معهد الرياضيات

$1^{ère}$ MI

إمتحان التحليل 1

تمرين 1 : لتكن A مجموعة محدودة وغير خالية من $\mathbb{R}_+^*$

ولتكن $B=\{\alpha-\sqrt{x} \;, x\in A\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

(5p)

1) برهن أن B محدودة

2) من أجل أي شرط يكون $\sup B=\alpha-\sqrt{\inf A}$ و $\inf B=\alpha-\sqrt{\sup B}$. (برهن)

تمرين 2 : ليكن $a>0$ نعرف المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بـ

$$\begin{cases} U_0>0 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(U_n+\dfrac{a}{U_n}\right), \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

(5p)

1) برهن أن

$$U_{n+1}^2-a=\frac{(U_n^2-a)^2}{4U_n^2}$$

2) برهن أن $U_n>0$ و $\forall n\geq 1 : U_n\geq\sqrt{a}$

3) برهن أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة واحسب $\sup A$ و $\inf A$

$A=\{U_n, \; n\in\mathbb{N}^*\}$.

تمرين 3 : 1) برهن أن $\forall x>-1 : \dfrac{x}{1+x}\leq\log(1+x)\leq x$

(4p)

$$\forall x>0, \quad a+\frac{x}{\sqrt{a^2+x}}\leq\sqrt{a^2+2x}\leq a+\frac{x}{a}$$

2) إحسب النهايات

(6p)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+2x\right)^{\frac{1}{2x}}$, 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}E(kx)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{\alpha}}$

بالتوفيق

الحل النموذجي للامتحان

التحليل 1

تمرين 1 :

A محدودة ⇐ (0,5)

$\forall x \in A \Rightarrow \inf A \le x \le \sup A$

و $x \in A \subset \mathbb{R}_+^*$ إذن

يمكن المرور إلى الجذر

$\sqrt{\inf A} \le \sqrt{x} \le \sqrt{\sup A}$

$-\sqrt{\sup A} \le -\sqrt{x} \le -\sqrt{\inf A}$

$\alpha - \sqrt{\sup A} \le \alpha - \sqrt{x} \le \alpha - \sqrt{\inf A}$ (1)

ليكن $y \in B \Leftarrow$

$\exists x \in A : y = \alpha - \sqrt{x}$

ومنه

$\forall y \in B \Rightarrow$

$\alpha - \sqrt{\sup A} \le y \le \alpha - \sqrt{\inf A}$

ومنه B محدودة (0,5)

إذن $\sup B$ و $\inf B$ موجودان

نبين أن

$\sup B = \alpha - \sqrt{\inf A}$ و

$\inf B = \alpha - \sqrt{\sup A}$

من السابق $\alpha - \sqrt{\inf A}$ هو حاد من الأعلى لـ B و $\sup B$ هو أصغر الحواد العليا ومنه

(0,5) $\sup B \le \alpha - \sqrt{\inf A}$ — (1)

من كون B محدودة فإن

$\forall y \in B : y \le \sup B$

ومنه

$\exists x \in A : \alpha - \sqrt{x} \le \sup B$

$\sqrt{x} \ge \alpha - \sup B$

لكي نستطيع التربيع دون أن تتغير المتراجحة يجب أن يكون $0 \le \alpha - \sup B$ (0,5)

ومنه

$x \ge (\alpha - \sup B)^2$

أي $(\alpha - \sup B)^2$ هو حاد من الأدنى لـ A و $\inf A$ هو أكبر الحواد الدنيا ومنه

$\inf A \ge (\alpha - \sup B)^2$

يمكن المرور إلى الجذر (من كون $0 \le \inf A$)

$\sqrt{\inf A} \ge \alpha - \sup B$

(0,5) $\sup B \ge \alpha - \sqrt{\inf A}$ — (2)

من (1) و (2)

$\sqrt{\sup A} \leq \alpha - \inf B$

$\inf B \leq \alpha - \sqrt{\sup A}$ — (2)

من (1) و (2)

$\inf B = \alpha - \sqrt{\sup A}$ 0,5

تمرين 2

$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right), \forall n \in N \end{cases}$

1) نبرهن أن

$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$

$u_{n+1}^2 - a = \left(\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)\right)^2 - a$

$\frac{1}{4}\left[\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right]^2 - a$

$\frac{1}{4u_n^2}\left[u_n^4 + 2au_n^2 + a^2 - 4u_n^2 a\right]$

$\frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^4 - 2u_n a + a^2\right)$

$= \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$ 1

2) نبرهن أن $u_n > 0$

نبرهنها بالتراجع 0,5

> 0

لدينا الخاصية

وهذا الشرط اللازم لتحقق العلاقة هو $\alpha < \sup B$

وكذلك

$\inf B = \alpha - \sqrt{\sup A}$

لدينا من السابق

$\forall y \in B : y \geq \alpha - \sqrt{\sup A}$

و $\inf B$ هو اكبر الحدود الدنيا ومنه

$\inf B \geq \alpha - \sqrt{\sup A}$ — (1) 0,5

وبنفس الطريقة السابقة

$\forall y \in B : y \geq \inf B$

ومنه

$\exists x \in A :$

$\alpha - \sqrt{x} \geq \inf B$

$\sqrt{x} \leq \alpha - \inf B$

الشرط اللازم هو

$\alpha - \inf B \geq 0$ 0,5

ومنه

$x \leq (\alpha - \inf B)^2$

إذا $(\alpha - \inf B)^2$ حاد من الأعلى لـ A و $\sup A$ أصغر الحدود العليا لـ

نفرض أن $U_n > 0$ ونبرهن أن $U_{n+1} > 0$

بما أن $a > 0$ و $U_n > 0$ ومنه

$$\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) > 0$$

ومنه $U_{n+1} > 0$ ومنه

0,5

$\underline{U_n > 0}$

نبرهن أن $U_n \geq \sqrt{a}$

لدينا من السابق

$$U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$$

و $\frac{(U_n^2-a)^2}{4U_n^2} \geq 0$ ومنه

$U_{n+1}^2 - a \geq 0$ 0,5

ومنه

$$(U_{n+1} - \sqrt{a})(U_{n+1} + \sqrt{a}) \geq 0$$

من السابق $U_{n+1} \geq 0$ و

$U_{n+1} + \sqrt{a} \geq 0$ ومنه 0,25

$U_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$

~~$U_{n+1} \geq \sqrt{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}$~~

ومنه

0,5 $U_n \geq \sqrt{a}, \ \forall n \geq 1$

U_n متناقصة

3

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{U_n} - U_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a - U_n^2}{U_n}\right)$$

0,5

لدينا من السابق

$U_n \geq \sqrt{a}$

$U_n^2 \geq a \Rightarrow a - U_n^2 \leq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n \leq 0$

ومنه متناقصة

ومحدودة

U_n متناقصة ومحدودة إذن متقاربة

من الأدنى

$U_0 > U_1 > \dots > U_n$

ومنه $\sup U_n = U_0$ 0,5

و $\inf U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$\lim U_n = \lim U_{n+1} = l$

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$$

$$l = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2 + a}{l}\right)$$

$$l^2 = \frac{1}{2}(l^2 + a) \Rightarrow l^2 = a$$

$l = \sqrt{a}$ أو $l = -\sqrt{a}$

بما أن $U_n > 0$ ومنه

$l = -\sqrt{a}$ مرفوض

ومنه

$\boxed{\inf U_n = \sqrt{a}}$ 0,5

2

تمرين 3 :

$\forall x > -1$:

$\frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x$

نستخدم نظرية التزايدات المنتهية على $[0,x]$

الدالة $\log(1+x)$

$x>0$

الدالة مستمرة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$ ومنه حسب ن ت م

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$ 0,5

$c \in]0,x[$

$\frac{\log(1+x)-\log 1}{x-0} = \frac{1}{1+c}$

$0 < c < x$

$1 < 1+c < 1+x$ 0,...

$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$

ومنه

$\frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1$ 0,5

$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$

لما $-1 < x < 0$

نستعمل ن ت م على $[x,0]$

$\frac{f(0)-f(x)}{0-x} = f'(c)$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+c}$

بنفس الطريقة السابقة

$x < c < 0$

$1 < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}$

$1 < \frac{\log(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$

بالضرب في $0 > x$ نجد ..

$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$

ومنه البرهان 0,5

2) نبرهن أن

$a+\frac{x}{\sqrt{a^2+x}} < \sqrt{a^2+2x} < a+\frac{x}{a}$

نطبق ن ت م على

$f(x) = \sqrt{a^2+2x}$ الدالة معرفة مستمرة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$ ومنه 0,5

$\exists c \in]0,x[$:

$f(x) - f(0) = f'(c)$ ...

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$\alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = \boxed{0}$$

1,5

$\alpha < 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = -\infty$$

التنقيط :

تمرين 1 5 نقط

- تعريف قانون محدودة 0,5
- استنتاج العلاقة $\alpha - V < y < \alpha - V$

1

- قول B محدودة 0,5
- استنتاج $\sup B \leq \alpha - V \inf A$ 0,5
- استنتاج الشرط ① 0,5
- استنتاج $\sup B \geq \alpha - V \inf A$ 0,5
- استنتاج $\inf B \geq \alpha - V \sup A$ 0,5
- استنتاج الشرط ② 0,5
- استنتاج $\inf B \leq \alpha - V \sup A$ 0,5

تمرين 2 (5 P)

① ← (1P) ② ← $U_n > 0$ (1P)

- $U_{n+1}^2 - a \geq 0$ 0,5
- $U_{n+1} + \sqrt{a} \geq 0$ 0,25
- $U_n \geq \sqrt{a}$ 0,5
- U_n متناقصة 0,5
- ~~Supl~~ متقاربة 0,25
- $\sup U_n = U$

6

3) $$\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x} = 0^0$$ ع

$$\lim_{x\to 0} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln(\operatorname{tg} x)}$$

1

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln(\operatorname{tg} x) = 0 \times$$ ع ت

$$\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

تطبيق لوبيطال

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cos^2 x} =$$

ومنه

$$\lim (\operatorname{tg} x)^{\sin x} = \boxed{e^{-1}}$$

4) $$\lim \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty}$$

تمرين 3 (11p)

تحقيق شروط ت ا م (0,5)

تحقيق القانون (0,5)

إيجاد حد لـ المشتقة (0,5)

برهان العلاقة (0,5)

تعيين نقطة مضاعفة لمن يدرس على المجال

$[x,0]$

$-1 < x < 0$

(2,5p) لمن يقوم بالطريقة الثانية وهي دراسة الدوال

$f(x) = \log(1+x) - x \leq 0$

$g(x) = \frac{x}{1+x} - \log(1+x) \leq 0$

2 - تحقيق الشروط (0,5)

- $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$ (0,5)

- حساب المشتقة (0,5)

1 / 1

- العلاقة النهائية (3,5)

- بنفس الطريقة (2,5)

إذا كان استعمل طريقة الدوال والمشتق .

2

(1,5) (1,5)

(1,5) (1,5)

لحساب كل نهاية

2014-2015

محمد الرياضيات

الامتحان الاستدراكي
للتحليل 1

تمرين 1 : (8p)

لتكن A و B مجموعتين معرفتين بـ

$$A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} , n \in N^* \right\}.$$

$$B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n , n \in N^* \right\}$$

برهن أن A و B محدودة
ثم أوجد

$\sup A , \sup B , \inf A , \inf B$. (إختر واحدة فقط)

تمرين 2 : (6p)

لنعتبر $(U_n)_{n \in N}$ متتالية معرفة كما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 4}{9} , \forall n \in N \end{cases}$$

1) برهن أن $\forall n \in N , 0 \leq U_n \leq 2$

2) برهن أن $(U_n)_{n \geq 1}$ رتيبة

3) إستنتج أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم احسب نهايتها

3) عين $\inf A$ و $\sup A$ حيث $A = \{U_n , n \in N\}$

تمرين 3 (6p)

ليكن التابع الحقيقي f المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\arcsin x}{x} & x \in [-1,1] - \{0\} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

1) أدرس الإستمرار والإشتقاق لـ f على مجموعة تعريفه

2) هل المشتق f' مستمر عند 0

بالتوفيق

2013-2014 إمتحان السداسي الأول التحليل 1

تمرين 1 (6p) لتكن A مجموعة من $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي :

$$A = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{1}{2n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- برهن أن A محدودة وأوجد حدودها العليا والدنيا

تمرين 2 (4p) نعتبر (U_n) متتالية معرفة بـ :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{1+U_n}{2+U_n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \\ U_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) برهن أن من أجل كل n $0 < U_n \leq 1$

2) برهن أن U_n رتيبة

3) برهن أن U_n متقاربة وأوجد نهايتها

تمرين 3 (4p) لتكن f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)\ln(1-x) & x \in [0,1[\\ x^2 + ax + b & x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

1) إحسب a و b حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}^+$ وتحقق $f(0)=f(2)$

2) تحقق من شروط نظرية التزايدات المنتهية على $[2,3]$ وأوجد c

3) تحقق من شروط نظرية رول على $[0,1]$ وأوجد c التي تنص عليها النظرية

تمرين 4 (6P) 1) إحسب نهاية الدوال

1) $\lim\limits_{x \to 0} (1+\sin x)^{1/x}$, 2) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin x}{2x + \sin x}$

2) برهن أن

$$\forall x \in [0,+\infty[\ , \ \operatorname{Arctg} x > \frac{x}{1+x^2}$$

3) بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على $f : t \to t^{1+\frac{1}{t}}$ على المجال $[x,x+1]$ بحيث $x>0$ إحسب

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}} \right]$$

(بالتوفيق)

جامعة 20 أوت 1955- سكيكدة	السنة الجامعية 2011-2012
قسم الرياضيات	المادة: تحليل 1
السنة الأولى رياضيات و إعلام آلي	المدة : ساعة ونصف.

امتحان السداسي الأول

الجزء النظري:

التمرين الأول:

أجب بنعم أو لا مع تصحيح الخطأ في حالة وجوده

1. من نتائج مبدأ أرخميدس أن مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة من الأعلى. خ
2. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة. خ
3. كل دالة مستمرة على مجال نصف مغلق فهي تبلغ حديها. خ
4. إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ فإن x_0 نقطة عدم استمرار من النوع الأول. خ

التمرين الثاني:

1. نضع : $A=\left\{1+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ برهن أن 1 هي نقطة تراكم ل A.
2. برهن أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو الصفر و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة فإن $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو الصفر.

الجزء التطبيقي:

التمرين الأول:

ليكن A جزءا محدودا من الأعلى وغير خال من $\mathbb{R}$ و $\alpha\in\mathbb{R}_-^*$ و $\beta\in\mathbb{R}$. نضع: $C=\{\alpha x+\beta, x\in A\}$.

1. برهن أن المجموعة C محدودة من الأسفل.
2. بين أن : $\inf C=\alpha\sup A+\beta$.

التمرين الثاني:

لنعتبر المتتالية التراجعية التالية : $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{1+u_n}{2^n}$; $u_0=0$.

1) برهن أن $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leq u_n\leq 1$ مستنتجا أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\leq\frac{1}{2^{n-2}}$.
2) برهن أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم احسب نهايتها.
3) برهن أن $\forall n\geq 2: u_n>\frac{1}{2^n-1}$.
4) استنتج أن $(u_n)_{n\geq 2}$ متناقصة تماما. هل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.

التمرين الثالث:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية : $(z^2-4z+5)^2-(z+1)^2=0$.
2. برهن أن $\lim_{x\to+\infty}\cos x$ غير موجودة.

بالتوفيق

جامعة 20 أوت 1955- سكيكدة
قسم الرياضيات
السنة الأولى رياضيات و إعلام آلي

السنة الجامعية 2011-2012
المادة: تحليل 1
المدة : ساعة ونصف.

امتحان السداسي الأول

الجزء النظري:

4 ن

التمرين الأول:

أجب بنعم أو لا مع تصحيح الخطأ في حالة وجوده

1. من نتائج مبدأ أرخميدس أن مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة من الأعلى.
2. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.
3. كل دالة مستمرة على مجال نصف مغلق فهي تبلغ حديها.
4. إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ فإن x_0 نقطة عدم استمرار من النوع الأول.

التمرين الثاني:

5 ن

1. نضع $A=\left\{1+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$. برهن أن 1 هي نقطة تراكم ل A.
2. برهن أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو الصفر و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة فإن $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو الصفر.

الجزء التطبيقي:

التمرين الأول:

3

ليكن A جزءا محدودا من الأعلى وغير خال من $\mathbb{R}$ و $\alpha\in\mathbb{R}_-^*$ و $\beta\in\mathbb{R}$. نضع: $C=\{\alpha x+\beta,\ x\in A\}$.

1. برهن أن المجموعة C محدودة من الأسفل.
2. بين أن : $\inf C=\alpha\sup A+\beta$.

التمرين الثاني:

6

لنعتبر المتتالية التراجعية التالية : $u_0=0; \quad \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{1+u_n}{2^n}$.

1) برهن أن $\forall n\in\mathbb{N}: 0\le u_n\le 1$ مستنتجا أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$.
2) برهن أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها.
3) برهن أن $\forall n\ge 2: u_n>\frac{1}{2^n-1}$.
4) استنتج أن $(u_n)_{n\ge 2}$ متناقصة تماما. هل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.

التمرين الثاني:

3

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية : $(z^2-4z+5)^2-(z+1)^2=0$.
2. برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ غير موجودة.

بالتوفيق

جامعة 20 أوت 1955- سكيكدة
قسم الرياضيات
السنة الأولى رياضيات و إعلام آلي

السنة الجامعية 2011-2012
المادة: تحليل 1
المدة : ساعة ونصف.

الامتحان الاستدراكي للسداسي الأول

الجزء النظري:

1. برهن أن إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو l فإن $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $|l|$.

2. ليكن x, y, z ثلاث أعداد حقيقية. برهن أن: $\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$ ، $\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$.

الجزء التطبيقي:

التمرين الأول:

لتكن المجموعة: $A=\left\{\frac{2n+1}{n-2} : n\in\mathbb{N}, n\geq 3\right\}$.

1. برهن أن A محدودة و ليست خالية ثم أوجد $\sup A$ و $\max A$ و $\min A$ و $\inf A$ إن وجدت.

2. استنتج $\sup B$ و $\inf B$ بحيث: $B=\left\{\frac{n+3}{n-2} : n\in\mathbb{N}, n\geq 3\right\}$. دليل: في السؤال 3: أوجد $a\in\mathbb{R}$ بحيث :

$$\frac{2n+1}{n-2}=\frac{n+3}{n-2}+a, \forall n\geq 3$$

التمرين الثاني:

لتكن $a, b, x_0, y_0 \in\mathbb{R}$ بحيث $u_0<v_0$ و $0<a<b$. نعرف: $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}=\frac{au_n+bv_n}{a+b}, \ v_{n+1}=\frac{av_n+bu_n}{a+b}$.

1) برهن أن $\forall n\in\mathbb{N} : u_n<v_n$.

2) ادرس رتابة المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) عين u_n-v_n بدلالة u_0-v_0 ثم استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.

التمرين الثالث:

ليكن u, v, w ثلاث أعداد مركبة معرفة كما يلي : $u=1+i, v=1-i\sqrt{3}, w=\frac{u}{v}$

1. اكتب الشكل الجبري ل w ثم اكتب الشكل المثلثي ل u, v, w.

2. استنتج $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

التمرين الرابع:

باستعمال مفهوم الدوال المتكافئة أحسب النهايتين التاليتين: $1)\ \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1),\ 2)\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x^2}$

مع العلم أن : $\log(1+x)\underset{0}{\sim}x$; $e^x\underset{0}{\sim}1+x$

بالتوفيق

قسم الرياضيات . المادة : تحليل 1
السنة أولى رياضيات وإعلام آلي المدة : ساعة ونصف .

الامتحان الاستدراكي للسداسي الأول .

جزء النظري :

التمرين الأول :

1. أكتب تعريف المجموعة المفتوحة .
2. ماهو مفهوم الكثافة ؟
3. هل $\mathbb{R}$ فضاء تام ؟ لماذا ؟
4. عرّف تقارب متتالية .
5. ماهي العلاقة بين الاستمرار والاستمرار بانتظام .

التمرين الثاني :

1. برهن أن كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي .
2. لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين بحيث ، $(u_n+v_n)_n$ و $(u_n-v_n)_n$ متقاربتين .
برهن أن : (u_n) و (v_n) متقاربتين .

الجزء التطبيقي :

التمرين الأول :

لتكن A مجموعة جزئية وغير خالية من $\mathbb{R}$ لنعتبر المجموعة B المعرفة بـ :

$$B=\{x\in\mathbb{R}_+ : \alpha x^2+b\in A\}$$

بحيث ، $b\in\mathbb{R}_-$ و $\alpha\in\mathbb{R}_+$.

1. برهن أن : A محدودة ~~B محدودة~~ .
2. برهن أن : $\mathrm{Inf}B=\sqrt{\frac{1}{\alpha}(\mathrm{Inf}A-b)}$.

التمرين الثاني :

لتكن a,b,x_0,y_0 أربع أعداد حقيقية تحقق : $0<a<b$ و $x_0<y_0$.
من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ نضع

$$x_{n+1}=\frac{ax_n+by_n}{a+b} , \quad y_{n+1}=\frac{ay_n+bx_n}{a+b}$$

1. برهن بالتراجع أن ، $x_n<y_n$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$.
2. أدرس رتابة كل من المتتاليتين $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$.
3. أكتب : y_n-x_n بدلالة y_0-x_0 . ثم استنتج أن (x_n) و (y_n) متجاورتين .
4. أكتب : y_n+x_n بدلالة y_0+x_0 ثم عين نهاية كل من $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$.

التمرين الثالث :

1. برهن أنه إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ فإن : $\ln(1+f)\underset{a}{\sim}f$.
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x.\ln(1+x)}{x\,\mathrm{tg}\,x}$ مع العلم أن : $\sin x\underset{0}{\sim}x$ و $\mathrm{tg}\,x\underset{0}{\sim}x$ و $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$

بالتوفيق للجميع