Série N° 05 : Algèbre 02

Exercice 01 :

$E = \mathbb{R}^*_+$

$\oplus : E \times E \to E : (x, y) \longrightarrow x \oplus y = x \cdot y$

$\circledast : \mathbb{R} \times E \to E : (\alpha, x) \longrightarrow \alpha \circledast x = x^\alpha$

Montrons que $(E, \oplus, \circledast)$ est un $\mathbb{R}$-e.v :

$\Rightarrow$ Montrons que $(E, \oplus)$ est un groupe abelien :

• $\oplus$ associative :

$$(x \oplus y) \oplus z \overset{?}{=} x \oplus (y \oplus z)$$

$$\begin{cases} (x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z \\ x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z \end{cases}$$

d'où $\oplus$ est associative.

• $\oplus$ commutative :

$$(x \oplus y) \overset{?}{=} (y \oplus x)$$

$$\begin{cases} x \oplus y = x \cdot y \\ y \oplus x = y \cdot x \end{cases}$$

d'où $\oplus$ est commutative.

• l'element neutre de $\oplus$:

$$x \oplus e = e \oplus x = x$$

$$x \oplus e = x \Rightarrow x \cdot e = x$$

$$e = 1$$

- l'element symetrique de $\oplus$:

$$x \oplus x' = x' \oplus x = e = 1$$

$$x \oplus x' = 1 \Rightarrow x \cdot x' = 1$$

$$x' = \frac{1}{x}$$

Alors $(E, \oplus)$ est un groupe abelien.

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E : (\alpha + \beta) \circledast x \overset{?}{=} (\alpha \circledast x) \oplus (\beta \circledast x)$

$$\begin{cases} \overset{\text{usuelle}}{(\alpha + \beta)} \circledast x = x^{\alpha + \beta} \\ (\alpha \circledast x) \oplus (\beta \circledast x) = (x^{\alpha}) \cdot (x^{\beta}) = x^{\alpha + \beta} \end{cases}$$

d'où $(\alpha + \beta) \circledast x = (\alpha \circledast x) \oplus (\beta \circledast x)$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E : \alpha \circledast (x \oplus y) \overset{?}{=} (\alpha \circledast x) \oplus (\alpha \circledast y)$.

$$\begin{cases} \alpha \circledast (x \oplus y) = \alpha \circledast (x \cdot y) = (x \cdot y)^{\alpha} \\ (\alpha \circledast x) \oplus (\alpha \circledast y) = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} = (x \cdot y)^{\alpha} \end{cases}$$

d'où $\alpha \circledast (x \oplus y) = (\alpha \circledast x) \oplus (\alpha \circledast y)$.

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E : (\alpha \cdot \beta) \circledast x = \alpha \circledast (\beta \circledast x)$.

$$\begin{cases} (\alpha \overset{\text{usuelle}}{\times} \beta) \circledast x = (\alpha \cdot \beta) \circledast x = x^{\alpha\beta} \\ \alpha \circledast (\beta \circledast x) = \alpha \circledast (x^{\beta}) = (x^{\beta})^{\alpha} = x^{\alpha\beta} \end{cases}$$

d'où $(\alpha \cdot \beta) \circledast x = \alpha \circledast (\beta \circledast x)$

Alors $(E, \oplus, \circledast)$ est un $\mathbb{R}$-e.v

Exercice 02 :

$E = \mathbb{R}$

$\oplus : E \times E \to E : x \oplus y = x + y + 1$

$\circledast : \mathbb{R} \times E \to E : \alpha \circledast x = \alpha x + \alpha - 1$

verifions que E est un $\mathbb{R}$-e.v

$\Rightarrow (E, \oplus)$ un groupe abelien :

• $\oplus$ associative :

$$(x \oplus y) \oplus z \stackrel{?}{=} x \oplus (y \oplus z)$$

$$\begin{cases} (x \oplus y) \oplus z = (x+y+1) \oplus z = x+y+1+z+1 = x+y+z+2 \\ x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y+z+1) = x+y+z+1+1 = x+y+z+2 \end{cases}$$

d'où $\oplus$ est associative.

• $\oplus$ commutative :

$$(x \oplus y) \stackrel{?}{=} (y \oplus x)$$

$$\begin{cases} x \oplus y = x + y + 1 \\ y \oplus x = y + x + 1 \end{cases}$$

d'où $\oplus$ est commutative.

• l'element neutre de $\oplus$:

$$x \oplus e = e \oplus x = x$$

$$x \oplus e = x \Rightarrow x + e + 1 = x$$

$$e = -1$$

• l'element Symetrique de $\oplus$:

$$x \oplus x' = x' \oplus x = e = -1$$

$$x \oplus x' = -1 \Rightarrow x + x' + 1 = -1$$

$$x' = -2 - x$$

Alors $(E, \oplus)$ est un groupe abelien

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E : (\alpha+\beta) \circledast x = (\alpha \circledast x) \oplus (\beta \circledast x)$.

$$\begin{cases} (\alpha+\beta) \circledast x = (\alpha+\beta)x + \alpha+\beta-1 = \alpha x+\beta x+\alpha+\beta-1 \\ (\alpha \circledast x) \oplus (\beta \circledast x) = (\alpha x+\alpha-1) \oplus (\beta x+\beta-1) = \alpha x+\beta x+\alpha+\beta-1 \end{cases}$$

d'où $(\alpha+\beta) \circledast x = (\alpha \circledast x) \oplus (\beta \circledast x)$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E : \alpha \circledast (x \oplus y) = (\alpha \circledast x) \oplus (\alpha \circledast y)$.

$$\begin{cases} \alpha \circledast (x \oplus y) = \alpha \circledast (x+y+1) = \alpha(x+y+1)+\alpha-1 = \alpha x+\alpha y+2\alpha-1. \\ (\alpha \circledast x) \oplus (\alpha \circledast y) = (\alpha x+\alpha-1) \oplus (\alpha y+\alpha-1) = (\alpha x+\alpha-1)+(\alpha y+\alpha-1)+1 = \alpha x+\alpha y+2\alpha-1 \end{cases}$$

d'où $\alpha \circledast (x \oplus y) = (\alpha \circledast x) \oplus (\alpha \circledast y)$.

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E : (\alpha \cdot \beta) \circledast x = \alpha \circledast (\beta \circledast x)$.

$$\begin{cases} (\alpha \cdot \beta) \circledast x = \alpha \cdot \beta \cdot x + \alpha \cdot \beta - 1 \\ \alpha \circledast (\beta \circledast x) = \alpha \circledast (\beta x+\beta-1) = \alpha\beta x+\alpha\beta-\alpha+\alpha-1 = \alpha\beta x+\alpha\beta-1. \end{cases}$$

d'où $(\alpha \cdot \beta) \circledast x = \alpha \circledast (\beta \circledast x)$.

Alors $(E, \oplus, \circledast)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 03:

E l'ensemble des matrices 2×2 $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrons que E est un $\mathbb{R}$-e.v

=> Montrons que $(E, +)$ est un groupe abelien:

- + associative:

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{cases} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a'+a'' & b+b'+b'' \\ c+c'+c'' & d+d'+d'' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' \\ c'+c'' & d'+d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a'+a'' & b+b'+b'' \\ c+c'+c'' & d+d'+d'' \end{pmatrix} \end{cases}$$

d'où + est associative.

- + commutative:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+a & b'+b \\ c'+c & d'+d \end{pmatrix} \end{cases}$$

d'où + est commutative.

• l'element neutre de + :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + e = e + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• l'element Symetrique de + :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

• $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \forall X \in E : (\lambda + \lambda') . X = (\lambda . X) + (\lambda' . X)$

$$\begin{cases} (\lambda + \lambda') . X = \lambda + \lambda' \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\lambda') a & (\lambda+\lambda') b \\ (\lambda+\lambda') c & (\lambda+\lambda') d \end{pmatrix}. \\ (\lambda . X) + (\lambda' . X) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda' a & \lambda' b \\ \lambda' c & \lambda' d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\lambda') a & (\lambda+\lambda') b \\ (\lambda+\lambda') c & (\lambda+\lambda') d \end{pmatrix}. \end{cases}$$

d'où $(\lambda + \lambda') . X = (\lambda . X) + (\lambda' . X).$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in E : \lambda(X + Y) = (\lambda . X) + (\lambda . Y).$

$$\begin{cases} \lambda(X+Y) = \lambda . \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = \lambda \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+a') & \lambda(b+b') \\ \lambda(c+c') & \lambda(d+d') \end{pmatrix}. \\ (\lambda . X) + (\lambda . Y) = \lambda . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' \\ \lambda c' & \lambda d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+a') & \lambda(b+b') \\ \lambda(c+c') & \lambda(d+d') \end{pmatrix}. \end{cases}$$

d'où $\lambda(X+Y) = (\lambda . X) + (\lambda . Y).$

• $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \forall X \in E : (\lambda . \lambda') . X = \lambda . (\lambda' . X)$.

$$(\lambda.\lambda').X = \lambda\lambda' \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' a & \lambda\lambda' b \\ \lambda\lambda' c & \lambda\lambda' d \end{pmatrix}.$$

$$\lambda.(\lambda'.X) = \lambda . \begin{pmatrix} \lambda' a & \lambda' b \\ \lambda' c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' a & \lambda\lambda' b \\ \lambda\lambda' c & \lambda\lambda' d \end{pmatrix}.$$

d'où : $(\lambda.\lambda')X = \lambda.(\lambda'.X)$

Alors $(E, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 04 :

$E = \mathbb{R}^2$

a - $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$, $\lambda(x,y) = (\lambda x, y)$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, +)$ un groupe abelien

• + associative :

$$[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'') \overset{?}{=} (x,y) + [(x',y') + (x'',y'')]$$

$$[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'') = (x+x', y+y') + (x'',y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'').$$

$$(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')] = (x,y) + (x'+x'', y'+y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'').$$

d'où + est associative.

• + Commutative :

$$(x,y)+(x',y') = (x',y')+(x,y)$$

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y').$$

$$(x',y')+(x,y) = (x'+x, y'+y)$$

d'où + est commutative

- l'element neutre de + :

$(x,y)+e = e+(x,y) = (x,y)$

$e = (0,0)$

- l'element symetrique de + :

$(x,y)+(x',y') = (x',y')+(x,y) = (0,0)$.

$(x,y)+(x',y') = (0,0)$

$(x+x', y+y') = (0,0)$

$(x',y') = (-x,-y)$

alors $(E,+)$ est un groupe abelien.

- $\forall \lambda, \lambda' \in K, \forall X \in E : (\lambda+\lambda').X = \lambda.X + \lambda'.X$

$(\lambda+\lambda').X = (\lambda+\lambda').(x,y) = ((\lambda+\lambda')x, y)$ ... ①

$\lambda.X + \lambda'.X = \lambda.(x,y) + \lambda'(x,y) = (\lambda x, y) + (\lambda' x, y) = ((\lambda+\lambda')x, 2y)$ .. ②

donc $(\lambda+\lambda').X \neq \lambda.X + \lambda'.X$

$\lambda = \lambda' = 1$, $(x,y) = (1,2)$
① : $(2,2)$ $\neq$
② : $(2,4)$

Alors E n'est pas un $\mathbb{R}$-e.v.

$\underline{b}$ - $(x,y)+(x',y') = (x+x'),(y+y')$, $\lambda(x,y) = (\lambda y, \lambda x)$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2,+)$ un groupe abelien.

- + associative :

$[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'') = (x,y)+[(x',y')+(x'',y'')]$

$[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'') = (x+x', y+y')+(x'',y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$.

$(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')] = (x,y)+(x'+x'', y'+y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$.

d'où + est associative

• + commutatif :

$$(x,y)+(x',y')=(x',y')+(x,y).$$

$(x,y)+(x',y')=(x+x', y+y')$.

$(x',y')+(x,y)=(x'+x, y'+y)$.

d'où + est commutative

• l'élément neutre de + :

$(x,y)+e=e+(x,y)=(x,y)$.

$e=(0,0)$.

• l'élément symétrique de + :

$(x,y)+(x',y')=(x',y')+(x,y)=(0,0)$.

$(x,y)+(x',y')=(0,0)$

$(x+x', y+y')=(0,0)$.

$(x',y')=(-x,-y)$.

Alors $(E,+)$ est un groupe abélien

• $\forall \lambda \in K, \forall X,Y \in E :\ \lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y$.

$\lambda(X+Y)=\lambda(x+x', y+y')=(\lambda(y+y'), \lambda(x+x'))$.

$\lambda.X+\lambda.Y=(\lambda y, \lambda x)+(\lambda y', \lambda x')=(\lambda(y+y'), \lambda(x+x'))$.

d'où $\lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y$.

$\forall \lambda, \lambda' \in K, \forall X \in E : (\lambda + \lambda') \cdot X = \lambda X + \lambda' X$

$(\lambda + \lambda') \cdot X = (\lambda + \lambda')(x, y) = ((\lambda + \lambda') y, (\lambda + \lambda') x).$

$\lambda . X + \lambda' . X = (\lambda y, \lambda x) + (\lambda' y, \lambda' x) = ((\lambda + \lambda') y + (\lambda + \lambda') x).$

d'où $(\lambda + \lambda') X = \lambda X + \lambda' X.$

$\forall \lambda, \lambda' \in K, \forall X \in E : (\lambda . \lambda') . X = \lambda . (\lambda' . X).$

$(\lambda . \lambda') . X = ((\lambda . \lambda') y, (\lambda . \lambda') x)$

$\lambda . (\lambda' . X) = \lambda . (\lambda' y, \lambda' x) = ((\lambda . \lambda') y, (\lambda . \lambda') x).$

d'où $(\lambda . \lambda') X = \lambda . (\lambda' . X)$

Alors E est un $\mathbb{R}$-e.v

2- $(x, y) + (x', y') = (x x', y y')$, $\lambda (x, y) = (\lambda x, y)$

$\Longrightarrow (E, +)$ un groupe commutative.

• + associative :

$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') \stackrel{?}{=} (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')].$

$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x x', y y') + (x'', y'') = (x x' x'', y y' y'').$

$(x, y) + [(x', y') + (x'', y'')] = (x, y) + (x' x'', y' y'') = (x x' x'', y y' y'')$

d'où + associative.

• + commutative :

$(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y).$

$(x, y) + (x', y') = (x x', y y')$

$(x', y') + (x, y) = (x' x, y' y).$

d'où + commutative.