$\Rightarrow F_{17} = \{ (U_n)_n \in E \ / (U_n)$ est croissante $\}$

- La suite nulle $\in F_{17}$ puisque $0 = U_n \leq U_{n+1} = 0$.

- $\forall (U_n), (V_n) \in F_{17} : (U_n) + (V_n) \overset{?}{\in} F_{17}$

$$\begin{cases} (U_n) \in F_{17} \\ (V_n) \in F_{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n \leq U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \\ V_n \leq V_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$(U_n) + (V_n) = (U_n + V_n)$ donc $\begin{cases} U_n + V_n \leq U_{n+1} + V_{n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- $\forall (U_n) \in F_{17}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda U_n) \overset{?}{\in} F_{17}$

$(U_n) \in F_{17} : U_n \leq U_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

donc pour $\lambda < 0$ on a

$\lambda U_{n+1} \leq \lambda U_n$ donc elle n'est pas croissante

d'où F_{17} n'est pas un s.e.v

VI$_2$ - $E = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

les operations : $\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est l'elt neutre} \end{cases}$

$\Rightarrow F_{18} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F_{18}$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & d+d' \end{pmatrix}$ $\quad a+a', b+b', d+d' \in \mathbb{R}$

donc $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in F_{18}$.

$\bullet\ \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda d \end{pmatrix} \in F_{18}$

d'où F_{18} est un S.e.v

$\Rightarrow F_{19} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{R} \right\}$.

$\bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F_{19}$

$\bullet \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ 0 & d+d' \end{pmatrix}$ $\quad a+a', d+d' \in \mathbb{R}$

alors $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in F_{19}$

$\bullet\ \lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda d \end{pmatrix} \in F_{19}$.

d'où F_{19} est un S.e.v

Exercice 07.

$E = \mathbb{R}^3$

$F = \{(x, y, z) \in E : x = 0\}$

• verifions que F est un S.e.v

$F = \{(x, y, z) \in E : x = 0\}$.
$= \{(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$

• $(0,0,0) \in F$ donc $e \in F$ et $F \neq \emptyset$

• $\forall (0, y, z), (0, y', z') \in F, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$:

$\lambda(0, y, z) + \beta(0, y', z') = (0, \underbrace{\lambda y + \beta y'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda z + \beta z'}_{\in \mathbb{R}})$

donc $\lambda(0, y, z) + \beta(0, y', z') \in F$.

d'où F est un S.e.v

$F = \{(0,y,0) + (0,0,z) \ , y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(0,1,0) + z(0,0,1) \ , y,z \in \mathbb{R}\}$

donc $F = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

- Montrons que $F = \langle (0,2,-1), (0,1,1) \rangle$

$$\langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle \overset{?}{=} \langle (0,2,-1), (0,1,1) \rangle$$

$$\langle \underbrace{(0,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{u_2} \rangle \overset{?}{\subset} \langle \underbrace{(0,2,-1)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{e_2} \rangle$$

$u_1 \overset{?}{\in} \langle e_1, e_2 \rangle$

$u_2 \overset{?}{\in} \langle e_1, e_2 \rangle$

$u_1 = (0,1,0) \overset{?}{=} \alpha(0,2,-1) + \beta(0,1,1)$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 0 = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

donc $u_1 = \frac{1}{3} e_1 + \frac{1}{3} e_2 \Rightarrow u_1 \in \langle e_1, e_2 \rangle$

$u_2 = (0,0,1) \overset{?}{=} \alpha(0,2,-1) + \beta(0,1,1)$.

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta \\ 1 = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

donc $u_2 = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2$

donc $u_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle$

donc $\lambda_1 u_1 \in \langle e_1, e_2 \rangle$

$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_2 \rangle \\ \text{s.e.v} \end{pmatrix}$ $\lambda_2 u_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle$

$\Leftrightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \subset \langle e_1, e_2 \rangle$ --- ①

$<\underbrace{(0,2,-1)}_{e_1},\underbrace{(0,1,1)}_{e_2}> \overset{?}{\subset} <\underbrace{(0,1,0)}_{u_1},\underbrace{(0,0,1)}_{u_2}>$

$e_1 \overset{?}{\in} <u_1,u_2>$

$e_2 \overset{?}{\in} <u_1,u_2>$

$e_1 = (0,2,-1) = \alpha'(0,1,0) + \beta'(0,0,1)$

$\begin{cases} 2 = \alpha' \\ \beta' = -1 \end{cases} \Rightarrow e_1 = 2u_1 - u_2 \Rightarrow e_1 \in <u_1,u_2>$

$e_2 = (0,1,1) = \alpha'(0,1,0) + \beta'(0,0,1)$

$\begin{cases} 1 = \alpha' \\ 1 = \beta' \end{cases} \Rightarrow e_1 = u_1 + u_2 \Rightarrow e_2 \in <u_1,u_2>$

donc $\quad \lambda_1' e_1 \in <u_1,u_2>$

$\left(\begin{matrix} <u_1,u_2> \\ \text{s.e.v} \end{matrix}\right) \quad \lambda_2' e_2 \in <u_1,u_2>$

$\Leftrightarrow \lambda_1' e_1 + \lambda_2' e_2 \subset <u_1,u_2>$ - - - ②

de ⓐ et ② On a l'egalité : $F = <(0,2,-1),(0,1,1)>$

• Montrons que : $F = <\underbrace{(0,1,2)}_{v_1},\underbrace{(0,2,3)}_{v_2},\underbrace{(0,3,1)}_{v_3}>$

On a : $v_3 - v_1 = e_1$ (question précédente)

$v_1 + v_2 + v_3 = 6.e_2$

$v_3 - v_1 = e_1$

$v_2 - v_1 = e_2$

donc c'Vrai

donc $\begin{cases} e_1 = -v_1 + 0.v_2 + 1.v_3 \\ e_2 = \frac{1}{6}v_1 + \frac{1}{6}v_2 + \frac{1}{6}v_3 \end{cases}$

donc $e_1, e_2 \in <v_1,v_2,v_3>$

alors $<e_1,e_2> \subset <v_1,v_2,v_3>$

d'où $F \subset <v_1,v_2,v_3>$ ... ⊛

puisque la première composante de $v_1 = 0$ donc $v_1 \in F$

la première composante de $v_2 = 0$ donc $v_2 \in F$

la première composante de $v_3 = 0$ donc $v_3 \in F$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3 \in F$ donc $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset F \;(**)$

de $(*)$ et $(**)$ $\Leftrightarrow$ $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Exercice 08 :

$E = \mathbb{R}^4$

$F = \{(x, y, z, t) \in E : x = y + z, t = z\}$

- vérifions que F est un s.e.v :

  - $(0,0,0,0) \in F$ puisque $0 = 0 + 0, 0 = 0$.

  - $\begin{cases} \forall (x, y, z, t) \in F \\ \forall (x', y', z', t') \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z, t = z \quad \text{---} ① \\ x' = y' + z', t' = z' \quad \text{---} ② \end{cases}$

  $(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (x + x', y + y', z + z', t + t') \overset{?}{\in} F$

  $\begin{cases} x + x' \overset{?}{=} (y + y') + (z + z') \\ t + t' \overset{?}{=} (z + z') \end{cases}$

  d'après ① et ② on a le résultat.

  $\lambda (x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \overset{?}{\in} F$

  $\lambda x = \lambda (y + z) = \lambda y + \lambda z$

  $\lambda t = \lambda z$

- $F = \{(x, y, z, t) \in E : x = y + z, t = z\}$

  $t = z \Rightarrow x = y + t$

  $F = \{(y + t, y, t, t) \,/\, y, t \in \mathbb{R}\}$

  $= \{y(1,1,0,0) + t(1,0,1,1), \; y, t \in \mathbb{R}\}$

  $F = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,1) \rangle$

Exercice 09 :

$E = \mathbb{R}^3$

Montrons que $<(2,3,-1),(1,-1,-2)> = <(3,7,0),(5,0,-7)>$

$<(2,3,-1),(1,-1,-2)> \overset{?}{=} <(3,7,0),(5,0,-7)>$.

- $<(\underbrace{2,3,-1}_{u_1}),(\underbrace{1,-1,-2}_{u_2})> \overset{?}{\subset} <(\underbrace{3,7,0}_{e_1}),(\underbrace{5,0,-7}_{e_2})>$

$u_1 \overset{?}{\in} <e_1,e_2>$

$u_2 \overset{?}{\in} <e_1,e_2>$

$u_1 = (2,3,-1) \overset{?}{=} \alpha(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$

$$\begin{cases} 2 = 3\alpha + 5\beta \\ 3 = 7\alpha \\ -1 = -7\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{7} \\ \beta = \frac{1}{7} \end{cases}$$

donc $u_1 = \frac{3}{7} e_1 + \frac{1}{7} e_2 \Rightarrow u_1 \in <e_1,e_2>$

$u_2 = (1,-1,-2) \overset{?}{=} \alpha(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$.

$$\begin{cases} 1 = 3\alpha + 5\beta \\ -1 = 7\alpha \\ -2 = -7\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{7} \\ \beta = \frac{2}{7} \end{cases}$$

donc $u_2 = -\frac{1}{7} e_1 + \frac{2}{7} e_2 \Rightarrow u_2 \in <e_1,e_2>$

donc $\lambda_1 u_1 \in <e_1,e_2>$

$\left(\begin{matrix} <e_1,e_2> \\ \text{s.e.v} \end{matrix}\right)$ $\lambda_2 u_2 \in <e_1,e_2>$

$\Leftrightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \subset <e_1,e_2>$ --- ①

- $<(\underbrace{3,7,0}_{e_1}),(\underbrace{5,0,-7}_{e_2})> \overset{?}{\subset} <(\underbrace{2,3,-1}_{u_1}),(\underbrace{1,-1,-2}_{u_2})>$.

$e_1 \overset{?}{\in} <u_1,u_2>$

$e_2 \overset{?}{\in} <u_1,u_2>$

$e_1 = (3,7,0) = \alpha'(2,3,-1) + \beta'(1,-1,-2)$.

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha' + \beta' \\ 7 = 3\alpha' - \beta' \\ 0 = -\alpha - 2\beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' = 2 \\ \beta' = -1 \end{cases}$$

donc $e_1 = 2U_1 - U_2 \Rightarrow e_1 \in \langle U_1, U_2 \rangle$

$e_2 = (5,0,-7) = \alpha'(2,3,-1) + \beta'(1,-1,-2)$.

$$\begin{cases} 5 = 2\alpha' + \beta' \\ 0 = 3\alpha' - \beta' \\ -7 = -\alpha' - 2\beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' = 1 \\ \beta' = 3 \end{cases}$$

donc $e_2 = U_1 + 3U_2 \Rightarrow e_2 \in \langle U_1, U_2 \rangle$.

donc

$\begin{pmatrix} \langle U_1, U_2 \rangle \\ \text{s.e.v} \end{pmatrix}$ $\quad \lambda'_1 e_1 \in \langle U_1, U_2 \rangle$

$\lambda'_2 e_2 \in \langle U_1, U_2 \rangle$

$\Leftrightarrow \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 \subset \langle U_1, U_2 \rangle$ ---②

de ① et ② on a l'égalité $\langle (2,3,-1);(1,-1,-2) \rangle = \langle (3,7,0), (5,0,-7) \rangle$

Exercice 10 :

$E = \mathbb{R}^3$

$F = \{(x,y,z) \in E : x + y + z = 0\}$. $\quad G = \{(x,y,z) \in E : x = 0\}$

- Vérifions que F et G sont des sous espaces vectoriels :

  - vérifions que F est un s.e.v :

$(0,0,0) \in F$ puisque $0+0+0 = 0$ d'où $e \in F$ et $F \neq \emptyset$

$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z') \overset{?}{\in} F$

$$\begin{aligned} \alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z') &= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x', \beta y', \beta z') \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z' \end{aligned}$$

$$= \alpha(\underset{0}{\underbrace{x+y+z}}) + \beta(\underset{0}{\underbrace{x'+y'+z'}})$$

$$\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z') = 0 \in F.$$

donc F est un sous.e.v

- verifion que G est un s.e.v:

$$G = \{(x,y,z)\in E : x=0\} = \{(0,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}.$$

$(0,0,0)\in G$ donc $e\in G$ et $G\neq\emptyset$.

$\forall (0,y,z),(0,y',z')\in F,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\alpha(0,y,z)+\beta(0,y',z') = (0,\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})$$

donc $\alpha(0,y,z)+\beta(0,y',z')\in G$

d'où G est un s.e.v

- Montrons que $F+G=\mathbb{R}^3$.

$X=(x,y,z)\in F$ Si $(x,y,z) = (-y-z,y,z)$.

$$= (-y,y,0)+(-z,0,z)$$

$$= y(-1,1,0)+z(-1,0,1).$$

donc $F = <\underbrace{(-1,1,0)}_{e_3},\underbrace{(-1,0,1)}_{4}>$

$Y=(x,y,z)\in G$ Si $(0,y,z) = (0,y,0)+(0,0,z)$

$$= y(0,1,0)+z(0,0,1).$$

donc $G = <\underbrace{(0,1,0)}_{e_1},\underbrace{(0,0,1)}_{e_2}>$

$\mathbb{R}^3 = F+G$.

$$G+F = \left\{X+Y,\ \begin{matrix}X\in G\\ Y\in F\end{matrix}\right\}$$

$$\mathbb{R}^3 = G + F \iff \begin{cases} \mathbb{R}^3 \subset F + G. \\ \text{et} \\ F + G \subset \mathbb{R}^3 \ \cdots \circledast \end{cases}$$ toujours vrai

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \overset{?}{\Rightarrow} (x, y, z) \in F + G.$$

$$(x, y, z) \overset{?}{=} X + Y$$
$$= (\underbrace{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2}_{\in F}) + (\underbrace{\lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4}_{\in G})$$

$x \ y \ z$
$e_1 = (0, 1, 0)$ λ_1
$e_2 = (0, 0, 1)$ λ_2
$e_3 = (-1, 1, 0)$ λ_3
$e_4 = (-1, 0, 1)$ λ_4

donc on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ en fonction de x, y, z on obtient :

λ_3 dans 3, dans le 4
On fixe l'un des 4

$$\begin{cases} x = -\lambda_3 - \lambda_4. \\ y = \lambda_1 + \lambda_3. \\ z = \lambda_2 + \lambda_4. \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0. \\ \lambda_3 = y. \\ \lambda_4 = -y - x. \\ \lambda_2 = z + x + y \end{cases}$$

donc $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\Rightarrow (x, y, z) = \underbrace{0.e_1 + (z + x + y) e_2}_{\in F} + \underbrace{y.e_3 + (-y - x) e_4}_{\in G.}$$

alors $\mathbb{R}^3 \subset F + G.$ $\circledast\circledast$

d'après $\circledast$ et $\circledast\circledast$: $\mathbb{R}^3 = F + G$

- La Somme :

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} F + G = \mathbb{R}^3 \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}. \end{cases} \Rightarrow (\text{La Somme est directe})$$

$$\forall (x, y, z) \in F \cap G : \Rightarrow \begin{cases} (x, y, z) \in F \\ (x, y, z) \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -z.$$

donc $(x, y, z) = (0, -z, z) = z\,(0, -1, 1).$

$$F \cap G = \{z(0, -1, 1), z \in \mathbb{R}\}$$

donc $F \cap G$ contient $(0, 0, 0)$ pour $z = 0$ (est vrai).
mais pour $z \in \mathbb{R}^*$, autres éléments $\neq (0, 0, 0)$ donc $F \cap G \neq (0, 0, 0)$

Donc la Somme n'est pas directe.

Exercice 11 :

$R_2 = D^\circ 2$

$E = \mathbb{R}_2[x]$

$P(x) = ax^2 + bx + c$ polynôme

$F = \{P \in E : P'(1) = 0\}$, $G = \langle x \rangle$

- vérifions que F est un S.e.v :
  - L'élément neutre "e" qui est le polynôme nul $\in F$ $(e \in F)$ puisque

$e'(1) = 0$ donc $F \neq \emptyset$

- $\forall p, q \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha p + \beta q \overset{?}{\in} F$

$p, q \in F \iff p'(1) = 0, q'(1) = 0$

$$(\alpha p + \beta q)'(1) = (\alpha p)'(1) + (\beta q)'(1)$$
$$= \alpha \underbrace{p'(1)}_{0} + \beta \underbrace{q'(1)}_{0}$$
$$= 0$$

d'où $\boxed{F \text{ est un S.e.v}}$

$G = \langle x \rangle = \{P \in E : P(x) = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$

(X engendre $G \iff \forall P \in G : P(x) = \alpha X$)

$P \in F \iff P'(1) = 0$ puisque E est l'espace des polynômes de $D^\circ 2$.

donc $P(x) = ax^2 + bx + c$

et $p'(x) = 2ax + b$ donc

$p'(1) = 0 \iff 2a + b = 0$

$\Rightarrow b = -2a$

donc $P \in F \iff P(x) = ax^2 - 2ax + c = a\underbrace{(x^2 - 2x)}_{e_1} + c . \underbrace{1}_{e_2}$

$F = \langle x^2 - 2x, 1 \rangle$

- $F \oplus G = E$

1) $F + G \overset{?}{=} E \iff \begin{cases} F + G \subset E & \text{toujours vrai} \\ E \overset{?}{\subset} F + G \end{cases}$

$\forall P \in E \quad P \overset{?}{=} \underbrace{P_1}_{\in F} + \underbrace{P_2}_{\in G}$

$P \in E : P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \overset{?}{=} \underbrace{a(x^2 - 2x) + b . 1}_{\in F} + \underbrace{c\, x}_{\in G}$

donc on cherche a, b, c en fonction de α, β, γ

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = -2a + c \\ \gamma = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \gamma \\ c = \beta + 2\alpha \end{cases}$$

$$P(X) = a x^2 + b x + c = \underbrace{\alpha(x^2 - 2x) + \gamma}_{\in F} + \underbrace{(\beta + 2\alpha) x}_{\in G}$$

b - $F \cap G \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} \{ 0_{\mathbb{R}_2[x]} \}$

$\forall P \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} P'(1) = 0 \\ P(x) = \alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \alpha$

$P'(x) = \alpha \Rightarrow P'(1) = \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

donc $P \in F \cap G \Longrightarrow$ P est un polynôme $= 0$).

alors $F \cap G \subset \{ 0_{\mathbb{R}_2[x]} \}$ et puisque F et G des s.e.v donc

$\{ 0_{\mathbb{R}_2[x]} \} \subset F \cap G$