3. (supplémentaire)

حل

1) يكفي فقط أن نبرهن أنهما فصاءان شعاعيان جزئيان من IR^3

$$E = \left\{(x,y,z) \in IR^3 ; x - y + 2z = 0\right\}$$

نحقق الشروط

لدينا $\forall (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in E, \forall \lambda \in IR \Rightarrow \lambda(x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3) \in E$

$$\lambda(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(\lambda x_1+y_1,\lambda x_2+y_2,\lambda x_3+y_3)\in IR^3 /$$
$$\lambda x_1+y_1-(\lambda x_2+y_2)+2(\lambda x_3+y_3)=\lambda(x_1-x_2+2x_3)+(y_1-y_2+2y_3)$$
$$=\lambda 0+0=0$$

و هو المطلوب.

$$F=\{(x,2x,x),x\in IR\}$$

نحقق الشروط

لدينا $\forall(x_1,2x_1,x_1),(y_1,2y_1,y_1)\in F,\forall\lambda\in IR\Rightarrow\lambda(x_1,2x_1,x_1)+(y_1,2y_1,y_1)\in F$

$$\lambda(x_1,2x_1,x_1)+(y_1,2y_1,y_1)=(\lambda x_1+y_1,2(\lambda x_1+y_1),\lambda x_1+y_1)\in IR^3 /$$
$$(\lambda x_1+y_1,2(\lambda x_1+y_1),\lambda x_1+y_1)=(z,2z,z)\in F$$

و هو المطلوب.

2) برهان أن F,E إضافيان

تعريفا F,E إضافيان يعني أن $E\oplus F=IR^3$

أساس لـ F,E

$B_E=\{(1,1,0),(2,0,1)\},B_f=\{(1,2,1)\}$ و منه $\dim E=2,\dim F=1$

كذلك لدينا

$E\cap F=\{(0,0,0)\}$ لأن العائلة $\{(1,1,0),(2,0,1),(1,2,1)\}$

و حسب المخطط

$$\left\{\begin{array}{l} E+F\subset IR^3 \\ E\cap F=\{(0,0,0)\} \\ \dim E+\dim F=3 \end{array}\right| \Rightarrow E\oplus F=IR^3$$

تمرين

في الفضاء الشعاعي IR^3، نعتبر المجموعتين

$$E=\langle(0,1,-1),(0,1,1)\rangle$$
$$F=\langle(0,1,2),(2,3,4)\rangle$$

1) جد $E\cap F$.

2) جد $E+F$.

حل

في الفضاء الشعاعي IR^3، نعتبر المجموعتين

$$E=\langle(0,1,-1),(0,1,1)\rangle\;;F=\langle(0,1,2),(2,3,4)\rangle$$

لدينا

$$(0,1,2)=-\frac{1}{2}(0,1,-1)+\frac{3}{2}(0,1,1)\Rightarrow(0,1,2)\in\langle(0,1,-1),(0,1,1)\rangle$$

لكن $(2,3,4)\notin\langle(0,1,-1),(0,1,1)\rangle$

إذا حددنا اساس فضاء شعاعي نكون قد حددناه بدقة.

إذن $B_{E\cap F}=\{(0,1,2)\}$ و $B_{E+F}=\{(0,1,-1),(0,1,1),(2,3,4)\}$.

تمرين

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل IK، ليكن F فضاءا شعاعيا جزئيا من E و $A=C_E^F$

1) برهن أنه إذا كان x ينتمي إلى F و y ينتمي إلى A ،فإن x +y *ينتمي إلى* A.

2) استنتج أن A ليس فضاءا شعاعيا جزئيا من E.

ليكن G فضاءا شعاعيا جزئيا من E ،بحث G غير محتوى في F و F غير محتوى في G

3) برهن أن $F \cup G$ ليس فضاءا شعاعيا جزئيا من E.

تمرين

ليكن F الفضاء الشعاعي الجزئي من $IR_3[x]$ مولد عن طريق كثيرات الحدود التالية

$$p_1(x) = x^3 + x^2 + x + 5, p_2(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 1,$$

$$p_3(x) = -2x^3 + 3x - 16, p_4(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$$

ليكن G الفضاء الشعاعي الجزئي من $IR_3[x]$ مولد عن طريق كثيرات الحدود التالية

$$p_5(x) = x^2 + 3x + 6, p_6(x) = 3x^3 + 10x^2 + 6x - 3, p_7(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 3$$

1) جد أساس لكل من F و G.

2) جد أساس لـ $F+ G$.

تمرين

ليكن $F= IR_2[x]$ ، الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي 2 .

لتكن العائلة $\left\{ p_1(x) = x^2, p_2(x) = (x-1)^2, p_2(x) = (x+1)^2 \right\}$

1) برهن أن هذه العائلة تشكل أساس لـ F.

2) استنتج شكل كثيرات الحدود التالية في الأساس الجديد.

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 14, Q(x) = 12$$

تمرين

لتكن الأشعة التالية من IR^3، x=(a,1,1) ,y=(1,a,1) ,z=(1,1,a) حيث a حقيقي

جد حسب العدد a بعد الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة الثلاث

تمرين

لتكن لدينا المجموعتين

$$B = \left\{ (a,b,c,d) \in IR^4; a - b = c - d \in IR \right\}$$

$$A = \left\{ (a-b, 2a, a+2b, -b); a, b \in IR \right\}$$

1) برهن أنهما ف ش ج من IR^4.

2) جد أساسا لكل منهما و استنتج بعدهما.

تمرين

لتكن لدينا الأشعة التالية من IR^3.

$$a = (0,1,-1), b = (-1,0,1), c = (1,-1,0)$$

1) برهن أنها مستقلة خطيا مثنى مثنى.

2) هل العائلة $\left\{ a,b,c \right\}$ حرة؟

3) ما هو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد عن طريق الأشعة a, b, c.

تمرين

في IR^4 نعرف الأشعة التالية

$$u = (1,-1,0,2), x = (1,2,3,0), y = (0,-1,2,-2), z = (3,7,7,2), v = (0,-9,9,6)$$

1) برهن أن z ينتمي إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاعين x, y.

2) برهن أن v ينتمي إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاعين x, v.

3) ليكن F إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاعين x, y,z و G إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاعين u, v.

تمرين

لتكن $H = \left\{ (x,y,z) \in IR^3, x + y + z = 0 \right\}$

برهن أن H ف ش ج من فضاء شعاعي يطلب تحديده.

1) جد بعد H.

2) جد مكمل لـ H.

تمرين

ليكن لدينا E فضاءا شعاعيا على الحقل IK، و ليكن F فضاءا شعاعيا جزئيا من E

هل $G = C_E^F$ فضاء شعاعي جزئي من E؟ علل.(C:يرمز للمتمم)

تمرين

ليكن $E=IR^4$ و ليكن $u=(1,\text{-}2,4,1)$ و $v=(1,0,0,2)$ شعاعين من E
جد الفضاء الشعاعي من E المولد عن طريق العائلة (u,v).
أكمل هذه العائلة لتصير أساسا لـ E.

تمرين

ليكن E الفضاء الشعاعي للدوال الحقيقية المستمرة ذات المتغير الحقيقي حيث $x \succ 0$. لتكن F المجموعة الجزئية من E للدوال f بحيث $\forall t \succ 0, \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-tx} f(x) = 0$

برهن أن F فضاء شعاعي جزئي من E .

تمرين

جد المصفوفتين X,Y بحيث

$$\begin{cases} X-Y=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \\ X+2Y=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}\end{cases}$$

حل

لدينا بطرح المعادلة 1 من 2

$$3Y=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

من جهة أخرى لدينا

$$X-Y=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

تمرين

هل الجداء CBA تجميعي حيث

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

حل

نعم إن الجداء تجميعي لأن $(CB)A=C(BA)$

من جهة. $$\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 16 & 6\end{pmatrix}$$

من جهة أخرى $$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 16 & 6\end{pmatrix}$$

و هو المطلوب.

تمرين

باستعمال كثير الحدود المميز جد مقلوب المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

حل

لدينا $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+5\lambda^2-5\lambda+1$

من أجل $\lambda=0$ نلاحظ أن $p(0)=\det(A-0I)=1\neq 0$

و منه فالمصفوفة قابلة للقلب، نعرف أن المصفوفة A جذر لكثير الحدود المميز و عليه

$$A^3-5A^2+5A=I \Leftrightarrow -A^3+5A^2-5A+I=0_{IR^3}$$

و هو ما يسمح بالكتابة التالية

$$A^3-5A^2+5A=I$$
$$\Leftrightarrow A(A^2-5A+5)=(A^2-5A+5)A=I$$

و منه $A^{-1}=(A^2-5A+5)$ و بالتعويض نحصل على $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$

تمرين

لتكن M مصفوفة عديمة النمو من المرتبة n أي أن $\left(M^n=0;M^{n-1}\neq 0\right)$

نعتبر المجموع $P=I+M+...+M^{n-1}$

1) برهن أن المصفوفة $I-M$ قابلة للقلب ثم أحسب مصفوفتها العكسية (إرشاد شكل الجداء $M.P$ أو $P.M$)

2) أستنتج مقلوب المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

حل

1) لدينا $M.P=P.M=M+M^2+...+M^{n-1}$

بالطرح نحصل على $P-M.P=I$

أي $P(I-M)=(I-M)P=I$

و هو ما يثبت أن $I-M$ قابلة للقلب و مقلوبها يساوي P.

2) لدينا $A=I-\left(I-A\right)$

نضع

$$M=I-A=-\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن

$$M^4=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

و منه

$$A^{-1}=I+M+M^2+M^3=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

تمرين

أحسب المصفوفة العكسية للمصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\2&0&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

حل

لدينا

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(comA\right)^t$$

حيث $\det A = -4$ ، $comA = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

و منه

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين

أحسب المصفوفة العكسية للمصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

حل

لدينا

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^t$$

حيث

$$comA = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \text{ ، } \det A = 1$$

و منه

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

تمرين

أحسب $f(A)$.

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ و } f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

حل

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1/2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين

نعتبر المصفوفة التالية

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أحسب B^n من أجل كل قيمة لـ n أكبر من *2*.

حل

حساب B^n

لدينا $B^2 = BB = 2B$ و منه $B^3 = BB^2 = 2^2 B$

نبرهن بالتدريج أن $B^n = 2^{n-1} B$.
نفرض أن $B^n = 2^{n-1} B$
و نثبت أن $B^{n+1} = 2^n B$
لدينا $B^{n+1} = BB^n = B \times 2^{n-1} \times B = 2^{n-1} B \times B = 2^{n-1} \times 2 \times B = 2^n B$
و هو المطلوب.

تمرين

لتكن لدينا مصفوفتان A و B مربعتان من الصنف 2 حيث عناصرها أعداد حقيقية و تحقق

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

1)أحسب $TrAB$ و $TrBA$، ماذا تستنتج؟
2)جد قيمتي x و y.

حل

لدينا $TrAB = 15; TrBA = x + y$
نستنتج أن x+ y =15 و لدينا من جهة أخرى $xy = 0 \Leftrightarrow \det AB = \det BA$
و منه فإن حل الجملة الغير خطية التالية

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 0 \end{cases}$$

يعطي (x = 0, y =15) أو (x = 15, y =0)

تمرين

ليكن لدينا B , A مصفوفتين مربعتين من الصنف 2 بحيث تحقق

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة x, y .

حل

لدينا

$$\begin{cases} \det(AB) = \det(BA) = \det A \times \det B \\ tr(AB) = tr(BA) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 300 \\ x + y = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 20, y = 10 \\ \text{أو} \\ x = 10, y = 20 \end{cases}$$

تمرين

1) أحسب مربع المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ، نرمز بالرمز $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ لمصفوفة الوحدة و نعتبر المجموعة E للمصفوفات من الشكل $aI + bA$ حيث b, a سلاميات حقيقية.
2) برهن أن $aI + bA = cI + dA \Leftrightarrow a = c, b = d$.
3) برهن أن المجموعة E مزودة بجمع المصفوفات و جداءها بسلمي تشكل فضاءا شعاعيا على حقل الأعداد الحقيقية.
برهن أن $\forall n \in IN : M^n = a^n I + na^{n-1} bA \quad / M = aI + bA$.

تمرين

لتكن A مصفوفة مربعة و تحقق العلاقة: $A^2+A+I=0$.
1) برهن أن المصفوفة A قابلة للقلب ثم جد مقلوبها.

تمرين

لتكن لدينا المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

1) أحسب A^n.(يمكن كتابة $A=B+I$)

تمرين

أحسب المعاملات المشتركة (les cofacteurs) للمصفوفات

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&0&3\\-1&1&0\end{pmatrix},B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}$$

تمرين

هل المصفوفتين التاليتين قابلتين للقلب؟ في حالة الإيجاب جد مقلوب كل منهما.

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

تمرين

باستعمال كثير الحدود المميز جد مقلوب المصفوفة المعرفة كمايلي

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

تمرين

لتكن A , B مصفوفتين مربعين من نفس الصنف و قابلتين للقلب

برهن أن الجداء AB قابل للقلب و يحقق $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

تمرين

أجري العمليات التالية

$$\begin{pmatrix}7&-4&2&1\\3&0&-3&0\\1&2&1&-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&3\\1&5&-3&0\\-2&-4&1&-3\end{pmatrix}.$$

$$-7\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2&0\\2&0&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$$

تمرين

أجري الجداء التالي

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\2&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

تمرين

برهن أن المصفوفتان التاليتان تتبدلان

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أحسب A^n (أعتبر $B=A-I$)

تمرين

أحسب المصفوفة —cofacteurs—للمصفوفتين التاليتين

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} ، A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين

هل المصفوفات التالية قابلة للقلب، جد المقلوب في حلة الإيجاب .

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} ، b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ، a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين

نعتبر المصفوفتين التاليتين

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) برهن أن $T^3 = 0$.

2) استنتج من أجل كل n طبيعي A^n .

تمرين

تعتبر المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) برهن أن A قابلة للقلب، احسب مقلوبها.

2) جد المصفوفتين X و Y من الصنف *2* بحيث

$$XA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad AY = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

تمرين

ليكن $E=IR_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة *2* و المعاملات الحقيقية

1) برهن أن العائلة

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2), p_2(x) = -(x-1)(x-3), p_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

تشكل أساسا.

2) جد مصفوفة العبور من الأساس القانوني إلى الأساس في السؤال 1.

3) جد مصفوفة العبور من الأساس في السؤال 1 إلى الأساس القانوني.

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

1) جد التطبيق f المرفق للمصفوفة A.

2) جد نواة f.

3) جد صورة f.

4) تحقق من نظرية الأبعاد.

نعتبر الأساس الجديد المعرف كما يلي

$$e_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e_1+e_2\right), e_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-e_1+e_2\right).$$

5) جد مصفوفة التطبيق f و لتكن M' في الأساس الجديد $\{e_1',e_2'\}$

6) ليكن لدينا شعاع $V(x,y)$ من IR^2 في الأساس $\{e_1,e_2\}$، عبر عن الإحداثيات (x',y') للشعاع $f\left(V\right)$ في الأساس $\{e_1',e_2'\}$ بدلالة (x,y).

حل

1) التطبيق الخطي

$$\begin{aligned}f : IR^2 &\longrightarrow IR^2\\ (x,y)&\mapsto (x+y,-x-y)\end{aligned}$$

2) نواته

$$\begin{aligned}Kerf &=\left\{\left(x,y\right)\in IR^2 / f(x,y)=\left(0,0\right)\right\}\\ &=\left\{\left(x,y\right)\in IR^2 / x=-y\right\}=\left\{\left(x,-x\right)/ x\in IR\right\}=\left\langle(1,-1)\right\rangle\end{aligned}$$

و منه فإن $\dim Kerf=1$.

3) صورته

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} gf &=\left\{f\left(x,y\right)/(x,y)\in IR^2\right\}\\ &=\left\{\left(x+y,-x-y\right)/(x,y)\in IR^2\right\}\\ &=\left\{\left(x+y\right)\left(1,-1\right)/ x+y\in IR\right\}=\left\langle(1,-1)\right\rangle\end{aligned}$$

و منه فإن $\dim \operatorname{Im} f=1$.

4) نظرية الأبعاد $\dim IR^2=\dim Kerf+\dim \operatorname{Im} f$ (2=1+1).

5) مصفوفة العبور تساوي

$$P=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow P^{-1}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

و منه فإن مصفوفة التطبيق في الأساس الجديد تساوي

$$M'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

6) إحداثيات الشعاع $f(V)$.

لدينا

$$\begin{aligned}f(V)&=f(xe_1+ye_2)=xf(e_1)+yf(e_2)=x(e_1-e_2)+y(e_1-e_2)\\ &=0e_1'+\sqrt{2}(x+y)e_2'\end{aligned}$$

تمرين

ليكن لدينا فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة 2 أو أصغر $(E=IR_2[X])$.

نعتبر تطبيقا معرفا كمـا يلــــي

$$f : E \longrightarrow E$$
$$p \mapsto \frac{(x+1)^2}{-2} p'' + (x+1) p'$$

1) برهن أن هذا التطبيق باطنيا و انه يحقق *fof=f*
2) جد نواته و صورته و بعد كل منهما.
3) برهن أن هذا الفضاء هو جمع مباشر لصورته و نواته.

حل

1) f تطبيق من E نحو E ، كي يكون باطنيا يكفي فقط أن نتحقق من أنه تطبيق خطي. $\forall p,q \in E, \forall \alpha IR \Rightarrow f(\alpha p+q) = \alpha f(p) + f(q)$

لدينا

$$f(\alpha p+q)(x) = \frac{(x+1)^2}{-2}(\alpha p+q)''(x) + (x+1)(\alpha p+q)'(x)$$
$$= \alpha\left[\frac{(x+1)^2}{-2} p''(x) + (x+1)p'(x)\right] + \left[\frac{(x+1)^2}{-2} q''(x) + (x+1)q'(x)\right]$$
$$= \alpha f(p)(x) + f(q)(x) \quad \forall x \in IR$$

(2

$$fof(p)(x) = \frac{(x+1)^2}{-2}\left[\frac{(x+1)^2}{-2} q''(x) + (x+1)q'(x)\right]''$$
$$+ (x+1)\left[\frac{(x+1)^2}{-2} q''(x) + (x+1)q'(x)\right]$$
$$= \frac{(x+1)^2}{-2} q''(x) + (x+1)q'(x) = f(p)(x) \quad \forall x \in IR$$

أي أن $fof = f$

(2

$$\ker F = \{ P \ / \ P \quad IE \ , \ F(P) = 0 \}$$
$$= \{ a x^2 + b x + c \ /(x+1)(ax+(b-a)) = 0\}$$
$$Kerf = \{ \ p(x) = c \quad / c \in IR\}$$

إذن $\dim \ \ker F = 1$

إيجاد صورة التطبيق

لدينا

$$\operatorname{Im} gf = \left\{\frac{(x+1)^2}{-2}(2a) + (x+1)(2ax+b) / a,b \in IR\right\}$$
$$= \{a(x^2-1) + b(x+1) / a,b \in IR\}$$

إذن $B_{\operatorname{Im} gf} = \{(x^2-1),(x+1)\}$ و عليه فإن $\dim \ \operatorname{Im} g f = 2$

3) نلاحظ بأن E =ker f + Img f و $Kerf \cap \operatorname{Im} gf = \{0\}$

إذن $E = Kerf \oplus \operatorname{Im} gf$

تمرين

ليكن لدينا فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة 2 أو أصغر $(E = IR_2[X])$

نعتبر تطبيقا معرفا كما يلـــي:

$$f : E \longrightarrow E$$
$$p \mapsto (2x^2 - x - 4)p'' + (x-3)p' + 3p$$

1) أوجد مصفوفــة التطبيـق الخطي C بالنسبة للأساس القانوني لـ E.
2) برهن انه إذا كانت مصفوفة A مربعة فإن $B=A+{}^{T}A$ متناظرة
3) لتكن A مصفوفة مربعة تحقق $A^2+A+I=0$ برهن أنها قابلة للقلب.

حل

1) إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي

بما أن $\{1, x, x^2\}$ هو الأساس بالنسبة للانطلاق و للوصول فإن:

$$\begin{cases} f(1) = 3 = 3 + 0x + 0x^2 \\ f(x) = 4x\ 3 = -3 + 4x + 0x^2 \\ f(x^2) = 9x^2 - 8x\ 8 = -8\ 8x + 9x^2 \end{cases}$$

و منه

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2) لدينا

$A=(a_{ij}) / 1 \le i \le m\ ,\ 1 \le j \le m \quad B=(b_{ij}) / 1 \le i \le m\ ,1 \le j \le m$

$b_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$ لأن الجمع تبديلي و منه $b_{ji}=a_{ji}+a_{ij}=a_{ij}+a_{ji} \Rightarrow b_{ij}=b_{ji}$

إذن B مصفوفة متناظرة

3) $A^2+A+I=0 \Rightarrow -A^2-A=I$

التوزيع من اليمين $\Rightarrow A(-A-I)=I$

التوزيع من اليسار $\Rightarrow (-A-I)A=I$

$\Rightarrow (-A-I)A = A(-A-I)=I$

$AB = BA = I$

إذن $B=(-A-I)$

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أحسب A^2. $(A^2=AA)$
2) إستنتج أن A قابلة للقلب و أحسب مقلوبها.

حل

1) لدينا

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + A$$

2)

$$A^2 = 2I + A \Rightarrow A(A-I) = (A-I)A = 2I$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}(A-I)\right)A = A\left(\frac{1}{2}(A-I)\right) = I$$

و منه فإن المصفوفة قابلة للقلب و تحقق:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{2}(A-I)\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

تمرين

نعتبر التطبيق الباطني:

$$g : IR^3 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (-x, x+y+z, -y-z)$$

1) جد مصفوفة التطبيق الخطي g بالنسبة للأساس القانوني لـ IR^3.

2) نعتبر الأساس الجديد لـ IR^3

$$\{v_1 = (0,-1,0); v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,0,0)\}$$

جد مصفوفة العبور من الأساس القديم إلى الأساس الجديد.

3) جد مصفوفة التطبيق الخطي g بالنسبة للأساس الجديد بطريقة نظرية تغيير الأساس

حل

1) مصفوفة التطبيق الخطي في الأساس القانوني تساوي.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) مصفوفة العبور من الأساس القانوني إلى الأساس الجديد

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للأساس الجديد

$$B = p^{-1}A \quad p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين

نعتبر التطبيق الباطني:

$$f_a : IR^3 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+y+z, x+ay+z, x+y+a^2z)$$

1) جد مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للأساس القانوني.

2) جد نواة التطبيق الخطي و بعد ها حسب قيمة الوسيط a.

3) إستنتج بعد صورة التطبيق الخطي حسب قيمة الوسيط a.

حل

1)مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للأساس القانوني.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

2) نواة التطبيق الخطي.

لدينا تعريفا

$$Ker \quad f_a = \{(x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq : f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \end{cases}\right\}$$

نميز ثلاث حالات

(2.1

$a=1$

$$Ker \quad f_1 = \{(x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$= \left\{ (x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \right\}$$

$$= \{(x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: x+y+z=0\}$$

$$= \{(-y-z,y,z); y,z \in IR\}$$

$$= \langle \langle (-1,1,0 \rangle ; (-1,01) \rangle$$

إذن $DimKerf = 2$

(2.2

a= -1

$$Ker \quad f_{-1} = \{(x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$= \left\{ (x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: \begin{cases} 2(x+z)=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \right\}$$

$$= \{(x,0,-x); x \in IR\}$$

$$= \langle (1,0,-1) \rangle$$

إذن $DimKerf = 1$

(2.3

$a \neq 1 \wedge a \neq -1$

$$Ker \quad f_{-1} = \{(x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$= \left\{ (x,y,z); x,y,z \in IR \quad tq: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \end{cases} \right\} = \{(0,0,0)\}$$

إذن $DimKerf = 0$

3)إستنتاج بعد الصورة حسب قيم الوسيط.

من العلاقة $\dim IR^3 = \dim Kerf_a + \dim Im\, f_a$

نستنتج

إذا $a=1$ فإن $\dim Im\, f = 1$

إذا $a=-1$ فإن $\dim Im\, f = 2$

إذا $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ فإن $\dim Im\, f = 3$

تمرين

ليكن $E = IR_3[x]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود الحقيقية ذات الدرجة الأقل أو تساوي 3.من أجل p من E نعتبر $f(p) = p + (1\text{-}x)p'$ حيث p' يمثل كثير الحدود المشتق.

1) برهن أن f تطبيق باطني.

2) جد أساس لنواة f و أساس لصورة f .

3) أثبت أن $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

حل

إثبات أن f باطني، لهذا يكفي إثبات فقط أنه خطي لأن فضاء الانطلاق و الوصول هو نفسه و هو E.

f خطي $\Leftrightarrow \forall \alpha \in IR; \forall p_1, p_2 \Rightarrow f(\alpha p_1 + p_2) = \alpha f(p_1) + f(p_2)$

$$\forall \alpha \in IR; \forall p_1, p_2 \Rightarrow$$

$$f(\alpha p_1 + p_2) = \alpha p_1 + p_2 + (1-x)\left(\alpha p_1 + p_2\right)'$$

$$= \alpha p_1 + (1-x) p_1' + \alpha p_2 + (1-x) P_2'$$

$$= \alpha f(p_1) + \alpha f(p_2)$$

إيجاد أساس النواة و الصورة

لدينا

$$\ker f = \{p, f(p) = 0\}$$

$$= \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 / a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + (1-x)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right)' = 0\right\}$$

$$= \{a_0 - a_0x / a_0 \in IR\} = \{a_0(1-x) / a_0 \in IR\} = \{a_0u_1 / a_0 \in IR\}$$

و منه فأساس النواة مشكل من الشعاع u_1.

$$\operatorname{Im} f = \{f(p), p \in E\} = \left\{\left(a_0 + a_1\right) + a_2\left(2x - x^2\right) + a_3(3x^2 - 2x^3)\right\}$$

و منه فأساس الصورة مشكل من الأشعة

$$\left\{v_1 = 1, v_2 = \left(2x - x^2\right), v_3 = (3x^2 - 2x^3)\right\}$$

لأنها مولدة للصورة تعريفا و هي حرة.

إثبات العلاقة $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$

يجب التحقق من العلاقتين

$$\begin{cases} \dim Kerf + \dim \operatorname{Im} f = \dim E \\ Kerf + \operatorname{Im} f = E \end{cases}$$

العلاقة الأولى محققة ببساطة، و أما العلاقة الثانية فيكفي أن نثبت أن الأشعة الأربعة $\{v_1, v_2, v_3, u_1\}$ حرة و بالمثل يمكن أن نتحقق أنها حرة، يكفي فقط ملاحظة أنها كثيرات حدود من درجات مختلفة.

تمرين

ليكن لدينا التطبيق الخطي

$$f : IR^3 \longrightarrow IR^3$$

$$(x, y, z) \to (-x, x + y + z, -y - z)$$

جد مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للأساس القانوني $\{e_1, e_2, e_3\}$ لـ IR^3.

نعتبر الأشعة التالية من IR^3 $v_1 = (0, -1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 0)$

a) برهن أن الأشعة $v_1 = (0, -1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 0)$ تشكل أساسا للفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR.

b) جد مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $v_1 = (0, -1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 0)$.

حل

1) بالتعريف فإن أعمدة المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي f مشكلة من معاملات الأشعة $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

و لكن

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1, -1) = e_2 - e_3$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1, -1) = e_2 - e_3$$

و عليه فإن

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

(2

a) لكي نثبت أن الأشعة الثلاث تشكل أساس يكفي أن نثبت أنها حرة

$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in IR\quad;\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0\overset{?}{\Rightarrow}\alpha=\beta=\gamma=0$$

لدينا

$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in IR\quad;\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0\Rightarrow\begin{cases}\beta+\gamma=0\\-\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$$

و منه فإن $\alpha=\beta=\gamma=0$ و هو المطلوب.

b) إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي في الأساس الجديد B.

لدينا مصفوفة العبور من الأساس القانوني نحو الأساس الجديد

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

و منه

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

و عليه

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

تمرين

ليكن

$$f:E\longrightarrow E$$
$$p\rightarrow p'+2p$$

حيث E هو فضاء شعاعي لكثيرات الحدود ذات درجة 2 أو اقل.

1) أثبت أن f تطبيق خطي

2) جد نواته و حدد بعدها

3) جد بعد صورته دون تحديدها

حل

1) f خطي لان

$$\forall\alpha,\beta\in IR,\forall p,q\in E: f(\alpha p+\beta q)=(\alpha p+\beta q)'+2(\alpha p+\beta q)$$
$$=\alpha\left(p'+2p\right)+\beta\left(q'+2q\right)=\alpha f(p)+\beta f(q)$$

و هو المطلوب

2) نواته و بعدها

$$Kerf=\{p\in E; f(p)=0\}=\left\{ax^2+bx+c;\left(ax^2+bx+c\right)'+2\left(ax^2+bx+c\right)=0\right\}$$

$$\left\{ax^2+bx+c;\left(2ax^2+(2a+2b)x+2c+b\right)=0\right\}=\{0_E\}$$

$$DimKerf=0$$

3) بعد الصورة

$$DimKerf+\dim\operatorname{Im}f=\dim E=3\Rightarrow\dim\operatorname{Im}f=3$$

تمرين

ليكن E الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 على IR و ليكن f التطبيق الخطي (الشكل الخطي) المعرف كما يلي

$$f:IR[X]\longrightarrow IR$$
$$ax^2+bx+c\mapsto a+b\sqrt{2}$$

حيث $a\ ,b,\ c$ أعداد حقيقة

1) بين أن كثير الحدود $p_1(x)=1$ ينتمي نواة التطبيق f.

2) جد كثير حدود $p_2(x)$ ينتمي إلى نواة التطبيق f بحيث تشكل العائلة $\{p_1,p_2\}$ أساسا لنواة. f

3) جد كثير حدود $p_3(x)$ من E بحيث $\{\ p_1\ ,p_2\ ,p_3\ \}$ تشكل أساس للفضاء E و بحيث $f(a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3)=a_3$ حيث a_i أعداد حقيقية

4) ليكن g كثير حدود من E في E بحيث

$g(p_1)=g(p_2)=0\ ,\ g(p_3)=p_3$

4.1) برهن أن $gog=g.$.

4.2) جد نواة g

حل

1) $f(p_1(x))=f(1)=0\Rightarrow p_1(x)\in Kerf$

2) $Kerf=\left\{-b\left(\sqrt{2}x^2-x\right)+c,b,c\in IR\right\}$

و منه فإن $Kerf$ مولدة بكثيري الحدود التالين

$\left\{p_1(x)=1,p_2(x)=\sqrt{2}x^2-x\right\}$

و لما كانا مستقلين فانهما يشكلان أساسا للنواة.

3) نلاحظ أن $d^\circ p_1=0\ ,\ d^\circ p_2=2$ و عليه فيكفي أن نختار كثير حدود من الدرجة 1 أي $dp_3=1$ حتى تكون العائلة $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ حرة و منه أساس للفضاء E لأننا نعلم مسبقا أن بعده يساوي 3.ليكن p_3 من الشكل $p_3(x)=m\ x\ +\ n$ حيث m و n أعداد حقيقية مع m غير معدوم، لكي نجد الثابتين نلاحظ أن $f(a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3)=a_3$ و هو ما يكافئ كون التطبيق خطي $a_1f\ (p_1)+a_2f\ (p_2)+a_3f\ (p_3)=a_3$ لكن p_1 و p_2 ينتميان للنواة

و منه $a_3f\ (p_3)=a_3$

أي أن $f(p_3)=1\Leftarrow f(mx+n)=m\sqrt{2}=1\Leftarrow m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

و عليه فإن $p_3(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n,n\in IR$

من أجل $n\ =\ 0$ لدينا $p_3(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

4.1) $\forall p\in E;(gog)(p)=g(p)?$

$B_E=\{p_1,p_2,p_3\}\Rightarrow p=\alpha p_1+\beta p_2+\gamma P_3$

ومنه

$$\begin{aligned}(gog)(p)&=gog(\alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3)\\&=g(\alpha g(p_1)+\beta g(p_2)+\gamma g(p_3))=g(\gamma g(p_3))=\gamma g(p_3)=g(p)\end{aligned}$$

4.2)

$$\begin{aligned} Kerf &= \{p \in E; g(p) = 0\} \\ &= \{\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma P_3; f(\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma P_3) = 0\} \\ &= \{\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma P_3; \gamma P_3 = 0\} \\ &= \{\alpha p_1 + \beta p_2, \alpha, \beta \in IR\} \end{aligned}$$

تمرين

ليكن لدينا تطبيق خطي باطني f معرف على الفضاء الشعاعي E حيث سلامياته من IR و لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in IR$$

مرفقة للتطبيق الخطي f في الأساس القانوني $\{e_1, e_2\}$

1) جد المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي f في الأساس الجديد

$$\left\{\frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2}\right\}$$

2) جد المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي f في أي أساس كيفي للفضاء الشعاعي E.

حل

1) مصفوفة العبور من الأساس القانوني إلى الأساس $\left\{\frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2}\right\}$

تساوي

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

و منه فالمصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي في الأساس الجديد تساوي

$$A' = p^{-1}Ap = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

2) ليكن لدينا أساس كيفي للفضاء E، و لتكن p مصفوفة العبور إلى الأساس الجديد الكيفي، لدينا

$$A' = p^{-1}Ap = p^{-1}\alpha Ip = \alpha p^{-1}Ip = \alpha p^{-1}p = \alpha I = A$$

أي أن المصفوفة A مستقرة بالنسبة لتغير الأساس.

تمرين

ليكن التطبيق الخطي الباطني f المعرف على الفضاء الشعاعي المزود بالأساس القانوني كمايلي

$$f : IR^2 \longrightarrow IR^2$$

$$(x,y) \longrightarrow (2x-4y, x-2y)$$

جد صورة ونواة التطبيق. حدد بعديهما، هل هذا التطبيق متباين، غامر ؟

حل

لدينا

$Kerf = \operatorname{Im} gf = \{t(2,1), t \in IR\}$ و منه $\dim Kerf = \dim \operatorname{Im} gf = 1$

مادام $Kerf \neq \{(0,0)\}$ فان التابع غير متباين

و مادام $\operatorname{Im} gf \neq IR^2$ فان التابع غير غامر

تمرين

ليكن

$$f: IR^3 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$$

جد نواة و صورة هذا التطبيق الخطي و حدد بعديهما

حل

تحديد نواة التطبيق الخطي

$$Kerf = \{(x,y,z) / f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z) / (x+2y-z, y+z, x+y-2z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y,z) / \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}\right\} = \{(x,y,z) / (x=3z, y=-z, z \in IR)\}$$
$$= \{(3z,-z,z)\, z \in IR\} = \{z(3,-1,1), z \in IR.\}$$

و منه $\dim Kerf = 1$

تحديد الصورة

$$\operatorname{Im} gf = \{f(x,y,z) / x,y,z \in IR\}$$
$$= \{(x+2y-z, y+z, x+y-2z) / x,y,z \in IR\}$$
$$= \{x(1,0,1) + y(2,1,1) + z(-1,1,-2) / x,y,z \in IR\}$$
$$= \{xu + yv + zw / x,y,z \in IR\}$$

لدينا $3u = v - w$ و منه $\dim \operatorname{Im} g f = 2$ لأن w و v مستقلان

تمرين

جد بالنسبة للأساس القانوني لكل من IR^3, IR^2 المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي الذي يرفق للأشعة $x = (1,-1)$, $y = (2,-3)$

الأشعة $h(x) = (-1,-2,5)$, $h(y) = (0,5,4)$.

تمرين

ليكن لدينا التطبيق

$$f: IR^3 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,y,z) \to (2x+y+z, 2x+y+z, 2x+y+z)$$

1) برهن أن التابع خطي.
2) جد أساس للنواة ثم استنتج بعده.
3) جد أساس لصورة f ثم استنتج بعدها.
4) تحقق من نظرية الأبعاد.

تمرين

ليكن f تطبيق باطني من IR^3 معرق كما يلي

$$f(x, y, z) = (y+z, x+z, y+x)$$

جد نواته.

تمرين

ليكن p كثير حدود من $\mathrm{IR}^3[x]$ ، نضع $f(p) = p + (1-x)p'$

برهن أن f تطبيق باطني .

جد أساس لصورة f و أساس للنواة.

برهن أن $Kerf \oplus \operatorname{Im} f = IR_3[x]$

تمرين

ليكن لدينا

$$f : IR^2 \longrightarrow IR^2, \qquad g : IR^2 \longrightarrow IR^2$$
$$(x,y) \mapsto (2x-4y, x-2y) \qquad (x,y) \mapsto (3x-4y, x-y)$$

1) جد نواة f و صورتها و كذا بعديهما

2) هل f غامر، متباين؟

3) برهن أن g غامر. جد g^{-1}، استنتج بعد نواة و صورة g.

تمرين

أوجد المصفوفة M للتماثل f بالنسبة للأساسين القانونيين في $IR^2 et\ IR^3$

$$f : IR^2 \longrightarrow IR^3$$
$$(x,y) \mapsto (3x-y, 2x+4y, 5x-6y)$$

تمرين

أوجد بالنسبة للأساسين القانونين في $IR^2 et\ IR^3$ التطبيق الخطي الذي يحقق

$$f(1,-1) = (-1,-2,5)\ et\ f(2,-3) = (0,5,4)$$

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

المرفقة للتطبيق الباطني في IR^3 بالنسبة للأساس القانوني $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

1) أوجد نواة و صورة هذا التطبيق مع تحديد أساسا لكل منهما.

ليكن $B' = \{2e_1 + 2e_2, 2e_1 - 2e_2, 2e_3\}$ أساسا جديدا لنفس الفضاء الشعاعي

2) جد مصفوفة المرور من الأساس القانوني إلي الأساس الجديد.

3) أستنتج مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة إلي الأساس الجديد.

تمرين

نعتبر الأشعة $v_3 = (2,1,1), v_2 = (-1,3,0), v_1 = (1,2,1)$ في الفضاء لشعاعي IR^3.

1) برهن أن العائلة $\{v_3, v_2, v_1\}$ تتشكل أساسا للفضاء IR^3.

نعتبر التطبيق المعرف كما يلي

$$f : IR^3 \longrightarrow IR^4$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+y, x+y-z, x+y+z, x)$$

2.1) برهن أن f خطي.

2.2) هل f تشاكل؟ علل.

2.3) جد نواة f، بعدها، ثم أساس من أسسها.

2.4) جد أساس الصورة Imf ثم أساس من أسسها.

2.5) جد فضاء شعاعي E من IR^4 بحيث $IR^4 = \operatorname{Im} f \oplus E$.

تمرين

ليكن لدينا $E = \{p \,/\, p \in IR_3[x]\}$ علما أن E فضاء شعاعيا على IR.

1) برهن أن العائلية $B = \{p_1(x) = 2x+1, p_2(x) = x^2, p_3(x) = (x+2)^2, p_4(x) = (x+2)^3\}$

تشكل أساسا لـ E

2) جد أساسه الثنوي B^*.

3) جد الأساس الثنوي للأساس التالي $\{1, x, x^2, x^3\}$

تمرين

لتكن $E=\{M=aI+bA \ \ ,a,b\in IR\}$ مع العلم أن

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

1) متى تتساوى مصفوفتان من E.
2) أثبت أن E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي للمصفوفات المربعة من الصنف 2
3) نعتبر التطبيق الخطي f المرفق للمصفوفة M، متى يكون f تشاكلا؟
4) ليكن g التطبيق المعرف بالمصفوفة A، جد نواته

ليكن الأساس الجديد المعرف كما يلي

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1+e_2) \ \ ,v=\frac{\sqrt{2}}{2}(-e_1+e_2)$$

5) جد المصفوفة المرفقة للتطبيق g في الأساس الجديد.

نعتبر التطبيق الباطني f_a من IR^3 حيث المصفوفة المرفقة له في الأساس القانوني

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

ليكن الأساس القانوني $e=(e_1,\ e_2,\ e_3)$ لـ IR^3 و الأساس القانوني $F=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ لـ IR^4.

و ليكن لدينا $g=(g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4)$ حيث $\begin{matrix}g_1=f_1+f_2+f_4,\ g_2=f_2+f_3+f_4\\ g_3=f_1+f_3+f_4,\ g_4=f_1+f_2+f_3\end{matrix}$

ليكن التطبيق u حيث $A=(u,\ e,f)$.

1) برهن أن التطبيق u متباين.
2) جد صورة u، برهن أن g_4 لا ينتمي إلى صورة u.
3) برهن من (1) و (2) أن g أساسا لـ IR^4، جد $B=(u,\ e,\ g)$

تمرين

ليكن E فضاءا شعاعيا بعده يساوي 4 على الحقل IR و ليكن $e_i=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ أساسا لـ E و ليكن F فضاءا شعاعيا بعده يساوي 3 على الحقل IR و ليكن $f_j=\{f_1,f_2,f_3\}$ أساسا لـ F.

نعتبر التطبيق الخطي $u:E\longrightarrow F$ المعرف بالعلاقة التالية:

$u(e_1)=f_1+f_2;u(e_2)=f_2+f_3,u(e_3)=2f_2;u(e_4)=-f_1+3f_3$.

1) جد المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي u.
2) جد صورة الشعاع $x=e_1+e_2-2e_3-e_4$.
3) جد نواة التطبيق الخطي.
4) جد صورة التطبيق الخطي.

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$A_m=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix} \ \ ,m\in IR$$

1) ما هي رتبة المصفوفة،ناقش حسب قيمة الوسيط m.
2) جد مقلوب المصفوفة في حالة وجوده.
3) عندما لا تكون المصفوفة قابلة للقلب، جد نواة و صورة التطبيق الباطني المرفق للمصفوفة.

تمرين

برهن بدون نشر أن المحدد معدوم

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

حل

لدينا

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+a+c \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

تمرين

احسب المحدد التالي

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

حل

$$\det = \frac{n+1}{1-x} + \frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$$

تمرين

إن الأعداد *255,527,204* تقبل القسمة على *17*. أثبت باستعمال خواص المحددات دون حساب بأن المحدد التالي يقبل القسمة على *17*.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

حل

لدينا

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2\times100+0\times10+4 \\ 5 & 2 & 5\times100+2\times10+7 \\ 2 & 5 & 2\times100+5\times10+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

تمرين

أحسب المحددات التالية

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\right|, \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right|, \left|\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

حل

$$\det\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| = -74 \text{ ، } \det\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\right| = -6$$

$$\det\left|\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 3-11i$$

تمرين

أحسب محدد المصفوفة التالية

$$N = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

حل

$$\det N = -54$$

تمرين

أحسب المحدد من الرتبة النونية التالي

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & . & . & 2 & 1 \\ n-1 & . & . & 2 & 1 & .0 \\ . & . & . & .1 & 0 & .0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

تمرين

أنشر إلى جداء عوامل

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{pmatrix}\right|, \left|\begin{pmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ c\cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{pmatrix}\right|$$

تمرين

أحسب محدد المصفوفات التالية

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

تمرين

برهن أن المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

حيث $a = 2, b = 3, c = 4$ قابل للقسمة على $(x-1)^3$

تمرين

نفرض أن قطر المصفوفة A من الصنف 3 مشكل من العناصر (a, b, c)

برهن باستعمال التعريف العام للمحددات بأنه في حالة كون A مصفوفة قطرية أو مثلثية فان محددها يساوي abc.

تمرين

لتكن لدينا

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

1) برهن أن $A^2=A+2I$.
2) استنتج أنها قابلة للقلب ثم جد A^{-1} .
3) ادرس قابلية المصفوفة للتقطير.

حل

1) برهان أن $A^2=A+2I$.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2) استنتاج أنها قابلة للقلب ثم جد A^{-1} .

إن المصفوفة قابلة للقلب لأن:

$$\exists B / AB=BA=I$$
$$A^2=A+2I\Leftrightarrow\frac{1}{2}A(A-I)=I\Leftrightarrow\frac{1}{2}(A-I)A=I$$
$$A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-I\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

1) قابلية التقطير

لدينا $p\left(\lambda\right)=\left(\lambda+1\right)^2\left(\lambda-2\right)$

و منه فلكي تكون المصفوفة قابلة للتقطير يجب أن تولد القيمة الذاتية 1- شعاعين ذا تين.

$$\lambda=-1\rightarrow\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

إذن المصفوفة قابلة للتقطير.

تمرين

نعتبر في الفضاء الشعاعي الجزئي $E=IR_2\left[x\right]$ لكثيرات الحدود الحقيقية ذات الدرجة الأصغر أو مساوية لـ 2 نعتبر التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f:E\longrightarrow E$$
$$p\mapsto f(p)=\frac{d}{dx}\left[\left(x+1\right)p\right]+p$$

1) برهن أن f تطبيق خطي.
2) جد المصفوفة M للتطبيق الخطي f في الأساس $\left\{1,x,x^2\right\}$.

3) جد القيم الذاتية لـ f .

4) جد الأشعة الذاتية لـ f .

حل

1) هو تطبيق خطي لأنه يحقق

$$\forall \alpha \in IR, \forall p,q \in E : f(\alpha p+q)=\alpha f(p)+f(q)$$

$$f(\alpha p+q)=\frac{d}{dx}\left[(x+1)(\alpha p+q)\right]+(\alpha p+q)$$

$$=\alpha\left(\frac{d}{dx}\left[(x+1)p\right]+p\right)+\frac{d}{dx}\left[(x+1)q\right]+q$$

2) مصفوفة التطبيق الخطي

بتطبيق التعريف نحصل على

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) القيم الذاتية

لدينا $p_M(\lambda)=(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)\Rightarrow \lambda_1=4, \lambda_2=3, \lambda_3=2$.

4) الأشعة الذاتية

$$\lambda_1=4\Rightarrow V_1=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda_2=3\Rightarrow V_1=(0,1,1)$$

$$\lambda_3=2\Rightarrow V_3=(0,1,1)$$

تمرين

نعتبر المصفوفات التالية

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) أحسب المصفوفة $M=-P+Q-R+S+T$.

2) أحسب M^2 .

3) بدون حساب المحدد استنتج أن M قابلة للقلب و أحسب مقلوب M.

4)جد القيم الذاتية للمصفوفة M.

5) هل M قابلة للتقطير؟

6) تحقق من أن M متشابهة مع مصفوفة قطرية يطلب حسابها.

حل

1) حساب المصفوفة M

$$M=-P+Q-R+S+T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2) حساب المصفوفة M^2.

لدينا

$$M^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3) حسب العلاقة.

$$M^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة M قابلة للقلب لأنها تحقق تعريف قابلية القلب و لدينا $M=M^{-1}$.

4) حساب القيم الذاتية

لدينا $p(\lambda)=\det(M-\lambda I)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

و منه فالقيم الذاتية هي

$$\begin{cases}\lambda_1=-1.......\alpha_{\lambda_1}=1\\ \lambda_2=1......\alpha_{\lambda_2}=2\end{cases}$$

5) تكون M قابلة للتقطير إذا و فقط إذا كانت القيم الذاتية تولد عدد من الأشعة الذاتية مساوي لمرتبة تضاعفها

من أجل λ_1 لدينا الشعاع

$$u_1=x\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

من أجل λ_2 لدينا الشعاعين

$$x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=xu_2+yu_3$$

و منه فالمصفوفة قابلة للتقطير.

6) نعم M متشابهة مع المصفوفة القطرية المشكلة من القيم الذاتية للمصفوفة M و لدينا.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

تمرين

ليكن

$$E=\left\{A/A\in M_2(IR):A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\right\}$$

حيث $M_2(IR)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الصنف 2 ذات المعاملات الحقيقية.

1) برهن أن E يشكل فضاء شعاعي جزئي من $M_2(IR)$.

2) جد أساس له.

3) أعط بعده.

نعتبر التطبيق المعرف كما يلي

$$f \ : E \longrightarrow E$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}$$

4) برهن أنه يشكل تطبيق باطني.

5) جد المصفوفة الممثلة للتطبيق f حسب الأساس المحسوب في السؤال الثاني.

6) جد نواة f.

7) أحسب بعدها.

8) لتكن المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

تحت أي شرط تكون قابلة للتقطير؟

حل

1) $E \neq \phi$ لأن $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ينتمي الى E

و لدينا كذلك

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in E, \forall \alpha, \beta \in IR$$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in E$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \in E$$

بالفعل لدينا

و منه فان E فضاء شعاعي جزئي من $M_2(IR)$.

2) أساس

$$E = \left\{ A / A \in M_2(IR) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ A / A \in M_2(IR) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aP + bQ + cR \right\}$$

$$\Rightarrow B = \{P, Q, R\}$$

لأنها تولد تعريفا E و هي حرة

3) البعد

$\dim E = 3$ و هي تساوي أصلي الأساس.

4) يكفي أن نثبت أن التطبيق f خطي

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in E; \forall \alpha, \alpha' \in IR \Rightarrow$$

$$f(\alpha A + \alpha' A') = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha' a' + \alpha c + \alpha' c & \alpha b + \alpha' b' \\ \alpha b + \alpha' b' & \alpha a + \alpha' a' + \alpha b + \alpha' b' + \alpha c + \alpha' c \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f(A) + \alpha' f(A')$$

و هو المطلوب.

5) لتكن B مصفوفة التطبيق الخطي حسب الأساس $\{P,Q,R\}$

لدينا

$$f(P)=1.P+0.Q+1.R$$
$$f(Q)=0.P+1.Q+1.R$$
$$f(R)=1.P+0.Q+1.R$$

و منه

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

6)

$$Kerf=\left\{A\in E/f(A)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}=\left\{A\in E/\begin{pmatrix}a+c&b\\b&a+b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-a&0\\0&a\end{pmatrix},a\in IR\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},a\in IR\right\}$$

7)

$Kerf=\left\{a\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},a\in IR\right\}$ و منه $DimKerf=1$.

8) المعادلة المميزة $p_B(\lambda)=(\lambda+a)^2=0$

نلاحظ أن الجذر مضاعف

ليكن $X=(x_1,x_2)$ الشعاع المرفق للقيمة الذاتية المضاعفة $\lambda=-a$ و الذي يحقق

$$\begin{cases}(-a-\lambda)x_1+bx_2=0\\(-a-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

من أجل $\lambda=-a$ نحصل على $bx_2=0$ و منه على حالتين

8.1) $b=0$

و منه

$$E_{\lambda=-a}=\{x_1(1,0)+x_0(0,1)/x_1,x_0\in IR\}$$

و منه فالمصفوفة قابلة للتقطير لأن بعد الفضاء الشعاعي الذاتي مساو لمرتبة تضاعف الجذر

8.2) $b\neq 0$

و منه $x_2=0$ و عليه $E_{\lambda=-a}=\{x_1(1,0),x_1\in IR\}$

و منه فالمصفوفة غير قابلة للتقطير لأن بعد الفضاء الشعاعي الذاتي لا يساوي لمرتبة تضاعف الجذر.

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$M=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\a&-a&1\end{pmatrix}$$

ما هي قيم a التي من أجلها تكون المصفوفة قابلة للتقطير ؟

1) جد أساس الأشعة الذاتية.

2) أستنتج مصفوفة العبور P.

3) أعط المصفوفة القطرية M'.

حل

1) نبحث أولا عن القيم الذاتية، نعتبر المعادلة المميزة

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$

لكي تكون قابلة للتقطير يلزم و يكفي أن تكون أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية مساوية لمرتبة تضاعف كل جذر

$$E_{\lambda_1=3} = \{x(1,1,0), x \in IR\}$$

و منه $\dim E_{\lambda_1=3} = 1$

$$E_{\lambda_2=1} = \begin{cases} x(1,1,2) / x \in IR \; si \; a \neq 0 \\ x(1,0,1) + y(0,1,1) / x, y \in IR \quad si \; a = 0 \end{cases}$$

و منه

$$\dim E_{\lambda_2=1} = \begin{cases} 1 \; si \;\; a \neq 0 \\ 2 \;\; si \;\; a = 0 \end{cases}$$

و عليه تكون المصفوفة قابلة للتقطير في حالة كون a معدوم.

$$B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$$

(2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين

نعتبر المصفوفة التالية

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) شكل كثير الحدود المميز $p(\lambda)$.

2) أحسب $p\left(\frac{1}{2}\right)$.

3) أثبت أنه من أجل أكبر قيمة ذاتية يوجد شعاع ذاتي بحيث كل مركباته محدودة بين *0* و *1* و مجموعها يساوي *1* .

4) أثبت حسابيا تشابه المصفوفة مع مصفوفة قطرية *B*.

حل

1) لدينا

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{23}{12}\lambda^2 - \frac{9}{8}\lambda + \frac{5}{24}$$

2) $p(\frac{1}{2}) = 0$

و منه

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{5}{12})$$

و عليه فإن القيم و الأشعة الذاتية الموافقة هي

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_1 = (2,3,2) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_2 = (1,0,-1) \\ \lambda_3 = \dfrac{5}{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_3 = (3,1,-4) \end{cases}$$

3) أكبر قيمة ذاتية هي 1، الأشعة الذاتية المرفقة للقيمة الذاتية متناسبة مع v_1، نبحث عن شعاع v بحيث

$$v = \lambda v_1 / x + y + z = 0 \ et \ 0 \le x, y, z \le 1$$

لدينا

$$v_1 = (2,3,2); v = \lambda V_1 = (2\lambda, 3\lambda, 2\lambda) \ et \ \ 2\lambda + 3\lambda + 2\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{7}$$

و منه فإن الشعاع $v = (2/7,3/7,2/7)$ يحقق الغرض

4)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}; p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 2 & -2 & 1 \\ \frac{-3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix}$$

مع $B = p^{-1}Sp$ و هو ما يثبت أن المصفوفة S متشابهة مع مصفوفة قطرية B.

تمرين

لتكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1) ما هي قيم a التي تجعل المصفوفة قابلة للتقطير؟

2) جد الأساس الذاتي.

3) جد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني إلى الأساس الذاتي.

4) أحسب مقلوب P.

5) أعط تعريف المصفوفات المتشابهة، ثم أثبت أن المصفوفة A متشابهة مع مصفوفة قطرية يطلب تعيينها.

حل

1) البحث عن قيم a التي تجعل المصفوفة قابلة للتقطير

لدينا

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(\lambda - 3)$$

و منه

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_{\lambda_1} = 1 \\ \lambda_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_{\lambda_2} = 2 \end{cases}$$

حتى تكون A قابلة للتقطير يلزم و يكفي أن تولد القيمة الذاتية المضاعفة عددا من الأشعة الذاتية مساو لمرتبة تضاعفها و عليه

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ ax+ay=0 \end{cases}$$

نميز حالتين

1.1) $x = y \Leftarrow a \neq 0$

و منه

(x, y, z)=(x, x, 2x)=x(1, 1, 2)

و عليه فلا يوجد تقطير لأن عدد الأشعة أصغر تماما من مرتبة تضاعف الجذر

1.2) $x = z - y \Leftarrow a = 0$

و منه *(x, y, z) = (z-y, y, z) = y (-1, 1, 0) + z (1, 0, 1)*

و هو ما يثبت أن المصفوفة قابلة للتقطير في حالة *a= 0*.

2) تحديد الأساس الذاتي

لهذا نبحث عن الشعاع الذاتي المرفق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 3$

لدينا

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z) = x(1,1,0)$$

و منه فالأساس الذاتي يساوي $\{(1,1,0),(-1,1,0),(1,0,1)\}$

3) مصفوفة العبور

$$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) مقلوب مصفوفة العبور

$$p^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) نقول عن مصفوفتين مربعتين من نفس الصنف A و B أنهما متشابهتان إذا وجدت مصفوفة p مربعة من نفس صنف المصفوفتين و بحيث $B = p^{-1}Ap$

لدينا

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين

ليكن لدينا المصفوفة

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} a \in IR, b \in IR^*$$

1) عين القيم و الأشعة الذاتية للمصفوفة C.

2) احسب C^2 .واحسب C^3 .

3) اثبت انه يمكن وضع القوة النونية للمصفوفة C أي C^n على الشكل

$$C^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \\ v_n & u_n + w_n & v_n \\ w_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

(إرشاد يمكن استعمال العلاقة الموجودة بين المصفوفة C و شكلها القطري)

حل

1) المعادلة المميزة لـ C هي $(a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 2b^2\right] = 0$

القيمة الذاتية $\lambda_1 = a$ يوافقها الشعاع الذاتي

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

القيمة الذاتية $\lambda_2 = a + b\sqrt{2}$ يوافقها الشعاع الذاتي

$$v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

القيمة الذاتية $\lambda_2 = a - b\sqrt{2}$ يوافقها الشعاع الذاتي

$$v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2) C^3, C^2 تتوضع على الشكل

$$C^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \\ v_n & u_n + w_n & v_n \\ w_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

$$u_2 = a^2 + b^2, v_2 = 2ab, w_2 = b^2 \quad u_3 = a^3 + 3ab^2, v_3 = 3a^2b + 2b^2, w_3 = 3ab^2$$

3) القيم الذاتية مختلفة و منه فالمصفوفة قابلة للتقطير و لدينا $D = P^{-1}CP$

حيث

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a-b\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

لكن $C^n = PD^nP^{-1} \Leftrightarrow D^n = P^{-1}C^nP$

مع

$$D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(a+b\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(a-b\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

تمرين

ليكن f تطبيقا باطنيا على IR^3 مزود بالحقل IR و لتكن

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

مصفوفته في الأساس القانوني

1) جد القيم الذاتية للتطبيق.

2) جد بعد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية.

3) استنتج أساس مكون من الأشعة الذاتية للتطبيق و حدد مصفوفة التطبيق وفق هذا الأساس.

تمرين

لتكن لدينا

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$$

1) جد القيم الذاتية و الأشعة الذاتية لكل مصفوفة.

2) جد مصفوفة انتقال تجعل المصفوفات تأخذ شكل قطري.

تمرين

ليكن التطبيق الداخلي f المعرف على IR^4 بالمصفوفة.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) عين قيم f,e,d,c,b,a حتى يكون f قابلا للتقطير.

تمرين

لتكن لدينا

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1) جد القيم و الأشعة الذاتية لكل منها.

2) ادرس قابلية التقطير.

تمرين

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}, a \in IR$$

1) جد القيم و الأشعة الذاتية.

2) ادرس قابلية التقطير حسب قيمة الوسيط.

3) أعط المصفوفة القطرية.

تمرين

لتكن لدينا

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&-1&1&-7\\9&-3&-7&-1\\0&0&4&-8\\0&0&2&-4\end{pmatrix}$$

1) جد القيم و الأشعة الذاتية لكل منها.

2) ادرس قابلية التقطير.

تمرين

قطر المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$$

تمرين

لتكن المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\4&3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-6\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&-4\\3&1&1\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

1) جد القيم و الأشعة الذاتية.

2) جد مصفوفة العبور من الأساس القانوني إلى الأساس الذاتي.

تمرين

نعتبر المصفوفة

$$M=\begin{pmatrix}a&b&a-b\\b&2b&-b\\a-b&-b&a\end{pmatrix};a,b\in IR$$

1) أحسب محددها، هل هي قابلة للقلب؟

2) جد القيم و الأشعة الذاتية للمصفوفة.استنتج أساس تكتب فيه المصفوفة على شكل قطري.

3) جد مصفوفة العبور من الأساس القانوني نحو الأساس الذاتي و أحسب المصفوفة العكسية لمصفوفة العبور.

4) جد α,β بحيث $M^3=\alpha M^2+\beta M$.

5) متى يتحقق $M^3=M$.

تمرين

ما هي قيم b حتى تكون المصفوفة

$$M=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\b&-b&1\end{pmatrix}$$

قابلة للتقطير؟

تمرين

لتكن لدينا المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & -b & 3 \end{pmatrix}$$

1) أحسب كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

2) برهن أن المصفوفة قابلة للتقطير.

3) جد مقلوبها.

4) هل المصفوفة B=A2+I قابلة للتقطير؟

تمرين

أكتب المصفوفة التالية على الشكل المثلثي

$$N=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين

لتكن لدينا المصفوفة التالية المرفقة لتطبيق باطني.

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) جد القيم الذاتية للمصفوفة.

2) هل المصفوفة قابلة للتقطير؟ علل.

21 تمارين الجمل الخطية

تمرين

لتكن لدينا الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} y + az + at = 1 \\ x + az + at = -1 \\ ax + ay + t = 1 \\ ax + ay + z = 1 \end{cases}$$

1) تحت أي شرط تقبل الجملة الخطية حلا وحيدا.

2) جد الحل في حالة قبول الجملة حلا وحيدا.

3) تحت أي شرط لا تقبل الجملة الخطية حلا.

حل

لدينا محدد الجملة الخطية $\det A_a = 1-4a^2$

1) إذا كان $\det A_a = 1-4a^2 \neq 0$ فإن الجملة لكرامر و هي تقبل حلا وحيدا

2) الحل الوحيد هو:

$$(x,y,z,t) = \frac{1}{4a^2-1}\left(2a-4a^2+1, 2a+4a^2-1, -1, -1\right)$$

2) الجملة لا تقبل حلا إذا $\det A_a = 1-4a^2 = 0$

و $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ a & a & 0 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

مثلا.

تمرين

حسب قيم الوسيط m ناقش حلول الجملة التالية

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = 1 \\ 2x + my + 2z = -2 \\ 2mx + (2m+2)y + (m+1)z = 4 \end{cases}$$

حل

$$\det A = m(m-1)(m-2)$$

نميز حالتين

$$\det A = m(m-1)(m-2) \neq 0$$

تكون جملة لكرا مر و منه الحل وحيد

$$\begin{cases} x=\dfrac{m^2+9m+20}{\det A} \\ y=-2\dfrac{(m+5)(m-1)}{\det A} \\ z=2\dfrac{3m^2-8m-10}{\det A} \end{cases}$$

$\det A=m(m-1)(m-2)=0$

$m=0$ فتصبح الجملة

$$\begin{cases} -2x+2y-z=1 \\ 2x+2z=-2 \\ 2y+z=4 \end{cases}$$

المحدد معدوم فنعتبر الجملة الرئيسية في $x\ y$ وللسطرين الأولين و التي محددها يساوي -4 و لدينا محدد مساعد واحد

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-20$$

و منه حسب نظرية فونتيني- روشي فان الجملة مستحيلة.

$m=1$ تصبح الجملة

$$\begin{cases} -x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=-2 \\ 2x+4y+2z=4 \end{cases}$$

المحدد معدوم فنعتبر الجملة الرئيسية في x;y وللسطرين الأولين و

التي محددها يساوي -5 و لدينا محدد مساعد واحد

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-30$$

و منه حسب نظرية فونتيني- روشي فان الجملة مستحيلة.

$m=2$ تصبح الجملة

$$\begin{cases} 2y-z=1 \\ 2x+2y+2z=-2 \\ 4x+6y+3z=4 \end{cases}$$

المحدد معدوم فنعتبر الجملة الرئيسية في $y;\ x$ وللسطرين الأولين و التي محددها يساوي -4 و لدينا محدد مساعد واحد

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}=-28$$

و منه حسب نظرية فونتيني- روشي فان الجملة مستحيلة.

تمرين

ناقش حلول الجملة حسب قيم الوسيط

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

حل

محدد الجملة الأساسي يساوي

$$\det A = \left|\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\right| = a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$$

لدينا حالتان

الحالة الأولى detA=0

من أجل a=1 لدينا مالا نهاية من الحلول لأن المحددات الجزئية الثلاث معدومة.

من أجل a=2 الجملة مستحيلة الحل لأن لدينا على الأقل محدد جزئي غير معدوم $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \neq 0$

الحالة الثانية $\det A \neq 0$

هي جملة لكرامر و منه فالحل وحيد و يساوي

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{a+2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

تمرين

حل الجمل

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+7y-2z=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases} ، \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$$

حل

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$ حلها x=-(7/5)z , y=(2/5)z

$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+7y-2z=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}$ حلها x=z , y=0

تمرين

ناقش حل الجمل التالية

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m^2 \\ x + y + z + mt = m^3 \end{cases} ، \begin{cases} x + ay - a^2 z = a^4 \\ x + by - b^2 z = b^4 \\ x + cy - c^2 z = c^4 \end{cases}$$

تمرين

جد حلول الجمل التالية

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz = a^2 b \end{cases} ، \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 5y + 4z = 0 \\ x + 17y + 4z = 0 \end{cases}$$

تمرين

حل الجملة

$$\begin{cases} x - 2y + z + t + w = 0 \\ 2x + y - z - t + w = 0 \\ x + 7y - 5z - 5t + 5w = 0 \\ 3x - y - 2z + t - w = 0 \end{cases}$$

تمرين

لتكن لدينا الجملة الخطية التالية

$$(S) \begin{cases} y + az + at = 1 \\ x + az + at = -1 \\ ax + ay + t = 1 \\ ax + ay + z = 1 \end{cases}$$

1) تحت أي شرط تقبل الجملة الخطية حلا وحيدا.

2) جد الحل في حالة قبول الجملة حلا وحيدا.

3) تحت أي شرط لا تقبل الجملة الخطية حلا.

تمرين

حل الجمل الخطية التالية

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} ، \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} ، \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

تمرين

ناقش حلول الجملة

$$\begin{cases} cy - bz = l \\ az - cx = m \\ bx - ay = n \end{cases}$$

ما هي قيمة a التي من أجلها يكون للجملة تالية حلا

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = a \end{cases}$$