Exercice 12 :

Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considere les deux parties

$$F_1 = \{ f \in E \ / f \text{ est impaire} \}.$$

$$F_2 = \{ f \in E / \ f \text{ est paire} \}.$$

- Verifions que F_1 et F_2 Sont des Sev :

$\Longrightarrow F_1$:

F_1 l'ensemble des fonctions impaires verifie : $f(-x) = -f(x)$.

$$F_1 = \{ f \in E / \ f(-x) = -f(x) \}$$

- $e_1 \in F_1$: $f(-0) = -f(0) = 0$ d'où $F_1 \neq \emptyset$
- $\forall g, f \in F_1$: $f + g \overset{?}{\in} F_1$.

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) = -g(x)$$

$$= -[f(x) + g(x)]$$

$$(f+g)(-x) = -(f+g)(x).$$

- $\forall f \in F_1, \forall \alpha \in K$: $\alpha . f(x) \overset{?}{=} -\alpha . f(x)$

$$(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = -\alpha . f(x)$$

d'où F_1 est un S-e.v

$\Longrightarrow F_2$:

F_2 l'ensemble des fonctions paires verifie : $f(-x) = f(x)$.

$$F_2 = \{ f \in E / f(-x) = f(x) \}.$$

- $e_2 \in F_2$: $f(-0) = f(0) = 0$ d'ou $F_2 \neq \emptyset$
- $\forall g, f \in F_2$: $f + g \overset{?}{\in} F_2$

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g)(-x) = (f+g)(x)$$

- $\forall \alpha \in K, \forall f \in F_2 : (\alpha . f)(-x) \overset{?}{=} \alpha . f(x)$

$(\alpha f)(-x) = \alpha . f(-x) = \alpha . f(x)$.

d'où F_2 est un s.ev

- Montrons que $E = F_1 \oplus F_2$?

$$E = F_1 \oplus F_2 \begin{cases} \left.\begin{array}{l} F_1 + F_2 \subset E \\ E \subset F_1 + F_2 \end{array}\right\} F_1 + F_2 = E. \\ F_1 \cap F_2 = 0_E \end{cases}$$

- $F_1 + F_2 \subset E$: toujours vraie
- $E \subset F_1 + F_2$:

On sait que toute fonction quelconque s'écrit sous forme de somme de deux fonctions paire et impaire

d'où $E = F_1 + F_2$.

- $F_1 \cap F_2 = \{ x / x \in F_1 \wedge x \in F_2 \}$.

$= \{ f(x) / f(x) \in F_1 \wedge f(x) \in F_2 \}$.

$F_1 \cap F_2 = \{ f(x) = 0 \}$

d'où $F_1 \cap F_2 = \{ 0_E \}$.

Alors : $F_1 \oplus F_2 = E$

- Exprimons e^x sous forme : $f_1 + f_2$ avec $f_i \in F_i$, $i = 1, 2$.

Soit f_1 une fonction impaire : $f_1 = Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Soit f_2 une fonction paire : $f_2 = Sh(x) = \frac{e^x - e^x}{2}$.

$Ch(x) = Sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$