بلاحــجي خيرة
أستاذة محاضرة
جامعة الشـلف

قاسمي عبدالرحمان
أستاذ مكلف بالدروس
جامعة الشـــــلف

دليـــل الطـــالب لامتحـــانـــات
التحليـل الريـــاضــــي
2006-1998

لطلبة سنة أولى L.M.D

- **رياضيات و إعلام آلي (M.I)**
- **علـوم و تقنيـــــات (S.T)**
- **علـوم المــــــادة (S.M)**

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة:

نضع هذه المطبوعة، بعنوان "**دليل الطالب لامتحانات التحليل الرياضي**"، بين أيدي طلبة السنوات الجامعية الأولى من التعليم العالي نظام ل.م.د (*L.M.D*) و هي ثمرة مجهود سنين من تدريس مقياس التحليل للجذع المشترك علوم دقيقة، تكنولوجيا و إعلام آلي من النظام القديم و هي موجهة إلى المجالات التالية:

- رياضيات و إعلام آلي (*M.I*)
- علوم و تقنيات (*S.T*)
- علوم المادة (*S.M*)

تعود فكرة وضع هذه المطبوعة أساسا إلى إلحاح الطلبة في بداية كل سنة للحصول على امتحانات السنوات الماضية. عليه، قمنا بإصدار هذه المطبوعة التي تحتوي على أكثر من *30* امتحان، في جزء أول، مع الحلول المفصلة بالجزء الثاني، في مقياس التحليل للسنوات من *1998* إلى *2006* بجامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف. كما أضفنا جزءًا ثالثا يحتوي على تمارين الأعمال الموجهة في المقياس دون حلها لتمكين الطالب من التمرّن.

نشكر الأستاذ بن عودة محمود أستاذ الفيزياء بقسم الجذع المشترك على مساهمته في إنجاز هذه المطبوعة، كما لا يفوتنا أن نشكر الأستاذ دراز المختار أستاذ الرياضيات بقسم الجذع المشترك و الأستاذ أبوبكر خالد سعد الله أستاذ الرياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة القبة على مراجعتهم لهذه المطبوعة و إبداء ملاحظاتهم حولها.

بلاحجي خيرة ، قاسمي عبد الرحمان
جامعة الشلف - أفريل *2007*

المحتويات

الجزء الأول: مواضيع الإمتحانات

الجزء الثاني: حلول الإمتحانات

الجزء الثالث: تمارين إضافية

الجزء الأول

مواضيع الإمتحانات

إمتحانات

1999-1998

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 45 دقيقة)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ: $U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

1. برهن باستعمال تعريف النهاية أنّ: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
2. بيّن أنّه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث: $U_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$
3. أكتب عبارة المجموع $U_0 + U_1 + \dots + U_n$ بدلالة n.
4. إستنتج $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left[U_n + \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{3^n}}\right] \end{cases} \quad , \quad \forall n \geq 1$$

1. برهن أنّ: $U_n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$
2. برهن أنّ (U_n) متزايدة.
3. تحقق من أنّ: $U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n} \quad \forall n \geq 1$
4. إستنتج أنّ: $U_n \leq 1 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}\right] \quad \forall n \geq 1$
5. بيّن أنّ (U_n) متقاربة.

التمرين الثالث:

1. بيّن أنّه إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ و g تابع محدود في جوار x_0 فإنّ $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
2. ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{x} & ; \quad x > 0 \\ (a-b) + x^2 Sin\frac{1}{x} & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

أ. عيّن قيم $a, b \in \Re_+^*$ بحيث يكون f مستمر على $\Re$.

ب. بفرض: $g(x) = f(x) + \pi x$ و بفرض أن $b = 1$ و $a = 2$، بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $\left[-\frac{2}{\pi}, 0\right]$.

3. ليكن التابع h المعرّف بـ:

$$h(x)=\left[\frac{2x}{Cos(x)}\,f\left(\frac{-1}{|x|}\right)\right]^{m}$$

أ. ناقش حسب قيم $m \in \aleph^{*}$ وجود النهاية $\lim_{x\to 0} h(x)$.

ب. أوجد قيم m و $h(0)$ التي من أجلها يكون التابع h مستمر عند الصفر.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

1. ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 1 \\ ax+b & ; \quad x>1 \end{cases}$$

أوجد قيم a و b بحيث يكون f قابلا للإشتقاق عند 1.

2. أ. باستعمال نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\forall x\in]0,1[\quad x<\arcsin(x)<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب. استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\arcsin(x)}{x}$.

التمرين الثاني:

أنشر بجوار x_0 حتى الرتبة n الدالتين المعرفتين بـ:

$$f(x)=\sqrt{\cos(x)} \qquad (x_0=0,\ n=3)$$
$$g(x)=e^{x\,Log(x)} \qquad (x_0=1,\ n=3)$$

التمرين الثالث:

ليكن $m,n\in\aleph^*$. نضع:

$$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx \ ; \quad I(m,0)=\int_0^1 x^m\,dx \ ; \quad I(0,n)=\int_0^1 (1-x^n)\,dx$$

1. برهن أنّ: $\forall n,m\in\aleph \ \ I(m+1,n)=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)$

2. بيّن أنّ: $\forall n,m\in\aleph \ \ I(m+1,n)=I(m,n)-I(m,n+1)$

استنتج العلاقة بين $I(m,n)$ و $I(m,n+1)$.

3. ليكن $m\in\aleph^*$ (ثابت). برهن بالتراجع أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad I(m,n)=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(m+n+1)}$$

التمرين الرابع:

حل المعادلة التفاضلية:

$$(I)\dots\dots\dots\dots\begin{cases} x\,y'=y+x\cos\frac{y}{x} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

من أجل $\alpha \in \Re$ و $n \in \aleph$ نضع:

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^\alpha + 1)^n}$$

1. عيّن العلاقة بين $I_n(x)$ و $I_{n+1}(x)$.
2. فكّك إلى عوامل بسيطة في $\Re[x]$ الدالة:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$$

3. إستنتج $I_1(x)$ ، $I_2(x)$ و $I_3(x)$ من أجل $\alpha = 3$.

التمرين الثاني:

1. أحسب المشتقات الأولى للتوابع التالية:

$$x \mapsto arctg(x) \ ; \quad x \mapsto arctg\left(\frac{1}{x}\right), \ x \in \Re^*$$

2. بيّن أنّ: $\forall x > 0 \quad arctg(x) + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
3. أنشر في جوار 0 التابع $arctg$ حتى الرتبة 5.
4. إستنتج نشر التابع $arctg$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$ حتى الرتبة 5.

التمرين الثالث:

نعرّف التابع f على المجال I حيث $I = \left]1, \sqrt{3}\right[$ بـ:

$$f(x) = 1 - x + \frac{x}{2\pi} arctg(x)$$

1. أحسب f' و f'' ثم استنتج أنّ f' متزايدة على I.
2. بيّن أنّ f متناقص تماما على I.
3. إستنتج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تملك حلا وحيدا في المجال I.

معطاة: $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

إمتحانات

2000-1999

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ: $n \geq 2$, $U_n = \dfrac{2}{n(n-1)(n+1)}$

1. برهن باستخدام تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
2. برهن أنّه يوجد ثلاث أعداد a، b و c بحيث: $\forall n \geq 2 \quad U_n = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n}$
3. أثبت أنّ: $\forall n \geq 2 \quad S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$ حيث $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} U_k$.
4. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 2} U_n$ ثمّ أحسب مجموعها.

التمرين الثاني:

أدرس طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n\, n!}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n}, \quad (\alpha \in \Re) \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n+n}$$

التمرين الثالث:

أدرس حسب قيم a و b طبيعة السلسلتين:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+b}{n}\right)^{n^2}, \quad (b \geq 0) \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}, \quad (a \geq 0)$$

ثم استنتج طبيعة السلسلة:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+b}{n}\right)^{n^2}$$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 \geq 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 1$
2. أ. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} - U_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

ب. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p > q \geq 0$ ، أثبت أنّ:

$$\left|U_p - U_q\right| \leq \frac{1}{2^q}$$

ج. استنتج أنّ (U_n) كوشية. ما هي طبيعة $(U_n)_{n\geq 0}$؟

3. نضع: $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2$ حيث n من $\aleph$.

أ. أوجد عبارة V_n بدلالة n .

ب. أحسب بطريقتين المجموع $\sum_{k=0}^{n} V_k$.

ج. استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 0}$.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} Log(1+x) & ; \quad x\geq 0 \\ ax+b & ; \quad x<0 \qquad (a,b\in\Re) \end{cases}$$

1. عيّن قيم a و b بحيث يكون f مستمرا على $\Re$.
2. عيّن قيم a و b بحيث يكون f قابلا للإشتقاق على $\Re$.
3. نفرض أنّ $a=1$ و $b=0$.
   أ. أدرس قابلية الإشتقاق بإستمرار لـ f على $\Re$.
   ب. ليكن h التابع المعرّف بـ:

$$h(x)=-\frac{1}{Log2}f(x)+arc\cot g(x), \quad x\in\Re$$

- بيّن أنّ h رتيبة تماما على $\Re$.
- بيّن أنّه يوجد جذر وحيد للمعادلة $h(x)=0$ في المجال $[0,1]$.

4. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، بيّن أنّ:

$$\forall x\in\Re \quad f(x)\geq x-\frac{x^2}{2}$$

التمرين الثاني:

أحسب مستخدما النشور المحدودة النهايات التالية:

$$1)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)-(e^x-1)^2}{\sin^3(x)}$$

$$2)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin^2(x)}{x^2+x^3}$$

التمرين الثالث:

من أجل n من $\aleph$، نضع:

$$I(n)=\int_{-1}^{+1}(t^2-1)^n\,dt$$

1. أحسب $I(0)$ و $I(1)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\geq 1 \quad I(n)=-\frac{2n}{2n+1}I(n-1)$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1 \quad I(n)=\frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}$$

التمرين الرابع:

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y}{x}$.
2. تحقق من أنّ التابع $y : x \mapsto x\arcsin(x)$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).
3. استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (I).

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{2x} & ; \quad x>0\\ 2x-1 & ; \quad x<0 \qquad (\alpha,\gamma\in\Re)\\ \gamma & ; \quad x=0\end{cases}$$

1. عيّن قيم α و γ بحيث يكون f مستمرا عند 0.
2. نفرض أنّ $\alpha=-2$ و $\gamma=-1$.

أ. هل يقبل f الإشتقاق عند 0 ؟

ب. استنتج قيم a و b التي من أجلها يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع f في المجال $[a,b]$.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$U_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)dx\,,\quad n\in\aleph$$

1. بيّن أنّ:

$$\forall n\in\aleph\quad U_n=(-1)^n e^{-n\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}\right)$$

2. نضع: $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ حيث n من $\aleph$. أحسب S_n بدلالة n، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}S_n$.
3. استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}U_n$، ثمّ أحسب مجموعها.

التمرين الثالث:

أنشر في جوار x_0 حتى الرتبة n التابعين المعرفين بـ:

$$f(x)=\sqrt{1+\sin^2(x)} \qquad (x_0=0,n=3)$$

$$g(x)=\frac{Log[\cos(x)]}{\cos^2(x)} \qquad (x_0=0,n=4)$$

التمرين الرابع:

ليكن f و g التابعين المعرّفين بـ:

$$f(x)=\frac{1}{1+Log(1+x)} \quad ; \quad g(x)=\frac{1-2x^2+x^3}{1+x}$$

1. أوجد النشر المحدود للتابعين f و g من الرتبة 2 في جوار 0.
2. استنتج أنّ لمنحنيي f و g نفس المماس عند 0 مع تعيين معادلته و وضعية منحنيي f و g إزاءه في جوار الصفر.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

<u>التمرين الأول</u>:

I- ليكن k عددا حقيقيا منتميا إلى المجال $]0,1[$ و لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية حقيقية بحيث:

$$\forall n\in\aleph^* \quad |U_{n+1}-U_n|\leq k\,|U_n-U_{n-1}|$$

1. أثبت أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\leq k^n|U_1-U_0|$$

2. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\geq q\geq 0$ ، أثبت أنّ:

$$|U_p-U_q|\leq k^q\,\frac{|U_1-U_0|}{1-k}$$

3. استنتج أنّ (U_n) كوشية.
4. ما هي طبيعة $(U_n)_{n\geq 0}$؟

II- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\aleph}$ المعطاة بالصيغة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=1+\frac{1}{2}\sin(U_n)\ ,\ n\in\aleph \end{cases}$$

أثبت، مستدلا بالجزء (I) أنّ (U_n) متقاربة.

(استخدم المتراجحة: $\forall x,y\in\Re \quad |\sin(x)-\sin(y)|\leq|x-y|$)

<u>التمرين الثاني</u>:

لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة و متناقصة مع $\sum_{n\geq 1}U_n<+\infty$.

1. نضع $S_n=\sum_{k=1}^{n}k$ حيث n من $\aleph^*$.

أ. أحسب $S_{2n}-S_n$.

ب. برهن أنّه: $\forall n\in\aleph^* \quad 0\leq nU_{2n+1}\leq nU_{2n}\leq S_{2n}-S_n$

ج. استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}(2n+1)U_{2n+1}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n}=0$.

د. إستنتج طبيعة المتتالية (nU_n) و أحسب $\lim_{n\to+\infty}nU_n$.

2. نضع $V_n=n(U_n-U_{n+1})$ مع n من $\aleph^*$.

أ. برهن أنّ: $\forall n\geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n}V_k=-(n+1)U_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}U_k$

ب. برهن صحّة الإستلزام: $\sum_{n\geq 1}V_n<+\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 1}U_n<+\infty$

التمرين الثالث:

أنشر في جوار x_0 حتى الرتبة n التوابع المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{Log\left(\cos^2(x)\right)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \quad , \quad (x_0=0, n=2)$$

$$g(x)=e^{x.Log\sqrt{x}} \quad , \quad (x_0=1, n=2)$$

$$h(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad , \quad (x_0=+\infty, n=2)$$

التمرين الرابع:

لتكن $\left(f(n)\right)_{n\in\aleph}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$f(n)=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$$

1. أحسب $f(0)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad f(n+1)=-e^{-1}+(n+1)f(n)$$

3. بيّن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad f(n)=n!e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$$

4. بيّن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)<\frac{3}{e(n+1)}$$

(استخدم دستور ماك لوران-لاغرانج المطبق على التابع $x\mapsto e^x$)

5. إستنتج

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)$$

6. إستنتج طبيعة السلسلتين:

$$\sum_{n\geq 1} f(n) \quad ; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n}$$

إمتحانات

2001-2000

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

<u>التمرين الأول</u>:

لتكن A المجموعة المعرفة بـ:

$A=\{U_n,\quad n\in\aleph\}$ ، حيث: $U_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

1. برهن باستخدام تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$
2. بيّن أنّ المجموعة A محدودة في $\Re$.
3. عيّن $\sup A$ و $\inf A$.
4. عيّن (في حالة الوجود) $\min A$ و $\max A$.

<u>التمرين الثاني</u>:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ:

$$U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Log(n),\quad n\geq 1$$

1. بيّن أنّ: $\forall n\geq 2\quad Log(n)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[Log(k+1)-Log(k)\right]$
2. بالاستعانة بالقضية: $\dfrac{1}{k+1}\leq Log(k+1)-Log(k)\leq\dfrac{1}{k}\quad \forall k\geq 1$ أثبت أنّ:

$$\forall n\geq 2\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq Log(n)\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1\quad \frac{1}{n}\leq U_n\leq 1$$

4. برهن أنّ (U_n) متناقصة.
5. استنتج أنّ (U_n) متقاربة نحو نهاية l من $[0,1]$.

<u>التمرين الثالث</u>:

أدرس حسب قيم a و b طبيعة السلسلتين:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n},\quad (a>0)\qquad ;\qquad \sum_{n\geq 1}\left(b+\frac{1}{n}\right)^n,\quad (b>0)$$

ثم استنتج طبيعة السلسلة:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n}+\sum_{n\geq 1}\left(b+\frac{1}{n}\right)^n$$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2+U_n} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. تأكد من أنّ (U_n) ذات حدود موجبة.
2. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad |U_{n+1} - U_n| \le \dfrac{1}{4^n} |U_1 - U_0|$
3. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p \ge q \ge 0$ أثبت أنّ:
$$|U_p - U_q| \le \frac{1}{4^q} \times \frac{4|U_1 - U_0|}{3}$$
4. استنتج أنّ (U_n) كوشيه.
5. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
6. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\ge0} U_n$.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sh(1+x)}{x^2-1} & ; \quad x<-1\\[2mm] \dfrac{1}{8}\left(x^2-5\right) & ; \quad x\geq -1\end{cases}$$

I- 1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار -1 للتابعين:

$$x\mapsto sh(1+x) \quad ; \quad x\mapsto ch(1+x)$$

2. استنتج، مستخدما النشور المحدودة:

1) $$\lim_{x\to -1}\frac{\mathrm{sh}(1+x)+\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)(x+1)}$$

2) $$\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-1\right)\mathrm{ch}(1+x)-2x\,\mathrm{sh}(1+x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

3) $$\lim_{x\to -1}\frac{\mathrm{sh}(1+x)}{x^2-1}$$

II- بالاستعانة بما سبق، أثبت أنّ:

أ. f مستمرة عند -1.

ب. f قابل للاشتقاق عند -1.

ج. f قابل للاشتقاق بإستمرار على المجموعة $\Re$.

التمرين الثاني:

نضع:

$$I(n)=\int_{-\infty}^{0}t^n e^t\,dt\ , \quad n\geq 1 \qquad ; \qquad I(0)=\int_{-\infty}^{0}e^t\,dt$$

1. أحسب $I(0)$.

2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\geq 1 \quad I(n)=-nI(n-1)$$

3. إستنتج أنّ:

$$\forall n\in \aleph \quad I(n)=(-1)^n n!$$

التمرين الثالث:

ليكن f و g التابعين المعرّفين بـ:

$$f(x)=\frac{x-Log(1+x)}{\cos(x)} \quad ; \quad g(x)=Log(2+\sin(2x))$$

1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 للتابعين f و g في جوار 0.
2. استنتج أنّ للتابعين f و g مماسين عند الصفر يُطلب تعيين معادلتيهما و وضعية منحنيي f و g إزاءهما في جوار الصفر.

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(\alpha x)}{x^2} & ; \quad x<0\\ Log(1+x) & ; \quad x\geq 0\end{cases}$$

1. عيّن قيمة α التي يكون من أجلها f مستمرا عند 0.
2. هل f يقبل للإشتقاق عند 0.
3. ليكن h التابع المعرّف بـ:

$$h(x)=\sqrt{3}f(x)-\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right),\quad x\geq 0$$

أ. بيّن أنّ h رتيب تماما.

ب. برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,1[$.

ج. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، بيّن أنّ:

$$\forall x\in\Re^{+}\quad |h(x)+1|\leq\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)x$$

التمرين الثاني:

أحسب مستخدما النشور المحدودة من الرتبة n النهايات التالية:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)-\dfrac{x^2}{2}}{\sin^2(x)-x^2}\qquad (n=4)$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}-Log(1+x)-\dfrac{3}{2}x^2}{\sin(x)-x\cos(2x)}\qquad (n=3)$$

التمرين الثالث:

ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، نضع:

$$I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

1. أحسب $I(0)$.
2. بإستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\in\aleph^*\quad I(n)=\frac{2n}{2n-1}I(n+1)$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad I(n+1)=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}$$

<u>**التمرين الرابع**</u>:

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$x\,y'+2y=\frac{x}{1+x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

1. حلّ المعادلة التفاضلية $x\,y'+2y=0$.
2. تحقق من أنّ التابع $y:x\mapsto\frac{x-\mathrm{arctang}(\mathrm{x})}{\mathrm{x}^2}$ حل خاص للمعادلة (I).
3. استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (I).

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

-I ليكن k عددا حقيقيا منتميا إلى المجال $]-1,1[$ و لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية حقيقية تحقق:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}-U_n=k^n$$

1. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\geq q\geq 0$ ، أثبت أنّ: $\left|U_p-U_q\right|\leq k\ \dfrac{|k|^q}{1-k}$
2. استنتج أنّ (U_n) كوشية.

-II نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\aleph}$ المعطاة بالصيغة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0=1\,,U_1=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n+U_{n-1}}{2}\ , \qquad n\geq 1 \end{cases}$$

1. بيّن أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_{n+1}-U_n=-\dfrac{U_n-U_{n-1}}{2}$
2. أثبت أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_{n+1}-U_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$
3. أثبت، مستدلا بالجزء (I)، أنّ (U_n) متقاربة.

التمرين الثاني:

لتكن $(a_n)_{n\in\aleph}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة و متناقصة مع $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. نضع:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\ , \quad n\in\aleph$$

1. أحسب $S_{2n+1}-S_{2n}$.
2. برهن أنّه: $\forall n\in\aleph \quad S_{2n+1}\leq a_0$
3. أدرس رتابة $(S_{2n+1})_{n\in\aleph}$، ثم إستنتج طبيعة المتتاليتين $(S_{2n+1})_{n\in\aleph}$ و $(S_{2n})_{n\in\aleph}$.
4. استنتج طبيعة المتتالية (S_n).
5. استنتج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n$.

التمرين الثالث:

أنشر بجوار x_0 حتى الرتبة n التوابع المعرفة بـ:

$$f(x)=Log(e+\sin(e.x)) \quad , \quad (x_0=0, n=2)$$

$$g(x)=\mathrm{sh}(1-\cos(\mathrm{x})) \quad , \quad (x_0=0, n=2)$$

$$h(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad , \quad (x_0=+\infty, n=2)$$

التمرين الرابع:

لتكن $(I_n)_{n\in\aleph}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}[\sin(x)]^n dx\,,\quad n\in\aleph$$

1. أحسب I_0 و I_1.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\geq 2\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1\quad I_{2n}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\forall n\geq 1\quad I_{2n+1}=\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$$

4. أ. بالاستعانة بالمتراجحة $\sin(x)\leq 1$ من أجل أي x من $\Re$، تحقق من أنّ:

$$\forall n\in\aleph\quad I_{n+1}\leq I_n$$

ب. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1\quad 1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

ج. استنتج أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\right]^2\times n=\frac{1}{\pi}$$

إمتحانات

2002-2001

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

I- أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. كل متتالية متقاربة محدودة.
2. كل متتالية متناقصة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.
3. $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 0} U_n \; CV$.
4. مجموع سلسلتين ذاتي حدود موجبة و متباعدتين هو سلسلة متباعدة.

II- برهن صحة الإستلزام:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \subset \Re \\ \\ A \neq \phi \\ \\ B \text{ محدودة} \end{array}\right\} \Rightarrow (\sup A \leq \sup B)$$

III- أدرس طبيعة السلاسل:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 2^n}$$

التمرين الثاني:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع:

$$U_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , \quad n \text{ زوجي} \\ \\ \dfrac{n^2}{n^2+1} & , \quad n \text{ فردي} \end{cases}$$

1. باستخدام تعريف النهاية، بيّن أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

2. أدرس رتابة $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\aleph^*}$ و $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\aleph^*}$

3. نضع: $A = \left\{U_n \,/\, n = 2p,\; p \in \aleph^*\right\}$ و $B = \left\{U_n \,/\, n = 2p+1,\; p \in \aleph\right\}$.

أ. بيّن أنّ المجموعتين A و B محدودتان في $\Re$.

ب. عين $\sup A$ ، $\sup B$ ، $\inf A$ و $\inf B$.

4. استنتج $\sup(A \cup B)$ و $\inf(A \cup B)$.

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{U_n} + \dfrac{U_n}{2} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 2$.
2. برهن أنّ (U_n) متناقصة.
3. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
4. استنتج مع التعليل: $\underset{n\in\aleph}{Sup}\, U_n$ و $\underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n$.
5. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$.

التمرين الرابع:

لتكن (U_n) متتالية ذات حدود موجبة متناقصة و متقاربة نحو الصفر ($\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$) و $(V_n)_{n\in\aleph}$ المتتالية المعرّفة بـ:

$$V_n = n(U_n - U_{n+1})$$

1. برهن أنّ:

أ. $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} V_k = -(n+1)U_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} U_k$

ب. $\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = U_{n+1}$ حيث $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{V_k}{k}$

2. استنتج أنّ: $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n+1} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (n+1)\frac{V_k}{k}$
3. نفرض أنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1} V_n$ متقاربة. برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=1}^{n+1} U_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} V_k$$

ثم استنتج أنّ $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة.

4. **تطبيق:** أدرس طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ حيث $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$، ثم استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} V_n$ مع $V_n = n(U_n - U_{n+1}), \quad n \geq 0$.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن f تابعا حقيقيا ولتكن x_0 قيمة من $\Re$.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. إذا كان f يقبل نهاية عند x_0، فإنّ f مستمر عند x_0.
2. (f مستمر على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f مستمر على $[a,b]$ و f مستمر على $[b,c]$)
3. (f قابل للاشتقاق على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f قابل للاشتقاق على $[a,b]$ $\wedge$ f قابل للاشتقاق على $[b,c]$)
4. (f مستمر على $]a,b[$ و $0 > f(a)\times f(b)$) $\Rightarrow$ $(\exists c\in]a,b[\,/\, f(c)=0)$
5. إذا كان f يقبل نشرا محدودا في جوار x_0، فإنّ f مستمر عند x_0.
6. إذا كان f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0، فإنّ f يحقق شروط دستور "ماك لوران" مع باقي "يونغ" من الرتبة n.

II- ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x} & ; \quad x\le -1 \\ -ax+b & ; \quad -1\le x\le 1 \quad (a\in\Re, b\in\Re) \\ \dfrac{2a}{x} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

عيّن قيم a و b بحيث يكون f مستمرا على $\Re$.

III- أحسب مستخدما النشور المحدودة النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right) \quad ; \quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x.\mathrm{arctg}(x)}$$

IV- أنشر في جوار 1 حتى الرتبة 2 التابع المعرف بـ:

$$f(x)=\frac{Log(x)}{x^2}$$

ثمّ استنتج أنّ لمنحنى f مماسا عند 1، يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنى f بالنسبة له في جوار 1.

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{ch}(x)}{\sin(x)} & ; \quad -1<x<0 \\ -\dfrac{1}{2}\arcsin(x) & ; \quad 0\le x<1 \end{cases}$$

I- 1.باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \le f(x) \le -\frac{x}{2}$$

2. استنتج $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x}$.

II- أثبت أنّ:

1. f قابل للاشتقاق على $\left]-1,1\right[$.
2. f قابل للاشتقاق بإستمرار على $\left]-1,1\right[$.

<u>التمرين الثالث</u>:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int \frac{dx}{x\left(1+(Logx)^2\right)} \quad ; \quad \int \arcsin(x)dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} Log(1-x) & ; \quad x\le 0 \\ \sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

I- 1. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\forall x\in\left]0,1\right[\quad \frac{-x}{1-x}\le Log(1-x)\le -x$$

2. نضع:

$$h(x)=\sqrt{3}f(-x)-\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right), \quad x\ge 0$$

أ. بيّن أنّ h رتيبة تماما.

ب. برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]0,1\right[$.

II- 1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين:

$$x\mapsto Log(1-x) \quad ; \quad x\mapsto \sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3}$$

2. استنتج أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند 0.

3. استنتج أنّ لمنحنى f مماسا عند 0، يُطلب تعيين معادلته و وضعيته بالنسبة لمنحنى f.

4. هل التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار 0؟

III- 1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 1 في جوار $+\infty$ التابع f.

2. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. استنتج أنّ لمنحنى f خطا مقاربا في جوار $+\infty$ يُطلب تعيين معادلته و وضعيته بالنسبة لمنحنى f في جوار $+\infty$.

ملاحظة: الأجزاء **I**، **II** و **III** مستقلة عن بعضها البعض.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$U_n=\int_0^1 (1-x)^n \operatorname{ch}(x)dx \,, \quad n\ge 0$$

I- 1. أحسب U_0.

2. برهن أنّ: $\forall n\in\aleph \quad 0\le U_n\le \operatorname{sh}(1)$

3. برهن أنّ: $\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}\le U_n$

4. استنتج مع التعليل طبيعة المتتالية (U_n).

II- 1. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[U_{n+2} + (n+2)\right]$$

2. باستخدام طريقة الحصر، استنتج:

أ. $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

ب. طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n \geq 0} U_n$.

3. استنتج مع التعليل:

$$Sup\{U_n\,, \quad n \in \aleph\} \quad ; \quad Inf\{U_n\,, \quad n \in \aleph\}$$

<u>التمرين الثالث</u>:

ليكن f تابعا حقيقيا و a عددا حقيقيا. نفرض أنّ التابع f من الصنف C^3 في جوار a .

نضع:

$$g(h) = \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3}$$

باستخدام دستور "تايلور" مع باقي "يونغ"، أحسب $\lim\limits_{h \to 0} g(h)$.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2-U_n} \qquad , \qquad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n \leq 1$
2. برهن أنّ (U_n) متزايدة.
3. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
4. استنتج مع التعليل: $Sup\{U_n , \quad n \in \aleph\}$ و $Inf\{U_n , \quad n \in \aleph\}$.
5. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ:

$$U_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \ , \quad n \in \aleph^*$$

1. برهن باستعمال تعريف النهاية أنّ: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
2. نضع $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ مع n من $\aleph$.
   - أ. أحسب قيمة S_n بدلالة n.
   - ب. استنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
   - ج. استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n$.

التمرين الثالث:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} & ; \qquad x \neq 0 \\ 0 & ; \qquad x = 0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ f يقبل الإشتقاق على $\Re$، ثم أحسب f'.
2. هل التابع f' مستمر عند 0؟
3. هل التابع f يقبل الإشتقاق بإستمرار على $\Re$ ؟
4. باستخدام دستور "ماك لوران" مع باقي "لاغرانج" من الرتبة 1 للتابع $x \mapsto \sin(x)$، برهن أنّ:

$$\forall x \in \Re \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

I- أحسب مستخدما النشور المحدودة من الرتبة 3 النهايات التالية:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x\,Log(1+x)}{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{Log(1+x^2)}{x.\mathrm{arctg}(x)}$$

II- أحسب:

$$\int x^2\sin(x)dx$$

إمتحانات

2003-2002

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن A جزءا غير خال من $\Re$ و a عددا حقيقيا و لتكن (u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات عددية.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. $\left(\sup(A)\right.$ موجود و $\inf(A)$ موجود$) \Rightarrow (A$ جزء محدود من الأعلى في $\Re)$

2. $(a \in A) \Rightarrow (a$ حد أعلى لـ A في $\Re)$

3. $\left.\begin{array}{ll} \forall n \in \aleph, & W_n \le U_n \le V_n \\ (W_n) \text{ و } (V_n) & \text{متقاربتين} \end{array}\right\} \Rightarrow ((U_n)$ متقاربة$)$

4. $((U_n)$ متقاربة$) \Rightarrow ((U_{2n})$ و (U_{2n+1}) متقاربتين$)$

5. $((U_n)$ و (V_n) متقاربتين$) \Rightarrow ((U_n + V_n)$ متقاربة$)$

6. $\left(\sum_{n\ge0} U_n\right.$ و $\sum_{n\ge0} V_n$ من نفس الطبيعة$) \Rightarrow (\forall n \in \aleph \quad 0 \le U_n \le V_n)$

7. $\left.\begin{array}{ll} \forall n \in \aleph & U_n \ge 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{2} & \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0\right)$

8. $\left.\begin{array}{l} S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k \\ (S_n) \text{ محدودة من الأعلى} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum\limits_{k\ge0} U_k \text{ متقاربة}\right)$

II- أدرس طبيعة السلاسل:

$$\sum_{n\ge1} \frac{n}{a^n},\ (a>1) \quad ; \quad \sum_{n\ge0} \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad ; \quad \sum_{n\ge2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = -3 + \dfrac{4}{2 - U_n} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad -2 < U_n \leq 0$
2. برهن أنّ (U_n) متناقصة.
3. استنتج مع التعليل طبيعة (U_n) ثم أحسب نهايتها.
4. أحسب مع التعليل في حالة وجودها:

$$\underset{n\in\aleph}{Min}\, U_n \text{ ؛ } \underset{n\in\aleph}{Max}\, U_n \text{ ؛ } \underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n \text{ ؛ } \underset{n\in\aleph}{Sup}\, U_n$$

5. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$.

التمرين الثالث:

لتكن (U_n) متتالية متقاربة نحو الصفر $(\lim_{n\to+\infty} U_n = 0)$ و (V_n) متتالية معرّفة بـ:

$$\forall n \in \aleph \quad V_n = U_{2n} + U_{2n+1}$$

نضع: $T_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ و $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ حيث n من $\aleph$.

1. بيّن أنّ: $\forall n \in \aleph, T_n = S_{2n+1}$
2. أكتب S_{2n} بدلالة S_{2n+1}.
3. برهن أنّ:

$$\sum_{n\geq 0} U_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} V_n \text{ متقاربة}$$

4. تطبيق: عيّن طبيعة السلسلة

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$$

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sh}(x)+1 & ; \quad x<0\\ a^2x+b & ; \quad x\geq 0\end{cases} \qquad (a\in\Re,\ b\in\Re)$$

1. عيّن قيم a و b بحيث يكون f مستمرا عند 0.
2. عيّن قيم a و b بحيث يكون f قابلا للإشتقاق عند 0.

II- أحسب مستخدما النشور المحدودة النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x)}$$

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\operatorname{arctg}(x) & ; \quad x\leq 1\\ (1+x)e^{1/x-1} & ; \quad x>1\end{cases}$$

I- 1. مستخدما نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\frac{x}{1+x^2}\leq arctgx\leq x\,,\quad \forall x>0$$

2. استنتج أنّ:

$$x(x-1)\leq f(x)\leq\frac{x(x-1)}{1+x^2},\quad \forall x\in[0,1]$$

II- 1. أدرس استمرارية التابع f عند 1.

2. هل التابع f قابل لاشتقاق عند 1؟ (علّل إجابتك)
3. هل التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة 3 في جوار 1؟
4. بيّن أنّ التابع f' رتيب تماما على المجال $]0,1[$.
5. بيّن أنّ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,1[$.

III- 1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0.

2. استنتج أنّ منحنى f مماسا عند 0، يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنى f بالنسبة له في جوار 0.

التمرين الثالث:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad ; \qquad \int x\operatorname{arctg}(x)\,dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

لتكن المتتالية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = 1 + \dfrac{U_{n-1}}{n-1}, \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

1. أحسب U_2 .
2. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph^* \quad 1 \leq U_n \leq 2$
3. برهن باستخدام تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.
4. برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_n = 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times(2)\times 1}$$

5. برهن باستخدام طريقة الحصر أنّ:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^{n-1}}\right) = 0$$

6. ما هي طبيعة $\sum\limits_{n \geq 2} V_n$ حيث $V_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^{n-1}}$ ؟

التمرين الثاني:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = x^2 Log\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2\sqrt{x^2+1}$$

1. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$.
2. استنتج وجود خط مقارب في جوار $+\infty$ لمنحنى f يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنى f إزاءه في جوار $+\infty$.

التمرين الثالث:

نضع:

$$U_n = \int_0^1 Log\left[(x+1)(x+2)\times\cdots\times(x+n)\right]dx, \qquad n \in \aleph^*$$

1. أحسب $\int_0^1 Log(x+k)dx$ حيث $k \in \aleph^*$.
2. إستنتج أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n = (1+n)Log(1+n) - n$
3. حدّد طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n \geq 1} U_n$.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 7 - \dfrac{6}{U_n}, \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 < U_n < 6$
2. برهن أنّ (U_n) متزايدة.
3. إستنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
4. عيّن مع التعليل في حالة وجودها :

$Min\{U_n / n \in \aleph\}$ ؛ $Max\{U_n / n \in \aleph\}$ ؛ $Inf\{U_n / n \in \aleph\}$ ؛ $Sup\{U_n / n \in \aleph\}$

5. استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n \geq 0} U_n$.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^2+1} - \cos(x)\right], \quad x \neq 0$$

1. جد النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0.
2. استنتج $\lim_{x \to 0} f(x)$.
3. استنتج مع التعليل أنّ التابع f يقبل تمديدا بالإستمرار عند 0 نرمز له بـ: $\tilde{f}$.
4. مستخدما الإجابة عن السؤال الأول:

أ. برهن أنّ التابع $\tilde{f}$ يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. أعط معادلة المماس لمنحنى $\tilde{f}$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لمنحنى $\tilde{f}$ في جوار الصفر.

5. بيّن أنّ المعادلة $\tilde{f}(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين الثالث:

مستخدما النشر المحدود، أحسب حسب قيم الوسيط λ النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x) - \lambda x}$$

التمرين الرابع:

نعتبر التكاملين:

$$J = \int_0^{\pi/2} x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^{\pi/2} x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

1. أحسب $I + J$.
2. أحسب $I - J$.
3. إستنتج قيم I و J.

إمتحانات

2004-2003

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ:

$$U_n = \frac{1-3n}{2n-1}, \quad n \geq 1$$

1. برهن مستخدما تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\frac{3}{2}$
2. برهن أنّ (U_n) رتيبة.
3. أحسب مع التعليل في حالة وجودها:

$$\underset{n\in\aleph^*}{Min}\, U_n \ ؛\ \underset{n\in\aleph^*}{Max}\, U_n \ ؛\ \underset{n\in\aleph^*}{Inf}\, U_n \ ؛\ \underset{n\in\aleph^*}{Sup}\, U_n$$

II- ليكن A جزءا من $\Re_-^*$ غير خال و محدودا مع $\sup A \neq 0$، و لتكن $\frac{1}{A}$ المجموعة المعرّفة بـ:

$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{x}\ , \quad x \in A\right\}$$

1. برهن أنّ: $SupA < 0$.
2. برهن أنّ: $\frac{1}{A}$ جزء محدود.
3. برهن أنّ: $Sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{Inf(A)}$.
4. استنتج أنّ: $Inf\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{Sup(A)}$.

III- نضع $A = \{U_n\,, \quad n \in \aleph^*\}$ حيث (U_n) المتتالية المعرّفة في الجزء (I). أحسب:

$$Inf\left(\frac{1}{A}\right) \quad ; \quad Sup\left(\frac{1}{A}\right)$$

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين المعرّفتين بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 1, V_0 = 2 \\ U_n = \frac{1}{3}(2U_{n-1} + V_{n-1}), \quad n \geq 1 \\ V_n = \frac{1}{3}(U_{n-1} + 2V_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

1. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n < V_n$
2. بيّن أنّ (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة.
3. أثبت أنّه:

$$\exists k \in]0,1[: \quad \forall n \in \aleph \quad V_n - U_n = k^n$$

ثم استنتج النهاية التالية: $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n)$

4. استنتج أنّ (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l.
5. عيّن قيمة l (يمكنك الإستفادة من كون المجموع $U_n + V_n$ لا يتعلق بـ n).

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن f تابعا حقيقيا معرفا على مجال I من $\Re$ و x_0 عددا حقيقيا من I و ليكن n من $\aleph^*$.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. إذا كان f مستمرا عند x_0، فإنّ f يقبل نهاية عند x_0.
2. (f مستمر بانتظام على I) $\Leftrightarrow$ (f مستمر على I)
3. (f يقبل الإشتقاق عند x_0) $\Leftrightarrow$ (f مستمر عند x_0)
4. (f يقبل الإشتقاق عند x_0) $\Leftrightarrow$ (f يقبل الإشتقاق من اليمين و من اليسار عند x_0)
5. التابع g المعرّف بـ $g(x)=x+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار 0.
6. (f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0) $\Leftrightarrow$ ($\exists l\in\Re / \lim\limits_{x\to 0} f(x)=l$)

II- مستخدما نظرية التزايدات المنتهية بين أنّ:

$$\forall x\in[0,1[\quad x\le \arcsin x\le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

III- ليكن f التابع المعرف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(ax)}{x^2} & ; \quad x\neq 0\\[2mm] 0 & ; \quad x=0\end{cases}\qquad (a\in\Re)$$

1. عيّن قيمة a التي من أجلها يكون f مستمرا عند 0.
2. نفرض أنّ $a=1$.

أ. برهن أنّ f يقبل الاشتقاق على $\Re$، ثم أحسب f'.

ب. عيّن المجموعة E التي يكون عليها f قابلا للاشتقاق بإستمرار.

التمرين الثاني:

I- ليكن f و g تابعين معرّفين بـ:

$$f(x)=(Log(1+x))^2 \quad ; \qquad g(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x^2)}$$

1. جد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين f و g.
2. إستنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\,g(x)}$
3. استنتج أنّ لمنحنيي f و g مماسين عند 0، يُطلب تعيين معادلتيهما و وضعية منحنيي f و g إزاءهما في جوار الصفر.

II- ليكن h التابع المعرّف بـ:

$$h(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

جد النشر المحدود للتابع $x \mapsto \frac{h(x)}{x}$ من الرتبة 2 في جوار $+\infty$، ثمّ استنتج أنّ لمنحنى h خطا مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ يُطلب تعيين معادلته و وضعيته بالنسبة لمنحنى h في جوار $+\infty$.

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

I- ليكن k عددا حقيقيا منتميا إلى المجال $]0,1[$ و لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية عددية بحيث:

$$\forall n\in\aleph^* \quad |U_{n+1}-U_n|\le k|U_n-U_{n-1}|$$

1. أثبت أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

2. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\ge q\ge 0$ ، أثبت أنّ:

$$|U_p-U_q|\le k^q\frac{|U_1-U_0|}{1-k}$$

3. استنتج أنّ $(U_n)_{n\in\aleph}$ كوشية.
4. ما هي طبيعة (U_n) ؟

II- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\aleph}$ المعطاة بالصيغة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0>0 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2+U_n} \quad , \quad n\in\aleph \end{cases}$$

1. بيّن أنّ: $\forall n\in\aleph \quad U_n\ge 0$
2. أثبت، مستدلا بالجزء (I)، أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{1}{1+x^2}-\cos(x)\right] & ; \quad x\ne 0 \\ -\dfrac{1}{2} & ; \quad x=0 \end{cases}$$

1. جد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 2 في جوار 0.
2. استنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. استنتج أنّ التابع f مستمر عند 0.
4. برهن أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند 0.
5. أعط معادلة المماس لمنحنى f عند 0 ثمّ حدّد وضعية هذا المنحنى بالنسبة للمماس في جوار الصفر.
6. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين الثالث:

مستخدما النشر المحدود، أحسب حسب قيم الوسيط λ النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Log(1+x)-\lambda x}$$

التمرين الرابع:

من أجل n من $\aleph^*$، نضع:

$$I(n)=\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$$

1. أحسب $I(1)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\in\aleph^* \quad I(n+2)=\frac{n+1}{2}I(n)-\frac{1}{2e}$$

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين المعرّفتين بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \quad , \quad V_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \qquad , \qquad n \geq 0 \\ V_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \qquad , \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

1. بيّن أنّ حدود المتتاليتين موجبة.
2. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph \quad V_n < U_n$
3. بيّن أنّ (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة.
4. أثبت صحة: $\exists k \in]0,1[\; / \quad \forall n \in \aleph \quad (U_{n+1} - V_{n+1}) \leq k^{n+1}$

 ثم استنتج أنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$
5. استنتج أنّ (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l.
6. عيّن قيمة l (يمكنك الإستفادة من كون الجداء $U_n V_n$ لا يتعلق بـ n).
7. أحسب مع التعليل و في حالة الوجود: $\underset{n\in\aleph}{Max} U_n$ ، $\underset{n\in\aleph}{Sup} U_n$ و $\underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n$ و كذا $\underset{n\in\aleph}{Min} V_n$ ، $\underset{n\in\aleph}{Sup} V_n$ و $\underset{n\in\aleph}{Inf}\, V_n$.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + x + \sin x \times \sin \dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re$ ثم أحسب f'.
2. عيّن المجموعة E التي يكون عليها f قابلا للاشتقاق بإستمرار.

التمرين الثالث:

I- أنشر بجوار x_0 حتى الرتبة n التابعين المعرفين بـ:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin^2(x)} \quad , \quad (x_0 = 0, n = 2)$$

$$g(x) = e^{x \, Log\sqrt{x}} \quad , \quad (x_0 = 1, n = 2)$$

II- أحسب مستخدما النشور المحدودة النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + \cos x) - 2\,\mathrm{tg}\, x}{2x - \sin x - \mathrm{tg}\, x}$$

إمتحانات

2005-2004

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن M عددا حقيقيا و (U_n) متالية عددية وليكن f تابعا حقيقيا معرفا على $[a,c]$.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير :

1. كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بـ M متقاربة نحو M.
2. كل متتالية متناقصة وتقبل حدا أدنى M متقاربة نحو M.
3. (U_n) متباعدة $\Leftrightarrow \left[\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty \ \vee \ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \right]$
4. (U_n) متقاربة $\Leftrightarrow [\ \forall l \in IR, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph : |U_n - l| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0\ ]$
5. (f مستمر على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f مستمر على $[a,b]$ و $]b,c]$)
6. (f يقبل الاشتقاق على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f يقبل الاشتقاق على $[a,b]$ و $[b,c]$)

II- مستخدمّا تعريف النهاية، بين أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

III- لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\Re$ ومحدودة من الأعلى في $\Re$ وليكن a عددا حقيقيا بحيث $a \notin A$. نضع: $B = A \cup \{a\}$.

1. بيّن أنّ المجموعة B محدودة من الأعلى في $\Re$.
2. بيّن أنّ: $Sup\,A \le Sup B$.
3. نفرض أنّ $a \le SupA$.

   بيّن أنّ: $Sup\,B = SupA$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n^2} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n > 0$
2. نضع: $\forall n \in \aleph \quad (Z_n = U_{2n} \ \wedge \ W_n = U_{2n+1})$

   أ. أحسب : W_1 , Z_1 , Z_0 , W_0

   ب. برهن أنّ : $\forall n \in \aleph \quad (Z_{n+1} = Z_n^4 \wedge \ W_{n+1} = W_n^4)$

   ج. برهن أنّ : $\forall n \in \aleph \quad (Z_n < 1 \ \wedge \ W_n > 1)$

   د. أدرس رتابة (Z_n) و (W_n).

   ه. عين في حالة التقارب النهايات المحتملة لـ (W_n) و (Z_n).

   و. استنتج طبيعة (W_n) و (Z_n).

   ز. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n$ ، ثم استنتج طبيعة (U_n).

الإمتحان الثاني: EMD2 (ساعة و نصف)

التمرين الأول:

I- هل التوابع التالية تقبل نشورا محدودة من الرتبة 2 في جوار الصفر؟ برّر إجابتك.

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$$

II- 1. برهن باستخدام التعريف أن التابع : $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ مستمر عند الصفر.

2. برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أنّ :

$$\forall x \geq 0 \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

III- عين مستخدما النشور المحدودة قيم a و b بحيث يكون :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{Log(1+x)} + \frac{a}{x} + b \right) = 0$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف بـ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} + \frac{\sin ax}{x} & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ Log(b+x) & ; \quad x > 0 \end{cases} \qquad (a, b \in \Re)$$

1. عين قيم a و b التي يكون من أجلهما f مستمرا عند الصفر.
2. نفرض $a = 0$ و $b = 1$.
   أ. أدرس قابلية اشتقاق f عند الصفر.
   ب. أحسب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$.
   ج. هل التابع f' يقبل تمديدا بالاستمرار عند الصفر؟

التمرين الثالث:

أحسب التكاملات التالية :

$$\int \cos x \, Log(1 + \cos x) \, dx$$

$$\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} \, dx$$

$$\int \frac{e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

1. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار $-\infty$ للتابع :

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x} e^{\frac{1}{x}}$$

2. استنتج معادلة الخط المقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$ و وضعية هذا الأخير إزاءه في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$$

و لتكن (U_n) المتتالية التراجعية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. حل المعادلة $f(x) = x$ في $]0,+\infty[$.
2. نضع $l = \sqrt[3]{2}$. برهن أنّ التابع f متزايد تماما على $]l, 2[$.
3. برهن بالتراجع و بالاستعانة برتابة التابع f أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad l < u_n \le 2$$

4. برهن أنّ (U_n) متناقصة و استنتج طبيعتها.
5. أحسب في حالة وجودها مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Sup}\, U_n \; ; \underset{n\in IN}{Inf}\, U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Max}\, U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Min}\, U_n$$

التمرين الثالث:

ليكن f تابعا مستمرا على $[0,+\infty[$ و قابلا للاشتقاق على $]0,+\infty[$ مع f' متزايد تماما على $]0,+\infty[$.

1. برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية مرتين أنّ :

$$\forall x \ge 1 \quad f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$$

2. نفرض $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

أ. برهن أنّ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

ب. استنتج إشارة f' ثم أوجد جدول تغيرات f و استنتج إشارة f على $[0,+\infty[$.

التمرين الرابع:

ليكن:

$$I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^n}\,dx, \quad n \in \aleph$$

1. أحسب I_0 و I_1.
2. برهن باستخدام المكاملة بالتجزئة، أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad I_n = \frac{1}{1-2n}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} - 8n\, I_{n+1}\right)$$

3. استنتج عبارة $\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx$.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

<u>التمرين الأول</u>:

ليكن التابع f المعرّف بـ :

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x<0 \\ \sin(shx) & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

I- 1. أدرس استمرارية التابع f على مجموعة تعريفه.

2. أدرس قابلية اشتقاق التابع f على مجموعة تعريفه ثم أحسب التابع المشتق في حالة وجوده.

3. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أثبت أنّ:

$$\forall x\geq 0 \quad |\sin(shx)|\leq x\,chx$$

II- جد النشر المحدود المعمّم للتابع f من الرتبة 1 في جوار $-\infty$ ثم استنتج معادلة الخط المقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$ و وضعية هذا الأخير إزاءه في جوار $-\infty$.

<u>التمرين الثاني</u>:

ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x)=Log\left(\cos^2 x\right)-\frac{2x+\alpha x^2}{1+x}, \quad (\alpha\in\Re)$$

1. جد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 في جوار الصفر.

2. عيّن معادلة المماس ووضعيته حسب قيم α بالنسبة لمنحنى f في جوار الصفر.

3. مستخدما النشر المحدود ، أحسب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Log\left(\cos^2 x\right)}{1-ch(x)}$$

<u>التمرين الثالث</u>:

أحسب مايلي:

$$\int x^2\,\mathrm{arctg}(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$$

إمتحانات

2006-2005

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) المتتالية الحقيقية المعرفة بـ:

$$U_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \aleph^*$$

1. مستخدمّا تعريف النهاية بين أنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

2. أدرس رتابة المتتالية (U_n).
3. نضع:

$$A = \left\{ U_n \; ; \; n \in \aleph^* \right\}$$

أ. بين أنّ المجموعة A محدودة في $\Re$.

ب. عين في حالة وجودها :

$$SupA \; ; \; InfA \; ; \; MaxA \; ; \; MinA$$

التمرين الثاني:

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\Re^+$ ومحدودة من الأعلى في $\Re$ وليكن λ عددا حقيقيا بحيث $\lambda \rangle 0$. نضع: $\lambda A = \left\{ \lambda a \in \Re \; / \; a \in A \right\}$

1. بين أنّ المجموعة λA محدودة من الأعلى في $\Re$.
2. باستخدام الخاصية المميزة للحد الأعلى في $\Re$، بين أنّ : $Sup(\lambda A) = \lambda SupA$

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{6} + 1, \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. بين أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 \le U_n \le 2$
2. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad \left| U_{n+1} - U_n \right| \le \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$
3. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث: $p \ge q \ge 0$, أثبت أنّ :

$$\left| U_p - U_q \right| \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^q$$

4. استنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I− ليكن f تابعا حقيقيا و x_0 عددا حقيقيا. أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. (f لا يقبل نهاية عند x_0)⇐(f غير معرف عند x_0)
2. (f يقبل نهاية عند x_0)⇐(f مستمر عند x_0)
3. (f يقبل الاشتقاق عند x_0)⇔(f يقبل الاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند x_0)
4. (f يقبل الاشتقاق على I)⇐(f من الصنف C^0 على I)
5. (f معرف عند x_0) ⇐ (f يقبل نشرا محدودا في جوار x_0)
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{o(x^2)}=1$.

II− برهن باستخدام التعريف أن التابع : $f: x\mapsto x^2+3$ مستمر عند 0 .

III− برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أن:

$$\forall x\in[0,1[\quad x\le \frac{\pi}{2}-Arc\cos x\le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,chx-shx}{chx-1} & ;\quad x\neq 0\\[2ex] l & ;\quad x=0\end{cases}\quad ,\ (l\in\Re)$$

1. أوجد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 في جوار 0.
2. استنتج قيمة l التي يكون من أجلها f مستمرا عند 0 .
3. نفرض أن $l=0$.

أ. بين أن التابع f يقبل الاشتقاق عند 0 .

ب. أعط معادلة المماس لمنحنى f عند 0 ثمّ حدّد وضعية هذا المنحنى بالنسبة للمماس في جوار 0 .

التمرين الثالث:

أحسب مايلي :

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx \quad ; \quad \int \frac{Logx}{x}dx \quad ; \quad \int\frac{1}{x^2+2x-3}dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 > \sqrt{\alpha} & , \quad \alpha > 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n + \dfrac{\alpha}{U_n}) & , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n > \sqrt{\alpha}$
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n).
3. استنتج مع التعليل تقارب المتتالية (U_n).
4. أحسب (في حالة وجودها) مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Sup}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Inf}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Max}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Min}\, U_n \quad .$$

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\cos x - 1)}{x} \sin\dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

1. أحسب: $\lim_{x\to 0} f(x)$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أدرس استمرارية التابع f عند 0.
3. نضع $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ مع $x \in \Re^*$ و لنعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بـ :

$$\forall n \in \aleph^* \qquad x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \wedge \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

أ. أحسب: $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} g(y_n)$.

ب. هل التابع g يقبل نهاية عند 0؟

ج. استنتج فيما إذا كان التابع f قابل للاشتقاق عند 0.

التمرين الثالث:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$$

1. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
2. استنتج وجود خطين مقاربين في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لمنحنى f يُطلب تعيين معادلتهما و وضعية منحنى f إزاءهما في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

التمرين الرابع:

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y'-5y=5Logx-\frac{1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'-5y=0$.
2. تحقق من أنّ التابع $x\mapsto -Logx$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).
3. استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (I).

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 6}{U_n}, \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 \le U_n \le 6$.
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n).
3. استنتج مع التعليل طبيعة المتتالية (U_n).
4. أحسب (في حالة وجودها) مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Sup}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Max}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Min}\, U_n$$

التمرين الثاني:

مستخدما النشور المحدودة أحسب النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x} \quad ; \quad 2)\ \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{Log(1+x)}\right)$$

التمرين الثالث:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x^2 Log\left(\dfrac{1+x}{x}\right) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

1. أدرس اشتقاق التابع f على مجموعة تعريفه D_f . هل التابع f مستمر على D_f ؟
2. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
3. استنتج وجود خطين مقاربين في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لمنحنى f يُطلب تعيين معادلتيهما و وضعية منحنى f إزاء هما في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
4. احسب $\int_{e^{-n}}^{1} f(x)\, dx$ مع $n \in \aleph^*$.
5. نضع $U_n = \int_{e^{-n}}^{1} f(x)\, dx$ مع $n \in \aleph^*$.

أ. احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

ب. استنتج طبيعة المتتالية (U_n) .

الجزء الثاني

حلول الإمتحانات

إمتحانات

1999-1998

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

1. نبرهن باستعمال التعريف أنّ: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ أي نبرهن صحة:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph \ / \forall n \in \aleph, n \ge n_0 \Rightarrow \left| U_n - 0 \right| \le \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left| U_n - 0 \right| = \left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{n}$$

و منه، حتى يكون $|U_n - 0| \le \varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{1}{n} \le \varepsilon$ أي $n \ge \frac{1}{\varepsilon}$.

إذن بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{(a+b)n + 2a + b}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

بالمطابقة نجد:

$a+b=0$ و $2a+b=1$

و عليه:

$a=1$ و $b=-1$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

3. بإستخدام المساواة السابقة، لدينا:

$$U_0 + U_1 + ... + U_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

التمرين الثاني:

1. نبرهن بالتراجع أنّ: $\forall n \in \aleph^* \quad U_n \ge 1$

من أجل $n=1$ ، لدينا $U_1 = 1 \ge 1$ صحيحة.

نفترض صحة المتراجحة من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.

لدينا:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left[U_n + \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{3^n}}\right] \ge \frac{1}{2}[U_n + U_n] \ge 1$$

لأنّ $U_n \geq 1$ (فرضا) و $\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} \geq U_n$.

و عليه:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_n \geq 1$$

2. لدينا:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left[U_n + \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}\right] - U_n$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} - U_n\right] \geq 0$$

لأنّ $\forall n \in \aleph^* \quad \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} \geq U_n$

و عليه المتتالية (U_n) متزايدة.

3. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n} \iff U_{n+1} - U_n \leq \frac{1}{4\times 3^n}$$
$$\iff \frac{1}{2}\left[\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} - U_n\right] \leq \frac{1}{4\times 3^n}$$
$$\iff \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} - U_n \leq \frac{1}{2\times 3^n}$$
$$\iff \frac{1}{3^n\left(\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} + U_n\right)} \leq \frac{1}{2\times 3^n}$$

و عليه:

$$U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n} \iff \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} + U_n \geq 2$$

القضية $\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} + U_n \geq 2$ محققة دوما لأنّ $U_n \geq 1$. من التكافؤ المنطقي نستنتج صحة:

$$\forall n \geq 1 \quad U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n}$$

4. لدينا مما سبق:

$$\forall n \geq 2 \quad U_n \leq U_{n-1} + \frac{1}{4\times 3^{n-1}} \leq U_{n-2} + \frac{1}{4\times 3^{n-2}} + \frac{1}{4\times 3^{n-1}}$$
$$\leq U_1 + \frac{1}{4\times 3^1} + \frac{1}{4\times 3^2} + \cdots + \frac{1}{4\times 3^{n-1}}$$

و بما أنّ $U_1 = 1$ فإنّ:

$$\forall n \geq 2 \quad U_n \leq 1 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right]$$

ثم واضح صحة المتراجحة أعلاه من أجل $n=1$ وعليه المتراجحة صحيحة من أجل أي n من $\aleph^*$.

5. لدينا من جهة أخرى:

$$\forall n\in\aleph^* \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\le\frac{1}{2}$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph^* \quad U_n\le\frac{9}{8}$$

أي (U_n) محدودة من الأعلى.

و بما أنّ (U_n) متزايدة حسب الإجابة الثانية، فهي إذن متقاربة.

<u>التمرين الثالث</u>:

1. لدينا فرضا g محدودة في جوار x_0 أي:

$$\exists\alpha>0,\ \exists M>0:\ \ |g(x)|\le M,\quad \forall x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$$

و عليه

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\le M|f(x)|,\quad \forall x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$$

إذن:

$$0\le|f(x)g(x)|\le M|f(x)|$$

بالمرور إلى النهاية لما x يؤول نحو x_0 و باستخدام الفرض نستنتج من الحصر أنّ:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)\,g(x)|=0$$

أي:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\,g(x)=0$$

2. أ. واضح أنّ التابع f مستمر على $\Re^*$ و ذلك من أجل كل قيم a و b من $\Re_+^*$.

من أجل القيمة 0 لدينا:

$$\lim_{\substack{<\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\left((a-b)+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=a-b$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ (عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو الصفر).

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{x}=\frac{a}{2\sqrt{b}}$$ (حسب نظرية لوبيتال)

إذن حتى يكون التابع f مستمر عند 0 يلزم ويكفي أن يكون $a=2$ و $b=1$.

و عليه قيم a و b التي يكون من أجليهما التابع f مستمر على $\Re$ هي $a=2$ و $b=1$.

ب. لدينا: $$g(0)=f(0)=1\ ;\ g(\frac{-2}{\pi})=f(\frac{-2}{\pi})-2=-1-\frac{4}{\pi^2}$$

و بماأنّ التابع g مستمر على $\left[\frac{-2}{\pi},0\right]$ و $g(0)\times g(-\frac{2}{\pi})<0$ فإنّه حسب نظرية القيم

المتوسطة يوجد على الأقل c من المجال $\left[\frac{-2}{\pi},0\right]$ يحقق $g(c)=0$.

3. أ. لدينا:

$$h(x)=\left(\frac{2x}{\cos x}f(-\frac{1}{|x|})\right)^m=\left(\frac{2x}{\cos x}(a-b-\frac{\sin|x|}{|x|^2})\right)^m$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2(a-b)x}{\cos x}-\frac{2x\sin|x|}{x^2\cos x}\right)^m$$

و منه:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}h(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{2(a-b)x}{\cos x}-\frac{2x\sin x}{x^2\cos x}\right)^m=(-2)^m$$

و

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}h(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{2(a-b)x}{\cos x}+\frac{2x\sin x}{x^2\cos x}\right)^m=2^m$$

لأنّ: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\begin{cases}2^m & , \text{زوجي} \quad m\\ \text{غير موجودة} & , \text{فردي} \quad m\end{cases}$$

ب. نستنتج أنه حتى يكون التابع h مستمرا عند 0 يلزم ويكفي أن يكون m زوجي و $h(0)=2^m$.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

1. لدينا تعريفا:

$$\left(f \text{ يقبل الإشتقاق عند } 1 \right) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \in \Re$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} (x+1) = 2$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{ax+b-1}{x-1}$$

- إذا كان $a+b-1 \neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \left| \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right| = +\infty$$

- إذا كان $a+b-1=0$ فإنّ: $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ هي من الشكل $\frac{0}{0}$ و بإستخدام نظرية لوبيتال نجد:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = a$$

إذن حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند 1 يلزم و يكفي أن يكون $a=2$ و $a+b-1=0$ أي $a=2$ و $b=-1$.

2. أ. ليكن x من المجال $[0,x]$. لاحظ أنّ التابع $t \mapsto \arcsin(t)$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للإشتقاق على $]0,x[$.

و عليه حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث:

$$\arcsin(x)-\arcsin(0) = (\arcsin)'(c)\times(x-0)$$

أي:

$$\arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

و بما أنّ:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ لأن } 0<c<x$$

فإنّ:

$$\forall x \in]0,1[\quad x < \arcsin(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب. من الجواب السابق نستنتج أنّ:

$$\forall x \in]0,1[\quad 1 < \frac{\arcsin x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

و بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x} = 1$$

و ذلك حسب قاعدة الحصر.

التمرين الثاني:

○ $f(x)=\sqrt{\cos(x)} \qquad (x_0=0, n=3)$

لاحظ أنّ:

$$f(x)=\sqrt{\cos(x)}=\sqrt{1+(-1+\cos(x))}$$

تذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ (x\to 0)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)(x\to 0)$$

و عليه:

$$f(x)=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)(x\to 0)$$

لأنّ $-\frac{x^2}{2}+0(x^2)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ و التابع $x\mapsto\sqrt{1+x}$ مستمر عند 0.

○ $g(x)=e^{x.Log(x)} \qquad (x_0=1, n=3)$

نضع $t=x-1$. إذا كان $x\to 1$ فإنّ $t\to 0$. و عليه:

$$g(x)=g(t+1)=e^{(1+t)Log(1+t)}$$

تذكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$Log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)(t\to 0)$$

و عليه:

$$(1+t)Log(1+t)=t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+o(t^3)(t\to 0)$$

و بما أنّ: $\lim_{t\to 0}(1+t)Log(1+t)=0$ و التابع $t\mapsto e^t$ مستمر عند 0، ولدينا:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)(t\to 0)$$

فإنّ:

$$e^{(1+t)Log(1+t)}=1+t+t^2+\frac{t^3}{2}+o(t^3)(t\to 0)$$

إذن:

$$g(x)=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}+o((x-1)^3)(x\to 1)$$

التمرين الثالث:

1. ليكن m و n من $\aleph$. لدينا:

$$I(m+1,n)=\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx$$

إذا فرضنا $f(x)=x^{m+1}$ و $g'(x)=(1-x)^n$ ثمّ طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}I(m+1,n)&= f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1 f'(x)g(x)dx\\ &=-\int_0^1(m+1)x^m\times\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]dx\\ &=\frac{m+1}{n+1}\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1}dx\\ &=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)\end{aligned}$$

2. ليكن m و n من $\aleph$. لدينا:

$$\begin{aligned}I(m,n)-I(m,n+1)&=\int_0^1\left[x^m(1-x)^n-x^m(1-x)^{n+1}\right]dx\\ &=\int_0^1 x^m(1-x)^n[1-(1-x)]dx\\ &=\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx\\ &=I(m+1,n)\end{aligned}$$

إذن:

$$I(m+1,n)=I(m,n)-I(m,n+1)$$

و بما أنّ :

$$I(m+1,n)=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)$$

نستنتج أنّ:

$$I(m,n)-I(m,n+1)=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)$$

أي:

$$I(m,n+1)=\frac{n+1}{m+n+2}I(m,n)$$

3. نستخدم البرهان بالتراجع. ليكن m عددا طبيعيا ثابتا.

من أجل $n=0$ لدينا:

$$I(m,0)=\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}=\frac{0!}{m+1}$$

إذن المساواة صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض صحة المساواة من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.

لدينا حسب الإجابة على السؤال الثاني:

$$I(m,n+1)=\frac{n+1}{m+n+2}I(m,n)$$

و باستخدام فرض التراجع نجد:

$$I(m,n+1)=\frac{n+1}{m+n+2}\times\frac{n!}{(m+1)(m+2)......(m+n+1)}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(m+1)(m+2)......(m+n+1)(m+n+2)}$$

إذن:

$$\forall m,n\in\aleph \quad I(m,n)=\frac{n!}{(m+1)(m+2)......(m+n+1)}$$

التمرين الرابع:

لدينا:

$$x\,y'=y+x\cos\frac{y}{x}\Leftrightarrow y'=\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

نضع $z=\frac{y}{x}$ أي $y=x.z$ فيكون $y'=z'.x+z$ و تأخذ المعادلة الشكل الآتي:

$$\frac{z'}{\cos(z)}=\frac{1}{x} \quad \text{مع} \quad \cos(z)\neq 0$$

و منه:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)}=\int\frac{dx}{x}=\log|x|+\lambda \quad / \quad \lambda\in\Re$$

ثم:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)}=\int\frac{1+tg^2\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{z}{2}\right)}dz$$

نضع $t=tg\left(\frac{z}{2}\right)$ فيكون $dt=\frac{1}{2}\left[1+tg^2\left(\frac{z}{2}\right)\right]$ وعليه:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)} = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=-Log|1-t|+Log|1+t|+\alpha \quad / \quad \alpha\in\Re$$

إذن:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)} = \log\left|\frac{1+tg\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{z}{2}\right)}\right|+\alpha \quad / \quad \alpha\in\Re$$

ومنه:

$$\int \frac{dz}{\cos(z)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow Log\left|\frac{1+tg\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{z}{2}\right)}\right| + \alpha = Log|x| + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+tg\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{z}{2}\right)} = kx \quad / \quad k \in \Re^*$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{k\,x-1}{k\,x+1} \quad / \quad k \in \Re^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{2} = m\pi + arctg\,\frac{kx-1}{kx+1} \quad / \quad k \in \Re^*,\, m \in Z$$

$$\Leftrightarrow y = 2x\,arctg\,\frac{k\,x-1}{k\,x+1} + 2m\pi\,x \quad / \quad k \in \Re^*,\, m \in Z$$

من جهة أخرى اذا كان $\cos(z) = 0$ فإنّ $z = \frac{\pi}{2} + m\pi$ وعليه $y = \frac{\pi}{2}x + m\pi\,x$ مع m من Z.

إذن من السهل التأكد من أنّ التابع $x \mapsto \frac{\pi}{2}x + 2m\pi\,x$ هو أيضا حل للمعادلة:

$$x\,y' = y + x\cos\frac{y}{x}$$

و منه الحل العام للمعادلة السابقة يعطى بالعلاقة:

$$\begin{cases} y = 2x\,arctg\,\dfrac{kx-1}{kx+1} + 2m\pi\,x \quad / \quad m \in Z,\, k \in \Re^* \\ \vee \\ y = \dfrac{\pi}{2}x + m\pi\,x \quad / \quad m \in Z \end{cases}$$

لدينا من جهة أخرى:

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2arctg\,\dfrac{kx-1}{kx+1} + 2m\pi = 0 \\ \vee \\ \dfrac{\pi}{2} + m\pi = 0 \end{cases}$$

(المعادلة $\frac{\pi}{2} + m\pi = 0$ مستحيلة الحل لأن m صحيح)

$$\Leftrightarrow arctg\,\frac{k-1}{k+1} = -m\pi$$

$$\Leftrightarrow arctg\,\frac{k-1}{k+1} = 0$$

(لأن: $\forall x \in \Re, \quad arctg(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$)

$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{k+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

و منه التابع $x \mapsto 2x\,arctg\,\frac{x-1}{x+1}$ هو الحل للجملة (I).

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

ليكن n من $\aleph^*$ و α من $\Re$.

1. إذا فرضنا $f'(x)=1$ و $g(x)=(x^\alpha+1)^{-n}$ و طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx \\ &= \frac{x}{(x^\alpha+1)^n}+n\alpha\int\frac{x^\alpha}{(x^\alpha+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^\alpha+1)^n}+n\alpha\int\frac{x^\alpha+1-1}{(x^\alpha+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^\alpha+1)^n}+n\alpha\int\frac{1}{(x^\alpha+1)^n}dx-n\alpha\int\frac{1}{(x^\alpha+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^\alpha+1)^n}+n\alpha I_n(x)-n\alpha I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

و منه:

$$\forall n\in\aleph^* \quad I_{n+1}(x)=\frac{1}{\alpha n}\left[\frac{x}{(x^\alpha+1)^n}+(\alpha n-1)I_n(x)\right]$$

2. لاحظ أنّ: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

و منه يوجد a، b و c ثوابت حقيقية بحيث:

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}\text{..................................}(I)$$

بضرب طرفي المساواة (I) في $x+1$ ثم تعويض x بـ -1 نجد: $a=\frac{1}{3}$.

بضرب طرفي المساواة (I) في x ثم نجعل x يؤول نحو $+\infty$ نجد: $a+b=0$.

و منه $b=-\frac{1}{3}$.

نعوّض الآن، في المساواة *(I)*، x بالصفر فنجد: $a+c=0$ و منه $c=\frac{2}{3}$.

إذن:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right]$$

3. من أجل $\alpha=3$، لدينا:

$$I_1(x)=\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

و منه لحساب $I_1(x)$ يكفي حساب:

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx \quad \text{و} \quad \int\frac{dx}{x+1}$$

لدينا:

- $\int \frac{dx}{x+1} = Log|x+1| + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$
- $\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \;= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1+1)-2}{x^2-x+1}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

لدينا من جهة أخرى:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$

نضع $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ فيكون $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ و منه:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(t)+\lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

و عليه:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \;= \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| - \sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

إذن:

$$I_1(x) = \frac{1}{3}\left[Log|x+1| - \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| + \sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda\right] \quad / \quad \lambda \in \Re$$

حساب $I_2(x)$:

بتعويض n بـ 1 في العلاقة الموجودة بالجواب عن السؤال الأول نجد:

$$I_2(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{x}{x^3+1}+2I_1(x)\right]$$

و منه:

$$I_2(x) = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\left[Log|x+1| - \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| + \sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda\right] \quad / \quad \lambda \in \Re$$

حساب $I_3(x)$:

بتعويض n بـ 2 في العلاقة الموجودة بالجواب عن السؤال الأول نجد:

$$I_3(x)=\frac{1}{6}\left[\frac{x}{\left(x^3+1\right)^2}+5I_2(x)\right]$$

و منه:

$$I_3(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\left(x^3+1\right)^2}+\frac{5x}{3\left(x^2+1\right)}+\frac{10}{9}\left[Log|x+1|-\frac{1}{2}Log|x^2-x+1|+\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda\right]\right)$$

(مع $\lambda\in\Re$)

التمرين الثاني:

ليكن x من $\Re^*$. نضع:

$$f(x)=arctg(x)\quad;\quad g(x)=arctg\left(\frac{1}{x}\right)\quad;\quad h(x)=arctg(x)+arctg\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad;\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{1}{x^2+1}$$

2. من الجواب السابق نستنتج أنّ:

$$\forall x>0\quad h'(x)=f'(x)+g'(x)=0$$

و منه:

$$\forall x>0\quad \int_1^x h'(t)dt=0$$

أي:

$$\forall x>0\quad h(x)-h(1)=0$$

إذن:

$$\forall x>0\quad h(x)=h(1)=arctg(1)+arctg(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

و عليه يكون لدينا:

$$\forall x>0\quad arctg(x)+arctg\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

3. لاحظ أنّ:

$$arctg(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$$

ثم

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

وعليه:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o\left(x^4\right)\quad(x\to 0)$$

و منه:

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\quad(x\to 0)$$

أي:

$$arctg(x)=arctg(0)+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\quad(x\to 0)$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\quad(x\to 0)$$

4. نضع $t=\frac{1}{x}$ لاحظ أنّ:

$$x \to +\infty \Leftrightarrow t \overset{>}{\to} 0$$

$$x \to -\infty \Leftrightarrow t \overset{<}{\to} 0$$

لدينا:
$$arctg(x) = arctg\left(\frac{1}{t}\right)$$

و باستخدام نتيجة السؤال الثاني نكتب:

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - arctg(t)\ ,\quad \forall t > 0$$

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2} - arctg(t)\ ,\quad \forall t < 0$$

(لأنّ التابع arctg فردي) و منه:

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + o(t^5)\ ,\quad \left(t \xrightarrow{>} 0\right)$$

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + o(t^5)\ ,\quad \left(t \xrightarrow{<} 0\right)$$

إذن:

$$arctg(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)\ ,\quad (x \to +\infty)$$

$$arctg(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)\ ,\quad (x \to -\infty)$$

التمرين الثالث:

1. ليكن x من I. لدينا:

$$f^{'}(x) = -1 + \frac{1}{2\pi}\left[arctg(x) + \frac{x}{1+x^2}\right]$$

$$f^{''}(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}\right] > 0\ ,\quad \forall x \in I$$

و منه $f^{'}$ متزايدة على I.

2. بما أنّ f' متزايدة على I فإنّ:

$$f'(x) \leq f'\left(\sqrt{3}\right) < 0 \quad , \quad \forall x \in I$$

لأنّ:

$$f'\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{5}{6} \quad , \quad \forall x \in I$$

إذن f متناقصة تماما على I.

3. لدينا:

$$f\left(\sqrt{3}\right) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{3}} < 0 \quad \text{و} \quad f(1) = \frac{1}{8} > 0$$

و بما أنّ f مستمر على I و $f(1) \times f\left(\sqrt{3}\right) < 0$ ، فحسب نظرية القيم المتوسطة، يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال I و بما أنّ f رتيبة تماما فإنّ هذا الجذر وحيد.

إمتحانات

2000-1999

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

1. لدينا تعريفا

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\aleph\ /\ \forall n\in\aleph-\{0,1\},\ n\geq n_0 \Rightarrow |U_n-0|\leq\varepsilon\right)$$

ليكن $\varepsilon>0$. لدينا من أجل $n\geq 2$:

$$|U_n-0| = \frac{2}{n(n-1)(n+1)} < \frac{2}{n}$$

و عليه حتى يكون $|U_n-0|\leq\varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{2}{n}\leq\varepsilon$ أي $n\geq\frac{2}{\varepsilon}$ ، و بالتالي إذا أخذنا $n_0=\left[\frac{2}{n}\right]+1$ يتحقق المطلوب.

2. ليكن n من $\aleph-\{0,1\}$ و نبحث عن a ، b و c ثوابت حقيقية بحيث:

$$U_n = \frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n}............(I)$$

نضرب طرفي المساواة (I) في $n-1$ و بتعويض n بـ 1 نجد $a=1$، ثم نضرب طرفي المساواة (I) في $n+1$ و بتعويض n بـ -1 نجد $b=1$ و أخيرا نضرب طرفي المساواة (I) في n و بتعويض n بـ 0 نجد $c=-2$.

و منه:

$$U_n = \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}+\frac{-2}{n}$$

3. ليكن n من $\aleph-\{0,1\}$ كيفي. لدينا:

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}U_k=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2}{k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-2\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

ملاحظة: يمكن استخدام البرهان بالتراجع للتأكد من أنّ: $\forall n\geq 2\quad S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

4. لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

بما أنّ (S_n) هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum\limits_{n\geq 2} U_n$ و هي متقاربة نحو $\frac{1}{2}$، فإنّ السلسلة $\sum\limits_{n\geq 2} U_n$ متقاربة ومجموعها هو $\frac{1}{2}$.

<u>**التمرين الثاني:**</u>

- طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$:

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1\neq 0$ فإنّ السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ متباعدة.

- طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n n!}$:

نضع: $U_n=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n n!}$. نلاحظ أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_n>0$

لدينا: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n+1}{3(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{2}{3}<1$ و حسب مقياس دالمبار السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ متقاربة.

- طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{2^n+n}$:

نضع: $U_n=\frac{1}{2^n+n}$. نلاحظ أنّ: $\forall n\in\aleph \quad U_n>0$

لدينا: $\frac{1}{2^n+n}\leq\frac{1}{2^n} \quad \forall n\in\aleph$ و بما أنّ $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ سلسلة متقاربة (سلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$)
فحسب مقياس المقارنة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

- طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$ حيث α من $\Re$:

نضع: $U_n=\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$.

لدينا: $|U_n|=\frac{|\cos(n\alpha)|}{2^n}\leq\frac{1}{2^n} \quad \forall n\in\aleph$ وبما أنّ $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ سلسلة متقاربة (سلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$) فإنّ $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متقاربة مطلقا.

إذن $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

<u>**التمرين الثالث:**</u>

- طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ مع $a\geq 0$:

نضع $U_n=\left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$. نلاحظ أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_n>0$

لدينا:
$$\sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a}$$

وعليه:

إذا كان $a>0$ فإنّ $e^{-a}<1$ و حسب مقياس كوشي فإنّ $\sum_{n\geq 1}U_n$ متقاربة.

و إذا كان $a=0$ فإنّ $U_n=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\neq 0$ و حسب الشرط اللازم لتقارب سلسلة فإنّ $\sum_{n\geq 0}U_n$ متباعدة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+b}{n}\right)^{n^2}$ مع $b\geq 0$:

نضع: $V_n=\frac{n+b}{n}$. نلاحظ أنّ: $\forall n\geq 1 \quad V_n>0$

لدينا:
$$\sqrt[n]{V_n}=\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{b}$$

وعليه:

إذا كان $b>0$ فإنّ $e^b>1$ و حسب مقياس كوشي فإنّ $\sum_{n\geq 1}V_n$ متباعدة.

إذا كان $b=0$ فإنّ $V_n=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\neq 0$ و حسب الشرط اللازم لتقارب سلسلة فإنّ $\sum_{n\geq 0}V_n$ متباعدة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}U_n+\sum_{n\geq 1}V_n$

إذا كان $b\geq 0$ و $a>0$، فإنّ $\sum_{n\geq 1}U_n+\sum_{n\geq 1}V_n$ متباعدة لأنّ $\sum_{n\geq 1}U_n$ متقاربة و $\sum_{n\geq 1}V_n$ متباعدة.

إذا كان $b\geq 0$ و $a=0$، فإنّ $\sum_{n\geq 1}U_n+\sum_{n\geq 1}V_n$ متباعدة لأنّ $\sum_{n\geq 1}U_n=+\infty$ و $\sum_{n\geq 1}V_n=+\infty$.

التمرين الرابع:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. لدينا فرضا: $U_0\geq 1$.
نفرض صحة المتراجحة من أجل الرتبة n أي $U_n\geq 1$ ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أنّ $U_{n+1}\geq 1$.
لدينا:
$$U_{n+1}=\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}\geq\sqrt{U_n^2}=|U_n|=U_n\geq 1$$
ومنه: $\forall n\in\aleph \quad U_n\geq 1$

2. أ. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}-U_n=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}+U_n}\leq\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{1+1}$$

لأنّ: $U_n\geq 1$ و $\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}\geq 1$.

وعليه:

$$\forall n\in\aleph\quad U_{n+1}-U_n\leq\frac{1}{2^{n+1}}$$

ب. لدينا من أجل p و q عددين طبيعيين بحيث $(p>q)$:

$$|U_p-U_q|\leq|U_p-U_{p-1}|+|U_{p-1}-U_{p-2}|+\cdots+|U_{q+1}-U_q|$$

$$\leq\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q+1}}$$

$$\leq\frac{1}{2^{q+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-q-1}}\right)$$

لكن:
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-q-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^{p-q}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{p-q-1}}\leq 2$$

إذن:
$$|U_p-U_q|\leq\frac{1}{2^{q+1}}\left(2-\frac{1}{2^{p-q-1}}\right)\leq\frac{1}{2^q}$$

ج. لدينا تعريفا:

(U_n) كوشية في $\Re$ $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\aleph/\ \forall p\in\aleph,\ \forall q\in\aleph,\ p\geq q\geq n_0\Rightarrow|U_p-U_q|\leq\varepsilon$

ليكن ε موجب تماما. لدينا حسب الإجابة "ب":

$$|U_p-U_q|\leq\frac{1}{2^q}$$

و حتى تكون $|U_p-U_q|\leq\varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{1}{2^q}\leq\varepsilon$ **أي** $q\geq\frac{Log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{Log2}$.

إذن يكفي أخذ $n_0=\left[\frac{\left|Log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|}{Log2}\right]+1$، و بالتالي فالمتتالية (U_n) كوشية إذن فهي متقاربة لأن حدودها حقيقية.

3. أ. لدينا: $\forall n \geq 0 \quad V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{2^n}$

ب. لدينا من جهة: $\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

و لدينا من جهة أخرى:

$$\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n} \left(U_{k+1}^2 - U_k^2\right) = \left(U_1^2 - U_0^2\right) + \left(U_2^2 - U_1^2\right) + \cdots\cdots\cdots + \left(U_{n+1}^2 - U_n^2\right)$$

$$= -U_0^2 - U_{n+1}^2$$

ج. لدينا حسب الإجابة 'ب':

$$\forall n \in \aleph \quad 2 - \frac{1}{2^n} = -U_0^2 + U_{n+1}^2$$

و عليه: $\lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(-U_0^2 + U_{n+1}^2\right)$

أي:

$$2 = -U_0^2 + \lim_{n \to +\infty} U_{n+1}^2$$

و منه:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2 + U_0^2}$$

(لأنّ (U_n) ذات حدود موجبة).

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

1. من أجل $x \neq 0$ ، واضح أن التابع f مستمر و ذلك من أجل كل قيم a و b من $\Re$.
من أجل القيمة 0 ، لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} Log(1+x) = 0 = f(0) \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (ax+b) = b \end{cases}$$

إذن حتى يكون f مستمرا على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0)$ أي:
$b = 0$ و $a \in \Re$.

2. واضح أنه من أجل $x \neq 0$ ، التابع f قابل للاشتقاق من أجل أي a و b من $\Re$.
من أجل القيمة 0 ، حتى يكون التابع f قابلا للاشتقاق عند 0 يلزم أن يكون مستمرا عند 0 أي $b = 0$. وعليه لدينا:

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{Log(1+x)}{x} = 1$$
$$\wedge$$
$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{ax}{x} = a$$

إذن حتى يكون f قابلا للاشتقاق على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون b=0 وa=1 .

3. أ. لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & ; \qquad x \geq 0 \\ \\ 1 & ; \qquad x < 0 \end{cases}$$

حتى يكون f قابلا للاشتقاق بإستمرار على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون f' مستمرا عند 0.
لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 1 = 1 = f'(0) \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{1+x} = 1 = f'(0) \end{cases}$$

إذن f' مستمر عند 0 و منه f قابل للإشتقاق بإستمرار على $\Re$.

ب.

- لدينا: $\forall x \in \Re \quad h'(x) = \dfrac{-1}{Log2} f'(x) - \dfrac{1}{1+x^2} < 0$

لأنّ $\dfrac{-1}{Log2} f'(x) < 0$ و $-\dfrac{1}{1+x^2} < 0$ ، و عليه فإنّ h متناقص تماما على $\Re$.

- لدينا: $h(0)=\frac{-1}{Log2}f(0)+arcctg(0)=\frac{\pi}{2}>0$

$$h(1)=\frac{-1}{Log2}f(1)+arcctg(1)=-1+\frac{\pi}{4}<0$$

بما أنّ h مستمر على $[0,1]$ و $h(0)\times h(1)<0$ فحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد جذر للمعادلة $h(x)=0$ في المجال $[0,1]$ و بما أنّ h رتيب تماما على $[0,1]$ فإنّ هذا الجذر وحيد.

4. من أجل $x=0$ ، المتراجحة محققة لأن: $0\geq 0$.

و من أجل $x<0$ ، فإنّ:

$$f(x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\geq 0$$

و عليه فإنّ المتراجحة محققة.

و أخيرا من أجل $x>0$ ، فإنّ:

$$f(x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=Log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

نضع: $g(t)=Log(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$

التابع g مستمر و قابل للاشتقاق على المجال $[0,x]$ حيث $0<x$ ، فهو إذن يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$. و منه يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$g(x)-g(0)=g'(c)(x-0)$$

أي:

$$Log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}=\left(\frac{1}{1+c}-1+c\right)x$$

$$=\frac{c^2}{1+c}x>0$$

لأن $x>0$ و $c>0$.

و منه المتراجحة محققة.

إذن: $\forall x\in\Re \quad f(x)\geq x-\frac{x^2}{2}$

التمرين الثاني:

حساب النهايات المطلوبة باستخدام النشور المحدودة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin^2(x)}{x^2+x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)-(e^x-1)^2}{\sin^3(x)}$$

لدينا: $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

و منه: $\sin^3 x=x^3+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

ثم: $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

و عليه: $$x^2 \cos x = x^2 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

و لدينا: $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

و منه: $$(e^x - 1)^2 = x^2 + x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

إذن: $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(x) - (e^x - 1)^2}{\sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -1$$

من جهة أخرى نستنتج من النشور السابقة:

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

و

$$(1 - e^x)\sin^2 x = o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^x)\sin^2(x)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2 + x^3}$$

وعليه:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + x} = 0$$

التمرين الثالث:

.1 $$I(0) = \int_{-1}^{+1} dt = 2 \quad ; \quad I(1) = \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t + c\right]_{-1}^{1} = \frac{-4}{3}$$

.2 ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I(n) = \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n dt = \int_{-1}^{+1} 1 \times (t^2 - 1)^n dt$$

بأخذ: $f'(t) = 1$ و $g(t) = (t^2 - 1)^n$ و $f(t) = t$ و $g'(t) = 2nt(t^2 - 1)^{n-1}$

و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_{-1}^{+1} f'(t)\, g(t)\, dt = [f(t)\, g(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{+1} f(t)\, g'(t)\, dt \\ &= \left[t(t^2 - 1)^n\right]_{-1}^{+1} - 2n\int_{-1}^{+1} t^2\, (t^2 - 1)^{n-1} dt \\ &= -2n\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1 + 1)(t^2 - 1)^{n-1} dt \\ &= -2n\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n dt - 2n\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^{n-1} dt \\ &= -2n\, I(n) - 2n\, I(n-1) \end{aligned}$$

و عليه: $$\forall n \geq 1 \quad I(n) = -\frac{2n}{2n+1} I(n-1)$$

3. من العلاقة أعلاه نستنتج:

$$I(1)=-\frac{2}{3}I(0)$$

$$I(2)=-\frac{2\times 2}{5}I(1)$$

$$I(3)=-\frac{2\times 3}{7}I(2)$$

.
.
.

$$I(n-1)=-\frac{2(n-1)}{2n-1}I(n-2)$$

$$I(n)=-\frac{2n}{2n+1}I(n-1)$$

بضرب أطراف المساواة أعلاه طرفا في طرف نجد:

$$I(n)=(-1)^n\frac{(2)^n(1\times 2\times 3\cdots\cdots\times n)}{3\times 5\times 7\times\cdots\cdots\times(2n+1)}I(0)$$

$$=\frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}$$

و هو المطلوب

<u>التمرين الرابع</u>:

1. لدينا:

$$y' =\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\ (y\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{y'}{y}dx=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow Log|y|=Log|x|+c,\qquad c\in\Re$$

$$\Leftrightarrow y=kx,\quad k\in\Re^*$$

ثم التابع الصفري هو أيضا حل للمعادلة $y'=\frac{y}{x}$.

و عليه الحل العام للمعادلة $y'=\frac{y}{x}$ هو: $y:x\mapsto kx\ /\ k\in\Re$

2. من أجل التابع $x \mapsto x\arcsin x$ ، لدينا:

$$y' - \frac{y}{x} = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

و منه التابع $x \mapsto x\arcsin x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).

3. الحل العام للمعادلة (I) هو:

$$y = y_1 + y_2$$

حيث y_1 هو الحل العام للمعادلة (I) بدون طرف حر و y_2 هو حل خاص للمعادلة (I).
إذن:

$$y = k\,x + x\,\arcsin(x), \quad k \in \Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. لدينا: $f(0)=\gamma$ و

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}(2x-1)=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{2x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{1+\alpha x+o(x)-1}{2x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{\alpha+\frac{o(x)}{x}}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

إذن حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=f(0)$$

أي:

$$\frac{\alpha}{2}=-1=\gamma$$

و عليه:

$$\alpha=-2 \quad\wedge\quad \gamma=-1$$

2. أ. لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{(2x-1)-(-1)}{x}=2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{\left(\frac{e^{-2x}-1}{2x}\right)+1}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{e^{-2x}+2x-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{1-2x+\frac{(-2x)^2}{2!}+o(x^2)+2x-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=1\neq 2$$

إذن التابع f لا يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. لتطبيق نظرية التزايدات المنتهية في المجال $[a,b]$، يلزم و يكفي أن يكون التابع f مستمرا على $[a,b]$ و قابلا للإ شتقاق على $]a,b[$ أي $a<b\leq 0$ أو $0\leq a<b$.

التمرين الثاني:

1. لدينا:

$$\int e^{-x}\sin(x)dx = -\int e^{-x}(\cos)'(x)dx$$

$$= -e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\cos(x)dx$$ (حسب قانون المكاملة بالتجزئة)

$$= -e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}(\sin)'(x)dx$$

$$= -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x) - \int e^{-x}\sin(x)dx$$ (بإستخدام المكاملة بالتجزئة مرة ثانية)

و منه:

$$\int e^{-x}\sin(x)dx = \frac{-e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + \lambda \ / \ \lambda \in \Re$$

إذن من أجل أي عدد طبيعي n، لدينا:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx = -\frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}(-1)^{n+1} + \frac{e^{-n\pi}}{2}(-1)^n$$

$$= \frac{(-1)^n e^{-n\pi}}{2}\left[1 + e^{-\pi}\right]$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي، لدينا:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(-e^{-\pi}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}\right)\frac{1-\left(-e^{-\pi}\right)^{n+1}}{1+e^{-\pi}}$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}}{1+e^{-\pi}} = \frac{1}{2}$$

3. نستنتج أنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة و مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$.

التمرين الثالث:

ننشر أولا التابع $f : x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(x)}$ حتى الرتبة 3 في جوار 0.

نذّكر أنّ في جوار الصفر لدينا:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

و منه:

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

و $\sqrt{1+\sin^2 x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

(لأن $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$ و التابع $x\mapsto\sqrt{1+x}$ مستمر عند 0)

إذن:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+o(x^3) \qquad (x\to 0)$$

ننشر الآن التابع $g:x\mapsto\dfrac{Log(\cos x)}{\cos^2 x}$ حتى الرتبة 4 في جوار 0.

نذّكر أنّ في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) \qquad (x\to 0)$$

و $Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4) \qquad (x\to 0)$

و عليه:

$$\begin{aligned}Log(\cos x)&=Log(1+(-1+\cos x))\\&=Log\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)\\&=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4) \qquad (x\to 0)\end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\cos^2 x=1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4) \qquad (x\to 0)$$

و بماأن $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x=1\neq 0$ فإنه بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$g(x)=\frac{Log(\cos x)}{\cos^2 x}=-\frac{x^2}{2}-\frac{7}{12}x^4+o(x^4) \qquad (x\to 0)$$

التمرين الرابع:

1. لدينا في جوار الصفر:

$$f(x)=\frac{1}{1+Log(1+x)}=\frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

$$g(x)=\frac{1-2x^2+x^3}{1+x}=1-x-x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

و ذلك بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة لأن $\lim\limits_{x\to 0}1+Log(1+x)\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to 0}1+x\neq 0$

2. نستنتج من الإجابة (1) أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=1-x$ مماس لمنحنيي f و g في جوار 0.

و لدينا:

$$f(x)-(1-x)=\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

$$g(x)-(1-x)=-x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

و بماأن $\frac{3}{2}x^2 \geq 0$ و $-x^2 \leq 0$ من أجل أي x في جوار 0 فإنّ منحنى f يقع فوق المماس في جوار 0 بينما يقع منحنى g تحته في نفس الجوار.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

I- 1. نستخدم البرهان بالتراجع:

من أجل $n=0$، المتراجحة صحيحة لأن: $|U_1-U_0|\le k^0|U_1-U_0|$.

نفرض أنّ $|U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$ و نبرهن أنّ $|U_{n+2}-U_{n+1}|\le k^{n+1}|U_1-U_0|$.

لدينا حسب فرض التمرين:

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|\le k|U_{n+1}-U_n|$$

و باستخدام فرض التراجع نستنتج أنّ:

$$\begin{aligned}|U_{n+2}-U_{n+1}|&\le k\times k^n|U_1-U_0|\\&\le k^{n+1}|U_1-U_0|\end{aligned}$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

2. لدينا من أجل p و q عددين طبيعيين مع $p>q$:

$$\begin{aligned}|U_p-U_q|&=|U_p-U_{p-1}+U_{p-1}-U_{p-2}+U_{p-2}+\cdots-U_{q+1}+U_{q+1}-U_q|\\&\le|U_p-U_{p-1}|+|U_{p-1}-U_{p-2}|+\cdots+|U_{q+1}-U_q|\\&\le k^{p-1}|U_1-U_0|+k^{p-2}|U_1-U_0|+\cdots+k^q|U_1-U_0|\\&\le\left(k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q\right)|U_1-U_0|\end{aligned}$$

لكن:

$$k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q=k^q\left(\frac{1-k^{p-q}}{1-q}\right)\le\frac{k^q}{1-k}$$

لأن: $0<1-k^{p-q}<1$ (لأن k من $]0,1[$)

و عليه:

$$|U_p-U_q|\le k^q\frac{1-k^{p-q}}{1-k}|U_1-U_0|\le\frac{k^q|U_1-U_0|}{1-k}$$

3. استنتاج أنّ (U_n) كوشية:

لدينا مما سبق، من أجل p و q طبيعيين مع $p\ge q$:

$$0\le|U_p-U_q|\le\frac{k^q|U_1-U_0|}{1-k}$$

بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$0 \leq \lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \left|U_p - U_q\right| \leq \frac{\left|U_1 - U_0\right|}{1-k} \lim_{q\to+\infty} k^q$$

و بما أنّ: $\lim_{q\to+\infty} k^q = 0$ (لأنّ $0<k<1$) فإن: $\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \left|U_p - U_q\right| = 0$

و هو ما يجعل (U_n) متتالية كوشية.

4. (U_n) متقاربة لأنّها كوشية و حدودها حقيقية.

II- ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، لدينا:

$$\left|U_{n+1} - U_n\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\sin U_n - \sin U_{n-1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\sin U_n - \sin U_{n-1}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|U_n - U_{n-1}\right|$$

بأخذ $k=\frac{1}{2}$ و باستخدام الجزء (I)، نستنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة.

<u>التمرين الثاني</u>:

ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، لدينا:

1. أ.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} U_k - \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=n+1}^{2n} U_k$$

$$= U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{2n}$$

ب. لدينا:

$$S_{2n} - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{2n} \geq U_{2n} + U_{2n} + \cdots + U_{2n}$$

(لأنّ (U_n) متناقصة فرضا).

و عليه:

$$S_{2n} - S_n \geq nU_{2n} \geq nU_{2n+1} \geq 0$$

(لأنّ (U_n) متتالية موجبة و متناقصة).

إذن:

$$\forall n \in \aleph^* \quad 0 \leq nU_{2n+1} \leq nU_{2n} \leq S_{2n} - S_n$$

ج. بما أنّ $\sum_{n\geq1} U_n$ متقاربة فإنّ (S_n) متقاربة و (U_n) متقاربة نحو 0 و عليه:

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0\right) \wedge \left(\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = 0\right)$$

ثم باستخدام الجواب 'ب'، نستنتج من الحصر أن:

$$\left\lfloor \lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n}=0 \right\rfloor \wedge \left\lfloor \lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n+1}=0 \right\rfloor$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)U_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n+1}+\lim_{n\to+\infty}U_{2n+1}=0$$

د. بما أنّ المتتاليتين المستخرجتين $(2nU_n)$ و $((2n+1)U_{n+1})$ متقاربتين نحو نفس النهاية وهي 0، فإنّ المتتالية (nU_n) متقاربة نحو 0.

2. أ. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}V_k &= \sum_{k=1}^{n}k\left(U_k-U_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}kU_k-\sum_{k=1}^{n}kU_{k+1}\\ &=\left(\sum_{k=1}^{n}kU_k-\sum_{k=1}^{n}(k+1)U_{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}U_{k+1}\\ &=\left(\sum_{k=1}^{n}kU_k-\sum_{k=2}^{n+1}kU_k\right)+\sum_{k=2}^{n+1}U_k\\ &=\left(U_1-(n+1)U_{n+1}\right)+\sum_{k=2}^{n+1}U_k\\ &=-(n+1)U_n+\sum_{k=1}^{n+1}U_k\end{aligned}$$

(لاحظ أنّه يمكن استخدام البرهان بالتراجع).

ب. نفرض أنّ $\sum_{n\geq1}U_n$ متقاربة و نبرهن تقارب $\sum_{n\geq1}V_n$.

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}V_k &= \lim_{n\to+\infty}\left[-(n+1)U_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}U_k\right]\\ &=-\lim_{n\to+\infty}(n+1)U_{n+1}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}U_k\\ &=0+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}U_k\end{aligned}$$

بماأنّ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}U_k$ عدد حقيقي (لأن $\sum_{n\geq1}U_n$ متقاربة) فإن السلسلة $\sum_{n\geq1}V_n$ متقاربة.

<u>التمرين الثالث</u>:

- ننشر أولا التابع f حتى الرتبة 2 في جوار 0 حيث:

$$f(x)=\frac{Log\left(\cos^2(x)\right)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+\sin^2 x}\neq 0$

ثم في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

و منه:

$$\cos^2 x = 1-x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

وعليه:

$$Log(\cos^2 x) = Log(1-x^2+o(x^2)) \qquad (x\to 0)$$

و بماأن $-x^2+o(x^2)$ في جوار 0 من أجل x في جوار 0 و $x\mapsto Log(1+x)$ مستمر عند 0 و لدينا $Log(1+x)=x+o(x)$ في جوار 0 فإنّ:

$$Log(\cos^2 x) = Log(1-x^2+o(x^2)) = -x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\sin x = x+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

ومنه:

$$\sin^2 x = x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

و عليه:

$$\sqrt{1+\sin^2 x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)} \qquad (x\to 0)$$

و بماأنّ $x^2+o(x^2)$ في جوار 0 من أجل x في جوار 0 و $x\mapsto\sqrt{1+x}$ مستمر عند 0 و لدينا $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+o(x)$ في جوار 0 فإنّ:

$$\sqrt{1+\sin^2 x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

إذن بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$f(x) = -x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

- ننشر الآن التابع $g: x\mapsto e^{x\log\sqrt{x}}$ حتى الرتبة 2 في جوار 1.

لدينا:

$$e^{xLog\sqrt{x}} = e^{\frac{1}{2}x\,Log\,x}$$

نضع: $x = t+1$ مع t في جوار الصفر. عندئذ لدينا:

$$g(x) = e^{\frac{1+t}{2}Log(1+t)}$$

ثم: $$Log(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+o(t^2) \qquad (x\to 0)$$

و منه:

$$\frac{1+t}{2}Log(1+t) = \frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2) \qquad (t\to 0)$$

و بماأنّ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1+t}{2}Log(1+t)=0$ و $x\mapsto e^t$ مستمر عند 0 و

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad (t\to 0)$$

فإنّ:

$$g(1+t)=e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)}=1+\frac{t}{2}+\frac{3}{8}t^2+o(t^2) \qquad (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$g(x)=1+\frac{x-1}{2}+\frac{3(x-1)^2}{8}+o\left((x-1)^2\right) \qquad (x\to 1)$$

- يبقى أن ننشر التابع $h:x\mapsto\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ حتى الرتبة 2 في جوار $+\infty$.

لنضع: $t=\frac{1}{x}$. لاحظ أنّه عندما يكون المتغير x في جوار $+\infty$، يكون المتغير t في جوار 0 مع t موجب.

و عليه:

$$h(x)=h\left(\frac{1}{t}\right)=\sqrt{\frac{1}{1+t}}=\sqrt{1-t+t^2+o(t^2)} \qquad (t\to 0)$$

و بماأنّ $\lim_{t\to 0}-t+t^2+o(t^2)=0$ و $\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)$ في جوار 0 فإنّ:

$$h\left(\frac{1}{t}\right)=1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+o(t^2) \qquad (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$h(x)=1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (x\to +\infty)$$

<u>التمرين الرابع:</u>

1. لدينا:

$$f(0)=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=1-e^{-1}$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$f(n+1)=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\int_0^1 h'(x)\,g(x)dx$$

مع $h'(x)=e^{-x}$ و $g(x)=x^{n+1}$.

و عليه بإستخدام المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}f(n+1)&=\left[h(x)g(x)\right]_0^1-\int_0^1 h(x)g'(x)dx\\&=-e^{-1}+(n+1)\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx\\&=-e^{-1}+(n+1)f(n)\end{aligned}$$

3. نستخدم البرهان بالتراجع:

لدينا: $f(0)=0!e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}\right)\right]=1-e^{-1}$ محققة.

نفرض صحة الخاصية من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.
لدينا من الجواب السابق:

$$f(n+1)=-e^{-1}+(n+1)f(n)$$

$$=-e^{-1}+(n+1)n!e^{-1}\left[e-\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]\right]$$ (حسب فرض التراجع)

$$=(n+1)!e^{-1}\left[e-\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]\right]$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph\quad f(n)=n!e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$$

4. حسب دستور 'ماك لوران' مع باقي 'لاغرانج' للتابع $x\mapsto e^x$ من الرتبة n لدينا:

$$\forall x>0,\exists c\in\left]0,x\right[\ /\quad e^x=1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

و منه:

مع $0<c<1$

$$e=\left[1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]+\frac{e^c}{(n+1)!}$$

أو:

$$e^1-\left[1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]=\frac{e^c}{(n+1)!}$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph\quad f(n)=e^{-1}n!\frac{e^c}{(n+1)!}$$

و بما أنّ $0<c<1$، فإن:

$$\forall n\in\aleph\quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)=e^{-1}n!\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{e(n+1)}$$ (**لأنّ** $e<3$)

5. لدينا مما سبق:

$$\forall n\in\aleph\quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)<\frac{3}{e(n+1)}$$

و بالمرور إلى النهايات، نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e(n+1)}\le\lim_{n\to+\infty}f(n)\le\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{e(n+1)}$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}f(n)=0$$

6. بماأنّ:

$$\forall n\in\aleph\quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)$$

و

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n+1}=+\infty$$

فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1} f(n)$ متباعدة حسب مقياس المقارنة.

ثم، لدينا: $\forall n \in \aleph \quad \frac{f(n)}{n} < \frac{3}{en(n+1)} < \frac{3}{en^2}$

و $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$

فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n}$ متقاربة حسب مقياس المقارنة.

إمتحانات

2001-2000

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

$$A=\left\{\frac{n-1}{n+1},\quad n\in\aleph\right\}$$

1. لدينا تعريفا:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=1\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\aleph\ /\ \forall n\in\aleph, n\geq n_0\Rightarrow|U_n-1|\leq\varepsilon\right)$$

ليكن ε موجب تماما.
لدينا من أجل $0\leq n$:

$$|U_n-1|=\frac{2}{n+1}$$

يكون لدينا $\frac{2}{n+1}<\varepsilon$ إذا كان $n>\frac{2}{\varepsilon}-1$ و بالتالي إذا أخذنا $n_0=\left[\left|\frac{2}{\varepsilon}-1\right|\right]+1$ يتحقق المطلوب.

2. بما أنّ المتتالية (U_n) متقاربة فهي محدودة و عليه A محدودة في $\Re$.
3. لدينا:

$$\forall n\in\aleph\quad U_{n+1}-U_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}>0$$

و عليه (U_n) متزايدة.
و بما أنّ المتتالية (U_n) محدودة، فإن:

$$\sup A=\sup_{n\in\aleph}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_n=1$$

و

$$\inf A=\inf_{n\in\aleph}U_n=U_0=-1$$

4. بما أنّ $1\notin A$ (لأنّ (U_n) رتيبة تماما) فإن $\max A$ غير موجود.
$\min A=-1$ (لأنّ $-1=U_0\in A$).

التمرين الثاني:

1. ليكن n من $\aleph-\{0,1\}$ كيفي، لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[Log(k+1)-Log(k)]=\sum_{k=1}^{n-1}Log(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}Log(k)$$

$$=(Log2+Log3+\cdots+Logn)-(Log1+Log2+\cdots+Log(n-1))$$

$$=Logn$$

2. لدينا فرضا:

$$\frac{1}{k+1}\leq Log(k+1)-Log(k)\leq\frac{1}{k},\quad\forall k\geq1$$

و بالتالي:

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(Log(k+1)-Log(k)\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

أي:

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq Logn \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

3. المتراجحة صحيحة عندما نأخذ $n=1$، لأنّ:

$$\frac{1}{1} \leq U_1 = 1-Log1 \leq 1$$

و من أجل $n \geq 2$ لدينا:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq Logn \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

أي:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Logn \leq 0 \\ \wedge \\ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-Logn \geq 0 \end{cases}$$

و عليه:

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Logn \leq 1 \\ \wedge \\ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-Logn \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

و هو المطلوب.

4. ليكن n من $\aleph$ كيفي، لدينا:

$$\begin{aligned} U_{n+1}-U_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-Log(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Logn\right) \\ &= \frac{1}{n+1}-Log(n+1)+Logn \leq 0 \end{aligned}$$

بفضل فرض السؤال 2.
و عليه المتتالية (U_n) متناقصة.

5. كما يظهر من النتيجتين 3 و 4 أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 0 و عليه، فإنّ (U_n) متقاربة كذلك.
بما أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad \frac{1}{n} \leq U_n \leq 1$$

و بالمرور إلى النهاية، فإنّ: $0 \leq \lim_{n \to +\infty} U_n \leq 1$

و عليه: $\lim_{n \to +\infty} U_n \in [0,1]$

التمرين الثالث:

من أجل a و b موجبين تماما، نضع:

$$U_n = \frac{a^n}{n} \quad ; \quad V_n = \left(b + \frac{1}{n}\right)^n \quad / \; n \in \aleph^*$$

(لاحظ أن (U_n) و (V_n) ذاتا حدود موجبة)

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = a \in \Re_+^*$

$$\left.\begin{array}{l} a<1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq1} U_n \;\; CV \\ a>1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq1} U_n \;\; DV \end{array}\right\}$$ (حسب مقياس دالمبار)

و في حالة a=1 فإنّ $U_n = \frac{1}{n}$ و عليه $\sum\limits_{n\geq1} U_n$ متباعدة (سلسلة ريمان مع α=1).

لدينا من جهة أخرى: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{V_n} = b \in \Re_+^*$

$$\left.\begin{array}{l} b<1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq1} V_n \;\; CV \\ b>1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq1} V_n \;\; DV \end{array}\right\}$$ (حسب مقياس كوشي)

و في حالة b=1 فإنّ $V_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ و عليه $\sum\limits_{n\geq1} V_n$ متباعدة (و ذلك حسب الشرط اللازم لتقارب سلسلة).

بما أنّ السلسلتين ذوات حدود موجبة فإنه في حالة تباعدهما تكون نهاية متتالية المجاميع الجزئية لكل منهما $+\infty$ و عليه نستنتج:

$$(a<1 \wedge b<1) \Rightarrow \left(\sum_{n\geq1} U_n + \sum_{n\geq1} V_n \quad CV\right)$$

$$(a<1 \wedge b\geq1) \Rightarrow \left(\sum_{n\geq1} U_n + \sum_{n\geq1} V_n \quad DV\right)$$

$$(a\geq1 \wedge b<1) \Rightarrow \left(\sum_{n\geq1} U_n + \sum_{n\geq1} V_n \quad DV\right)$$

$$(a\geq1 \wedge b\geq1) \Rightarrow \left(\sum_{n\geq1} U_n + \sum_{n\geq1} V_n \quad DV\right)$$

ملاحظة: نرمز بـ CV لسلسلة متقاربة و بـ DV لسلسلة متباعدة.

التمرين الرابع:

1. يمكن التأكد بكل سهولة أنّ المتتالية (U_n) ذات حدود موجبة و ذلك باستخدام البرهان بالتراجع.
2. نستعين بالبرهان بالتراجع.

من أجل $n=0$، لدينا:

$$|U_1 - U_0| \leq 1 \times |U_1 - U_0|$$

نفرض صحة الخاصية من أجل الرتبة n أي:

$$\left|U_{n+1}-U_n\right|\leq\frac{1}{4^n}\left|U_1-U_0\right|$$

و نبرهن صحتها من أجل الرتبة n أي نبرهن:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|\leq\frac{1}{4^{n+1}}\left|U_1-U_0\right|$$

لدينا:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|=\left|\frac{1}{2+U_{n+1}}-\frac{1}{2+U_n}\right|\quad=\frac{\left|U_{n+1}-U_n\right|}{\left|(2+U_{n+1})(2+U_n)\right|}$$

$$\leq\frac{1}{4}\left|U_{n+1}-U_n\right|$$

و باستخدام فرض التراجع، نستنتج أنّ:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|\leq\frac{1}{4^{n+1}}\left|U_1-U_0\right|$$

و عليه المتراجحة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

3. حالة خاصة من التمرين الأول (الإمتحان الإستدراكي 2000/1999) السؤال رقم 2 مع $k=\frac{1}{4}$.

4. لدينا مما سبق: $0\leq\left|U_p-U_q\right|\leq\frac{1}{4^q}\left|U_1-U_0\right|$

بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$0\leq\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p-U_q\right|\leq\left|U_1-U_0\right|\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{4^q}$$

و بما أنّ $\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{4^q}=0$ فإنّ $\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p-U_q\right|=0$ و هو ما يجعل المتتالية (U_n) كوشية.

5. (U_n) متقاربة لأنها كوشية و نهايتها حل للمعادلة $\ell=\frac{1}{2+\ell}$ أي $\ell=-1+\sqrt{2}$. و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=-1+\sqrt{2}$$

6. بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}U_n=-1+\sqrt{2}\neq 0$ فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0}U_n$ متباعدة.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- 1. نضع $t = x + 1$ مع t في جوار 0 . نذكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\mathrm{sh}(t) = t + o(t^2) \ ; \ \mathrm{ch}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

بتعويض t بـ $x+1$، نجد:

$$\mathrm{sh}(1+x) = 1 + x + o\left((1+x)^2\right) \qquad (x \to -1)$$

$$\mathrm{ch}(1+x) = 1 + \frac{(1+x)^2}{2} + o\left((1+x)^2\right) \qquad (x \to -1)$$

.2

- $$\lim_{x\to -1} \frac{\mathrm{sh}(1+x) + \frac{1}{2}(x^2-1)}{(x^2-1)(x+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sh}(t) + \frac{1}{2}(t^2 - 2\,t)}{(t^2-2\,t)t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{-2t^2 + o(t^2)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}}{-2 + \frac{o(t^2)}{t^2}} = -\frac{1}{4}$$

- $$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)\,\mathrm{ch}(1+x) - 2x\,\mathrm{sh}(1+x)}{(x^2-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2-2t)\,\mathrm{ch}(t) - 2(t-1)\,\mathrm{sh}(t)}{(t^2-2t)^2}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 + o(t^2)}{+4t^2 + o(t^2)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-1 + \frac{o(t^2)}{t^2}}{+4 + \frac{o(t^2)}{t^2}} = -\frac{1}{4}$$

- $$\lim_{x\to -1} \frac{\mathrm{sh}(1+x)}{x^2-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t^2-2t} = \lim_{t\to 0} \frac{t + o(t^2)}{t^2-2t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{o(t^2)}{t}}{-2+t} = -\frac{1}{2}$$

II- أ. لدينا تعريفا:

f مستمرة عند -1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

ثم: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{\operatorname{sh}(1+x)}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$ (حسب 2)

$$\lim_{\substack{x\to -1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{1}{8}\left(x^2-5\right)=-\frac{1}{2}=f(-1)$$

و عليه: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} f(x)=f(-1)$

و منه f مستمر عند -1.

ب. لدينا تعريفا:

f يقبل الاشتقاق عند -1 $\Leftrightarrow \exists l\in\Re/\quad \lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-1}=l$

ثم: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{\frac{\operatorname{sh}(1+x)}{x^2-1}+\frac{1}{2}}{x+1}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{\operatorname{sh}(1+x)+\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)(x+1)}=-\frac{1}{4}$ (حسب 2)

و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{\frac{1}{8}\left(x^2-5\right)+\frac{1}{2}}{(x+1)}$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{x^2-1}{8(x+1)}=\lim_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{1}{8}(x-1)=-\frac{1}{4}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\frac{1}{4}$

أي f قابل للاشتقاق عند -1.

ج. لدينا تعريفا:

f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\Re$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ يقبل الإشتقاق على } \Re \\ \text{و} \\ f' \text{ مستمر على } \Re \end{cases}$

- دراسة قابلية إشتقاق f على $\Re$:

واضح أن التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re/\{-1\}$ و بماأنه يقبل الإشتقاق عند $1-$ حسب ما سبق فإن f يقبل الإشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$f^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-1)\,\mathrm{ch}(1+\mathrm{x})-2x\,\mathrm{sh}(1+\mathrm{x})}{(x^2-1)^2} & ; \quad x<-1\\[2ex] \dfrac{1}{4}x & ; \quad x\geq -1\end{cases}$$

- دراسة استمرارية $f^{'}$ على $\Re$:
  - $x<-1$: $f^{'}$ مستمر (نسبة تابعين مستمرين)
  - $x>-1$: $f^{'}$ مستمر (كثير حدود من الدرجة الأولى)
  - القيمة -1: لدينا:

$$\lim_{\substack{<\\x\to-1}} f^{'}(x)=\lim_{\substack{<\\x\to-1}}\frac{(x^2-1)\,\mathrm{ch}(1+\mathrm{x})-2x\,\mathrm{sh}(1+x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{1}{4}$$ (حسب 2)

و $$\lim_{\substack{>\\x\to-1}} f^{'}(x)=\lim_{\substack{>\\x\to-1}}\frac{1}{4}x=-\frac{1}{4}=f^{'}(-1)$$

و منه: $$\lim_{x\to-1} f^{'}(x)=-\frac{1}{4}=f^{'}(-1)$$

أي $f^{'}$ مستمر عند -1.

إذن $f^{'}$ مستمر على $\Re$.

<u>التمرين الثاني</u>:

1. $$I(0)=\int_{-\infty}^{0}e^t\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^t\,dt=\lim_{x\to-\infty}\left[e^t\right]_x^0=\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^x\right)=1$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$\begin{aligned}I(n)&=\int_{-\infty}^{0}t^ne^t\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t^ne^t\,dt\\&=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f^{'}(t)g(t)\,dt\end{aligned}$$

حيث: $g(t)=t^n$ ، $f^{'}(t)=e^t$ و $f(t)=e^t$.

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\left[f(t)g(t)\right]_x^0-\int_x^0 f(t)g^{'}(t)\,dt\right)$$ (باستعمال المكاملة بالتجزئة)

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to-\infty}\left(\left[t^ne^t\right]_x^0-n\int_x^0 t^{n-1}e^t\,dt\right)\\&=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(x^ne^x\right)}_{=0}-n\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t^{n-1}e^t\,dt}_{I(n-1)}\end{aligned}$$

إذن: $$\forall n\geq 1 \quad I(n)=-nI(n-1)$$

3. لنعوض كل n بـ $n-1$ ، $n-2$ ، ...،1، 0 على التوالي فنجد:

$$\begin{aligned}
I(n) &= -n\,I(n-1)\\
I(n-1) &= -(n-1)\,I(n-2)\\
I(n-2) &= -(n-2)\,I(n-3)\\
&\vdots\\
I(1) &= -1\,I(0)\\
I(0) &= 1
\end{aligned}$$

و بضرب أطراف المساواة طرفا في طرف و بالإختزال نجد:

$$I(n) = (-1)^n n!\,I(0)$$

إذن: $\forall n \in \aleph \quad I(n) = (-1)^n n!$

التمرين الثالث:

.1

- $f(x) = \dfrac{x - Log(1+x)}{\cos(x)}$

لدينا: $x - Log(1+x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$$

إذن بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة لـ $\dfrac{x^2}{2}$ على $1 - \dfrac{x^2}{2}$ و مع إهمال جميع الحدود التي رتبها أكبر تماما من 2، نجد:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- $g(x) = Log(2 + \sin(2x))$

أو بعبارة أخرى: $g(x) = Log2 + Log\left(1 + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) \quad / \quad \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 0$

لدينا:

$$\frac{\sin 2x}{2} = x + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

و عليه:

$$Log\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

إذن:

$$g(x) = Log2 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

2. نستنتج مما سبق أنّ لمنحنيي f و g مماسان عند 0.

- معادلة المماس بالنسبة لمنحنى f هي: $y = 0$.

و بماأن $\frac{1}{2}x^2 > 0$ في جوار 0 فإن منحنى f يقع فوق المماس في جوار 0.

- معادلة المماس بالنسبة لمنحنى g هي: $y = Log\,2 + x$.

و بماأن $-\frac{1}{2}x^2 < 0$ في جوار 0 فإن منحنى g يقع تحت المماس في جوار 0.

الإمتحان الشامل: Synthèse

التمرين الأول:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(\alpha x)}{x^2} & ; \quad x<0\\ Log(1+x) & ; \quad x\geq 0\end{cases}$$

1. لدينا تعريفا: $\left(f \text{ مستمر عند } 0\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ثم:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} Log(1+x)=0=f(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-x+\sin(\alpha x)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-x+\alpha x+o(x^2)}{x^2}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{\alpha-1}{x}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)$$

إذن حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\alpha-1}{x}=0$ أي $\alpha=1$.

2. لدينا تعريفا: $\left(f \text{ يقبل الاشتقاق عند } 0\right) \Leftrightarrow \exists\, l\in\Re \,/\, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=l$

من أجل $\alpha\neq 1$، f غير مستمر عند 0. و عليه f غير قابل للاشتقاق عند 0.

و من أجل $\alpha=1$، لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{Log(1+x)}{x}=1$$

و

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-x+\sin x}{x^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-x+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

إذن f غير قابل للاشتقاق عند 0.

3. أ. ليكن x من $\Re^+$. لدينا:

$$h'(x)=\frac{\sqrt{3}}{1+x}+\frac{\pi}{(x+2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)>0$$

لأنّ: $0<\frac{\pi}{x+2}<\frac{\pi}{2}$ أي $\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\geq 0$.

و عليه h متزايدة تماما على $\Re^+$.

ب. لدينا: $h(1)=\sqrt{3}\log 2-\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ و $h(0)=-1$

إذن: $h(0)\,h(1)<0$

ثم واضح أن h مستمر على $[0,1]$ و عليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد c من $]0,1[$ حل للمعادلة $h(x)=0$، و بما أنّ h رتيبة تماما فإنّ هذا الحل وحيد.

ج. من أجل $x=0$ ، واضح أنّ المتراجحة محققة لأن $0\le 0$.

و من أجل $x>0$ ، التابع h مستمر و قابل للاشتقاق على المجال $[0,x]$ و عليه حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من $]0,x[$ يحقق:

$$h(x)-h(0)=h'(c)(x-0)$$

و بالتعويض نجد:

$$h(x)+1=\left(\frac{\sqrt{3}}{1+c}+\frac{\pi}{(c+2)^2}\cos\frac{\pi}{c+2}\right)x$$

و عليه:

$$|h(x)+1|=\left(\frac{\sqrt{3}}{1+c}+\frac{\pi}{(c+2)^2}\cos\frac{\pi}{c+2}\right)x\le\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)x$$

لأن: $0\le\cos\frac{\pi}{c+2}\le 1$ ، $(c+2)^2\ge 4$ و $1+c>1$ (لأن $c>0$).

إذن: $\forall x\in\Re^{+}\quad |h(x)+1|\le\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)x$

التمرين الثاني:

1. $(n=4)$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)-\frac{x^2}{2}}{\sin^2(x)-x^2}$

نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

ومنه: $\sin^2(x)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\quad (x\to 0)$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)-\frac{x^2}{2}}{\sin^2(x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4!}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{1}{8}$$

2. $(n=3)$ $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - Log(1+x)-\frac{3}{2}x^2}{\sin(x)-x\cos(2x)}$$

إذا تذكرنا كذلك أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - Log(1+x)-\frac{3}{2}x^2}{\sin(x)-x\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{11}{6}x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{11}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{1}{11}$$

<u>التمرين الثالث</u>:

$$\forall n\in\aleph^* \quad I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

.1

$$I(1)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)}dx \quad =\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{1}{(x^2+1)}dx$$

$$=\lim_{a\to+\infty}[\text{arctg}(x)]_0^a=\frac{\pi}{2}$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

ثم: $$\int_0^{a}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx=\int_0^a f'(x)\,g(x)dx$$

حيث: $g(x)=(x^2+1)^{-n}$ و $f'(x)=1$.

و عليه باستخدام المكاملة بالتجزئة، لدينا:

$$\int_0^a \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx = \left[f(x)g(x)\right]_0^a - \int_0^a f(x)\, g^{'}(x)dx$$

$$= \left[x \times \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}\right]_0^a + 2n\int_0^a \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{a}{\left(a^2+1\right)^n} + 2n\int_0^a \frac{x^2+1-1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{a}{\left(a^2+1\right)^n} + 2n\int_0^a \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx - 2n\int_0^a \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

نجعل a يؤول نحو $+\infty$، نجد:

$$I(n) = 2n\,I(n) - 2n\,I(n+1)$$

و عليه:

$$I(n) = \frac{2n}{2n-1}I(n+1)$$

(لاحظ أنّ $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{a}{\left(a^2+1\right)^n} = 0$)

3. لدينا مما سبق:

$$\forall n \in \aleph^* \quad I(n+1) = \frac{2n-1}{2n}I(n)$$

و منه نستنتج:

$$I(2) = \frac{1}{2}I(1)$$

$$I(3) = \frac{3}{4}I(2)$$

$$I(4) = \frac{5}{6}I(3)$$

.

.

.

$$I(n+1) = \frac{2n-1}{2n}I(n)$$

و عليه بضرب أطراف المساواة طرفا في طرف نجد :

$$\forall n \in \aleph^* \quad I(n+1) = \frac{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}I(1) = \frac{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}$$

التمرين الرابع:

1. نحلّ المعادلة التفاضلية $x\,y'+2\,y=0$.

لدينا من أجل $y\neq 0$ و $x\neq 0$:

$$xy'+2y=0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{2}{x} \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow Log|x|=-2\,Log|x|+\lambda \;/\quad \lambda\in\Re$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{c}{x^2} \;/\quad (c\in\Re)$$

لأن التابع الصفري هو أيضا حل المعادلة التفاضلية $x\,y'+2\,y=0$.

2. من أجل: $y=\dfrac{x-\operatorname{arctg}(x)}{\mathrm{x}^2}$

لدينا:

$$xy'+2y=x\left(\frac{-x-\dfrac{x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\right)+\frac{2x-2\operatorname{arctg}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x-\dfrac{x}{1+x^2}}{x^2}=\frac{x}{1+x^2}$$

و عليه التابع $x\mapsto\dfrac{x-\operatorname{arctg}(x)}{\mathrm{x}^2}$ حل خاص للمعادلة (I).

3. نستنتج أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية (I) هو التابع المعرف بـ:

$$y=y_1+y_2$$

حيث y_1 هو الحل العام للمعادلة (I) بدون الطرف الحر و y_2 هو الحل الخاص للمعادلة (I) وعليه نكتب:

$$y=\frac{c}{x^2}+\frac{x-\operatorname{arctg}(x)}{\mathrm{x}^2}\quad/\quad c\in\Re$$

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

I- 1. ليكن p و q عددين طبيعيين بحيث $p \geq q$.
واضح صحة المتراجحة من أجل $p = q$.
من أجل $p > q$ ، لدينا:

$$\left|U_p - U_q\right| = \left|U_p - U_{p-1} + U_{p-1} - U_{p-2} + U_{p-2} + \cdots + \left(-U_{q+1}\right) + U_{q+1} - U_q\right|$$

$$\leq \left|U_p - U_{p-1}\right| + \left|U_{p-1} - U_{p-2}\right| + \cdots\cdots + \left|U_{q+1} - U_q\right|$$

$$\leq |k|^{p-1} + |k|^{p-2} + \cdots\cdots + |k|^q$$

$$\leq |k|^q \left(|k|^{p-1-q} + |k|^{p-2-q} \cdots + |k| + 1\right)$$

لكن:

$$1 + |k| + \cdots + |k|^{p-1-q} + 1 = \frac{1 - |k|^{p-q}}{1 - |k|}$$

إذن:

$$\left|U_p - U_q\right| \leq |k|^q \frac{1 - |k|^{p-q}}{1 - |k|} \leq \frac{|k|^q}{1 - |k|}$$

(لاحظ أنّ $1 - |k|^{p-q} < 1$ و $1 - |k| > 0$).

2. لدينا من أجل أي p و q عددين طبيعيين مع $p \geq q$:

$$0 \leq \left|U_p - U_q\right| \leq \frac{|k|^q}{1 - |k|}$$

ثمّ $\lim\limits_{q \to +\infty} \frac{|k|^q}{1 - |k|} = 0$ لأنّ $|k| < 1$، و منه:

$$\lim_{\substack{p \to +\infty \\ q \to +\infty}} \left|U_p - U_q\right| = 0$$

إذن (U_n) متتالية كوشية.

II- 1. لدينا:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + U_{n-1}}{2} - U_n = \frac{U_n + U_{n-1} - 2U_n}{2}$$

$$= -\frac{U_n - U_{n-1}}{2}$$

2. لدينا من الإجابة عن السؤال الأول:

$$U_{n+1}-U_n=-\frac{U_n-U_{n-1}}{2}=-\frac{1}{2}\left(U_n-U_{n-1}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(U_{n-1}-U_{n-2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(U_{n-2}-U_{n-3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(U_1-U_0\right)$$

إذن:

$$\forall n\in\aleph^* \quad U_{n+1}-U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(U_1-U_0\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

3. بما أنّ $-\frac{1}{2}\in\left]-1,1\right[$ و $U_{n+1}-U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل أي n من $\aleph^*$، فإنّ المتتالية $\left(U_n\right)$ متتالية كوشية و ذلك حسب الجزء (I)، و عليه $\left(U_n\right)$ متقاربة لأن حدودها حقيقية.

<u>التمرين الثاني</u>:

1. لدينا:

$$\forall n\in\aleph \quad S_{2n+1}-S_{2n}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$
$$=(-1)^{2n+1}a_{2n+1}=-a_{2n+1}$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$S_{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$
$$=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{2n}-a_{2n+1}$$
$$=a_0+\left(a_2-a_1\right)+\left(a_4-a_3\right)+\cdots+\left(a_{2n}-a_{2n-1}\right)-a_{2n+1}$$

و بما أنّ $\left(a_n\right)$ موجبة و متناقصة فإنّ:

$$S_{2n+1}-a_0=\left(a_2-a_1\right)+\left(a_4-a_3\right)+\cdots+\left(a_{2n}-a_{2n-1}\right)-a_{2n+1}\le 0$$

إذن:

$$\forall n\in\aleph \quad S_{2n+1}\le a_0$$

3. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}=S_{2n+3}-S_{2n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$

$$=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k+(-1)^{2n+2}a_{2n+2}+(-1)^{2n+3}a_{2n+3}-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$

$$=a_{2n+2}-a_{2n+3}\geq 0$$

لأنّ (a_n) متناقصة، و منه المتتالية (S_{2n+1}) متزايدة.
و بما أنّ (S_{2n+1}) محدودة من الأعلى (حسب 2.)، فإنّ (S_{2n+1}) متقاربة نحو عدد حقيقي l.
من جهة أخرى لدينا:

$$S_{2n}=S_{2n+1}+a_{2n+1}$$

و بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}+\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=l+0=l$$

إذن (S_{2n}) متقاربة.

4. بما أنّ المتتاليتين (S_{2n}) و (S_{2n+1}) متقاربتان نحو نفس النهاية، فإنّ المتتالية (S_n) متقاربة.

5. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ متقاربة لأنّ متتالية مجاميعها الجزئية (S_n) متقاربة.

<u>التمرين الثالث</u>:

- ننشر التابع: $f:x\mapsto Log(e+\sin(e.x))$ حتى الرتبة 2 في جوار 0.

لدينا:

$$f(x)=Log(e+\sin(e.x))=1+Log\left(1+\frac{\sin(e.x)}{e}\right)$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e.x)}{e}=0$$

نذّكر أنّه في جوار الصفر، لدينا:

$$\sin x=x+o(x^2)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

ومنه:

$$\frac{\sin(e.x)}{e}=x+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

وعليه باستخدام قاعدة التركيب، نجد:

$$Log\left(1+\frac{\sin(e.x)}{e}\right)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\quad (x\to 0)$$

أي:
$$f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\quad (x\to 0)$$

- ننشر الآن التابع $g: x\mapsto \mathrm{sh}(1-\cos(\mathrm{x}))$ من الرتبة 2 في جوار 0.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$ و التابع sh مستمر عند 0، ثم

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\quad (x\to 0)$$

و
$$\mathrm{sh}(x)=x+o\left(x^2\right)\quad (x\to 0)$$

و منه باستخدام قاعدة التركيب، نجد:

$$\mathrm{sh}(1-\cos(\mathrm{x}))=\mathrm{sh}\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)$$
$$=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\quad (x\to 0)$$

- بالنسبة لنشر التابع h أنظر حل الإمتحان الاستدراكي لسنة 2000/1999 (التمرين 3).

<u>التمرين الرابع</u>:

1. حساب I_0 و I_1:

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}=1$$

2. ليكن n من $\aleph/\{0,1\}$. لدينا:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}[\sin(x)]^n dx=\int_0^{\pi/2}\sin(x)\times[\sin(x)]^{n-1}dx=\int_0^{\pi/2}f'(x)g(x)dx$$

حيث: $f'(x)=\sin(x)$ و $g(x)=[\sin(x)]^{n-1}$ وعليه بإستخدام التكامل بالتجزئة، نجد:

$$I_n=\left[f(x)g(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}f(x)g'(x)dx$$
$$=-\left[\cos(x)\times(\sin x)^{n-1}\right]_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\times(\sin x)^{n-2}dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\times(\sin x)^{n-2}dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\left[1-\sin^2(x)\right]\times(\sin x)^{n-2}dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

إذن:
$$\forall n\geq 2\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

3. لدينا من النتيجة السابقة:

$$\forall n \geq 1, \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\times\cdots\times 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2} \times I_0$$

و عليه:

$$\forall n \geq 1 \quad I_{2n} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} \times \frac{\pi}{2}$$

و بالمثل نجد:

$$\forall n \geq 1 \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3}$$

$$= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3} \times I_{2-1}$$

و عليه:

$$\forall n \geq 1 \quad I_{2n+1} = \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$$

4. أ. لدينا:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leq \sin x \leq 1$$

و منه:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \aleph, \quad (\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$$

و بالتالي:

$$\int_0^{\pi/2} [\sin(x)]^{n+1} dx \leq \int_0^{\pi/2} [\sin(x)]^n dx$$

أي:

$$\forall n \in \aleph \quad I_{n+1} \leq I_n$$

ب. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا مما سبق:

$$I_{n+1} \leq I_n$$

و منه:

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

و عليه:

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

ج. لدينا مما سبق:

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$$

$$=\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times\frac{\pi}{2}\times(2n+1)$$

و بالمثل لدينا:

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2(n-2))}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)(2n)}$$

$$=\frac{2n+1}{2n}$$

و بما أنّ:

$$\forall n\geq1\quad 1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

فإنّ:

$$\forall n\geq1\quad 1\leq\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times\frac{\pi}{2}\times(2n+1)\leq\frac{2n+1}{2n}$$

و إنطلاقا من هذه العلاقة نحصل على:

$$\forall n\geq1\quad \frac{2n}{\pi(2n+1)}\leq\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times n\leq\frac{1}{\pi}$$

و ذلك بضرب أطراف المتراجحات في $\frac{2n}{\pi(2n+1)}$. و بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{\pi(2n+1)}=\frac{1}{\pi}$ إذن

وحسب قاعدة الحصر نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2\times n=\frac{1}{\pi}$$

إمتحانات

2002-2001

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

I-

1. نعم
2. لا
3. لا
4. نعم

II- لاحظ أنّ A محدودة في $\Re$ لأنّ $A \subset B$ و B محدودة في $\Re$، وعليه $\sup A \in \Re$ و $\sup B \in \Re$.

بما أنّ $\sup B$ هو أصغر عنصر في مجموعة الحواد العليا لـ B في $\Re$ فهو حاد أعلى لـ B في $\Re$ أي:

$$\forall x \in B \quad x \leq \sup B$$

و بما أنّ $A \subset B$ فإنّ:

$$\forall x \in A \quad x \leq \sup B$$

و عليه $\sup B$ حاد أعلى لـ A في $\Re$.

و بالتالي: $\sup A \leq \sup B$

لأنّ $\sup A$ هو أصغر عنصر في مجموعة الحواد العليا لـA في $\Re$.

III- طبيعة السلاسل:

- $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n^2+1}$

بما أنّ: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$ فإنّ $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n^2+1}$ متباعدة.

- $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n}$

لدينا:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n \geq 1} a^n$$

مع $a = \frac{2}{3}$

و هكذا تكون $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n}$ متقاربة لأنّها عبارة عن سلسلة هندسية أساسها a يحقق $|a| < 1$.

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 2^n}$

نلاحظ أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad \frac{1}{n^2 2^n} \leq \frac{1}{n^2}$$

بما أنّ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ متقاربة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha = 2$) و حسب مقياس المقارنة فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2 2^n}$ متقاربة.

- $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

لدينا: $\left|\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

و بما أنّ $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha = \frac{3}{2}$) و حسب مقياس المقارنة فإنّ $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right|$ متقاربة و عليه السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ متقاربة.

التمرين الثاني:

1. * باستخدام تعريف النهاية نبرهن أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ أي نبرهن صحة:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall n \in \mathbb{N}^*,\; n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

** باستخدام تعريف النهاية نبرهن كذلك أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$ أي نبرهن صحة:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall n \in \mathbb{N}^*,\; n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$$

و منه، و حتى يكون $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| \leq \varepsilon$، يكفي أن يكون $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ أي $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا:

$$\forall n\in\aleph^{*} \quad \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}<0$$

$$\forall n\in\aleph \quad \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{2n+1}{(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]}>0$$

و عليه $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\aleph^*}$ متناقصة، بينما $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\aleph^*}$ متزايدة.

3. لدينا:

$$A=\left\{\frac{1}{2p}\ ,\quad p\in\aleph^{*}\right\} \quad ; \quad B=\left\{\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\ ,\quad p\in\aleph\right\}$$

أ. يمكن أن نستقي من الإجابة الأولى أنّ المتتاليتين المستخرجتين $\left(\frac{1}{2p}\right)$ و $\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)$ متقاربتين و عليه فهما محدودتان و هو ما يفيد أنّ A و B محدودتين.

ب. بما أنّ $\left(\frac{1}{n}\right)$ متناقصة فإنّ $\left(\frac{1}{2p}\right)$ متناقصة أيضا، و عليه:

$$\sup A=\sup_{p\in\aleph^*}\left(\frac{1}{2p}\right)=\frac{1}{2\times 1}=\frac{1}{2}$$

$$\inf\ A=\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{2p}\right)=0$$

لأنّ $\left(\frac{1}{2p}\right)$ متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأدنى.

لدينا أيضا $\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)$ متزايدة لأنّ $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$ متزايدة، و عليه:

$$\inf\ B=\inf_{p\in\aleph}\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)=\frac{(2\times 0+1)^2}{(2\times 0+1)^2+1}=\frac{1}{2}$$

$$\sup B=\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)=1$$

لأنّ $\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)$ متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن تتقارب نحو حدّها الأعلى.

ج. استنتاجات:

$$\sup(A\cup B)=\max(\sup A,\sup B)=\max\left(\frac{1}{2},1\right)=1$$

$$\inf\,(A\cup B)=\min(\inf\ A,\inf\ B)=\min\left(0,\frac{1}{2}\right)=0$$

التمرين الثالث:

1. نستخدم البرهان بالتراجع:
لدينا: $U_0 = 3 \geq 2$ محققة. نفرض أنّ $U_n \geq 2$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $U_{n+1} \geq 2$ أي $U_{n+1} - 2 \geq 0$.
لدينا:

$$U_{n+1} - 2 = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} - 2 = \frac{(U_n - 2)^2}{2U_n} \geq 0$$

لأنّ $U_n > 0$ حسب فرض التراجع. و منه:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 2$$

2. لدينا

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} - U_n = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} - U_n = \frac{4 - U_n^2}{2U_n} = \frac{(2 - U_n)(2 + U_n)}{2U_n} \leq 0$$

بفضل نتيجة السؤال الأول. و منه المتتالية (U_n) متناقصة.

a. يظهر من الجوابين الأول و الثاني أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 2 فهي إذن متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ. و بما أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2}$$

فإنّ:

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} \right)$$

أي:

$$\ell = \frac{2}{\ell} + \frac{\ell}{2}$$

لأنّ $\ell \neq 0$ و ذلك حسب السؤال 1. و منه $\ell^2 = 4$.
و عليه تكون قيمة النهاية هي $\ell = 2$ لأنّ $\ell = -2$ حل مرفوض لأنّ $\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 2$.

3. استنتاج $\sup_{n \in \aleph} U_n$ و $\inf_{n \in \aleph} U_n$:
بما أنّ (U_n) متناقصة فإنّ:

$$\sup_{n \in \aleph} U_n = U_0 = 3$$

و من جهة أخرى (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأدنى، و عليه:

$$\inf_{n \in \aleph} U_n = \lim_{n \to +\infty} U_n = 2$$

4. بما أنّ $\lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0$ فإنّ $\sum_{n \geq 0} U_n$ متباعدة.

التمرين الرابع:

1. أ. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} V_k &= \sum_{k=1}^{n} k\left(U_k - U_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=1}^{n} kU_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)U_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=2}^{n+1} kU_k\right) + \sum_{k=2}^{n+1} U_k \\ &= \left(U_1 - (n+1)U_{n+1}\right) + \sum_{k=2}^{n+1} U_k \\ &= -(n+1)U_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} U_k\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

ب. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{V_k}{k} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m}\left(U_k - U_{k+1}\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{m} U_k - \sum_{k=n+1}^{m} U_{k+1}\right] \\ &= \lim_{m\to+\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{m} U_k - \sum_{k=n+2}^{m+1} U_k\right] \\ &= \lim_{m\to+\infty}\left(U_{n+1} - U_{m+1}\right) \\ &= U_{n+1} - \lim_{m\to+\infty} U_{m+1}\end{aligned}$$

و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ فإنّ:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = U_{n+1}$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا مما سبق:

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + (n+1)U_{n+1}$$

و بما أنّ:

$$U_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{V_k}{k}$$

إذن:

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (n+1)\frac{V_k}{k}$$

3. نفرض أن $\sum_{n\geq 1} V_k$ متقاربة. لدينا:

$$k \geq n+1 \Rightarrow \frac{n+1}{k} \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{n+1}{k} V_k \leq V_k$$

(لاحظ أنّ المتتالية (V_n) ذات حدود موجبة لأنّ المتتالية (U_n) متناقصة فرضا)

و منه:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{n+1}{k} V_k \leq \sum_{k=n+1}^{m} V_k, \ \forall m \geq n+1 \,/\, n \in \aleph$$

و بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{n+1}{k} V_k \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} V_k$$

و منه:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{n+1}{k} V_k \leq \sum_{k=1}^{n} V_k + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} V_k$$

أي:

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} V_k$$

بفضل النتيجة السابقة، نستنتج أنّ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k$ محدودة من الأعلى،

و بما أنّ $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k$ ذات حدود موجبة فإنها متقاربة.

4. لدينا:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

و بما أنّ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة (سلسلة ريمان مع $\alpha = \frac{1}{2}$) فإنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة حسب مقياس التكافؤ.

لدينا من جهة أخرى المتتالية (U_n) موجبة، متناقصة و متقاربة نحو 0 و هو ما يضمن، بفضل نتيجة السؤال 3، أن $\sum_{n\geq 0} V_n$ متباعدة.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

-I 1. لا؛ 2. نعم؛ 3. لا؛ 4. لا؛ 5. لا؛ 6. لا

-II لاحظ أنّه حتى يكون f مستمرا على $\Re$ يكفي أن يكون f مستمرا عند القيمتين -1 و 1.
لدينا:

$$\left(-1 \text{ مستمر عند } f\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)\right)$$
$$\Leftrightarrow -e^{-1} = a + b$$

لدينا من جهة أخرى:

$$\left(1 \text{ مستمر عند } f\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)\right)$$
$$\Leftrightarrow -a + b = 2a$$
$$\Leftrightarrow b - 3a = 0$$

إذن حتى يكون f مستمرا على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون $a = -\frac{1}{4}e^{-1}$ و $b = -\frac{3}{4}e^{-1}$.

-III حساب باستخدام النشور المحدودة النهايات المطلوبة:

- $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sh}(x)}\right)$

لدينا:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{\text{sh}(x) - x}{x\,\text{sh}(x)}$$

نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\text{sh}(x) = x + o(x^2)$$

و عليه:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sh}(x)}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sh}(x) - x}{x\,\text{sh}(x)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\,\text{arctg}(x)}$

نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$$
$$\text{arctg}(x) = x + o(x^2)$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x\,arctg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

IV- لنضع $t=x-1$. إذا كان المتغير x في جوار 1 كان المتغير t في جوار الصفر.
و عليه:

$$f(x)=f(t+1)=\frac{Log(t+1)}{(t+1)^2}\ \ /\ \ \lim_{t\to 0}(1+t)^2=1\neq 0$$

$$=\frac{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1+2t+t^2}\quad (t\to 0)$$

$$=t-\frac{5}{2}t^2+o(t^2)\ \ (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$f(x)=(x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\quad (x\to 1)$$

بما أنّ التابع f يقبل الإشتقاق عند 1 فإنّ منحنى f يقبل مماسا عند 1 معادلته $y=x-1$ و بما أنّ $-\frac{5}{2}(x-1)^2<0$ في جوار 1 فإن منحنى f يقع تحت المماس في جوار 1.

__التمرين الثاني:__

I- 1. لاحظ أنّ التابع f مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$ من أجل أي عدد حقيقي x من المجال $]0,1[$.
إذن يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع f في المجال $[0,x]$ حيث x من $]0,1[$.
وعليه:

$$\exists c\in\,]0,x[\ /\ f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$$

أي:

$$f(x)=-\frac{x}{2\sqrt{1-c^2}}$$

(تذّكر أنّ مشتق التابع قوس الجيب هو التابع $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

و بما أنّ:

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن:

$$\forall x\in\,]0,1[\quad -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\leq f(x)\leq-\frac{x}{2}$$

2. من الإجابة الأولى نستنتج أنّ:

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \le \frac{f(x)}{x} \le -\frac{1}{2}$$

و بالمرور إلى النهاية نجد:

$$-\frac{1}{2} \le \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x} \le -\frac{1}{2}$$

و عليه:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$$

II- 1. لاحظ أنّ التابع f قابل للاشتقاق على $\left]0,1\right[\cup \left]-1,0\right[$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين قابلين للاشتقاق على $\left]-1,0\right[$ و عبارة عن التابع العكسي لتابع قابل للاشتقاق على $\left]0,1\right[$.
ثم من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \qquad \text{(حسب 2)}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{1-\mathrm{ch}(x)}{x\sin x} = -\frac{1}{2} \quad \text{(حسب نظرية لوبيتال)}$$

و هو ما يضمن أنّ f يقبل الاشتقاق عند الصفر. إذن التابع f قابل للاشتقاق على $\left]-1,1\right[$،
و لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\mathrm{sh}(x)\sin x - \cos x\,(1-\mathrm{ch}(x))}{\sin^2(x)} & ; \quad -1 < x < 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & ; \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

2. لدينا تعريفا:

(f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\left]-1,1\right[$) $\Leftrightarrow$ (f يقبل الاشتقاق و f' مستمرعلى $\left]-1,1\right[$)

- f يقبل الاشتقاق على $\left]-1,1\right[$ (حسب1).
- لاحظ أنّ f' مستمر على $\left]0,1\right[\cup \left]-1,0\right[$.

و من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-\text{sh}(x)\sin x-\cos x(1-\text{ch}(x))}{\sin^2(x)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}=-\frac{1}{2}=f'(0)$$

و عليه f' مستمر عند 0.

إذن f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $]-1,1[$.

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة:

- $\int \frac{1}{x\left[1+(Logx)^2\right]}dx$

نفرض $t=Logx$ فيكون $dt=\frac{1}{x}dx$ و يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$\int\frac{dx}{x\left[1+(Logx)^2\right]}=\int\frac{1}{1+t^2}dt=\text{arctg}(t)+c=\text{arctg}(Log(x))+c\ /\ \ c\in\mathfrak{R}$$

- $\int \arcsin(x)dx$

باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة:

$$\int\arcsin(x)dx=\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

حيث $f'(x)=1$ و $g(x)=\arcsin x$.

و منه:

$$\int\arcsin(x)dx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c\ /\ \ c\in\mathfrak{R}$$

الإمتحان الشامل: Synthèse

التمرين الأول:

I- 1. من أجل x من المجال $]0,1[$، لاحظ أنّ التابع $g:t\mapsto Log(1-t)$ يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية في المجال $[0,x]$.

وعليه:

$$\exists c\in]0,x[\;/\; g(x)-g(0)=g'(c)(x-0)$$

أي:

$$Log(1-x)=\frac{-x}{1-c}$$

و بما أنّ $0<c<x$ فإنّ:

$$1\le \frac{1}{1-c}\le \frac{1}{1-x}$$

إذن:

$$\forall x\in]0,1[\quad \frac{-x}{1-x}\le Log(1-x)\le -x$$

2. أ. لدينا:

$$\forall x\ge 0 \quad h(x)=\sqrt{3}\,Log(1+x)-\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)$$

و منه:

$$\forall x\ge 0 \quad h'(x)=\frac{\sqrt{3}}{1+x}+\frac{\pi}{(x+2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)>0$$

(لاحظ أنّ $x\ge 0\Rightarrow 0<\frac{\pi}{x+2}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)>0$)

و هذا ما يضمن أنّ h رتيب تماما.

ب. يمكن التأكد بكل سهولة أنّ $h(0)h(1)<0$. و بما أنّ h مستمر على $[0,1]$، فإنّه يمكن استخدام نظرية القيم المتوسطة.

و عليه:

$$\exists c\in]0,1[\;/\; h(c)=0$$

و بما أنّ h رتيب تماما (حسب أ) فإنّ هذا الجذر وحيد.

II- 1. لدينا:

$$Log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3}=\left[1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[1+x-x^2+o(x^2)\right] \quad (x\to 0)$$

$$=-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

2. لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x} = -1$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{Log(1-x)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x} = -1$$

و عليه f يقبل الاشتقاق عند 0.

3. لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} -x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2) & ; \quad x \le 0 \wedge x\to 0 \\ -x+\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2) & ; \quad x > 0 \wedge x \to 0 \end{cases}$$

بما أنّ التابع f يقبل الإشتقاق عند 0 فإنّ منحنى f يقبل مماسا عند 0 معادلته $y=-x$ و لدينا:

a. إذا كان $x<0$ و x في جوار 0، فإنّ منحنى f يقع تحت المماس لأنّ $-\frac{x^2}{2}<0$.

b. إذا كان $x>0$ و x في جوار 0، فإنّ منحنى f يقع فوق المماس لأنّ $\frac{3}{2}x^2>0$.

4. بما أنّ النشر المحدود لـ f من الرتبة 2 لمّا $x \xrightarrow{>} 0$ لا يساوي النشر المحدود لـ f من الرتبة 2 لما $x \xrightarrow{<} 0$ فإنّ التابع f لا يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار 0.

III- 1. من أجل x في جوار $+\infty$ نضع $t=\frac{1}{x}$، عندئذ لدينا:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^3}}$$

$$= \frac{1}{t}\left(\sqrt{1+t^2}-\sqrt[3]{1+3t^2+t^3}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(\left[1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right]-\left[1+\frac{1}{3}(3t^2)+o(t^2)\right]\right) \quad \left(t \xrightarrow{>} 0\right)$$

$$= -\frac{t}{2}+o(t) \quad \left(t \xrightarrow{>} 0\right)$$

و بالتالي:

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

2. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

3. نستنتج أنه في جوار ∞+ منحنى f يقبل خطا مقاربا معادلته $y = 0$.

و بما أنّ $-\frac{1}{2x} < 0$ فإن منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار ∞+.

<u>التمرين الثاني</u>:

I- 1. حساب U_0:

$$U_0 = \int_0^1 \mathrm{ch}(x)dx = [\mathrm{sh}(x)]_0^1 = \mathrm{sh}(1)$$

2. لاحظ أنّ:

$$0 \le (1-x)^n \mathrm{ch}(x) \le \mathrm{ch}(x) \quad \forall x \in [0,1], \forall n \in \aleph$$

و منه:

$$\forall n \in \aleph \quad 0 \le \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{ch}(x)dx \le \int_0^1 \mathrm{ch}(x)dx$$

أي:

$$\forall n \in \aleph \quad 0 \le U_n \le \mathrm{sh}(1)$$

3. لدينا:

$$\forall x \in [0,1] \quad 0 \le 1-x \le 1$$

و منه:

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \aleph \quad (1-x)^{n+1} \mathrm{ch}(x) \le (1-x)^n \mathrm{ch}(x)$$

و عليه:

$$\forall n \in \aleph \quad \int_0^1 (1-x)^{n+1} \mathrm{ch}(x)dx \le \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{ch}(x)dx$$

أي:

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} \le U_n$$

4. بما أنّ المتتالية (U_n) متناقصة (حسب 3) و محدودة من الأدنى (حسب 2) فإنها متقاربة.

II- 1. ليكن n من $\aleph$ كيفي. بأخذ $f'(x) = chx$ و $g(x) = (1-x)^{n+2}$ و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد أنّ:

$$U_{n+2}=\int_0^1 f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$
$$=\left[(1-x)^{n+2}\,\mathrm{sh}(x)\right]_0^1+(n+2)\int_0^1(1-x)^{n+1}\,\mathrm{sh}(x)dx$$
$$=(n+2)\int_0^1(1-x)^{n+1}\,\mathrm{sh}(x)dx$$

ثم بأخذ هذه المرة $f'(x)=shx$ و $g(x)=(1-x)^{n+1}$ و باستخدام المكاملة بالتجزئة من جديد، نجد أنّ:

$$U_{n+2}=(n+2)\left[-1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n ch(x)dx\right]$$
$$=-(n+2)+(n+2)(n+1)U_n$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph\quad U_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[U_{n+2}+(n+2)\right]$$

2. أ. لدينا حسب (**I**- 2):

$$\forall n\in\aleph\quad 0\le U_n\le \mathrm{sh}(1)$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph\quad \frac{1}{n+1}\le U_n\le\frac{\mathrm{sh}(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n+1}$$

بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$0\le\lim_{n\to+\infty}U_n\le 0$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

ب. لدينا:

$$\forall n\in\aleph\quad \frac{1}{n+1}\le U_n$$

و بما أنّ $\sum_{n\ge0}\frac{1}{n+1}$ متباعدة فإنّ $\sum_{n\ge0}U_n$ متباعدة.

3. بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى، فإنّ:

$$\sup\{U_n,\ n\in\aleph\}=U_0=\mathrm{sh}(1)$$
$$\inf\{U_n,\ n\in\aleph\}=\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

التمرين الثالث:

ليكن x في جوار a مع $x\ne a$. بما أنّ f من الصنف C^3 في جوار a فحسب دستور تايلور يونغ، لدينا:

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+(x-a)^3\varepsilon(x-a)$$

مع: $\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$

و عليه من أجل h في جوار 0 و $h\ne0$ فإنّ:

$$f(a+3h)=f(a)+3\frac{f^{(1)}(a)}{1!}h+\frac{9}{2!}f^{(2)}(a)h^2+\frac{27}{3!}f^{(3)}(a)h^3+27h^3\varepsilon(3h)\ \ /\ \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(3h)=0$$

$$f(a+2h)=f(a)+2\frac{f^{(1)}(a)}{1!}h+4f^{(2)}(a)\frac{h^2}{2}+\frac{8}{3!}f^{(3)}(a)h^3+8h^3\varepsilon(2h)\ \ /\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(2h)=0$$

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}h+\frac{f^{(2)}(a)}{2}h^2+\frac{f^{(3)}(a)}{6}h^3+h^3\varepsilon(h)\ \ /\ \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

و بالتالي:

$$\begin{aligned} g(h)&=\frac{f^{(3)}(a)h^3+h^3[27\varepsilon(3h)-24\varepsilon(2h)+3\varepsilon(h)]}{h^3}\\ &=f^{(3)}(a)+27\varepsilon(3h)-24\varepsilon(2h)+3\varepsilon(h)\end{aligned}$$

إذن:

$$\lim_{h\to 0}g(h)=f^{(3)}(a)$$

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage**

التمرين الأول:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. لدينا $U_0 = 0 \le 1$ محققة.
إذا فرضنا صحة الخاصية من أجل الرتبة n، أي $U_n \le 1$ حق لنا أن نكتب:
$$\frac{1}{2-U_n} \le 1$$
أي:
$$U_{n+1} \le 1$$
و عليه:
$$\forall n \in \aleph \quad U_n \le 1$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:
$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)^2}{2 - U_n}$$
و بما أنّ $U_n \le 1$ (حسب 1) فإنّ $U_{n+1} - U_n \ge 0$. إذن (U_n) متزايدة.

3. المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى و متزايدة إذن فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.
و بما أنّ $\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n}$ فإنّ l يحقق المعادلة $l = \frac{1}{2-l}$.
لدينا:
$$l = \frac{1}{2-l} \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow l = 1$$

4. بما أنّ (U_n) متزايدة فإنّ:
$$\inf\{U_n, \quad n \in \aleph\} = U_0 = 0$$
من جهة أخرى (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأعلى،
و عليه:
$$\sup\{U_n, \quad n \in \aleph\} = \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

5. بما أنّ $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1 \ne 0$ فإنّ $\sum_{n \ge 0} U_n$ متباعدة.

التمرين الثاني:

1. لدينا تعريفا:
$$\left(\lim_{n \to +\infty} U_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph^* \ / \ \forall n \in \aleph^*, \ n \ge n_0 \Rightarrow |U_n - 0| \le \varepsilon\right)$$
ليكن ε موجب تماما. لدينا من أجل n من $\aleph^*$:

$$\left|U_n - 0\right| = \left|Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = Log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

إذن:

$$\left|U_n - 0\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow Log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} \leq e^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{e^{\varepsilon}-1} \quad (\text{لأنّ } 0<\varepsilon)$$

يكفي أخذ:

$$n_0 = \left[\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right]+1$$

و بالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

2. أ. حساب قيمة S_n. من أجل n من $\aleph^*$، لدينا:

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ &= Log2 + (Log3 - Log2) + \cdots + (Log(n+1) - Logn) \\ &= Log(n+1) \end{aligned}$$

ب. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} Log(n+1) = +\infty$$

ج. استنتاج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq1} U_n$. بما أنّ متتالية المجاميع الجزئية (S_n) للسلسلة $\sum\limits_{n\geq1} U_n$ متباعدة فإنّ السلسلة $\sum\limits_{n\geq1} U_n$ متباعدة.

<u>التمرين الثالث</u>:

1. التابع f قابل للإشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين قابلين للاشتقاق.
من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^2)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

إذن التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(x)+x-2\sin x}{x^3} & ; \quad x\neq 0\\[2ex] -\dfrac{1}{6} & ; \quad x=0\end{cases}$$

2. لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+x-2\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

و بما أنّ $f'(0)=-\dfrac{1}{6}$ ، فإنّ التابع f' مستمر عند 0.

3. لاحظ أنّ التابع f' مستمر على $\Re^*$ و بما أنّه مستمر عند الصفر فإنّ f' مستمر على $\Re$.
و عليه التابع f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\Re$.

4. لاحظ أنّ التابع $x\mapsto \sin(x)$ يحقق دستور "ماك لوران" مع باقي "لاغرانج" من الرتبة 1 و عليه من أجل أي x من $\Re^*$ يوجد c محصور بين 0 و x يحقق:

$$\sin x=\sin 0+(\sin)'(0)x+(\sin)''(c)\frac{x^2}{2}$$

$$=x-\frac{x^2}{2}\sin c$$

و منه:

$$\forall x\in\Re^* \quad |f(x)|=\left|-\frac{\sin c}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

و بما أنّ المتراجحة أعلاه محققة من أجل $x=0$ ، فإنّ:

$$\forall x\in\Re \quad |f(x)|=\left|-\frac{\sin c}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

<u>التمرين الرابع:</u>

I- حساب النهايات المطلوبة باستخدام النشور المحدودة من الرتبة 3:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x\,Log(1+x)}{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}$$

لدينا:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \quad (x\to 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$
$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x\,Log(1+x)}{e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{3}{2}$$

(تذّكر أنّه $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$)

- $\lim_{x\to 0} \frac{Log(1+x^2)}{x\,\text{arctg}(x)}$

نذكر أنه في جوار الصفر لدينا:

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Log(1+x^2)}{x\,\text{arctg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^2}} = 1$$

II- لحساب $\int x^2 \sin(x)dx$ ، نستعمل دستور المكاملة بالتجزئة و ذلك بأخذ $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$ فنجد:

$$\int x^2 \sin x\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

ثم بتطبيق دستور المكاملة بالتجزئة مرة أخرى لحساب $\int x\cos(x)dx$ وذلك بأخذ $f'(x) = \cos x$ و $g(x) = x$ نحصل على:

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x\, dx\right]$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c \quad / \; c \in \Re$$

إمتحانات

2003-2002

الإمتحان الأول:EMD1

التمرين الأول:

I- 1. لا؛ 2. لا؛ 3. لا؛ 4. لا؛
5. لا؛ 6. لا؛ 7. نعم؛ 8. لا.

II- دراسة طبيعة السلاسل:

- $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{a^n}$ مع $1<a$: بأخذ $U_n=\frac{n}{a^n}$ حيث n من $\aleph^*$ فإنّ (U_n) ذات حدود موجبة.

ثم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{a^{n+1}}}{\frac{n}{a^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{a}<1$$

و منه حسب مقياس دالمبار السلسلة $\sum_{n\geq 1}U_n$ متقاربة.

- $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-1}{n^2+1}$:

بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$ فإنّ السلسلة ذات الحد العام $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ متباعدة.

- $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$:

لدينا: $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\approx}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ و بما أنّ $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}$ متباعدة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha=1$) فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ متباعدة و ذلك حسب مقياس التكافؤ.

التمرين الثاني:

1. نبرهن بالتراجع أنّ: $\forall n\in\aleph\quad -2<U_n\leq 0$

لدينا $-2<U_0=-1\leq 0$ صحيحة. إذا افترضنا صحة الخاصية من أجل الرتبة n، أي $-2<U_n\leq 0$ فإنّه يمكننا أن نكتب:

$$1<\frac{4}{2-U_n}\leq 2$$

و منه:

$$-2<-3+\frac{4}{2-U_n}=U_{n+1}\leq -1\leq 0$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph\quad -2<U_n\leq 0$$

2. لدينا:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2+U_n-2}{2-U_n}=\frac{(U_n+2)(U_n-1)}{2-U_n}\leq 0$$

و هذا راجع لكون عناصر المتتالية تنتمي إلى المجال $]-2,0]$.
إذن المتتالية (U_n) متناقصة.

3. استنتاج طبيعة (U_n) ثم حساب نهايتها:
بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l حل للمعادلة:

$$l=-3+\frac{4}{2-l}$$

أي:

$$l^2+l-2=0$$

و منه:

$$l=-2 \quad \vee \quad l=1$$

ثم $l=1$ حل مرفوض لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\leq 0$ (حسب 1)

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=-2$$

4. حساب في حالة وجودها:

- $\sup\limits_{n\in\aleph} U_n$ ، $\max U_n$:

بما أنّ (U_n) متناقصة فإنّ

$$\sup_{n\in\aleph} U_n=\max_{n\in\aleph} U_n=U_0=-1$$

- $\inf\limits_{n\in\aleph} U_n$:

لدينا أيضا (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأدنى أي:

$$\inf_{n\in\aleph} U_n=\lim_{n\to+\infty} U_n=-2$$

- $\min\limits_{n\in\aleph} U_n$:

بما أنّ $\forall n\in\aleph \quad U_n>-2$ فإنّ:

$\min\limits_{n\in\aleph} U_n$ غير موجود

5. إستنتاج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$:
بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=-2\neq 0$ فإنّ $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متباعدة.

التمرين الثالث:

1. بيان أنّ: $\forall n\in\aleph \quad T_n=S_{2n+1}$
ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n}\left(U_{2k}+U_{2k+1}\right) \\ &= U_0+U_1+U_2+U_3+\cdots+U_{2n}+U_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} U_k = S_{2n+1} \end{aligned}$$

2. كتابة S_{2n} بدلالة S_{2n+1}. ليكن n من $\aleph$. لدينا:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} U_k = \sum_{k=0}^{2n+1} U_k - U_{2n+1} = S_{2n+1} - U_{2n+1}$$

3. برهان التكافؤ: $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة

a. $(\Leftarrow)$: نفرض أنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة أي (S_n) متقاربة. و بما أنّ (S_{2n+1}) متتالية مستخرجة من (S_n) فإنها متقاربة. و منه (T_n) متقاربة أي $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة.

b. $(\Rightarrow)$: نفرض أنّ $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة أي (T_n) متقاربة و نبرهن أنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة أي نبرهن أنّ (S_n) متقاربة.

بما أنّ (T_n) متقاربة فإنّ (S_{2n+1}) متقاربة. إذن حتى نبرهن أن (S_n) متقاربة يكفي أن نبرهن أنّ (S_{2n}) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}$.

لدينا:

$$S_{2n} = S_{2n+1} - U_{2n+1}, \quad \forall n \in \aleph$$

و بما أنّ (U_n) متقاربة نحو الصفر فإنّ (U_{2n+1}) متقاربة أيضا نحو الصفر لأنها متتالية مستخرجة من (U_n)، و منه (S_{2n}) متقاربة لأنها مجموع متتاليتين متقاربتين.

و لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n+1}-U_{2n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1}}_{=0} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}$$

و منه (S_n) متقاربة أي $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

4. تعيين طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$:

نضع: $U_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ و $V_n = U_{2n} + U_{2n+1}$ حيث n من $\aleph/\{0,1\}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = 0$$

لأنّ: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. إذن $\sum_{n\geq 2} U_n$ و $\sum_{n\geq 0} V_n$ لهما نفس الطبيعة.

لدينا من جهة أخرى:

$$\sum_{n\geq 2} V_n = \sum_{n\geq 2}\left(U_{2n}+U_{2n+1}\right)=\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(2n+1)}$$

و بما أنّ $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{n(2n+1)}$ و $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}$ متقاربة لأنّ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ كذلك (سلسلة ريمان مع $\alpha = 2 > 1$) فإنّ $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(2n+1)}$ متقاربة و ذلك حسب مقياس التكافؤ أي $\sum_{n\geq 2} V_n$ متقاربة و عليه $\sum_{n\geq 2} U_n$ متقاربة.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- 1. حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)= f(0)$$

لدينا $f(0)=b$ و:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} ax^2+b=b$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \mathrm{sh}(x)+1=1$$

ومنه حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون b=1 و a كيفي.

2. حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند الصفر يلزم و يكفي أن يتحقق:

$$\exists l\in\Re\ /\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=l$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{a^2x+b-b}{x}=a^2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{sh(x)+1-b}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{sh(x)}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{sh(x)-sh(0)}{x}=sh'(0)=ch(0)=1$$

لأنه حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند الصفر يلزم أن يكون مستمرا عند الصفر أي $b=1$.

إذن حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون $b=1$ و $a^2=1$ أي $b=1$ و ($a=1$ أو $a=-1$).

II- حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}$ باستخدام النشور المحدودة:

لدينا:

$$\sin x^2=x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

$$x\sin x^2=x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

و عليه لإزالة حالة عدم التعيين يكفي نشر البسط من الرتبة 3 في جوار 0.

لدينا:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

(التابع $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$ تابع زوجي و عليه معامل x^3 معدوم في النشر المحدود)

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)} \text{ غير موجودة}$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}=+\infty$$
$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}=-\infty$$

التمرين الثاني:

I- 1. واضح أنّ المتراجحة محققة من أجل $x=0$ لأنّ: $0\le \operatorname{arctg}0\le 0$
من أجل $x>0$ ، التابع $t\mapsto \operatorname{arctg}t$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$. و منه حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من $]0,x[$ بحيث:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}0=(\operatorname{arctg})'(c)(x-0)$$

أي:

$$\operatorname{arctg}x=\frac{1}{1+c^2}\times x$$

و بما أنّ $0<c<x$ فإنّ:

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}<1$$

إذن:

$$\forall x>0 \quad \frac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}(x)<x$$

و هو ما يوصل إلى المطلوب.

2. بما أنّ:

$$\forall x\ge 0 \quad \frac{x}{1+x^2}\le \operatorname{arctg}(x)\le x$$

فإنّ:

$$\forall x\in[0,1] \quad \frac{x(x-1)}{1+x^2}\ge (x-1)\operatorname{arctg}(x)\ge x(x-1)$$

لأنّ: $\forall x\in[0,1] \quad x-1\le 0$

و هذا يعني أنّ:

$$\forall x \in [0,1] \quad x(x-1) \le f(x) \le \frac{x(x-1)}{1+x^2}$$

II- 1. دراسة استمرارية التابع f عند 1 . لدينا:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (1+x)e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

إذن f غير مستمر عند 1.

2. f غير قابل للاشتقاق عند 1 لأنّه غير مستمر عند 1.

3. f لا يقبل نشرا محدودا من أي رتبة في جوار 1 لأنّ $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

4. لدينا:

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = (x-1)\,\mathrm{arctg}(x)$$

و منه:

$$f'(x) = \mathrm{arctg}(x) + \frac{x-1}{1+x^2}$$

و

$$\forall x \in [0,1] \quad f''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x^2)^2} > 0$$

و عليه f' رتيب تماما على المجال $]0,1[$.

5. لدينا:

$$f'(0) = \mathrm{arctg}\,0 + \frac{-1}{1} = -1 \quad ; \quad f'(1) = \mathrm{arctg}\,1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

إذن:

$$f'(0) \times f'(1) < 0$$

لدينا من جهة أخرى f' مستمر على المجال $[0,1]$ لأنّه عبارة عن مجموع توابع مستمرة. و عليه فإنّه يوجد، بمقتضى نظرية القيم المتوسطة، c من $]0,1[$ بحيث $f'(x) = 0$ و بما أنّ f' رتيب تماما على $]0,1[$ فإنّ c وحيد.

III- 1. النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0. لاحظ أنّه في جوار 0 :

$$f(x) = (x-1)\mathrm{arctg}(x)$$

ثم تذّكر أنّه في جوار 0 لدينا:

$$\mathrm{arctg}(x) = x + o(x^2)$$

و عليه:

$$(x-1)\,\mathrm{arctg}(x) = (x-1)x + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

و منه:

$$f(x) = -x + x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

2. معادلة المماس عند الصفر هي $y=-x$. و بما أنّ $x^2 \geq 0$ فإنّ منحنى f يقع فوق المماس في جوار الصفر.

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة:

- $\int x \operatorname{arctg}(x)dx$:

إذا فرضنا $f'(x)=x$ و $g(x)=\operatorname{arctg} x$ و طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{arctg}(x)dx &= f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}.dx \\
&= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}.dx \\
&= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c \quad / \quad c\in\Re
\end{aligned}$$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$:

لدينا:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

نضع $t=\frac{x}{2}$ فيكون $dt=\frac{1}{2}dx$. و منه بالتعويض في التكامل نجد:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \arcsin t+c \quad / \quad c\in\Re \\
&= \arcsin\frac{x}{2}+c \quad / \quad c\in\Re
\end{aligned}$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. حساب U_2. لدينا:

$$U_2 = 1 + \frac{U_1}{2-1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

2. نستعين بالتراجع. من أجل $n=1$ لدينا: $1 \le U_2 \le 2$ صحيحة.

نفرض صحة الخاصية أجل الرتبة n أي $1 \le U_n \le 2$ ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن $1 \le U_{n+1} \le 2$.

لدينا:

$$U_{n+1} = 1 + \frac{U_n}{n}$$

و بما أنّ:

$$1 \le U_n \le 2$$

فإنّ:

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \le 1 + \frac{U_n}{n} \le 1 + \frac{2}{n}$$

و عليه يكون لدينا حالتان:

أ. إذا كان $n \ge 2$ فإنّ:

$$1 < 1 + \frac{U_n}{n} \le 1 + \frac{2}{n} \le 1 + 1$$

أي:

$$1 \le U_{n+1} \le 2$$

ب. إذا كان $n < 2$ أي $n = 1$ فحسب الجواب 1 فإنّ: $1 \le U_{1+1} \le 2$

و عليه:

$$\forall n \in \aleph^* \quad 1 \le U_n \le 2$$

3. لدينا تعريفا:

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = 1\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \aleph^* /\ \forall n \in \aleph^*,\ n \ge n_0 \Rightarrow |U_n - 1| \le \varepsilon\right)$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا من أجل $n \ge 2$:

$$|U_n - 1| = \left|\frac{U_{n-1}}{n-1}\right| = \frac{U_{n-1}}{n-1} \le \frac{2}{n-1}$$

و منه، حتى يكون $|U_n - 1| \le \varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{2}{n-1} \le \varepsilon$ أي $n \ge 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

و بالتالي إذا أخذنا: $n_0 = \left[1 + \frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب .

4. يمكن استخدام البرهان بالتراجع للتأكد من أنّ:

$$\forall n\in\aleph^* \quad U_n=1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times(2)\times 1}$$

5. لدينا:

$$n-1<n \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}$$

$$(n-1)(n-2)<n^2 \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

.
.
.

$$(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1<n^{n-1} \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n^{n-1}}<\frac{1}{(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}$$

إذن:

$$0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}<\frac{1}{(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}$$

و بالتالي:

$$0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}<U_n-1$$

و بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$ إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}\right)=0$$

(يمكن أيضا استخدام: $\forall n\geq 3 \quad 0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdots+\frac{1}{n^2}$)

6. طبيعة $\sum\limits_{n\geq 1}V_n$ حيث $V_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}$:

لاحظ أنّ:

$$\forall n\in\aleph^* \quad V_n>\frac{1}{n}$$

و بما أنّ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ متباعدة (سلسلة توافقية) فإنّ $\sum\limits_{n\geq 1}V_n$ متباعدة و ذلك حسب مقياس المقارنة.

التمرين الثاني:

1. النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$:

نضع $t=\frac{1}{x}$. إذا كان المتغير x في جوار $+\infty$ كان المتغير t في جوار الصفر مع t موجب تماما. و عليه:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}Log(1+t)-\frac{2}{t}\sqrt{1+t^2}$$

لإيجاد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار $+\infty$ للتابع f يكفي إيجاد النشر المحدود من الرتبة 3 للتابع $t\mapsto \log(1+t)$ ومن الرتبة 2 للتابع $t\mapsto\sqrt{1+t^2}$ و ذلك في جوار 0.

لدينا:

$$Log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)\quad (t\to 0)$$

$$\sqrt{1+t^2}=1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\quad (t\to 0)$$

و عليه:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{2t}{3}+o(t)$$

و بالتالي:

$$f(x)=-x-\frac{1}{2}-\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\quad (x\to+\infty)$$

2. نستنتج من النشر المحدود السابق أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=-x-\frac{1}{2}$ خط مقارب لمنحنى f في جوار $+\infty$. و بما أنّ $-\frac{2}{3x}<0$ من أجل $x\to+\infty$ فإنّ منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $+\infty$.

التمرين الثالث:

1. حساب $\int_0^1 Log(x+k)dx$ حيث $k\in\aleph^*$.

نفرض $f'(x)=1$ ، $g(x)=Log(x+k)$ ، $f(x)=x$ و $g'(x)=\frac{1}{x+k}$.

إذن و بتطبيق دستور المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned}\int_0^1 Log(x+k)dx &= [f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)dx\\ &=[x\,Log(x+k)]_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+k}dx\\ &=Log(1+k)-\int_0^1\frac{x+k-k}{x+k}dx\\ &=Log(1+k)-\int_0^1 dx+k\int_0^1\frac{dx}{x+k}\\ &=Log(1+k)-1+k\,Log(1+k)-k\,Logk\end{aligned}$$

و عليه:

$$\int_0^1 Log(x+k)dx=(1+k)Log(1+k)-1-k\,Logk,\quad k\in\aleph^*$$

2. إستنتاج أنّ: $\forall n \in \aleph^* \quad U_n = (1+n)Log(1+n) - n$

لدينا من أجل أي عدد طبيعي n غير معدوم:

$$U_n = \int_0^1 Log[(x+1)(x+2)\times\cdots\times(x+n)]dx = \int_0^1 [Log(x+1) + Log(x+2) + \cdots + Log(x+n)]dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} Log(x+k)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 Log(x+k)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(1+k)Log(1+k) - k\,Logk - 1]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(1+k)Log(1+k) - k\,Logk] - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= (1+n)Log(1+n) - n$$

ملاحظة: يمكن استخدام البرهان بالتراجع للتأكد أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_n = (1+n)\log(1+n) - n$$

3. طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} [(1+n)Log(1+n) - n]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (1+n)\left[Log(1+n) - \frac{n}{n+1}\right] = +\infty$$

و بالتالي السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول نحو الصفر.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

1. إثبات أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 < U_n < 6$.

نستخدم البرهان بالتراجع. لدينا فرضا $1 < U_0 < 6$.

إذا فرضنا $1 < U_n < 6$ من أجل الرتبة n حقّ لنا أن نكتب: $-6 < -\frac{6}{U_n} < -1$ و منه:

$$7 - 6 < U_{n+1} = 7 - \frac{6}{U_n} < 7 - 1$$

و عليه:

$$1 < U_{n+1} < 6$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad 1 < U_n < 6$$

2. ليكن n من $\aleph$. لدينا:

$$U_{n+1} - U_n = 7 - \frac{6}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 6}{U_n} = \frac{(U_n - 1)(-U_n + 6)}{U_n} > 0$$

وضع هذه الإشارة مبرر لكون $1 < U_n < 6$.

إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

3. المتتالية (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ. لحساب ℓ نحل المعادلة:

$$\ell = 7 - \frac{6}{\ell}$$

أي:

$$\ell^2 - 7\ell + 6 = 0$$

و منه:

$$\ell = 6 \quad \vee \quad \ell = 1$$

الحل 1 حل مرفوض لأنّ $\ell = \sup\{U_n / n \in \aleph\}$ و $\forall n \in \aleph, \quad 1 < U_n < 6$.

إذن:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 6$$

4. بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو حدّها الأعلى أي:

$$\sup\{U_n / n \in \aleph\} = \lim_{n \to +\infty} U_n = 6$$

و بما أنّ $1 < U_n < 6$ فإنّ $\max\{U_n / n \in \aleph\}$ غير موجود.

ثم من تزايد (U_n) نستنتج أنّ:

$$\min\{U_n / n \in \aleph\} = \inf\{U_n / n \in \aleph\} = U_0 = 2$$

5. $\sum_{n \geq 0} U_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول نحو الصفر.

التمرين الثاني:

1. النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0.
تذكّر أنّه في جوار 0 لدينا:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o\left(x^4\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$$

و عليه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{23}{24}x^4+o\left(x^4\right)\right]\quad(x\to 0)$$

إذن:

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)\quad(x\to 0)$$

2. استنتاج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)\right]=-\frac{1}{2}$$

3. بما أنّ التابع يقبل نهاية منتهية عند الصفر فإنّه يقبل تمديدا بالإستمرار عند 0 و لدينا:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\neq 0 \\ -\frac{1}{2} & ; \quad x=0 \end{cases}$$

4. أ. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{23}{24}x+o(x)\right]=0$$

إذن التابع التابع $\tilde{f}$ يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. لاحظ أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\tilde{f}(x) = f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2)$$

و عليه معادلة المماس لمنحني $\tilde{f}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي: $y = -\frac{1}{2}$. و بما أنّ $\frac{23}{24}x^2 > 0$ فإنّ منحنى $\tilde{f}$ يقع فوق المماس في جوار الصفر.

5. لدينا:

$$\tilde{f}(0) = -\frac{1}{2} < 0 \qquad ; \qquad \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)} > 0$$

و هو ما يضمن، بفضل استمرار $\tilde{f}$ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و نظرية القيم المتوسطة، وجود c من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث: $\tilde{f}(c) = 0$.

<u>التمرين الثالث:</u>

حساب حسب قيم الوسيط λ النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin(x)-\lambda x}$ باستخدام النشر المحدود:

تذّكر أنّه في جوار الصفر أنّه:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

و عليه:

$$\sin x - \lambda x = (1-\lambda)x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

و بالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin(x)-\lambda x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(1-\lambda)x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \lambda = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(1-\lambda)-\frac{x^2}{6}+o(x^2)} & \lambda \neq 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin(x)-\lambda x} = \begin{cases} -6 & \lambda = 1 \\ 0 & \lambda \neq 1 \end{cases}$$

التمرين الرابع:

1. حساب $I+J$. لدينا:

$$I+J=\int_0^{\pi/2} x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_0^{\pi/2} x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\int_0^{\pi/2} x\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx$$
$$=\int_0^{\pi/2} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}$$

2. حساب I-J. لدينا:

$$I-J=\int_0^{\pi/2} x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx-\int_0^{\pi/2} x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\int_0^{\pi/2} x\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx$$

لاحظ أنّ

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos x$$

و بالتالي:

$$I-J=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$

و باستخدام دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$I-J=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2} x\,(\sin)'\,x\,dx$$
$$=\left[x\sin x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1$$

3. إستنتاج قيم I و J. لدينا:

$$\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{8} \\ I-J=\dfrac{\pi}{2}-1 \end{cases}$$

بحل الجملة نجد أنّ:

$$I=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\quad;\quad J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

إمتحانات

2004-2003

الإمتحان الأول:EMD1

التمرين الأول:

I- 1. نبرهن باستخدام التعريف أنّ: $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\frac{3}{2}$ أي نبرهن:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \aleph^* / \quad \forall n \in \aleph^*, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| U_n - \frac{3}{2} \right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left| U_n + \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{1-3n}{2n-1} + \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-1}{2(2n-1)} \right| = \frac{1}{2(2n-1)}$$

و منه:

$$\left| U_n + \frac{3}{2} \right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{2(2n-1)} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

إذا أخذنا: $n_0 = \left[\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} \right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1-3(n+1)}{2(n+1)-1} - \frac{1-3n}{2n-1} = \frac{1}{4n^2-1} > 0$$

إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

3. بما أنّ (U_n) متزايدة و متقاربة فإنّ:

$$\inf_{n\in\aleph^*} U_n = \min_{n\in\aleph^*} U_n = U_1 = -2$$

$$\sup_{n\in\aleph^*} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = -\frac{3}{2}$$

و بما أنّ $-\frac{3}{2} \notin \{U_n, n \in \aleph^*\}$ لأنّ (U_n) متزايدة تماما فإنّ $\max_{n\in\aleph^*} U_n$ غير موجود.

II- 1. حتى نبرهن أنّ $\sup A < 0$، يكفي أن نبرهن أنّ 0 حاد أعلى لـ A لأنّ $\sup A$ هو أصغر الحواد العليا لـ A و $\sup A \neq 0$ فرضا.

بما أنّ $A \subset \Re^-$ فإنّ:

$$\forall x \in A \quad x \leq 0$$

و منه 0 حاد أعلى لـ A في $\Re$ و هو المطلوب.

2. لدينا:

$$\forall x \in A \quad \inf A \leq x \leq \sup A < 0$$

و منه:

$$\forall x \in A \quad \frac{1}{\sup A} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A}$$

إذن $\frac{1}{A}$ محدودة في $\Re$.

3. حتى نبرهن أنّ $\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}$ يكفي أن نبرهن أنّ:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)\le\frac{1}{\inf(A)} \text{ و } \sup\left(\frac{1}{A}\right)\ge\frac{1}{\inf(A)}$$

لدينا من الإجابة عن السؤال الثاني:

$$\forall x\in A \quad \frac{1}{x}\le\frac{1}{\inf A}$$

و منه $\frac{1}{\inf A}$ حاد أعلى لـ $\frac{1}{A}$ في $\Re$.

و عليه:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)\le\frac{1}{\inf(A)}$$

يبقى أن نبرهن أنّ:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)\ge\frac{1}{\inf(A)}$$

نلاحظ مما سبق أنّ $\sup\left(\frac{1}{A}\right)$ و $\frac{1}{\inf(A)}$ من نفس الإشارة، و بالتالي حتى نبرهن صحة $\sup\left(\frac{1}{A}\right)\ge\frac{1}{\inf(A)}$ يلزم و يكفي أن نبرهن $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{A}\right)}\le\inf(A)$ أي $\frac{1}{\sup\frac{1}{A}}$ حاد أدنى لـ A في $\Re$ لأنّ $\inf A$ هو أكبر الحواد الدنيا لـ A.

ليكن x من A. لدينا:

$$x\in A\Rightarrow \frac{1}{x}\in\frac{1}{A}\Rightarrow\frac{1}{x}\le\sup\frac{1}{A}<0\Rightarrow x\ge\frac{1}{\sup\frac{1}{A}}$$

إذن $\frac{1}{\sup\frac{1}{A}}$ حاد أدنى لـ A في $\Re$ و هو المطلوب.

4. برهنا سابقا أنّ: $\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}$ أي $\inf(A)=\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{A}\right)}$ حيث A جزء غير خال من $\Re_-^*$ و محدود مع $\sup A\ne0$.

بما أنّ $\frac{1}{A}$ جزء غير خال من $\Re_-^*$ و محدود مع $\sup\frac{1}{A}\ne0$، فإنّ المساواة أعلاه تبقى صحيحة إذا استبدلنا A بـ $\frac{1}{A}$ أي:

$$\inf\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\sup\left(\dfrac{1}{\frac{1}{A}}\right)}=\frac{1}{\sup(A)}$$

و هو المطلوب.

III- لدينا من الجزء (I): $\sup A=-\frac{3}{2}\neq 0$ و $\inf A=-2$ و منه A جزء غير خال من $\Re_-^*$ و محدود مع $\sup A\neq 0$. إذن:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}=-\frac{1}{2}$$

$$\inf\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\sup(A)}=-\frac{2}{3}$$

<u>**التمرين الثاني**</u>:

1. نستعين بالتراجع. لديناا: $U_0<V_0$ صحيحة لأنّ $1<2$.
   نفرض أنّ $U_n<V_n$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $U_{n+1}<V_{n+1}$.
   لدينا:

$$U_{n+1}-V_{n+1}=\frac{1}{3}(2U_n+V_n)-\frac{1}{3}(U_n+2V_n)$$
$$=\frac{1}{3}(U_n-V_n)<0$$

   حسب فرض التراجع.
   و منه: $U_{n+1}<V_{n+1}$
   إذن:

$$\forall n\in\aleph\quad U_n<V_n$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{3}(2U_n+V_n)-U_n=\frac{1}{3}(V_n-U_n)>0$$

   و

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{3}(U_n+2V_n)-V_n=\frac{1}{3}(U_n-V_n)<0$$

   و منه (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة.

3. لدينا من أجل n من $\aleph^*$:

$$V_n - U_n = \frac{1}{3}\left(2V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_{n-1} - V_{n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(V_{n-1} - U_{n-1}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\left(V_{n-2} - U_{n-2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(V_{n-2} - U_{n-2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(V_{n-3} - U_{n-3}\right)$$
$$= \cdots\cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(V_{n-n} - U_{n-n}\right)$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph^* \quad V_n - U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(V_0 - U_0\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ثمّ هذه المساواة أيضا صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ: $V_0 - U_0 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$

و عليه:

$$\forall n \in \aleph \quad V_n - U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

إذن بأخذ $k = \frac{1}{3}$ يتحقق المطلوب.

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(V_n - U_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

(لأنّ $0 < \frac{1}{3} < 1$).

4. بما أنّ (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}\left(V_n - U_n\right) = 0$ فإنّ (U_n) و (V_n) متجاورتان و عليه فهما متقاربتان نحو نفس النهاية l.

5. لدينا:

$$\forall n \in \aleph^* \quad V_n + U_n = \frac{1}{3}\left(2V_{n-1} + U_{n-1} + 2U_{n-1} + V_{n-1}\right)$$
$$= V_{n-1} + U_{n-1} = V_{n-2} + U_{n-2} = V_0 + U_0 = 3$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(V_n + U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} V_n + \lim_{n\to+\infty} U_n = 3$$

أي $2l = 3$ و منه $l = \frac{3}{2}$.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

-I 1. نعم ؛ 2. لا ؛ 3. لا ؛
4. لا ؛ 5. نعم؛ 6. لا.

-II العلاقة صحيحة من أجل $x=0$ لأنّ: $0 \le \arcsin 0 \le 0$.
إذا كان $0<x<1$ ، لاحظ أنّ التابع $f: t \mapsto \arcsin t$ يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$. و عليه:

$$\exists c \in \left]0,x\right[/ \ f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$$

أي:

$$\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

و بما أنّ $0<c<x$ فإنّ:

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن:

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

و منه:

$$\forall x \in \left[0,1\right[\quad x \le \arcsin x \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

-III 1. لدينا تعريفا:

$$\left(f \text{ مستمرة عند } 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\right)$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin(ax)}{x^2}$$

و هي من الشكل $\frac{0}{0}$

بتطبيق نظرية لوبيتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin(ax)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x}$$

و عليه لدينا حالتان:

- إذا كان $a-1\neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x} \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x}$$

و منه $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة.

- إذا كان $a-1=0$ فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\sin(ax)}{2}=0$$ (حسب نظرية لوبيتال)

و منه:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

إذن $a=1$.

2. نفرض أنّ $a=1$. لدينا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(x)}{x^2} & ; \quad x\neq 0\\[2ex] 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

أ. لاحظ أنّ التابع f يقبل الاشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين قابلين للاشتقاق على $\Re^*$.

من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

و هو ما يضمن أنّ f يقبل الاشتقاق عند الصفر. إذن التابع f يقبل الاشتقاق $\Re$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x+x\cos(x)-2\sin(x)}{x^3} & ; \quad x\neq 0\\[2ex] -\dfrac{1}{6} & ; \quad x=0\end{cases}$$

ب. لدينا f يقبل الاشتقاق على $\Re$ (حسب ما سبق) و f' مستمر على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين مستمرين على $\Re^*$.

من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos(x)-2\sin(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-2\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

و عليه f' يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\Re$. إذن $E=\Re$.

التمرين الثاني:

I- 1. النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين f و g. لدينا:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\left[Log(1+x)\right]^2=Log(1+x)\times Log(1+x)\\
&=\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\quad (x\to 0)\\
&=x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)
\end{aligned}$$

$$g(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x^2)}\quad / \quad \lim_{x\to 0}(1+\sin x^2)\neq 0$$

$$g(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x^2)}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x^2+o(x^2)}\quad (x\to 0)$$

بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة و مع إهمال جميع الحدود التي رُتبها أكبر تماما من 2 نجد:

$$g(x)=1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

2. إستنتاج النهاية: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\,g(x)}$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\,g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x\left(1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\frac{o(x^2)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{o(x^2)}{x}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

3. منحنى f يقبل مماسا عند الصفر معادلته $y=0$ و هو يقع تحت منحنى f في جوار 0 لأنّ $x^2\geq 0$ في جوار 0 .

منحنى g يقبل مماسا عند الصفر معادلته $y=1$ و هو يقع فوق منحنى g في جوار 0 لأنّ $-\frac{3}{2}x^2\leq 0$ في جوار 0 .

II- نضع $t=\frac{1}{x}$ $\left(x\to +\infty \Leftrightarrow t\xrightarrow{>}0\right)$

لدينا:

$$\frac{h(x)}{x}=\mathrm{t}\times\mathrm{h}\left(\frac{1}{t}\right)=\sqrt{1+t+t^2}$$

تذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{t^2}{8}+o\left(t^2\right)$$

و عليه:

$$\sqrt{1+t+t^2}=1+\frac{1}{2}t-\frac{3}{8}t^2+o\left(t^2\right)\quad(t\to 0)$$

أي:

$$\mathrm{t}\times\mathrm{h}(t)=1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+o\left(t^2\right)\quad(t\to 0)$$

و بالتالي:

$$\frac{h(x)}{x}=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad(x\to+\infty)$$

نستنتج من النشر المحدود لـ $x\mapsto\frac{h(x)}{x}$ أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ خط مقارب لمنحنى h في جوار $+\infty$. و بما أنّ $\frac{3}{8x}>0$ فإنّ منحنى h يقع فوق الخط المقارب في جوار $+\infty$.

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

I- 1. نستخدم البرهان بالتراجع.

من أجل $n=0$ المتراجحة صحيحة لأنّ $|U_1-U_0|\le|U_1-U_0|$.

نفرض صحة العلاقة من أجل رتبة n و نبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا حسب فرض التمرين:

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|\le k|U_{n+1}-U_n|$$

ثم حسب فرض التراجع:

$$|U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

و منه:

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|\le k^{n+1}|U_1-U_0|$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

2. ليكن p و q عددين طبيعيين مع $p\ge q$.

واضح صحة المتراجحة من أجل $p=q$.

من أجل $p>q$ لدينا:

$$\begin{aligned}|U_p-U_q|&\le|U_p-U_{p-1}+U_{p-1}-U_{p-2}+\cdots\cdots-U_{q+1}+U_{q+1}-U_q|\\&\le|U_p-U_{p-1}|+|U_{p-1}-U_{p-2}|+\cdots+|U_{q+1}-U_q|\\&\le k^{p-1}|U_1-U_0|+k^{p-2}|U_1-U_0|+\cdots+k^q|U_1-U_0|\\&\le\left(k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q\right)|U_1-U_0|\end{aligned}$$

لكن:

$$k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q=k^q\left(1+k+\cdots+k^{p-1-q}\right)=k^q\,\frac{1-k^{p-q}}{1-k}$$

إذن:

$$|U_p-U_q|\le k^q\,\frac{1-k^{p-q}}{1-k}|U_1-U_0|\le k^q\,\frac{|U_1-U_0|}{1-k}$$

لأنّ $0<1-k^{p-q}<1$ و $1-k>0$.

3. لدينا مما سبق:

$$0\le|U_p-U_q|\le k^q\,\frac{|U_1-U_0|}{1-k},\quad \forall p,q\in\aleph\ /\ p>q$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$0\le\lim_{\substack{p\to+\infty\\q\to+\infty}}|U_p-U_q|\le\frac{|U_1-U_0|}{1-k}\lim_{q\to+\infty}k^q$$

و بما أنّ $\lim\limits_{q\to+\infty}k^q=0$ لأنّ $0<k<1$ فرضا إذن حسب قاعدة الحصر فإنّ:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \left| U_p - U_q \right| = 0$$

و هو ما يجعل المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية.

4. (U_n) متقاربة لأنها كوشية و حدودها حقيقية.

II- 1. باستخدام البرهان بالتراجع يمكن التأكد من موجبية حدود المتتالية (U_n).

2. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\left| U_{n+1} - U_n \right| = \left| \frac{1}{2+U_n} - \frac{1}{2+U_{n-1}} \right| = \frac{\left| U_n - U_{n-1} \right|}{\left| (2+U_n)(2+U_{n-1}) \right|}$$
$$\leq \frac{1}{4} \left| U_n - U_{n-1} \right|$$

بأخذ $k = \dfrac{1}{4}$ و باستخدام الجزء (I)، نستنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة و نهايتها l حل للمعادلة $l = \dfrac{1}{2+l}$ أي $l^2 + 2l - 1 = 0$. ثم:

$$l^2 + 2l - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(l = -1-\sqrt{2} \ \vee \ l = -1+\sqrt{2} \right)$$

$l = -1-\sqrt{2}$ حل مرفوضا لأنّ $U_n \geq 0$ (حسب 1).

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -1+\sqrt{2}$$

<u>التمرين الثاني:</u>

1. لإيجاد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 2 في جوار 0، يكفي كتابة النشر المحدود للتابع $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} - \cos(x)$ من الرتبة 4 في جوار 0.

تذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

و عليه:

$$\frac{1}{1+x^2} - \cos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4) \right] = -\frac{1}{2} + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

2. استنتاج $\lim_{x\to 0} f(x)$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)\right]=-\frac{1}{2}$$

3. f مستمر عند 0 لأنّ $\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2}=f(0)$.

4. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)+\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{23}{24}x+o(x)\right]=0$$

و هو ما يضمن أنّ f قابل للاشتقاق عند 0.

5. بما أنّ f يقبل الاشتقاق عند 0 فإنّ منحنى f يقبل مماسا عند الصفر معادلته $y=-\frac{1}{2}$ (حسب النشر المحدود لـ f في جوار 0)، و هو يقع تحت المنحنى لأنّ $\frac{23}{24}x^2\geq 0$ في جوار 0.

6. لدينا:

$$f(0)=-\frac{1}{2}<0 \qquad ; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}>0$$

بما أنّ f مستمر على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $f(0)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ ، فحسب نظرية القيم المتوسطة، يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين الثالث:

حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Log(1+x)-\lambda x}$ حسب قيم الوسيط λ باستخدام النشر المحدود:

تذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

و عليه:

$$Log(1+x)-\lambda x=(1-\lambda)x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \quad (x\to 0)$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Log(1+x)-\lambda x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-\lambda)x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=\begin{cases}\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}} & ; \quad \lambda=1\\[2ex] \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{(1-\lambda)+\frac{o(x)}{x}} & ; \quad \lambda\neq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2 & ; \quad \lambda=1\\ 0 & ; \quad \lambda\neq 1\end{cases}$$

التمرين الرابع:

1. حساب $I(1)$:

$$I(1)=\int_0^1 x e^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، بأخذ $g(x)=x^{n+1}$ ، $f'(x)=xe^{-x^2}$ و $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ و باستخدام المكاملة بالتجزئة نجد:

$$I(n+2)=\int_0^1 f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$=\left[\frac{-x^{n+1}e^{-x^2}}{2}\right]_0^1+\frac{(n+1)}{2}\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{-1}{2e}+\frac{n+1}{2}I(n)$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph^* \quad I(n+2)=\frac{n+1}{2}I(n)-\frac{1}{2e}$$

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

1. يُمكن تراجع بسيط من برهان موجبية حدود المتتاليتين (U_n) و (V_n).

2. نستخدم البرهان بالتراجع مرة أخرى. لدينا $U_0 = 2$ و $V_0 = 1$. و منه القضية محققة من أجل $n = 0$.
نفرض صحة القضية من أجل رتبة n و نبرهن صحّتها من أجل الرتبة $n+1$.
لدينا:

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - \frac{U_n + V_n}{2} = -\frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} < 0$$

و عليه:

$$V_{n+1} < U_{n+1}$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad V_n < U_n$$

3. لدينا:

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2} < 0$$

$$\forall n \in \aleph, \quad V_{n+1} - V_n = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - V_n = \frac{2V_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n} > 0$$

(لأنّ $\forall n \in \aleph \quad V_n < U_n$).
إذن المتتالية (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة.

4. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا مما سبق:

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{U_n - V_n}{U_n + V_n} \times \frac{U_n - V_n}{2}$$

و بما أنّ:

$$0 < U_n - V_n \le U_n + V_n$$

فإنّ:

$$\frac{U_n - V_n}{U_n + V_n} \le 1$$

و منه:

$$\frac{U_n - V_n}{U_n + V_n} \times \frac{U_n - V_n}{2} \le \frac{U_n - V_n}{2}$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{U_n - V_n}{2}$$

و منه نستنتج:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}-V_{n+1}\le\frac{1}{2}(U_n-V_n)\le\left(\frac{1}{2}\right)^2(U_{n-1}-V_{n-1})\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(U_{n-n}-V_{n-n})$$

أي:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}-V_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

إذن بأخذ $k=\frac{1}{2}$ ينحقق المطلوب.

بما أنّ $\forall n\in\aleph \quad 0\le U_{n+1}-V_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$ و ذلك حسب قاعدة الحصر.

5. بما أنّ (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$، فإنّ (U_n) و (V_n) متجاورتان، وعليه فهما متقاربتان نحو نفس النهاية l.

6. لدينا:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}\times V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}\times\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}=U_nV_n$$

و منه:

$$\forall n\in\aleph \quad U_nV_n=U_0V_0=2$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_nV_n=\lim_{n\to+\infty}U_n\times\lim_{n\to+\infty}V_n=l^2=2$$

أي:

$$l=-\sqrt{2} \quad \vee \quad l=+\sqrt{2}$$

$l=-\sqrt{2}$ حل مرفوضا لأنّ $\forall n\in\aleph \quad U_n\ge0$ (حسب 1).

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=\sqrt{2}$$

7. بما أنّ (U_n) متناقصة و متقاربة فإنّ:

$$\sup_{n\in\aleph}U_n=\max_{n\in\aleph}U_n=U_0=2$$

$$\inf_{n\in\aleph}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{2}$$

و بما أنّ (V_n) متزايدة و متقاربة فإنّ:

$$\inf_{n\in\aleph}V_n=\min_{n\in\aleph}U_n=V_0=1$$

$$\sup_{n\in\aleph}V_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=\sqrt{2}$$

التمرين الثاني:

1. التابع f قابل للاشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن جداء و تركيب و مجموع توابع قابلة للاشتقاق.

و من أجل القيمة 0 ، لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(1+x+\sin x\times\sin\frac{1}{x}\right)=1$$

(لاحظ أنّ $\lim_{x\to 0}\left(\sin x\times\sin\frac{1}{x}\right)=0$ لأنّه عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو الصفر).

إذن التابع f يقبل الاشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}1+x+\sin x\sin\frac{1}{x}+x\left(1+\cos x\times\sin\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right) & ;\quad x\neq 0\\[2ex] 1 & ;\quad x=0\end{cases}$$

2. لدينا f يقبل الاشتقاق على $\Re$ (حسب 1)، ثم f' مستمر على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن مجموع و جداء و تركيب توابع مستمرة.

يبقى دراسة إستمرارية f' عند 0.

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \text{ غير موجودة}$$

لأنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\sin x\sin\frac{1}{x}+x\left(1+\cos x\times\sin\frac{1}{x}\right)\right]=1$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x\cos\frac{1}{x} \text{ غير موجودة}$$

و عليه f' غير مستمر عند 0.

إذن $E=\Re^*$

التمرين الثالث:

I- ننشر بجوار x_0 حتى الرتبة n:

- $f(x)=\sqrt{1+\sin^2(x)}$ $\qquad (x_0=0,\ n=2)$

تذّكر أنّه في جوار الصفر، لدينا:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$\sin x=x+o(x^2)$$

$$\sin^2 x=x^2+o(x^2)$$

و عليه:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

- $(x_0=1,\ n=2)\quad g(x)=e^{x Log\sqrt{x}}$

نضع $t=x-1$، إذا كان $x\to 1$ فإنّ $t\to 0$.
و عليه:

$$g(x)=g(t+1)\ =e^{(1+t)Log\sqrt{1+t}}$$

$$=e^{\frac{(1+t)}{2}Log(1+t)}\quad / \quad \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)}{2}Log(1+t)=0$$

تذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$Log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

و عليه:

$$e^{\frac{(1+t)}{2}Log(1+t)}=e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)}=1+\frac{t}{2}+\frac{3}{8}t^2+o(t^2)\quad (t\to 0)$$

إذن:

$$g(x)=1+\frac{x-1}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\quad (x\to 1)$$

II - حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)-2\,\mathrm{tg}\,x}{2x-\sin x-\mathrm{tg}\,x}$ باستخدام النشور المحدودة:

نذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

و منه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)-2\,\mathrm{tg}\,x}{2x-\sin x-\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=7$$

إمتحانات

2005-2004

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

I- 1. لا ؛ 2. نعم ؛ 3. لا
4. لا ؛ 5. لا ؛ 6. لا

II- يكفي أن نبرهن أنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph \ / \ \forall n \in \aleph,\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

و منه

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

بأخذ $n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

III- 1. حتى نبيّن أنّ B محدودة من الأعلى في $\Re$ يكفي أن نبيّن أنّه:

$$\exists M \in \Re \ / \ \forall x \in B, \quad x \leq M$$

ليكن x من B. لدينا:

$$x \in B \Rightarrow (x \in A \vee x \in \{a\}) \Rightarrow (x \leq \sup A \vee x = a)$$

بأخذ $M = \max(\sup A, a)$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا: $A \subset B$. و عليه:

$$\sup A \leq \sup B$$

3. نفرض أنّ $a \leq \sup A$ ، عندئذ لدينا:

$$\begin{aligned} \sup B = \sup(A \cup \{a\}) &= \max(\sup A, \sup\{a\}) \\ &= \max(\sup A, a) \\ &= \sup A \end{aligned}$$

التمرين الثاني:

1. لدينا $U_0 > 0$. ثم $\forall n \geq 1 \quad U_n = \dfrac{1}{U_{n-1}^2} > 0$.

و منه:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n > 0$$

2. أ. حساب : W_0 , Z_0 , Z_1 , W_1:

$$W_0=U_1=\frac{1}{U_0^2}=4 \quad ؛ \quad Z_0=U_0=\frac{1}{2}$$

$$W_1=U_3=\frac{1}{U_2^2}=256 \quad ؛ \quad Z_1=U_2=\frac{1}{U_1^2}=\frac{1}{16}$$

ب. لدينا:

$$\forall n\in\aleph \quad W_{n+1}=U_{2n+3}=\frac{1}{U_{2n+2}^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{U_{2n+1}^2}\right)^2}=U_{2n+1}^4=W_n^4$$

$$\forall n\in\aleph \quad Z_{n+1}=U_{2n+2}=\frac{1}{U_{2n+1}^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{U_{2n}^2}\right)^2}=U_{2n}^4=Z_n^4$$

ج. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا:

$$W_0=4>1 \quad \wedge \quad Z_0=\frac{1}{2}<1$$

نفرض أنّ $Z_n<1$ و $W_n>1$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $Z_{n+1}<1$ و $W_{n+1}>1$.

لدينا: $W_{n+1}=W_n^4$ و $Z_{n+1}=Z_n^4$

و بما أنّ: $0<Z_n<1$ و $W_n>1$

فإنّ: $Z_n^4<1$ و $W_n^4>1$

و عليه: $Z_{n+1}<1$ و $W_{n+1}>1$

إذن:

$$\forall n\in\aleph \quad (Z_n<1 \wedge W_n>1)$$

د. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$W_{n+1}-W_n=W_n^4-W_n=W_n\left(W_n^3-1\right)>0$$

$$Z_{n+1}-Z_n=Z_n^4-Z_n=Z_n\left(Z_n^3-1\right)<0$$

لأنّ: $0<Z_n<1$ و $W_n>1$.

و منه (W_n) متزايدة و (Z_n) متناقصة.

ه. نفرض أنّ (W_n) متقاربة نحو l و (Z_n) متقاربة نحو l'. بما أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad \left(Z_{n+1}=Z_n^4 \quad \wedge \quad W_{n+1}=W_n^4\right)$$

فإنّ:

$$l'=l'^4 \quad \wedge \quad l=l^4$$

أي:

$$\left(l^{'}=1 \quad \vee \quad l^{'}=0\right) \text{ و } \left(l=1 \quad \vee \quad l=0\right)$$

و. بما أنّ $\left(Z_n\right)$ متناقصة و محدودة من الأدنى فإنّها متقاربة نحو حدّها الأدنى. من جهة أخرى المتتالية $\left(W_n\right)$ متزايدة فلو كانت متقاربة لكانت تتقارب نحو حدّها الأعلى، و بما أنّ $W_n > 1$ من أجل أي عدد طبيعي n فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} W_n \neq 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n \neq 0$$

و عليه $\left(W_n\right)$ متباعدة.

ز. حسب ما سبق $\lim_{n\to+\infty} Z_n = 1$ أو $\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$ و بما أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad 0 < Z_n < 1 \text{ و } \lim_{n\to+\infty} Z_n = \inf_{n\in\aleph} Z_n$$

فإنّ $\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$.

لدينا أيضا مما سبق $\left(W_n\right)$ متزايدة و متباعدة و منه $\lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty$.

إذن المتتالية $\left(U_n\right)$ متباعدة لأنّ $\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{x}(\sin x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\quad (x\to 0)$$

$$=1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

و عليه التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار الصفر. أما التابع g لا يقبل نشرا محدودا من أي رتبة في جوار الصفر لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$.

II- 1. لدينا تعريفا:

f مستمرة عند x_0 $\Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0;\ \forall x\in D_f\ ,|x-x_0|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon\right)$

ليكن ε مو جب تماما.

لدينا:

$$\forall x\in D_f\ ,\quad |f(x)-f(0)|=\left|\sqrt{1+x}-1\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}\right|\le|x|$$

(لأنّ $1+\sqrt{1+x}>1$)

إذن حتى يكون $|f(x)-f(0)|\le\varepsilon$ يكفي أن يكون $|x|\le\varepsilon$.

و عليه بأخذ $\delta=\varepsilon$ يتحقق المطلوب.

2. من أجل $x=0$ فإنّ $\sqrt{1+0}\le 1+\frac{0}{2}$ محققة.

من أجل $x>0$ التابع f المعرّف بـ $f(t)=\sqrt{1+t}$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$.

و منه باستخدام نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$$

أي:

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{x}{2\sqrt{1+c}}$$

و بما أنّ $0<c$ فإنّ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+c}}<1$$

و عليه:

$$\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

أي:

$$\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

و منه:

$$\forall x \geq 0 \quad \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$$

III- لدينا:

$$\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b=\frac{x\cos x+a\,Log(1+x)+b\,x\,Log(1+x)}{x\,Log(1+x)}$$

لاحظ أنّ:

$$x\,Log(1+x) \underset{x\to 0}{\approx} x^2$$

و عليه يكفي استخدام النشور المحدودة في البسط و المقام من الرتبة 2 في جوار الصفر.
نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

و عليه:

$$x\cos x+a\,Log(1+x)+b\,x\,Log(1+x)=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

$$x\,Log(1+x)=x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

و منه:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+a)}{x}+\left(b-\frac{a}{2}\right)+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}$$

و عليه لدينا حالتان:

- إذا كان $a \neq -1$ فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right) \text{ غير موجودة}$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{1+a}{x} \neq \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{1+a}{x}$$

- إذا كان $a=-1$ فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=b-\frac{a}{2}=b+\frac{1}{2}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \wedge \\ b-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \wedge \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

التمرين الثاني:

1. حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} Log(b+x)=Logb$$

و

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\left(x^2\cos\frac{1}{x}+\frac{\sin a\,x}{x}\right)=a$$

لأنّ: $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}=0$ (جداء تابعين أحدهما يؤول نحو الصفر و الآخر محدود)، و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin a\,x}{x}=\lim_{x\to 0} a\frac{\sin a\,x}{ax}=a$.

و عليه حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون $a=Logb=0$، أي: $a=0$ و $b=1$

2. من أجل $a=0$ و $b=1$، لدينا:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & ; \quad x<0 \\ 0 & ; \quad x=0 \\ Log(1+x) & ; \quad x>0 \end{cases}$$

أ. دراسة قابلية اشتقاق f عند الصفر. لدينا:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x\cos\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{Log(1+x)}{x}=1$$ (حسب نظرية لوبيتال)

و عليه f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر.

ب. حساب $f^{'}(x)$ من أجل $x\neq 0$. لدينا:

$$f^{'}(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & ; \quad x<0 \\ \frac{1}{1+x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

ج. $f^{'}$ لا يقبل تمديدا بالاستمرار عند الصفرلأنّ:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sin\frac{1}{x}$ غير موجودة

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة :

- $\int \cos x \, Log(1+\cos x)\, dx$:

إذا فرضنا $f'(x) = \cos x$ ، $g(x) = Log(1+\cos x)$ و $f(x) = \sin x$ طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\int \cos x \, Log(1+\cos x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + \int (1-\cos x) dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + x - \sin x + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

- $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$:

لدينا:

$$\frac{1}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

و عليه:

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx = \frac{1}{4} \times \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \lambda \quad / \quad \gamma \in \Re$$

- $\int \frac{e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sqrt{4-x^2}} dx$:

نضع $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ فيكون $dt = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ و يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$\int \frac{e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int e^t dt = e^t + \lambda$$

$$= e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار$-\infty$ للتابع $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x} e^{\frac{1}{x}}$:

نضع: $t = \frac{1}{x}$ عندئذ:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}} e^t = \frac{1}{t}\left[\frac{e^t}{1+t}\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1+t}\right] \quad (t \to 0)$$

بما أنّ $\lim_{t\to 0}(1+t) = 1 \neq 0$ ، فبإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$\frac{1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1+t} = 1+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left[1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right] = \frac{1}{t}+\frac{t}{2}+o(t) \quad (t \to 0)$$

إذن:

$$f(x) = x+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to -\infty)$$

نستنتج أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ خط مقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$.

و بما أنّ $\frac{1}{2x} < 0$ في جوار $-\infty$، فإنّ منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

1. حل المعادلة $f(x) = x$ في $]0,+\infty[$ حيث $f(x) = \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$:

لدينا:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right) = x \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

2. نضع $l = \sqrt[3]{2}$. نبرهن أنّ f متزايد تماما على $[l, 2]$:

لدينا:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3-2}{x^3}\right) > 0$$

لأنّ $x > \sqrt[3]{2}$. و عليه f متزايد تماما على $\left]\sqrt[3]{2}, 2\right[$.

3. نستخدم البرهان بالتراجع:

لدينا $l < U_0 \leq 2$ محققة.

نفرض صحة الخاصية من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.

لدينا $l < U_n \leq 2$ و بما أنّ f متزايد تماما على $]l, 2[$ ، فإنّ:

$$f(l) < f(U_n) \leq f(2)$$

ثمّ $f(l) = l$ و $f(2) = \frac{3}{2} < 2$ و منه:

$$l < f(U_n) \leq 2$$

أي:

$$l < U_{n+1} \leq 2$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad l < U_n \leq 2$$

4. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}\left(U_n + \frac{1}{U_n^2}\right) - U_n = \frac{2 - U_n^3}{3U_n^2} < 0$$

لأنّ $U_n > \sqrt[3]{2}$. و عليه (U_n) متناقصة.

بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فإنها متقاربة.

5. حساب نهاية (U_n).

بما أنّ (U_n) متقاربة في $\Re$ فإنّ نهايتها l' هي حل للمعادلة $l' = \frac{2}{3}\left(l' + \frac{1}{l'^2}\right)$.

(لاحظ أنّ $l' \neq 0$ لأنّ $\forall n \in \aleph \quad \sqrt[3]{2} < U_n \leq 2$)

لدينا:

$$l' = \frac{2}{3}\left(l' + \frac{1}{l'^2}\right) \Leftrightarrow l'^3 = 2 \Leftrightarrow l' = \sqrt[3]{2}$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt[3]{2}$$

بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فإنّ:

$$\sup_{n\in\aleph} U_n = \max_{n\in\aleph} U_n = U_0 = 2$$

$$\inf_{n\in\aleph} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt[3]{2}$$

و بما أنّ $\sqrt[3]{2} \notin \{U_n, n \in \aleph\}$ فإنّ $\min_{n\in IN} U_n$ غير موجود.

التمرين الثالث:

1. ليكن x من المجال $[1,+\infty[$. التابع $t \mapsto f(t)$ مستمر على المجالين $[x,x+1]$ و $[x-1,x]$ و قابل للاشتقاق على $]x,x+1[$ و $]x-1,x[$.

إذن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية فإنه يوجد c من $]x,x+1[$ و يوجد c من $]x-1,x[$ بحيث:

$$f(x+1)-f(x)=f'(c)$$

$$f(x)-f(x-1)=f'(c')$$

و بما أنّ $c>x$ و $x>c'\geq 0$ و f' متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ فإنّ $f'(c)>f'(x)$ و $f'(c')<f'(x)$، و بالتالي:

$$f(x+1)-f(x)>f'(x) \quad \text{و} \quad f(x)-f(x-1)<f'(x)$$

أي:

$$\forall x\geq 1 \quad f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$$

2. نفرض $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

أ. لدينا:

$$f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]<\lim_{x\to+\infty} f'(x)<\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$$

و بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x-1)=\lim_{x\to+\infty} f(1+x)=0$$

فإنّ:

$$0\leq \lim_{x\to+\infty} f'(x)\leq 0$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ و ذلك حسب قاعدة الحصر.

ب. بما أنّ f' متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ فإنّ:

$$\forall x\in \left]0,+\infty\right[\quad f'(x)\leq 0$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$f(0)$ $\searrow$ 0

و منه f متناقص على $[0,+\infty[$.

و بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإنّ:

$$\forall x\in \left[0,+\infty\right[\quad f(x)\geq 0$$

التمرين الرابع:

1. حساب I_0 و I_1.

$$I_0 = \int dx = x + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\left(x^2+4\right)} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

2. ليكن $n \in \aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^n} dx = \int 1 \times \left(x^2+4\right)^{-n} dx$$

إذا فرضنا $f'(x)=1$ ، $g(x)=\left(x^2+4\right)^{-n}$ و $f(x)=x$ طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$I_n = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n\int \frac{x^2+4-4}{\left(x^2+4\right)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^n} dx - 8n\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n I_n - 8n I_{n+1}$$

و منه:

$$(1-2n)I_n = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} - 8n I_{n+1}$$

أي:

$$I_n = \frac{1}{1-2n}\left[\frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} - 8n I_{n+1}\right]$$

3. بتعويض n بـ 1 نجد:

$$I_1 = -\left[\frac{x}{x^2+4} - 8 I_2\right]$$

و منه:

$$I_2 = \frac{1}{8}\left[I_1 + \frac{x}{x^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{x}{x^2+4}\right] + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

I- 1. استمرارية التابع f على مجموعة تعريفه.

لاحظ أنّ مجموعة تعريف f هي $\Re$. التابع $x \mapsto x\cos\frac{1}{x}$ مستمر على $]-\infty,0[$ لأنّه عبارة عن جداء و تركيب توابع مستمرة. ثمّ التابع $x \mapsto \sin(\operatorname{sh} x)$ مستمر على $]0,+\infty[$ لأنّه عبارة عن تركيب تابعين مستمرين. و منه f مستمر على $\Re^*$.

من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

لأنّه لدينا جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو الصفر.

ثم:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \sin(\operatorname{sh} x) = \sin(\operatorname{sh} 0) = 0$$

و عليه:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) = f(0)$$

و منه f مستمر على $\Re$.

2. قابلية اشتقاق التابع f على مجموعة تعريفه ثم حساب التابع المشتق في حالة وجوده.

واضح أنّ f قابل للاشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن جداء و تركيب توابع قابلة للاشتقاق.

ثم من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{(غير موجودة)}$$

و عليه f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر.

إذن f يقبل فقط الاشتقاق على $\Re^*$ و لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x < 0 \\ \\ \operatorname{ch}(x)\,\cos(\operatorname{sh} x) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

3. من أجل $x = 0$، واضح أنّ المتراجحة محققة.

و من أجل $x > 0$، التابع $t \mapsto \sin(\operatorname{sh} t)$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$، فهو إذن يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$، و منه يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$\sin(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{ch}(c)\,\cos(\operatorname{sh}(c))\,x$$

ومنه:

$$|\sin(\mathrm{sh}(x))| = \mathrm{ch}(c)\,|\cos(\mathrm{sh}(c))|\,x$$

و بما أنّ:

$$|\cos(\mathrm{sh}(c))| \le 1$$

و

$$1 < \mathrm{ch}(c) < \mathrm{ch}(x)$$

لأنّ $0 < c < x$ و التابع ch متزايد تماما على $]0,+\infty[$ ، فإنّ:

$$\mathrm{ch}(c)\,|\cos(\mathrm{sh}(c))| \le ch(x)$$

و منه:

$$|\sin(\mathrm{sh}(x))| < x\,\mathrm{ch}(x)$$

إذن:

$$\forall x \ge 0 \quad |\sin(shx)| \le x\,chx$$

II- لاحظ أنّه في جوار $-\infty$ ، لدينا:

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}$$

نضع $t = \dfrac{1}{x}$ عندئذ:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\cos t \;= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \quad (t \to 0)$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f(x) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to -\infty)$$

نستنتج أنّه في جوار $-\infty$ يوجد خط مقارب معادلته $y = x$.

و بما أنّ $-\dfrac{1}{2x} > 0$ في جوار $-\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $-\infty$.

<u>التمرين الثاني:</u>

$$f(x) = Log\left(\cos^2 x\right) - \frac{2x + \alpha x^2}{1+x}, \quad \alpha \in \Re$$

1. بما أنّ $\lim\limits_{x \to 0}(1+x) = 1 \ne 0$ فباستخدام القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$\frac{2x + \alpha x^2}{1+x} = 2x + (\alpha - 2)x^2 + (2 - \alpha)x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

يبقى نشر التابع $Log(\cos^2 x)$.

تذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

و عليه:

$$Log(\cos^2 x)=Log(1-x^2+o(x^3))\quad (x\to 0)$$

و بما أنّ $\lim_{x\to 0}(-x^2+o(x^3))=0$ و $x\mapsto Log(1+x)$ مستمر عند 0 فباستخدام تركيب النشور المحدودة نجد:

$$Log(\cos^2 x)=-x^2+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

إذن:

$$f(x)=-2x+(1-\alpha)x^2+(\alpha-2)x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

2. نستنتج أنّ معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=-2x$.
بالنسبة لوضعية هذا الأخير لدينا الحالات التالية:

- في حالة $1-\alpha>0$ أي $\alpha<1$ فإنّ منحنى f يقع فوق المماس في جوار الصفر.
- في حالة $1-\alpha<0$ أي $\alpha>1$ فإنّ منحنى f يقع تحت المماس في جوار الصفر.
- في حالة $\alpha=1$ لدينا:

$$f(x)-(-2x)=-x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

و عليه فإنّ منحنى f يقع تحت المماس من أجل $x\geq 0$ و فوقه من أجل $x\leq 0$.

3. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Log(\cos^2 x)}{1-\mathrm{ch}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=2$$

<u>التمرين الثالث:</u>

- $\int x^2\,\mathrm{arctg}(x)\,dx$

بأخذ $f'(x)=x^2$، $g(x)=arctg(x)$ و $f(x)=\frac{x^3}{3}$ ، و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\int x^2\,\mathrm{arctg}(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{3}\int\frac{x(x^2+1-1)}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}Log\left(1+x^2\right) + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

- $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$

لدينا:

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = 4\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right]$$

و عليه:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \quad / \quad t = \frac{x-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

إمتحانات

2006-2005

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

1. يكفي أن نبرهن أنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph^* \ / \ \forall n \in \aleph, \ n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - 1| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$|U_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

و منه:

$$|U_n - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا من أجل أي عدد طبيعي غير معدوم n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

و منه (U_n) متزايدة.

3. أ. بما أنّ المتتالية (U_n) متقاربة فهي محدودة، و عليه A محدودة في $\Re$.

ب. بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فإنّها متقاربة نحو حدّها الأعلى، و عليه:

$$SupA = \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

$$MinA = InfA = U_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

و بما أنّ $1 \notin A$ (لأن المعادلة $1 - \frac{1}{n} = 1$ لا حل لها في $\aleph$)، فإنّ: $MaxA$ غير موجود.

التمرين الثاني:

1. حتى نبيّن أنّ λA محدودة من الأعلى في $\Re$ يكفي أن نبيّن أنّه:

$$\exists M \in \Re \ / \ \forall x \in \lambda A \quad x \leq M$$

ليكن x من λA. لدينا:

$$(x \in \lambda A) \Leftrightarrow (x = \lambda a \ / \ a \in A)$$

و بما أنّ A محدودة من الأعلى في $\Re$ فرضا فإنّ:

$$a \leq SupA$$

و عليه:

$$\lambda a \leq \lambda SupA$$

(لأنّ $0 < \lambda$)

إذن:

$$\forall x \in \lambda A \quad x \leq \lambda SupA$$

بأخذ $M = \lambda SupA$ يتحقق المطلوب.

2. حتى نبرهن أنّ $Sup(\lambda A)=\lambda SupA$ يكفي أن نبرهن أنّ:

$$\forall \varepsilon>0\,,\exists b\in\lambda A:\lambda SupA-\varepsilon<b\leq\lambda SupA$$

ليكن ε موجب تماما. بإستخدام الخاصية المميزة للحد الأعلى لـ A في $\Re$ من أجل $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ (لأنّ $\frac{\varepsilon}{\lambda}>0$)، فإنّه يوجد a من A يحقق:

$$SupA-\frac{\varepsilon}{\lambda}<a\leq SupA$$

و عليه:

$$\lambda SupA-\varepsilon<\lambda a\leq\lambda SupA$$

بأخذ $b=\lambda a$ يتحقق المطلوب.

التمرين الثالث:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا: $1\leq U_0\leq 2$ صحيحة لأنّ $U_0=1$.

نفرض أنّ $1\leq U_n\leq 2$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $1\leq U_{n+1}\leq 2$.

لدينا:

$$\begin{aligned}1\leq U_n\leq 2 &\Rightarrow 1\leq U_n^2\leq 4\\ &\Rightarrow \frac{1}{6}\leq\frac{U_n^2}{6}\leq\frac{4}{6}\\ &\Rightarrow 1\leq 1+\frac{1}{6}\leq\frac{U_n^2}{6}+1\leq\frac{2}{3}+1\leq 2\\ &\Rightarrow 1\leq U_{n+1}\leq 2\end{aligned}$$

إذن:

$$\forall n\in\aleph\quad 1\leq U_n\leq 2$$

2. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا:

$$|U_1-U_0|=\left|\frac{U_0}{6}+1-1\right|=\frac{1}{6}\leq\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

إذن القضية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $|U_{n+1}-U_n|=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $|U_{n+2}-U_{n+1}|=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

لدينا:

$$\begin{aligned}|U_{n+2}-U_{n+1}| &= \left|\frac{U_{n+1}^2}{6}+1-\frac{U_n^2}{6}-1\right|\\ &=\frac{1}{6}\left|U_{n+1}^2-U_n^2\right|\\ &=\frac{1}{6}|U_{n+1}-U_n||U_{n+1}+U_n|\end{aligned}$$

ثم $1\leq U_n\leq 2$ و $1\leq U_{n+1}\leq 2$ حسب السؤال الأول.

و منه:

$$|U_{n+1}+U_n|\le 4$$

إذن

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|=\frac{1}{6}|U_{n+1}-U_n||U_{n+1}+U_n|$$

$$\le\frac{1}{6}\times4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{(حسب فرض التراجع)}$$

$$\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

و هو المطلوب.

3. ليكن p و q عددين طبيعيين مع $p\ge q$.
واضح صحة المتراجحة من أجل $p=q$.
من أجل $p>q$ لدينا:

$$|U_p-U_q|=|U_p-U_{p-1}+U_{p-1}-U_{p-2}+\cdots\cdots-U_{q+1}+U_{q+1}-U_q|$$

$$\le|U_p-U_{p-1}|+|U_{p-1}-U_{p-2}|+\cdots+|U_{q+1}-U_q|$$

$$\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-2}+\cdots+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}$$

$$\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-2}+\cdots+\frac{2}{3}+1\right)$$

لكن:

$$1+\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-1}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}\right)$$

إذن:

$$|U_p-U_q|\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}$$

لأنّ $0<1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}<1$.

4. حتى نبين أن المتتالية (U_n) متقاربة يكفي أن نبين أنها متتالية كوشية لأن حدودها حقيقية.
لدينا مما سبق:

$$0\le|U_p-U_q|\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{q},\quad \forall p,q\in\aleph\ /\ p>q$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$0\le\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}|U_p-U_q|\le\frac{1}{2}\lim_{q\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}$$

و بما أنّ $\lim_{q\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^q = 0$ لأنّ $0<\frac{2}{3}<1$ فرضا إذن حسب قاعدة الحصر فإنّ:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p - U_q\right| = 0$$

و هو ما يجعل المتتالية $(U_n)_{n\in\aleph}$ كوشية، و بالتالي فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.

بما أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1} = \frac{U_n^2}{6}+1$$

فإنّ:

$$l = \frac{l^2}{6}+1$$

أي:

$$l^2 - 6l + 6 = 0$$

ثم:

$$l^2 - 6l + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(l = 3-\sqrt{3} \ \vee \ l = 3+\sqrt{3}\right)$$

$l = 3+\sqrt{3}$ حل مرفوض لأنّ $1\le l\le 2$ (حسب 1).

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 3+\sqrt{3}$$

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- 1. لا ؛ 2. نعم ؛ 3. لا ؛ 4. لا ؛ 5. لا ؛ 6. لا.

II- يكفي أن نبرهن أنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \Re , |x-0| \leq \delta \Rightarrow |x^2+3-3| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$|x^2+3-3| = |x^2| = x^2$$

و منه:

$$|x^2+3-3| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x^2 \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

و عليه بأخذ $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ يتحقق المطلوب.

III- من أجل $x=0$ فإنّ $0 \leq \frac{\pi}{2} - \arccos 0 \leq \frac{0}{\sqrt{1-0^2}}$ محققة لأنّ $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

من أجل x من المجال $]0,1[$ التابع f المعرّف بـ $f: t \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos t$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$.

و منه باستخدام نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$$

أي:

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

و بما أنّ $0 < c < x$ فإنّ:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

و عليه:

$$x < \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي:

$$x < \frac{\pi}{2} - \arccos x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

و منه:

$$\forall x \geq 0 \quad x \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

التمرين الثاني:

1. لاحظ أنّ:

$$ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\approx} \frac{x^2}{2}$$

و عليه لإيجاد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 يكفي نشر تابع البسط و المقام من الرتبة 2 في جوار 0.

نذكّر أنّه في جوار 0 لدينا:

$$ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$sh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

و عليه:

$$x\,ch(x)-sh(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\quad (x\to 0)$$

$$ch(x)-1=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\quad (x\to 0)$$

و منه:

$$f(x)=\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}=\frac{\frac{x}{3}+\frac{x^3}{30}+o(x^3)}{\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)}$$

و بماأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}\neq 0$ فإنه بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

2. حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3)\right)=0$$

و عليه $f(0)=0$ ، أي $l=0$.

3. أ. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}+\frac{x^2}{90}+o(x^2)\right)=\frac{2}{3}$$

و عليه التابع f يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. نستنتج أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ مماس لمنحنى f عند 0.

- من أجل $x>0$ فإنّ $\frac{x^3}{90}>0$، و عليه منحنى f يقع فوق المماس في جوار 0.
- من أجل $x<0$ فإنّ $\frac{x^3}{90}<0$، و عليه منحنى f يقع تحت المماس في جوار 0.

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة:

- $\int e^{\sin x} \cos x \; dx$:

نضع $t = \sin x$ فيكون $dt = \cos x \, dx$ و يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$\int e^{\sin x} \cos x \; dx = \int e^t \, dt = e^t + c \quad / \quad c \in \Re$$

$$= e^{\sin x} + c \quad / \quad c \in \Re$$

○ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$:

نضع $t = \sin x$ فيكون $dt = \cos x \, dx$ ، و منه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

○ $\int \frac{Logx}{x} dx$:

نضع $t = Logx$ فيكون $dt = \frac{dx}{x}$ ، و منه:

$$\int \frac{Logx}{x} dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c \quad / \quad c \in \Re$$

$$= \frac{(Logx)^2}{2} + c \quad / \quad c \in \Re$$

○ $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$:

لدينا:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right)$$

و عليه:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(Log|x-1| - Log|x+3| \right) + c \quad / \quad c \in \Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. من أجل n من $\aleph$ كيفي، لدينا:

$$\begin{aligned} U_n > \sqrt{\alpha} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{\alpha}{U_{n-1}}\right) > \sqrt{\alpha} \\ &\Leftrightarrow U_{n-1}^2 + \alpha > 2\sqrt{\alpha}\,U_{n-1} \\ &\Leftrightarrow U_{n-1}^2 - 2\sqrt{\alpha}\,U_{n-1} + \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(U_{n-1} - \sqrt{\alpha}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

و بماأن القضية الأخيرة دائما محققة في $\Re$ فالقضية الأولى صحيحة.

2. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{\alpha}{U_n}\right) - U_n = \frac{U_n^2 + \alpha - 2U_n^2}{2U_n} \\ &= \frac{\alpha - U_n^2}{2U_n} < 0 \end{aligned}$$

لأنّ $U_n > \sqrt{\alpha}\quad \forall n \in \aleph$، أي $U_n^2 > \alpha \quad \forall n \in \aleph$.

إذن (U_n) متناقصة.

3. بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة.

4. نضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

لدينا:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{\alpha}{U_n}\right)$$

بالمرور إلى النهاية لما n يؤول نحو $+\infty$ نجد:

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right)$$

لأنّ $l \geq \sqrt{\alpha}$، أي $l \neq 0$.

و عليه:

$$l^2 = \alpha$$

ثم:

$$l^2 = \alpha \Leftrightarrow \left(l = +\sqrt{\alpha} \vee l = -\sqrt{\alpha}\right)$$

$l = -\sqrt{\alpha}$ حل مرفوض لأنّ $l \geq \sqrt{\alpha}$ (حسب 1).

إذن $l = -\sqrt{\alpha}$.

بما أنّ (U_n) متناقصة فإنّ:

$$\underset{n\in\aleph}{Max}U_n = \underset{n\in\aleph}{Sup}U_n = U_0$$

و بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدها الأدنى، أي:

$$\underset{n\in\aleph}{Inf}\,U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{\alpha}$$

$\underset{n\in\aleph}{Min}U_n$ غير موجود لأنّ $U_n > \sqrt{\alpha}\quad \forall n\in\aleph$.

التمرين الثاني:

1. لدينا:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{x}\times\sin\frac{1}{x}\right]$$

ثم $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$ تابع محدود،

و $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+o(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x}=0$$

إذن لدينا جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو 0، وعليه $\lim_{x\to0} f(x)=0$.

لدينا أيضا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x-1}{x}\times\sin\frac{1}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left((\cos x-1)\times\sin\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\right]$$

ثم $x\mapsto(\cos x-1)\times\sin\frac{1}{x}$ تابع محدود و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ، وعليه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون: $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$.

لدينا $f(0)=0$ ، ثم حسب ماسبق: $\lim_{x\to0} f(x)=0$.

و منه f مستمر عند 0 .

3. أ.لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}(n\pi)^2\left(\cos\frac{1}{n\pi}-1\right)\sin(n\pi)=\lim_{n\to+\infty}0=0$$

لأنّ $\sin(n\pi)=0\quad\forall n\in\aleph$.

$$\lim_{n\to+\infty} g(y_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(y_n)}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2\left(\cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=+\infty\times0$$

(حالة عدم التعيين)

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+o(x^2)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$$

و بما أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=0$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=-\frac{1}{2}$$

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}g(y_n)=-\frac{1}{2}$$

ب. بما أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=0$$

و $\lim_{n\to+\infty}g(x_n)\neq\lim_{n\to+\infty}g(y_n)$

فإنّ $\lim_{n\to+\infty}g(y_n)$ غير موجودة .

ج. لدينا تعريفا:

$$(f \text{ يقبل الإشتقاق عند } 0)\Leftrightarrow\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=l\in\Re\right)$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)$$ غير موجودة

و منه f لا يقبل الإشتقاق عند 0.

التمرين الثالث:

1. النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار $+\infty$ و $-\infty$ للتابع $f:x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$:

نضع: $t=\frac{1}{x}$، عندئذ:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=e^t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}=\frac{e^t}{|t|}\sqrt{1+2t}$$

و عليه لإيجاد النشر من الرتبة 1 يكفي نشر التابع $t\mapsto e^t\sqrt{1+2t}$ من الرتبة 2.

لدينا:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و منه:

$$\sqrt{1+2t} = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و

$$e^t\sqrt{1+2t} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\left(1 + t - \frac{1}{2}t^2\right) + o(t^2)$$
$$= 1 + 2t + t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{|t|}\left(1 + 2t + t^2\right) + o(t) \quad (t \to 0)$$

أي:

$$f(x) = |x|\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{x} \to 0\right)$$

إذن:

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

$$f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to -\infty)$$

2. نستنتج أنه في جوار $+\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y = x + 2$، و بما أنّ $\frac{1}{x} > 0$ في جوار $+\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $+\infty$.

ثم في جوار $-\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y = -x - 2$، و بما أنّ $-\frac{1}{x} > 0$ في جوار $+\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $-\infty$.

التمرين الرابع:

$$y' - 5y = 5Logx - \frac{1}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

1. لدينا:

$$y' - 5y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 5 \ (y \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow Log|y| = 5x + c \ / \quad c \in \Re$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^c e^{5x} \ / \quad c \in \Re$$
$$\Leftrightarrow y = k e^{5x} \ / \quad k \in \Re^*$$

ثم التابع الصفري هو أيضا حل للمعادلة $y' - 5y = 0$.

و عليه الحل العام للمعادلة $y' - 5y = 0$ هو: $y_1 : x \mapsto k e^{5x} \;/\; k \in \Re^*$

2. من أجل التابع $y_2 : x \mapsto -Logx$ ، لدينا:

$$y_2' - 5y_2 = -\frac{1}{x} + 5Logx$$

و منه التابع y_2 حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).

3. الحل العام للمعادلة (I) هو:

$$y = y_1 + y_2$$

أي:

$$y = k e^{5x} - Logx \;/\; k \in \Re$$

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا: $1<U_0=2<6$ صحيحة.
نفرض صحة القضية $1<U_n<2$ من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن $1<U_{n+1}<6$.
لدينا:

$$U_{n+1}=\frac{7U_n-6}{U_n}=7-\frac{6}{U_n}$$

لأنّ $U_n\neq 0$ حسب فرض التراجع.
و من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned}1<U_n<6 &\Rightarrow \frac{1}{6}<\frac{1}{U_n}<1\\ &\Rightarrow -6<-\frac{6}{U_n}<-1\\ &\Rightarrow 1<7-\frac{1}{U_n}<6\\ &\Rightarrow 1<U_{n+1}<6\end{aligned}$$

إذن:

$$\forall n\in\aleph \quad 1<U_n<6$$

2. دراسة رتابة (U_n). لدينا:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}-U_n=\frac{7U_n-6}{U_n}-U_n=\frac{-U_n^2+7U_n-6}{U_n}$$

بما أنّ $U_n>0 \quad \forall n\in\aleph$ فإنّ إشارة $U_{n+1}-U_n$ هي من نفس إشارة $-U_n^2+7U_n-6$.
لدينا:

$$-x^2+7x-6=0\Leftrightarrow(x=1 \ \vee \ x=6)$$

و بما أنّ $1<U_n<6 \quad \forall n\in\aleph$ فإنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad -U_n^2+7U_n-6\geq 0$$

و عليه المتتالية (U_n) متزايدة.

3. بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة.

4. نضع: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$.
لدينا:

$$U_{n+1}=\frac{7U_n-6}{U_n}$$

بالمرور إلى النهاية لما n يؤول نحو $+\infty$ نجد:

$$l = \frac{7l-6}{l}$$

لأنّ $l \geq 1$، أي $l \neq 0$.

و عليه:

$$l^2 - 7l + 6 = 0$$

ثم:

$$l^2 - 7l + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (l = 1 \vee l = 6)$$

بما أنّ (U_n) متزايدة فهي إذن متقاربة نحو حدها الأعلى، وعليه:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n \leq l$$

و منه: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 6$.

بما أنّ (U_n) متزايدة فإنّ:

$$\underset{n\in\aleph}{Min}\, U_n = \underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n = U_0 = 2$$

و بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة نحو حدها الأعلى، أي:

$$\underset{n\in\aleph}{Sup}\, U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = 6$$

$\underset{n\in\aleph}{Max}\, U_n$ غير موجود لأنّ $\forall n \in \aleph \quad U_n < 6$.

التمرين الثاني:

لدينا:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+o(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{Log(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{Log(1+x)-x}{x\,Log(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x\,(x+o(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

التمرين الثالث:

1. دراسة قابلية الإشتقاق على $\Re$:

واضح أن التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re^*$.
من أجل القيمة 0، لدينا تعريفا:

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=l\in\Re\right)\Leftrightarrow\left(f \text{ يقبل الإشتقاق عند } 0\right)$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}e^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{x^2 Log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x}\\&=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}x\left[Log(1+x)-Log(x)\right]\\&=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}x\,Log(1+x)-\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}x\,Log(x)\\&=0-0=0\end{aligned}$$

إذن:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\in\Re$$

و عليه f يقبل الإشتقاق على $\Re$.
و بما أنّ f قابل للإشتقاق عند $\Re$ فإنّ f مستمر على $\Re$

2. إيجاد النشر المحدود المعمّم للتابع f من الرتبة 1 في جوار $-\infty$.

لدينا $f(x)=x e^{\frac{1}{x}}$

وعليه بوضع $x=\frac{1}{t}$ مع $t\overset{<}{\to}0$ فإنّ:

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}e^{t}&=\frac{1}{t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\quad\left(t\overset{<}{\to}0\right)\\&=\frac{1}{t}+1+\frac{t}{2}+o(t)\quad\left(t\overset{<}{\to}0\right)\\&=x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to-\infty)\end{aligned}$$

و منه نستنتج أنه في جوار $-\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y=x+1$، و بما أنّ $\frac{1}{2x}<0$ في جوار $-\infty$ فإنّ منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $-\infty$.

و من جهة أخرى لدينا:

$$f(x)=x^2\,Log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad (x\to+\infty)$$

وعليه بوضع $x=\frac{1}{t}$ مع $t\overset{>}{\to}0$ فإنّ:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}Log(1+t)=\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right)\quad \left(t\overset{>}{\to}0\right)$$

$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{t}{3}+o(t)\quad \left(t\overset{>}{\to}0\right)$$

$$=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\quad (x\to+\infty)$$

و منه نستنتج أنه في جوار $+\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y=x-\frac{1}{2}$، و بما أنّ $\frac{1}{3x}>0$ في جوار $+\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $+\infty$.

3. لدينا:

$$\int_{e^{-x}}^{1} f(x)dx=\int_{e^{-x}}^{1} x^2 Log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$$

بأخذ $h'(x)=x^2$ ، $h(x)=\frac{x^3}{3}$ ، $g(x)=Log\left(\frac{1+x}{x}\right)$ و $g^{'}(x)=-\frac{1}{x^2+x}$ ، و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\int_{e^{-n}}^{1} x^2 Log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx=\left[h(x)g(x)\right]_{e^{-n}}^{1}-\int_{e^{-n}}^{1} h(x)g^{'}(x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1} x^3\frac{1}{x^2+x}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}\frac{x^2}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}\frac{x^2-1+1}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}(x-1)dx+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+\frac{1}{3}Log(x+1)\right]_{e^{-n}}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}Log2-\frac{1}{6}-\frac{\left(e^{-n}\right)^3}{3}Log\left(1+e^{n}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\left(e^{-n}\right)^2}{2}-e^{-n}\right)-\frac{1}{3}Log\left(e^{-n}+1\right)$$

4. أ. لدينا:

$$U_n = \int_{e^{-n}}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{3}Log2 - \frac{1}{6} - \frac{\left(e^{-n}\right)^3}{3}Log\left(1+e^{n}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\left(e^{-n}\right)^2}{2} - e^{-n}\right) - \frac{1}{3}Log\left(e^{-n}+1\right)$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{3}Log2 - \frac{1}{6} - \frac{\left(e^{-n}\right)^3}{3}Log\left(1+e^{n}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\left(e^{-n}\right)^2}{2} - e^{-n}\right) - \frac{1}{3}Log\left(e^{-n}+1\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}Log2 - \frac{1}{6}$$

ب. بما أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{3}Log2 - \frac{1}{6}$$

فإنّ (U_n) متقاربة.

الجزء الثالث

تمارين إضافية

مجموعة الأعداد الحقيقية

التمرين 1:

ليكن x و y من $\Re$. برهن صحة ما يلي:

1. $|x+y| \le |x|+|y|$ ؛
2. $|x|-|y| \le |x-y|$ ؛
3. $\left||x|-|y|\right| \le |x+y|$.

التمرين 2:

ليكن a و b من $\Re$. بيّن ما يلي:

1. $a=0 \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon>0 \quad |a|\le\varepsilon)$ ؛
2. $a\le b \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon>0 \quad a\le b+\varepsilon)$.

التمرين 3:

من أجل a و b عددين حقيقيين موجبين، قارن بين الأعداد التالية:

$$\min(a,b) \quad ; \quad \max(a,b) \quad ; \quad \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \sqrt{ab} \quad ; \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

من أجل x و y عددين حقيقيين موجبين، قارن بين: $4xy$ و $(x+y)^2$ ثم استنتج من أجل $x\ge 0$ ، $y\ge 0$ و $z\ge 0$ أنّ: $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$

هل هذه المتراجحة محققة من أجل x، y، z كيفية؟

التمرين 4:

جد الحواد العليا (على التوالي الدنيا)، العنصر الأكبر (على التوالي الأصغر) و الحد الأعلى (على التوالي الأدنى) في حالة وجودها للمجموعات المعرفة كمايلي:

$A_1=[0,1[$ ؛ $A_2=\aleph$ ؛ $A_3=Z$ ؛ $A_5=]4,+\infty[\cup\{-1\}$ ؛

$A_6=[-1,2[\cup[3,4]$ ؛ $A_7=\left\{\frac{1}{x} \,/\, 1\le x\le 2\right\}$ ؛ $A_8=\left\{\frac{1}{x} \,/\, x\in[-1,2[/\{0\}\right\}$ ؛

$A_9=\left\{\frac{1}{1-x} \,/\, x\in\left]0,\frac{1}{2}\right]\right\}$ ؛ $A_{10}=\left\{\sin\frac{2n\pi}{7} \,,\, n\in Z\right\}$ ؛ $A_{11}=\left\{\cos\frac{2n\pi}{7} \,,\, n\in Z\right\}$.

التمرين 5:

ليكن A و B جزأين غير خاليين من $\Re$ و محدودين.

1. أثبت أنّ:

أ. $A\cup B$ و $A\cap B$ (مع $A\cap B\neq 0$) محدودان في $\Re$.

ب. $A\subset B \Rightarrow \inf B\le \inf A\le \sup B$

ج. $\left[\sup(A\cap B)\leq \min(\sup A,\sup B)\right]\wedge\left[\inf(A\cap B)\geq \max(\inf A,\inf B)\right]$

د. $\left[\sup(A\cup B)= \max(\sup A,\sup B)\right]\wedge\left[\inf(A\cup B)= \min(\inf A,\inf B)\right]$

2. نضع:

$$-A=\{-x\ /\ x\in A\}\ ؛\ A+B=\{x+y\ /\ x\in A, y\in B\}$$

بيّن أنّ:

أ. $A+B$ و $(-A)$ محدودان في $\Re$.

ب. $\left[\sup(A+B)=\sup A+\sup B\right]\wedge\left[\inf(A+B)=\inf A+\inf B\right]$

ج. $\left[\sup(-A)=-\inf A\right]\wedge\left[\inf(-A)=-\sup A\right]$

3. نفرض أنّ A و B جزآن محدودان من $\Re^+$ و نعرّف:

$$\sqrt{A}=\left\{\sqrt{x}\ /\ x\in A\right\}\ ؛\ A.B=\{x\,y\ /\ x\in A, y\in B\}$$

برهن أنّ:

أ. $A\,B$ و $\sqrt{A}$ محدودان في $\Re$.

ب. $\left[\sup(A\,B)=\sup A\,\sup B\right]\wedge\left[\inf(AB)=\inf A\,\inf B\right]$

ج. $\left[\sup\left(\sqrt{A}\right)=\sqrt{\sup A}\right]\wedge\left[\inf\left(\sqrt{A}\right)=\sqrt{\inf A}\right]$

4. نفرض أنّ $A\subset\Re_+^*$ و $\inf A\neq 0$ مع A محدود و نعرّف:

$$\frac{1}{A}=\left\{\frac{1}{x}\ /\ x\in A\right\}$$

برهن أنّ:

$$\left[\sup\frac{1}{A}=\frac{1}{\inf A}\right]\wedge\left[\inf\frac{1}{A}=\frac{1}{\sup A}\right]$$

التمرين 6:

أحسب الحد الأعلى، الحد الأدنى، العنصر الأكبر و العنصر الأصغر في حالة وجودها للمجموعات المعرفة كمايلي:

$$A_3=\left\{\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}\ /\ n\in\aleph\right\}\ ؛\ A_2=\left\{\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}\ /\ n\in\aleph\right\}\ ؛\ A_1=\left\{3+\frac{1}{n}\ /\ n\in\aleph^*\right\}$$

$$.\ A_6=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\ /\ n\in\aleph^*\right\}\ ؛\ A_5=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\ /\ n\in\aleph^*\right\}\ ؛\ A_4=\left\{\frac{n-1}{n+1}\ /\ n\in\aleph\right\}$$

المتتاليات العددية

التمرين 1:

برهن باستخدام التعريف أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)^n=0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2n+5}=\frac{1}{2} \quad ;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-n^3+3n^2\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}3^{2n-1}=+\infty .$$

التمرين 2:

عين في حالة الوجود نهاية المتتالية (U_n) في الحالات التالية:

$$U_n=(-1)^n \quad ; \quad U_n=(-1)^n+\frac{1}{n} \quad ; \quad U_n=\frac{(-1)^n}{n} \quad ;$$

$$U_n=\frac{\sin n}{n} \quad ; \quad U_n=\frac{n^2+5}{n^3+n(-1)^n} \quad ; \quad U_n=\frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \quad ;$$

$$U_n=a^n, \quad (a\in\Re).$$

التمرين 3:

أدرس طبيعة المتتالية (U_n) في الحالات التالية:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k} \quad ; \quad U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n^2+k}} \quad ;$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad ; \quad U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{(n+1)!} \quad ;$$

$$U_n=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+(2n)} .$$

التمرين 4:

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين و l عدد حقيقي.

1. برهن صحة:

أ. (U_n) متقاربة في $\Re$ $\Leftrightarrow$ (U_{2n}) و (U_{2n+1}) متقاربتان في $\Re$ نحو نفس النهاية.

ب. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_1+U_2+\cdots U_n}{n} = l$.

2. نفرض أنّ (U_n) و (V_n) ذوات حدود موجبة و أنّه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$\forall n \in \aleph : \left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n} \right)$$

برهن صحة ما يلي:

أ. $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

ب. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} V_n = +\infty$

التمرين 5:

هل المتتاليات المعرفة آتيا متجاورة؟

$$\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \ / \ n \in \aleph \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) \ / \ n \in \aleph \\ 0 < U_0 < V_0 \end{cases} ; \begin{cases} U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \ / \ n \geq 1 \\ V_n = V_n + \frac{1}{n \times n!} \ / \ n \geq 1 \end{cases} ; \begin{cases} U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ / \ n \geq 1 \\ V_n = U_n + \frac{1}{n+1} \ / \ n \geq 1 \end{cases}$$

التمرين 6:

ليكن k عددا حقيقيا من $]0,1[$ و لتكن (U_n) متتالية حقيقية تحقق:

$$\forall n \in \aleph^* \quad |U_{n+1} - U_n| \leq k |U_n - U_{n-1}|$$

1. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph \quad |U_{n+1} - U_n| \leq k^n |U_1 - U_0|$

2. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p \geq q \geq 0$ ، أثبت أنّ:

$$|U_p - U_q| \leq \frac{k^q}{1-k} |U_1 - U_0|$$

3. برهن أنّ المتتالية (U_n) متقاربة.

4. استنتج طبيعة المتتالية (V_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} V_n = \frac{1}{2}(V_{n-1} + V_{n-2}) \\ V_0 \ , V_1 \in \Re \end{cases}$$

التمرين 7:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ : $\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 2$.

2. أثبت أن (U_n) رتيبة ثم استنتج طبيعتها.
3. أحسب في حالة الوجود مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad ; \quad \sup_{n\in\aleph} U_n \quad ; \quad \inf_{n\in\aleph} U_n \quad ; \quad \max_{n\in\aleph} U_n \quad ; \quad \min_{n\in\aleph} U_n$$

<u>التمرين 8</u>:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ: $\forall n\in\aleph \quad 0 \leq U_n \leq 4$.
2. أثبت أن المتتالية (U_n) رتيبة ثم استنتج طبيعتها.
3. احسب في حالة وجودها مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad ; \quad \sup_{n\in\aleph} U_n \quad ; \quad \inf_{n\in\aleph} U_n \quad ; \quad \max_{n\in\aleph} U_n \quad ; \quad \min_{n\in\aleph} U_n$$

<u>التمرين 9</u>:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 \in \Re \\ U_{n+1} = U_n(U_n + 1) \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1. أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة.
2. عين في حالة التقارب النهاية المحتملة للمتتالية (U_n).
3. أ. تفرض أن $U_0 > 0$. أثبت أن المتتالية (U_n) متباعدة.

ب. نفرض أن $U_0 < -1$. عين إشارة u_1 ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n).

ج. نفرض أن $-1 < U_0 < 0$. برهن أنّ $\forall n\in\aleph \quad -1 < U_n < 0$،

ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n).

السلاسل العددية

التمرين 1:

أدرس طبيعة السلاسل التالية ثم أحسب مجموعها في حالة وجوده:

$$\sum_{n\geq 0} n! \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} Log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \quad ; \quad \sum_{n\geq 2}\frac{2}{(n-1)(n+1)n} \quad ;$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+2n}{n!},$$ (علما أنّ $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=e$)

التمرين 2:

أدرس طبيعة السلاسل العددية:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos\frac{1}{n^2} \quad ; \quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!} \quad ; \quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin^2 n}{n^2} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+Logn} \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} e^{\sin(n)} \quad ;$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(Logn)^n}{n^{Logn}} ; \sum_{n\geq 0}\frac{1}{e^{nLogn}} ; \sum_{n\geq 0}\frac{2n}{n+2^n} ; \sum_{n\geq 0}4^n\sin\left(\frac{2}{7}\right)^n ; \sum_{n\geq 0}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} ; \sum_{n\geq 1}Log\left(\frac{1+\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}\right).$$

التمرين 3:

لتكن $\sum_{n\geq 0}U_n$ سلسلة عددية و n_0 عددا طبيعيا غير معدوم. بيّن أنّ السلسلتين $\sum_{n\geq 0}U_n$ و $\sum_{n\geq n_0}U_n$ لهما نفس الطبيعة.

التمرين 4:

لتكن $\sum_{n\geq 0}U_n$ سلسلة ذات حدود موجبة، و p و q من $\aleph^*$.

برهن أنّ:

- $\sum_{n\geq 0}U_n \; CV \;\Rightarrow\; \sum_{n\geq 0}U_{p\times n} \; CV$
- $\sum_{n\geq 0}U_n \; CV \;\Rightarrow\; \sum_{n\geq 0}\sqrt{U_{p\times n}U_{q\times n}} \; CV$
- $\sum_{n\geq 0}U_n \; CV \;\Rightarrow\; \sum_{n\geq 0}\frac{U_n}{1+U_n} \; CV$

ملاحظة: نرمز بـ CV لسلسلة متقاربة.

التمرين 5:

أدرس حسب قيم a و b طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2},\quad (a>0, b>0)\ ;\ \sum_{n\geq 0}\frac{b^n}{2-\sin(an)},\quad (b\geq 0)\ ;\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{a^{2n}+a^n+1},\quad (a\in\Re).$$

التمرين 6:

أدرس طبيعة السلاسل المتناوبة التالية:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n}\quad ;\quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\quad ;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n-Log(n)}.$$

التمرين 7:

هل السلاسل التالية متقاربة مطلقا ؟

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n}{n}\quad ;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\quad ;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2-\sin n}\quad ;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\cos^2 n}{n^\alpha},\quad (\alpha\in\Re).$$

التمرين 8:

لتكن (U_n) متتالية أعداد حقيقية موجبة و متناقصة و متقاربة نحو الصفر.

1. نضع: $S_n=\sum_{k=1}^{n}U_k\ ,\ n\in\aleph^*$

أ. أحسب $S_{2n}-S_n$.

ب. برهن أنّ: $\forall n\in\aleph^*\quad 0\leq nU_{2n+1}\leq nU_{2n}\leq S_{2n}-S_n$

ج. استنتج أنّ: $\lim_{n\to+\infty}2nU_{2n}=\lim_{n\to+\infty}(2n+1)U_{2n+1}=0$

د. استنتج طبيعة (nU_n) و نهايتها لما n يؤول إلى ما لا نهاية.

2. نضع: $V_n=n(U_n-U_{n-1}),\ n\in\aleph^*$

أ. برهن أنّ: $\forall n\geq 1\quad \sum_{k=1}^{n}V_k=-(n+1)U_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}U_k$

ب. برهن أنّ: $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{V_k}{k}=U_{n+1}$ حيث $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{V_k}{k}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{V_k}{k}$ و n من $\aleph$.

ج. برهن بالاستعانة بما سبق أنّ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}V_n<+\infty\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{n=0}^{+\infty}U_n<+\infty$$

النهايات والاستمرار

التمرين 1:

برهن باستخدام التعريف أنّ:

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7 \quad ; \quad \lim_{x\to -2}\left(x^2-1\right)=3 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2-3x+2}=0 \quad ;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{1-x}=-7 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(x^2-2x+1\right)=1 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x+7}{x-9}=5 \quad ;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x^2-x+1}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{3}{x^3+2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^4-6x+1}{x-9}=-\infty.$$

التمرين 2:

أحسب النهايات التالية في حالة وجودها :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos(\frac{\pi}{4}x)} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}Log(1+x)\sin\frac{1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}x[x] \quad ;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}\ ,(a\in\Re)\,;\ \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\ ,(a>0)\,;\ \lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}\ ,(a\in\Re).$$

التمرين 3:

برهن باستخدام التعريف أنّ التابع: $f: x\mapsto \left|x^2-1\right|$ مستمر عند كل قيمة x_0 من $\Re$.

التمرين 4:

برهن أنّ النهايات التالية غير موجودة:

$$\lim_{x\to +\infty}\sin x \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\cos\left(Log|x|\right)$$

التمرين 5:

ليكن التابعين:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \ x\in Q\\ 1 & ; \ x\notin Q\end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases}0 & ; \ x\in Q\\ x(x-1) & ; \ x\notin Q\end{cases}$$

1. برهن أنّ التابع f لا يقبل نهاية عند أي قيمة x_0 من $\Re$ والتابع g لا يقبل نهاية عند أي قيمة x_0 من $\Re-\{0,1\}$.

2. أحسب $\lim_{x\to 0} g(x)$ و $\lim_{x\to 1} g(x)$.

التمرين 6:

ليكن f تابعا حقيقيا يحقق:

$$\forall x, y \in \Re, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. برهن أنّ: $f(0) = 0$ ثم استنتج أنّ: $\forall x \in \Re, \quad f(-x) = -f(x)$.
2. برهن أنّ f مستمر على $\Re$ إذا و فقط إذا كان f مستمرا عند الصفر.

التمرين 7:

أدرس استمرار التوابع المعرفة آتيا على مجموعة تعريفها:

$$f_1(x) = \frac{x-|x|}{x} \quad ; \quad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases} \quad ; \quad f_3(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad x > 0 \end{cases} \quad ;$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x^p \cos^3 \dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} \quad (p \in \aleph); \quad f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - 1}{2x} & ; \quad x > 0 \\ 2x - 1 & ; \quad x < 0 \\ \gamma & ; \quad x = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \gamma \in \Re).$$

التمرين 8:

هل التوابع التالية تقبل تمديدا بالاستمرار عند القيمة x_0:

$$f_1(x) = x\sin\frac{1}{x}, \ x_0 = 0 \quad ; \quad f_2(x) = \frac{x}{|x|}, \ x_0 = 0 \quad ; \quad f_3(x) = \frac{2x-1}{x+1}, \ x_0 = -1$$

التمرين 9:

ليكن التابع: $f : [a,b] \to [a,b]$ بحيث:

$$\forall x, y \in [a,b], x \neq y \ : \ | f(x) - f(y) | < | x - y |$$

1. برهن أنّ التابع f مستمر على $[a,b]$.
2. برهن أنّ المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $[a,b]$.

التمرين 10:

ليكن f و g التابعين المعرفين على $\Re$ بـ :

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x=0\\ x\cos\dfrac{1}{x} & ; \quad x\neq 0\end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x=0\\ 0 & ; \quad x\neq 0\end{cases}$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $n\in\aleph$, $U_n=\dfrac{2}{\pi(n+1)}$.

أ. أحسب $(g\circ f)(U_n)$. استنتج طبيعة المتتالية $((g\circ f)(U_n))_{n\in\aleph}$.

ب. هل $\lim\limits_{x\to 0}(g\circ f)(x)$ موجودة ؟ ماذا تستنتج ؟

التمرين 11:

ليكن $f:[a,b]\to\Re$ تابعا مستمرا. نفرض أنه من أجل كل x من $[a,b]$، التابع f يتمتع بقيمة عظمى محلية عند x. برهن أنّ التابع f ثابت.

التمرين 12:

ليكن P_n كثير حدود من الدرجة n مع n فردي و

$$P_n(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots+a_n\,x^n$$

حيث $a_0\,,a_1\,,\ldots\ldots,a_n$ أعداد حقيقية.

1. برهن وجود A و B من $\Re$ بحيث:

$$P_n(A)>0\ \wedge\ P_n(B)<0$$

2. استنتج أنّ المعادلة $P_n(x)=0$ تقبل على الأقل حلا.

التمرين 13:

تأكد من أنّ: $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}\times\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{4}\leq 0$

و لكن: $\mathrm{tg}\,x\neq 0\ ,\quad \forall x\in\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right[$

لماذا لا يمكن تطبيق نظرية القيم المتوسطة في هذا المجال ؟

الإشتقـــــاق

التمرين 1:

أحسب مستدلا بالتعريف مشتقات التوابع التالية عند قيمة كيفية من مجموعة تعريفها:

$$f_1 : x \mapsto x^2 \quad ; \quad f_2 : x \mapsto x^3 \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad ;$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \quad ; \quad f_5 : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right).$$

التمرين 2:

عين المجموعة E التي يكون عليها التابع f قابلا للاشتقاق بإستمرار في الحالات التالية:

$$f(x) = |x| \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad ; \quad f(x) = |x-1| \quad ;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & ; \ x \neq 1 \\ 1 & ; \ x = 1 \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & ; \ x < 0 \\ \dfrac{3}{2} & ; \ 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{2}\cos(x-1) & ; \ x > 1 \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases} .$$

التمرين 3:

أحسب المشتق النوني للتوابع التالية:

$$f_1(x) = \sin x \quad ; \quad f_2(x) = \cos x \quad ; \quad f_3(x) = \sin^2 x \quad ; \quad f_4(x) = \frac{1}{1+x};$$

$$f_5(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad f_6(x) = x^3 \sin x \quad ; \quad f_7(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad ; \quad f_8(x) = x^2 e^x$$

التمرين 4:

ليكن التابع f المعرف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \leq x_0 \\ a\,x + b & ; \ x > x_0 \end{cases} \qquad (x_0 \in \Re)$$

عيّن قيم a و b التي يكون من أجليهما f قابلا للاشتقاق عند x_0 .

التمرين 5:

هل يمكن تطبيق نظريتي رول و التزايدات المنتهية في الحالات التالية (أوجد قيم c الموصوفة في النظريتين):

$$f_1(x)=(x-1)(x-2),\ I=[1,2]\quad;\quad f_2(x)=|x-1|,\quad I=[0,2]$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-3) & ; \quad x\le 1\\ -\frac{1}{x} & ; \quad x>1\end{cases},\quad I=[0,2]\quad;\quad f_4(x)=1-\sqrt[3]{x^4},\quad I=[-1,1].$$

التمرين 6:

برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أنّ:

$$Log(1+x)\ge x-x^2,\quad \forall x\in\Re^+\quad;\quad |\sin x|\le|x|,\quad \forall x\in\Re\quad;\quad e^x\ge 1+x,\quad \forall x\in\Re^+\quad;$$

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\operatorname{arctg}(b)-\operatorname{arctg}(a)<\frac{b-a}{1+a^2},\quad a,b\in\Re^+\quad (a<b).$$

التمرين 7:

أحسب مستخدما قاعدة لوبيتال النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1};\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{Log(\sin x)}{\pi-2x};\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x};\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3};\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

التمرين 8:

ليكن f تابعا معرفا على $[a,b]$ و قابلا للاشتقاق مرتين على $]a,b[$ مع:

$$\forall x\in]a,b[:\ f''(x)\ge 0$$

1. نفرض أنّ: $f(a)=f(b)=0$. برهن أنّ:

$$\forall x\in[a,b]:\ f(x)\le 0$$

2. نفرض أن $f(a)$ و $f(b)$ كيفيين. برهن أنّ:

$$\forall x\in[a,b]:\ f(x)\le f(a)+(x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

التمرين 9:

باستخدام نظرية التزايدات المنتهية في مجال مناسب (يطلب تعيينه) على التابع f المعرف بـ:

$$f:x\mapsto Log|Log\,x|$$

برهن أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,Log\,k}=+\infty$$

التمرين 10:

ليكن $f:[a,b]\to\Re$ تابعا مستمرا على $[a,b]$ و قابلا للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث:
$\forall x\in[a,b]:\ f(x)\neq 0$

برهن وجود c من $]a,b[$ يحقق: $\dfrac{f(b)}{f(a)}=e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$

دستور تايلور و النشور المحدودة

التمرين 1:

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$. هل يمكن كتابة دستور ماك لوران مع باقي يونغ من الرتبة 3 في المجال $]0,x[$ للتوابع التالية:

$$f_1(x)=\operatorname{th}(x)\quad;\quad f_2(x)=\coth(x)\quad;\quad f_3(x)=2^x\quad;\quad f_4(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\quad;$$

$$f_5(x)=\arcsin(x)\quad;\quad f_6(x)=\arccos(x)\quad;\quad f_7(x)=\operatorname{arctg}(x)\quad;\quad f_8(x)=\operatorname{argsh}(x).$$

التمرين 2:

باستخدام دستور ماك لوران مع باقي لاغرانج، برهن صحة المتراجحات التالية:

.1 $$\forall x>0\quad x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(x+1)^3}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

.2 $$\forall x>0\quad 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{x^3}{16}<(1+x)^{3/2}<1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2$$

التمرين 3:

هل للتوابع المعرفة آتيا نشور محدودة من الرتب 2، 3، 4 في جوار 0؟

$$f(x)=x+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad;\quad g(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)\quad;\quad h(x)=\frac{1}{x^2-x}$$

التمرين 4:

أوجد النشر المحدود من الرتبة n في جوار 0 للتوابع المعرفة كمايلي:

$$f_1(x)=e^x\quad;\quad f_2(x)=\cos(x)\quad;\quad f_3(x)=\sin(x)$$

$$f_4(x)=\frac{1}{1+x}\quad;\quad f_5(x)=\sqrt{1+x}\quad;\quad f_6(x)=Log(1+x)$$

التمرين 5:

أوجد النشر المحدود من الرتبة n في جوار 0 للتوابع المعرفة كمايلي:

$$f_1(x)=e^{2+x}\,,(n=3,x_0=0)\quad;\quad f_2(x)=Log(2+x)\,,(n=3,x_0=0)$$

$$f_3(x)=\sin(2x)+\cos(x^2)\,,(n=3,x_0=0)\quad;\quad f_4(x)=\frac{e^{2+x}}{2-x}\,,(n=2,x_0=0)$$

$$f_5(x)=Log(1+\sin x)\,,(n=3,x_0=0)\quad;\quad f_6(x)=\frac{x}{e^x-1}\,,(n=4,x_0=0)$$

$f_7(x)=\sqrt{\cos x}\ ,(n=4,x_0=0)$; $f_8(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}-\cos x\right),(n=2,x_0=0)$

$f_9(x)=\frac{1-\cos 2x}{shx},(n=6,x_0=0)$; $f_{10}(x)=\frac{Log(\cos x)}{\cos^2 x}\ ,(n=4,x_0=0)$

$f_{11}(x)=e^{xLogx},(n=3,x_0=1)$; $f_{12}(x)=\frac{x\,Logx}{x^2-1}\ ,(n=4,x_0=1)$

التمرين 6:

أوجد النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار $+\infty$ للتابعين التاليين:

$$f:x\mapsto \frac{x^2-1}{x(x+2)} \quad ; \quad g:x\mapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

التمرين 7:

أحسب، مستخدما النشور المحدودة، النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin^2 x}{x^2+x^3}\ ;\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x-(e^x-1)^2}{\sin^3 x}\ ;\ 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{shx}\right)\ ;$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x\,arctgx}\ ;\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+Log(1+x)}-e^{x/2}+1-\cos x}{\sin^3 x}\ ;\ 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-\lambda x}\ ;$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Log(1+x)-\lambda x}\ ,\ (\lambda\in\Re).$$

التمرين 8:

ليكن التابعين f و g المعرفين بـ:

$$f(x)=\frac{1}{1+Log(1+x)} \quad ; \quad g(x)=\frac{1-2x^2+x^3}{1+x}\ .$$

أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين f و g، ثم استنتج أن للتابعين f و g نفس المماس عند الصفر يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنيي f و g إزاءه في جوار الصفر.

التمرين 9:

ليكن التابع f المعرّف بـ: $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3-x^2+1}$

1. أوجد النشر المحدود للتابع $x\mapsto \frac{f(x)}{x}$ من الرتبة 2 في جوار $+\infty$.
2. إستنتج وجود خط مقارب لمنحنى f في جوار $+\infty$ يُطلب تعيين معادلته و وضعية المنحنى إزاءه في جوار $+\infty$.

التمرين 10:

ليكن التابع f المعرّف بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

1. أوجد النشر المحدود المعمّم للتابع f من الرتبة 1 في جوار $+\infty$.
2. إستنتج وجود خط مقارب لمنحنى f في جوار $+\infty$ يُطلب تعيين معادلته و وضعية المنحنى إزاءه في جوار $+\infty$.

التكاملات

التمرين 1:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int\left(x^3-x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx \quad ; \quad \int\frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}dx \quad ; \quad \int\frac{1}{3x+2}dx \quad ; \quad \int\frac{\operatorname{tg}x}{1+\cos x}dx$$

$$\int\frac{Logx}{x\left(1-Log^2x\right)}dx \quad ; \quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx,\quad (a>0) \quad ; \quad \int \operatorname{sh}(\alpha x)\,dx,\quad (\alpha\in\Re^*)$$

التمرين 2:

باستخدام طريقة تغيير المتغير أحسب التوابع الأصلية للتوابع التالية:

$$f_1(x)=e^{-3x} \quad ; \quad f_2(x)=\cos(3x-5) \quad ; \quad f_3(x)=\frac{1}{x^2+4} \quad ; \quad f_4(x)=\frac{1}{x\,Log\,x^2}$$

$$f_5(x)=\frac{1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} \quad ; \quad f_6(x)=\frac{x^2}{(1+x^3)^3} \quad ; \quad f_7(x)=\sqrt{\sin x}\cos x.$$

التمرين 3:

باستخدام طريقة المكاملة بالتجزئة أحسب التكاملات التالية:

$$\int x\sin 3x\,dx \quad ; \quad \int x^2e^{3x}dx \quad ; \quad \int x\arcsin x\,dx \quad ; \quad \int \operatorname{arctg}(4x)dx \quad ;$$

$$\int x^m Logx\,dx,\quad (m\neq -1) \quad ; \quad \int Log(ax)\,dx,\quad (a>0).$$

التمرين 4:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx \quad ; \quad \int_0^1 x e^x dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx \quad ; \quad \int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx \quad ; \quad \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\cos x}dx$$

$$\int_0^1 Log\left(1+x^2\right)dx \quad ; \quad \int_{-1}^1(\arcsin x)^2dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx \quad ; \quad \int_0^1 e^x\sqrt{e^x-1}\,dx \quad ;$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx \quad ; \quad \int_0^1(1-x^2)^n dx,\quad (n\geq 0) \quad ; \quad \int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx,\quad (n>0) \quad ; \quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^m},\quad (m>1).$$

المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

التمرين 1:

حل المعادلات التالية:

1) $x\,y' = y\,;$

2) $y' = y + 1\,;$

3) $y' = y\,\cos x\,;$

4) $2y\,y'\left(1+e^x\right) = e^x\,;$

5) $\left(x^2+1\right)y' = 2x\,y$

التمرين 2:

حل المعادلات التالية:

1) $x^2 y' = x\,y - y^2\quad;$

2) $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}\quad;$

3) $2x^2 y' = x^2 + y^2$

التمرين 3:

حل المعادلات التالية:

1) $\left(1+y\right) - 2y'\sqrt{x} = 0\quad;$

2) $\left(x-1\right)y' + y + 1 = 0\quad;$

3) $x\,y' + y + x = 0$

التمرين 4:

1. كامل المعادلة التفاضلية: $y' = \dfrac{y}{x}$.
2. تحقق أنّ التابع $f\left(x\right) = e^{-x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية: $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{x+1}{x}e^{-x}$.
3. إستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{x+1}{x}e^{-x}$.