- l'element neutre de + :

$(x.y) + e = e + (x.y) = (x.y).$

$(x.y) . e = (x.y)$

$e = (1,1)$

- l'element Symetrique de + :

$(x,y) + (x',y') = (x',y') + (x.y) = (1,1).$

$(x.y) + (x',y') = (1,1).$

$(x.x', y.y') = (1,1)$

$(x',y') = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \notin E$

Alors $(E, +)$ n'est pas un groupe abelien

- $\forall \alpha, \beta \in K$; $(\alpha + \beta) . U = \alpha . U + \beta . U$.

$(\alpha + \beta) . U = ((\alpha + \beta)x, y)$

$\alpha . U + \beta . U = (\alpha x, y) + (\beta x, y)$

$= (\alpha \beta x^2, y^2)$

d'où $(\alpha + \beta) . U \neq \alpha . U + \beta . U$

Alors E n'est pas un $\mathbb{R}$-e.v

Exercice 05 :

$E = \mathbb{R}^2 \ , K = \mathbb{C}$

$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

$\lambda (x,y) = (ax - by, ay - bx)$ $\lambda = a + bi$

$\Rightarrow (E,+)$ est un groupe abelien :

- $+$ associative :

$[(x,y) + (x',y')] + (x'',y'') \overset{?}{=} (x,y) + [(x',y') + (x'',y'')]$

$[(x,y) + (x',y')] + (x'',y'') = (x+x', y+y') + (x'',y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$.

$(x,y) + [(x',y') + (x'',y'')] = (x,y) + (x'+x'', y'+y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$.

d'où $+$ est associative.

- $+$ commutative :

$(x,y) + (x',y') = (x',y') + (x,y)$

$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

$(x',y') + (x,y) = (x'+x, y'+y)$

d'où $+$ est commutative

- l'element neutre de $+$:

$(x,y) + e = e + (x,y) = (x,y)$.

$e = (0,0)$.

- l'element Symetrique de $+$:

$(x,y) + (x',y') = (x',y') + (x,y) = (0,0)$

$(x+x', y+y') = (0,0)$.

$(x',y') = (-x,-y)$.

Alors $(E,+)$ est un groupe commutatif -

$\bullet\ \forall \alpha, \beta \in K, \forall U \in E, (\alpha + \beta).U = \alpha.U + \beta.U$

$\alpha = a + bi \qquad \beta = a' + b'i \qquad U = (x, y)$

$(\alpha + \beta).U = \left((a + a')x - (b + b')y, (a + a')y - (b + b')x\right)$

$\alpha.U + \beta.U = (ax - by, ay - bx) + (a'x - b'y, a'y - b'x)$

$= \left((a + a')x - (b + b')y, (a + a')y - (b + b')x\right)$

d'où $(\alpha + \beta)U = \alpha.U + \beta.U$

$\bullet\ \forall \alpha \in K, \forall U, V \in E: \alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$

$\alpha(U + V) = \alpha(x + x', y + y') = \left(a(x + x') - b(y + y'), a(y + y') - b(x + x')\right)$

$\alpha U + \alpha V = (ax - by, ay - bx) + (ax' - by', ay' - bx')$

$= \left(a(x + x') - b(y + y'), a(y + y') - b(x + x')\right)$

d'où $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$

$\bullet\ \forall \alpha, \beta \in K, \forall U \in E: (\alpha.\beta).U = \alpha.(\beta.U)$

$\alpha = a + bi, \quad \beta = a' + b'i, \quad \alpha.\beta = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$

$(\alpha.\beta).U = \left((aa' - bb')x - (ab' + ba')y, (aa' - bb')y - (ab' + b'a)x\right)$

$\alpha.(\beta.U) = \alpha(a'x - b'y, a'y - b'x)$

$= \left(a(a'x - b'y) - b(a'y - b'x), a(a'y - b'x) - b(a'x - b'y)\right)$

$= (aa'x - ab'y - ba'y + bb'x, aa'y - ab'x - ba'x + bb'y)$

$= \left((aa' + bb')x - (ab' + ba')y, (aa' + bb')y - (ab' + b'a)x\right)$

d'où $(\alpha.\beta).U \neq \alpha.(\beta.U)$

Alors E n'est pas un $\mathbb{C}$-e.v

Exercice 06 :

I - $E = \mathbb{R}^2$

les deux operations : $\begin{cases} (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \\ \lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y) \\ \text{l'elt neutre } (0,0) \end{cases}$

$\Rightarrow F_1 = \{ (x,y) \in E \,/\, 2x+y=0 \}$

- $(0,0) \in F_1$ $\quad 2.0+0=0$ donc $F_1 \neq \emptyset$
- $\forall (x,y),(x',y') \in F_1$: $(x,y)+(x',y') \overset{?}{\in} F_1$

$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \overset{?}{\in} F_1$

c.à.d $\quad 2(x+x')+(y+y') \overset{?}{=} 0$

- $\lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y) \overset{?}{\in} F_1$

$2(\lambda x) + \lambda y = 0$

$\lambda \underbrace{(2x+y)}_{=0} = 0$

On a $\begin{cases} (x,y) \in F_1 \\ (x',y') \in F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x'+y'=0 \end{cases}$

donc $2(x+x')+(y+y') = \underbrace{(2x+y)}_{=0} + \underbrace{(2x'+y')}_{=0} = 0$

d'où F₁ est un S.e.v

$\Rightarrow F_2 = \{ (x,y) \in E \,/\, |x| = y \}$

$(1,1), (-2,2) \in F_2$ puisque $\begin{cases} |1| = 1 \text{ et} \\ |-2| = 2 \end{cases}$

mais $(1,1)+(-2,2) = (-1,3) \notin F_2$

$|-1| \neq 3$ d'où F₂ n'est pas un S.e.v

$\Rightarrow F_3 = \{ (x,y) \in E \,/\, x^2 - y = 0 \}$

$\left.\begin{array}{ll} (1,1) \in F_3 & : (1)^2 - 1 = 0 \\ (-1,1) \in F_3 & : (-1)^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$ mais $(1,1)+(-1,1) = (0,2) \notin F_2$

$(0)^2 - 2 \neq 0$

d'où F₃ n'est pas un S.e.v

$\underset{2}{\text{II}}$ - $E = \mathbb{R}^3$.

les opérations : $\begin{cases} (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \\ \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ \text{l'elt neutre } (0,0,0). \end{cases}$

$\Rightarrow F_4 = \{(x,y,z) \in E \,/\, y = 2\}$

- $(0,0,0) \notin F_4$

  $2^{\text{ème}}$ composante $0 \neq 2$.

- aussi $\left.\begin{array}{l} (1,2,2) \in F_4 \\ (-1,2,4) \in F_4 \end{array}\right\}$ $(1,2,2) + (-1,2,4) = (0, \underset{\neq 2}{4}, 6)$

d'où F_4 n'est pas un S.e.v

$\Rightarrow F_5 = \{(x,y,z) \in E \,/\, x - z = 0\}$

- $(0,0,0) \in F_5$ puisque $0 - 0 = 0$.
- $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in F_5 : (x,y,z) + (x',y',z') \overset{?}{\in} F_5$

$\begin{cases} (x,y,z) \in F_5 \\ (x',y',z') \in F_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x' - z' = 0 \end{cases}$

$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \overset{?}{\in} F_5$.

$(x+x') - (z+z') \overset{?}{=} 0$

$(x+x') - (z+z') = \underbrace{(x-z)}_{0} + \underbrace{(x'-z')}_{0} = 0$

- $\forall (x,y,z) \in F_5, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \overset{?}{\in} F_5$

$(\lambda x) - (\lambda z) = \lambda \underbrace{(x - z)}_{0} = 0$

d'où F_5 est un S.e.v.

$\Rightarrow F_6 = \{(x,y,z) \in E \,/\, 2x - y + z = 0\}$

- $(0,0,0) \in F_6$ puisque $2(0) - 0 + 0 = 0$.
- $\forall (x,y,z) \in F_6, (x',y',z') \in F_6 : (x,y,z) + (x',y',z') \overset{?}{\in} F_6$

$$\begin{cases} (x,y,z) \in F_6 \\ (x',y',z') \in F_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x' - y' + z' = 0 \end{cases}$$

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \overset{?}{\in} F_6$$

$$2(x+x') - (y+y') + (z+z') \overset{?}{=} 0$$

$$\underbrace{(2x - y + z)}_{0} + \underbrace{(2x' - y' + z')}_{0} = 0$$

- $\forall (x,y,z) \in F_6, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \overset{?}{\in} F_6$

$$(2\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) \overset{?}{=} 0$$

$$\lambda \underbrace{(2x - y + z)}_{0} = 0$$

d'où F₆ est un S.e.v.

III₂ - $E = \mathbb{R}[x]$

les deux opérations :
$$\begin{cases} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (a'_0 + a'_1 x + \dots + a'_n x^n) \\ \quad = (a_0 + a'_0) + (a_1 + a'_1)x + \dots + (a_n + a'_n)x^n \\ \lambda(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1 x) + \dots + (\lambda a_n x^n) \end{cases}$$

$\Rightarrow F_7 = \{P \in E \,/\, d^\circ(P) \leq 2\}$

$P \in E$, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

- le polynome nul $\in F_7$
- $\forall P(x), q(x) \in F_6 : P(x) + q(x) \overset{?}{\in} F_7$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$q(x) = a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2$$

$d^\circ(P) \leq 2$

$$P(x) + q(x) = \underbrace{(a_0 + a'_0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a_1 + a'_1)}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{(a_2 + a'_2)}_{\in \mathbb{R}} x^2 \in F_7$$

$\cdot \forall P \in F_7, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda P \overset{?}{\in} F_7$

$$\lambda . P(x) = \underbrace{(\lambda a_0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\lambda a_1)}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{(\lambda a_2)}_{\in \mathbb{R}} x^2 \in F_7$$

d'où F_7 un S.e.v

$\Rightarrow F_8 = \{P \in E / d°(P) = 2\}$.

. le polynome nul $\notin F_8$.

puisque $P \in F_8 \Rightarrow F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

avec $a_2 \neq 0$

d'où F_8 n'est pas un S.e.v.

$\Rightarrow F_9 = \{P \in E / P(1) = P'(1)\}$.

- le polynome nul $\in F_9$,

$P(1) = 0$, $P'(1) = 0$ donc $P(1) = P'(1)$.

$\cdot \forall P, q \in F_9, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : \lambda P + \beta q \overset{?}{\in} F_9$.

$$P, q \in F_9 \Rightarrow \begin{cases} P(1) = P'(1) \\ q(1) = q'(1) \end{cases}$$

$$\lambda P + \beta q \overset{?}{\in} F_9 \Leftrightarrow (\lambda P + \beta q)(1) \overset{?}{=} (\lambda P + \beta q)'(1)$$

$$(\lambda P + \beta q)(1) = \lambda P(1) + \beta q(1) = \lambda P'(1) + \beta q'(1) = (\lambda P + \beta q)'(1) \in F_9$$

d'où F_9 est un S.e.v.

IV$_2$ - $E = \mathcal{C}([0,1] \to \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$.

les deux opérations $\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x). \\ (\lambda . f)(x) = \lambda\,[f(x)]. \\ \text{l'elt neutre } \; e(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]. \end{cases}$

$\Rightarrow F_{10} = \{f \in E \,/\, f(0) = 0\}$.

- $e(x) = 0 \in F_{10} \;\forall x \in [0,1]$, $F_{10} \neq \emptyset$
- $\forall f, g \in F_{10}, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$. c.à.d $(\lambda f + \beta g)(0) \overset{?}{=} 0$

$\lambda f + \beta g \overset{?}{\in} F_{10}$ c.à.d $(\lambda f + \beta g)(0) \overset{?}{=} 0$.

$(\lambda f + \beta g)(0) = (\lambda f)(0) + (\beta g)(0)$

$= \lambda\,[f(0)] + \beta\,[g(0)] = \lambda . 0 + \beta . 0$

$= 0 \in F_{10}$

d'où F$_{10}$ est un S.e.v

$\Rightarrow F_{11} = \{f \in E \,/\, f(1) = f(0) + 1\}$

$\forall x \in [0,1]$: $e(x) = 0$ l'elt neutre

$e(1) = 0$, $e(0) = 0$

donc $e(1) \neq e(0) + 1$ donc $e \notin F_{11}$

d'où F$_{11}$ n'est pas un S.e.v.

$\Rightarrow F_{12} = \{f \in E \,/\, \forall x \in [0,1] : f(x) \geq 1\}$.

$\forall x \in [0,1]$: $e(x) = 0 < 1$ donc $e \notin F_{12}$

d'où F$_{12}$ n'est pas un S.e.v

$\frac{IV}{2}$ - $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ (U_n) : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ 1 \to u_1 \\ 2 \to u_2 \\ \vdots \\ n \to u_n \end{array} \right\}$ On note (U_n) ou $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

les operations $\begin{cases} (U_n) + (V_n) = (U_n + V_n) \\ \lambda(U_n) = (\lambda U_n) \\ \text{l'elt neutre : la suite avec tous les termes nuls} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $F_{13} = \{ (U_n)_n \in E \ / \ U_n \text{ converge} \}$.

- la Suite nulle est convergente vers 0 donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_n \in F_{13}$

$U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $\ldots$, $U_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

- $\forall (U_n)_{n \in \mathbb{N}}, (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_{13}$, $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lambda (U_n) + \beta (V_n) \overset{?}{\in} F_{13}$$

$$\left.\begin{array}{l} (U_n) \in F_{13} \\ (V_n) \in F_{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l_1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l_2 \end{array}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda (U_n) + \beta (V_n) = \lim_{n \to +\infty} (\lambda U_n + \beta V_n) = \lambda l_1 + \beta l_2$$

d'où F_{13} est un S.e.v.

$\Rightarrow$ $F_{14} = \{ (U_n) \in E \ / \ U_n \xrightarrow[+\infty]{} 1 \}$

$(U_n) = (0) \notin F_{14}$

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 \neq 1$.

d'où F_{14} n'est pas un S.e.v

$\Rightarrow$ $F_{15} = \{ (U_n) \in E \ / \ (U_n) \text{ est bornée} \}$.

(U_n) est bornée $\Leftrightarrow |U_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

- La Suite nulle est bornée.

$\bullet \ \forall (U_n),(V_n) \in F_{15} \ , \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$\lambda (U_n) + \beta (V_n) \overset{?}{\in} F_{15}$.

$\lambda (U_n) + \beta (V_n) = (\lambda U_n + \beta V_n)$

$|\lambda U_n + \beta V_n| \leq |\lambda| |U_n| + |\beta| |V_n|$.

$\leq |\lambda| M_1 + |\beta| M_2 . \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

puisque $\begin{cases} |U_n| \leq M_1 & \forall n \in \mathbb{N} \\ |V_n| \leq M_2 & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d'où F_{15} est un S.e.v

$\Rightarrow \ F_{16} = \{ (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E : U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n \}$

$\bullet$ la Suite nulle est la Suite avec tous les termes nuls

donc $\quad 0 = 0 + 2.0$

$\bullet \ \forall (U_n),(V_n) \in F_{16} , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha (U_n) + \beta (V_n) \overset{?}{\in} F_{16}$.

On a : $\begin{cases} (U_n) \in F_{16} \\ (V_n) \in F_{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n \\ V_{n+2} = V_{n+2} + 2V_n \end{cases}$

$\alpha (U_n) + \beta (V_n) = (\alpha U_n + \beta V_n) \overset{?}{\in} F_{16}$.

$\alpha U_{n+2} + \beta V_{n+2} = \alpha [U_{n+1} + 2U_n] + \beta [V_{n+1} + 2V_n]$.

$= \alpha U_{n+1} + \beta V_{n+1} + 2 (\alpha U_n + \beta V_n)$

donc $(\alpha U_n + \beta V_n) \in F_{16}$.

d'où F_{16} est un S.e.v