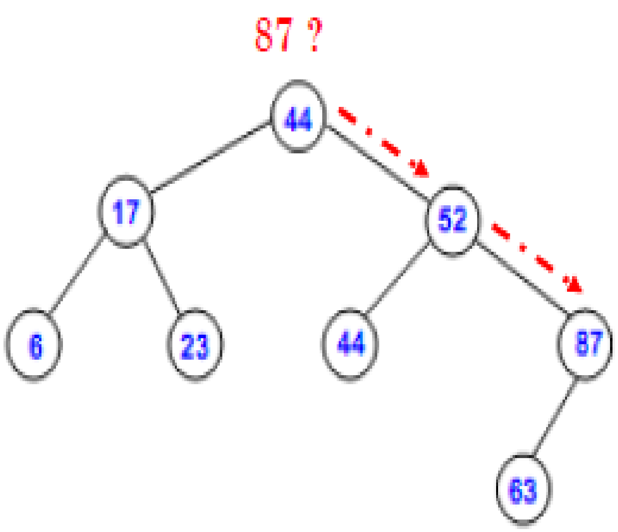
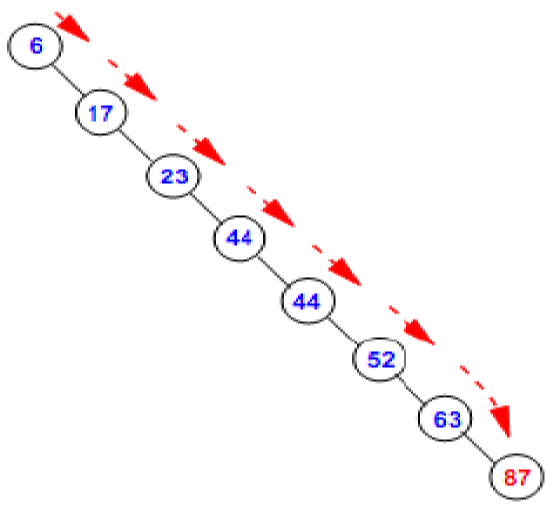
Arbres AVL

Master 1 CYSIA

Introduction

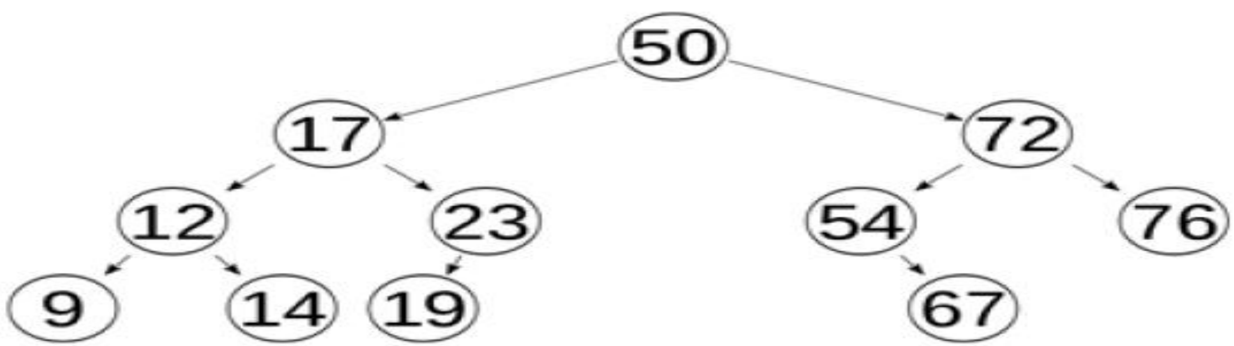
- Intérêt des ABR équilibrés est de diminuer la complexité temporelle des opérations de la recherche, de l'insertion et de la suppression dans un ABR quelconque.





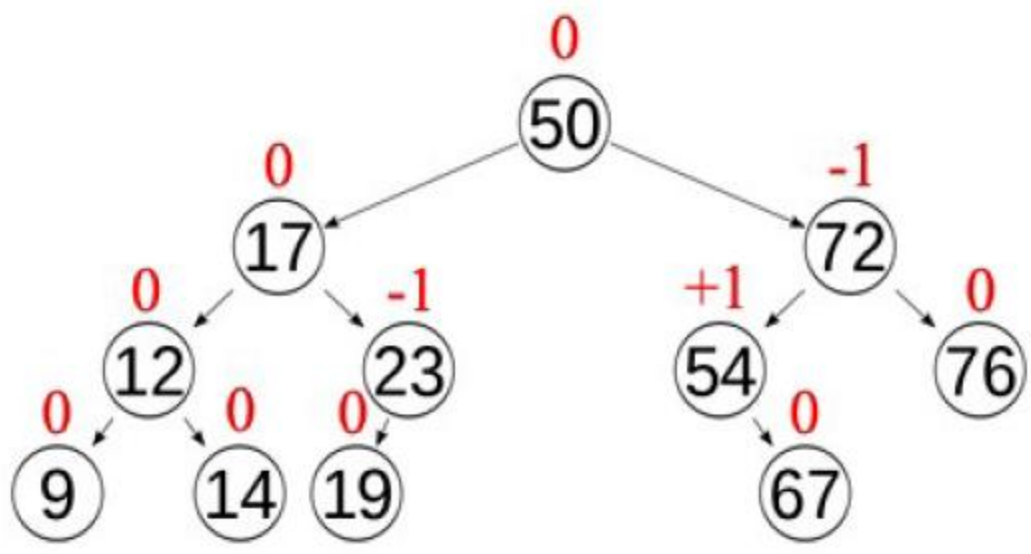
Arbres AVL

- La dénomination ≪ arbre AVL ≫ provient des noms de ses deux inventeurs russes, Georgy Maximovich **Adelson-Velsky et Evgenii Mikhailovich Landis,** qui l'ont publie en 1962 sous le titre ***An algorithm for the organization of information.***
- Les arbres AVL ont été historiquement les premiers arbres binaires de recherche automatiquement équilibrés.
- Dans un arbre AVL, les hauteurs des deux sous-arbres d'un même nœud **différent au plus de un**. La recherche, l'insertion et la suppression sont toutes en *O(log(n)) dans le pire des cas.*



Le facteur d'équilibrage

- Le facteur d'équilibrage d'un nœud est la différence entre la hauteur de son sous-arbre droit et celle de son sous-arbre gauche. Un nœud dont le facteur d'équilibrage est +1, 0, ou -1 est considéré comme équilibré.



Le facteur d‘équilibrage

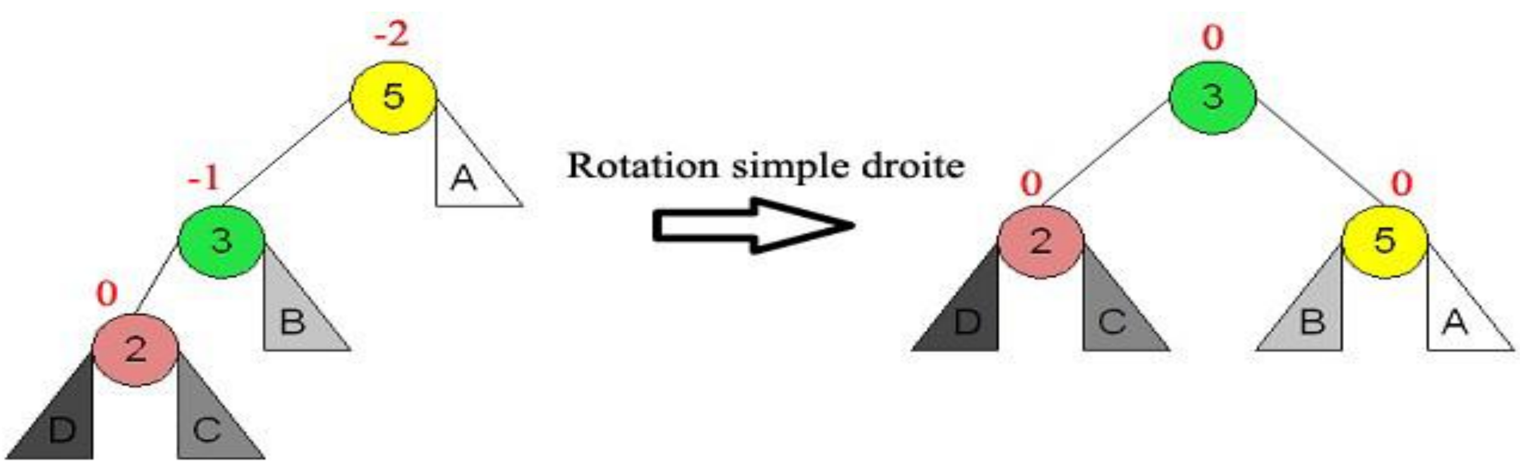
- Un nœud avec tout autre facteur est considéré comme déséquilibré et requiert un rééquilibrage.
- Chaque fois qu'un nœud est inséré ou supprimé d'un arbre AVL, le facteur d‘équilibrage de chaque nœud le long du chemin depuis la racine jusqu'au nœud inséré (ou supprimé) doit être recalculé.
- Si l'arbre est reste équilibré, il n'y a rien a faire. Si ce n'est pas le cas, on effectuera des rotations d‘équilibrage de manière à obtenir a nouveau un arbre AVL.

Rotations d‘équilibrage

- Une rotation est une modification locale d'un arbre binaire.
- Elle consiste a échanger un nœud avec l'un de ses fils.
- Dans la rotation droite, un nœud devient le fils droit du nœud qui était son fils gauche.
- Dans la rotation gauche, un nœud devient le fils gauche du nœud qui était son fils droit.
- Les rotations gauches et droites sont inverses l'une de l'autre.
- Les rotations ont la propriété de pouvoir être implémentées en temps constant, et de préserver l'ordre infixe. En d'autres termes, si A est un arbre binaire de recherche, tout arbre obtenu a partir de A par une suite de rotations gauche ou droite d'un sous arbre de A reste un arbre binaire de recherche.

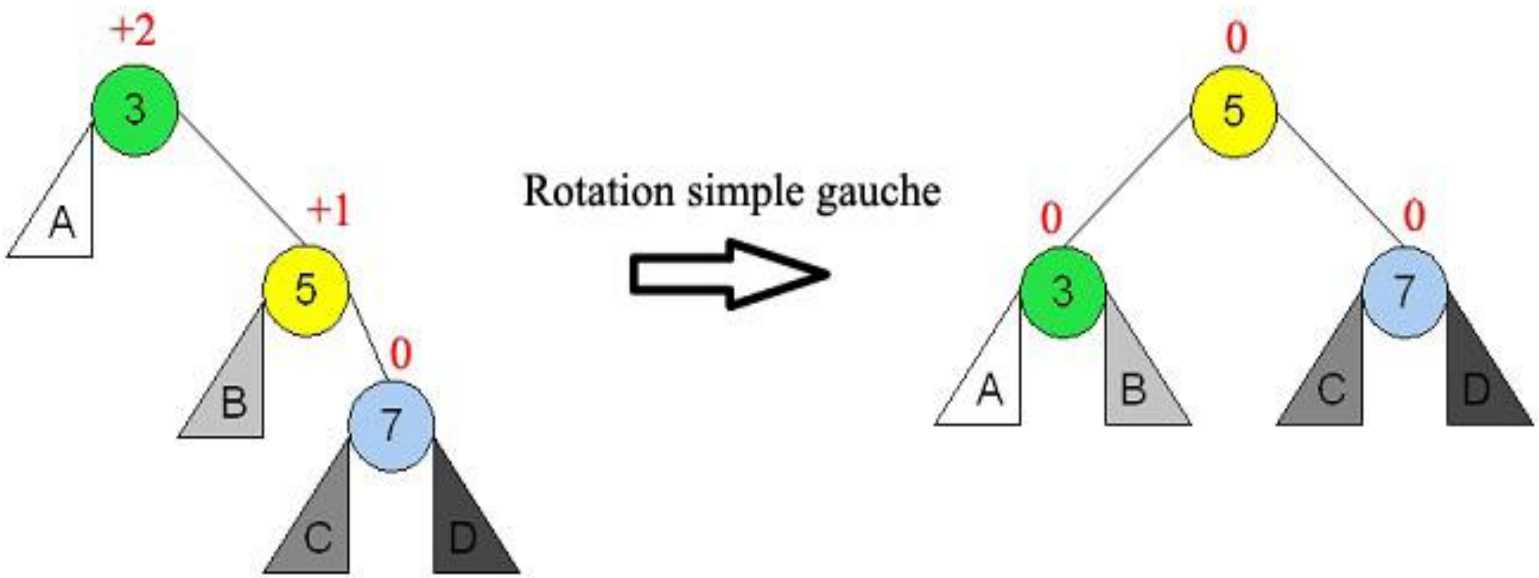
Rotations d'équilibrage

- Une rotation simple droite est utilisée quand un nœud a un facteur d'équilibrage inferieur a -1 et que son fils gauche a un facteur d'équilibrage de -1.



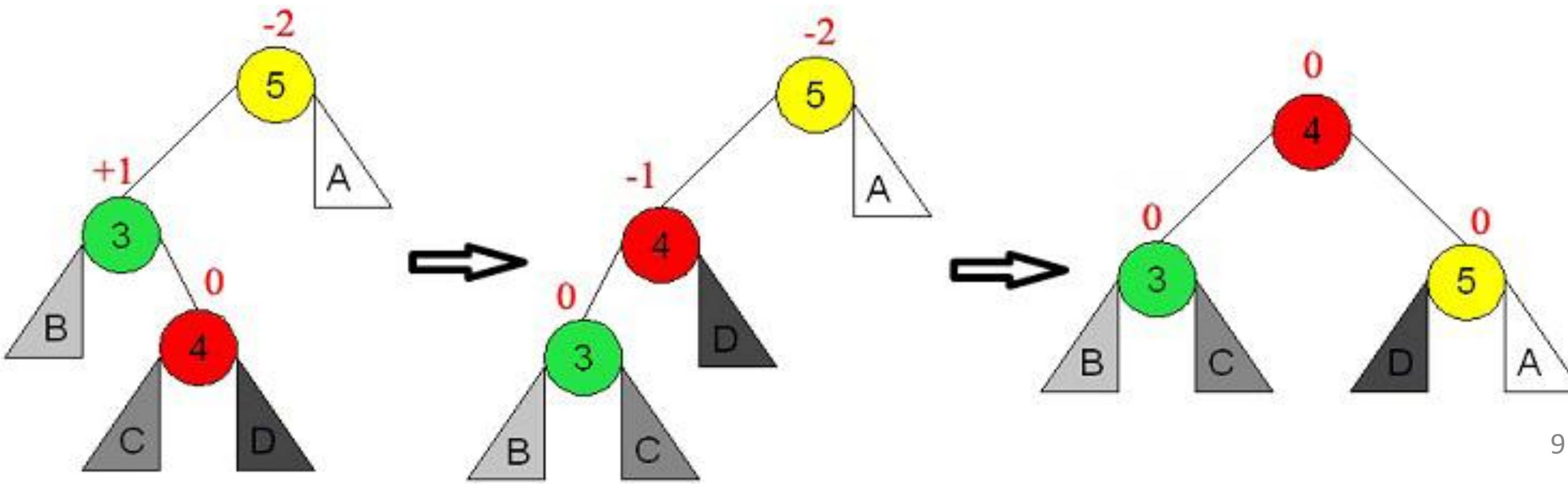
Rotations d‘équilibrage

- Une rotation simple gauche est utilisée quand un nœud a un facteur d‘équilibrage supérieur a +1 et que son fils droit a un facteur d‘équilibrage de +1.



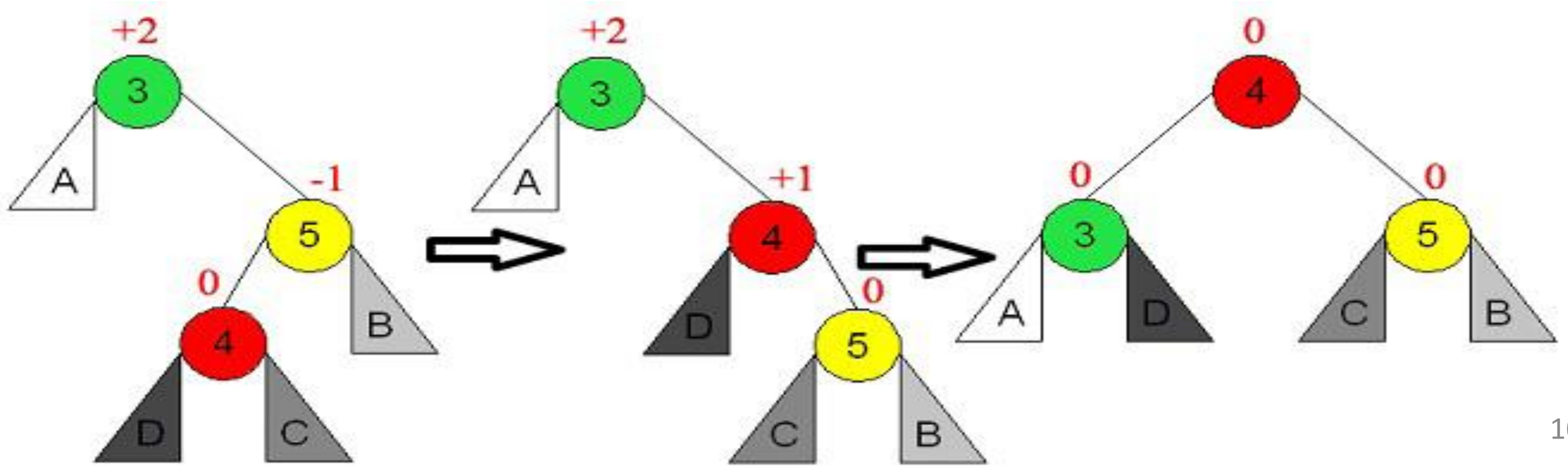
Rotations d‘équilibrage

- Une rotation double droite est utilisée quand un nœud à un facteur d‘équilibrage inferieur a -1 et que son fils gauche a un facteur d‘équilibrage de +1. La double rotation droite est une rotation simple gauche du sous-arbre gauche, suivi d'une rotation simple droite du nœud déséquilibré. Cette opération est aussi appelée parfois une rotation gauche-droite.



Rotations d‘équilibrage

- Enfin, une rotation double gauche est utilisée quand un nœud a un facteur d‘équilibrage supérieur a +1 et que son fils droit a un facteur d‘équilibrage de -1. La double rotation gauche est une rotation simple droite du sous-arbre droit, suivi d'une rotation simple gauche du nœud déséquilibré. Cette opération est aussi appelée parfois une rotation droite gauche.



Recherche

- La recherche dans un arbre AVL se déroule exactement comme pour un arbre binaire de recherche, et comme la hauteur d'un arbre AVL est en *O(log(n)), elle se fait donc en O(log(n)).*

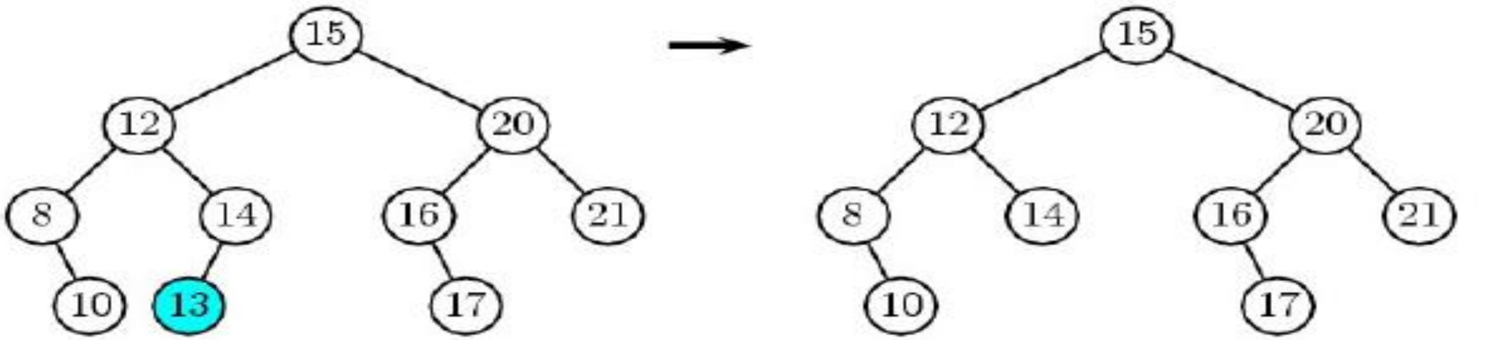
Insertion dans un arbre AVL

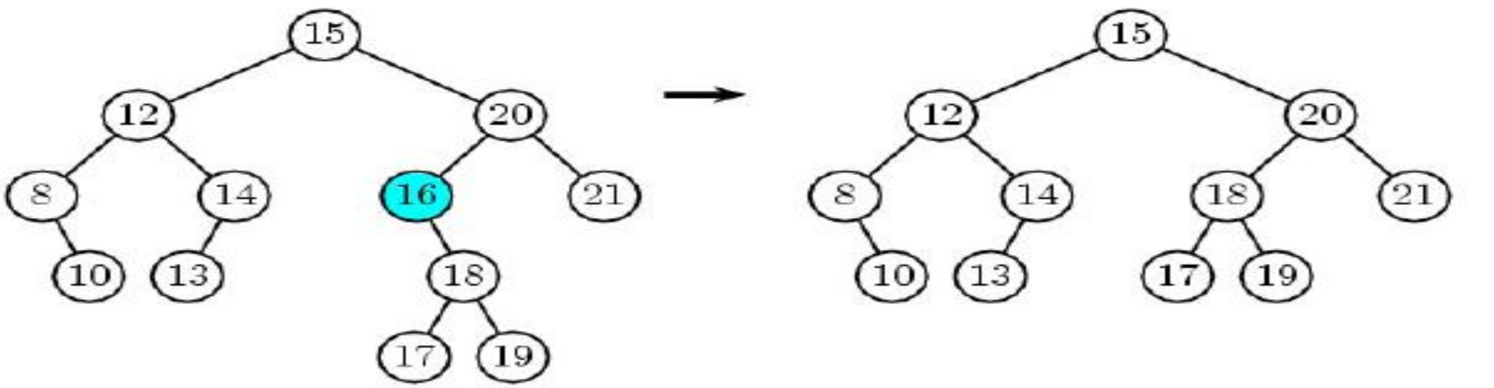
- L'insertion dans un arbre AVL se déroule en deux étapes :
  - tout d'abord, on insère le nœud exactement de la même manière que dans un arbre binaire de recherche ;
  - puis on remonte depuis le nœud inséré vers la racine en effectuant une rotation sur chaque sous-arbre déséquilibré.
- On peut montrer qu'il suffit d'une rotation simple ou d'une double rotation pour rééquilibrer un arbre AVL après une insertion.
- La hauteur de l'arbre étant en *O(log(n)), et les rotations étant a temps constant, l'insertion se fait* finalement en *O(log(n)).*

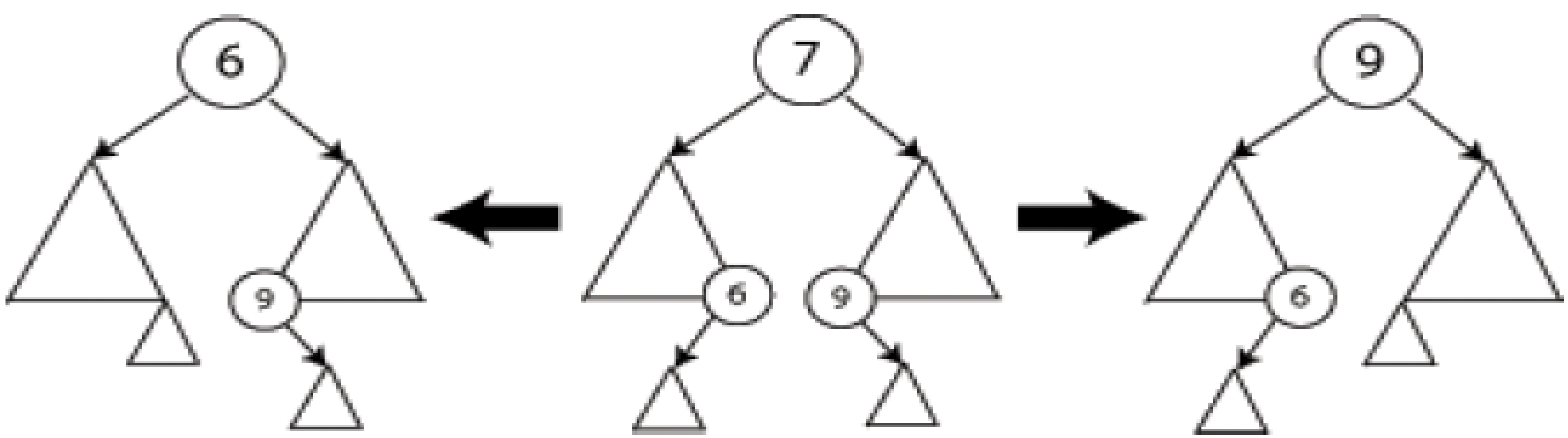
Suppression

- Pour supprimer un nœud dans un arbre AVL, on procède comme avec un arbre binaire de recherche .
- On remonte ensuite le chemin depuis le parent du nœud enlevé jusqu'a la racine pour rééquilibrer les nœuds qui en ont besoin.
- La suppression se fait aussi en *O(log(n)).*

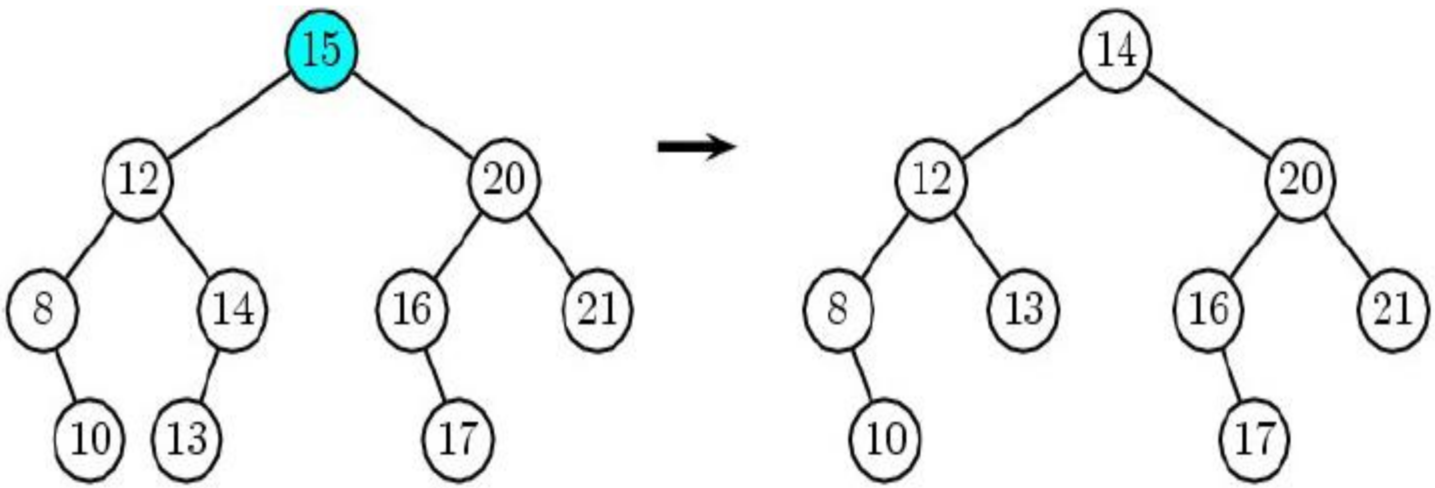
Suppression







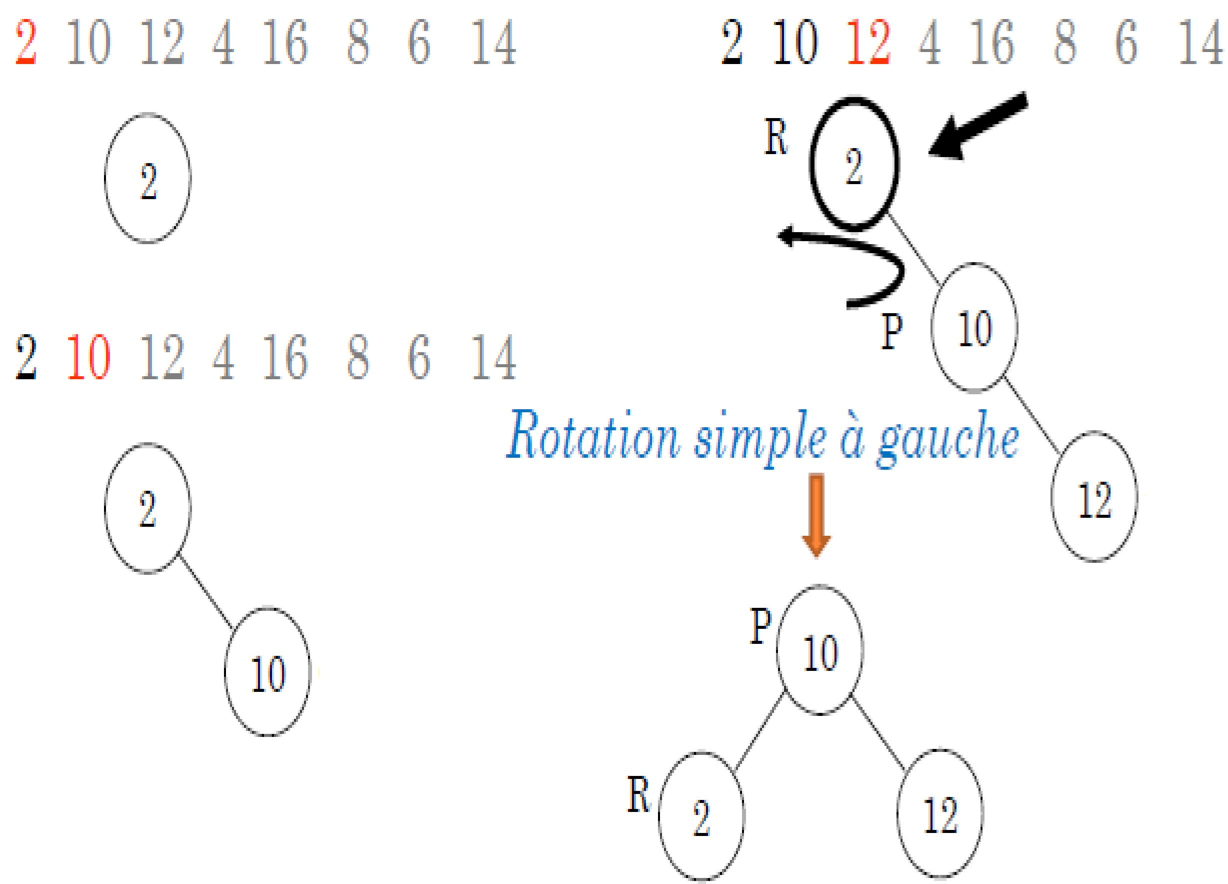
Suppression



Exemples

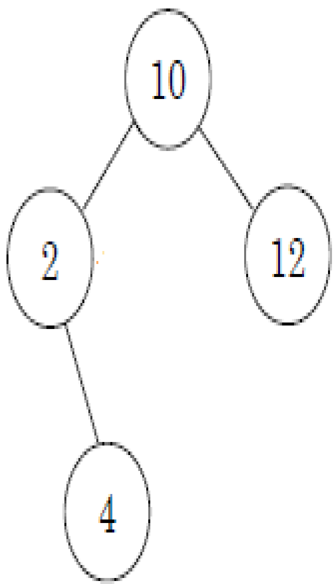
- soit la série de nombres à insérer dans un arbre AVL [2 10 12 4 16 8 6 14 9 1 7]

Exemples insertion

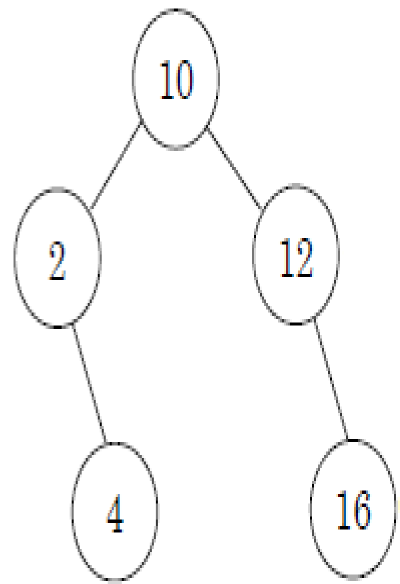


Exemples insertion

2 10 12 4 16 8 6 14

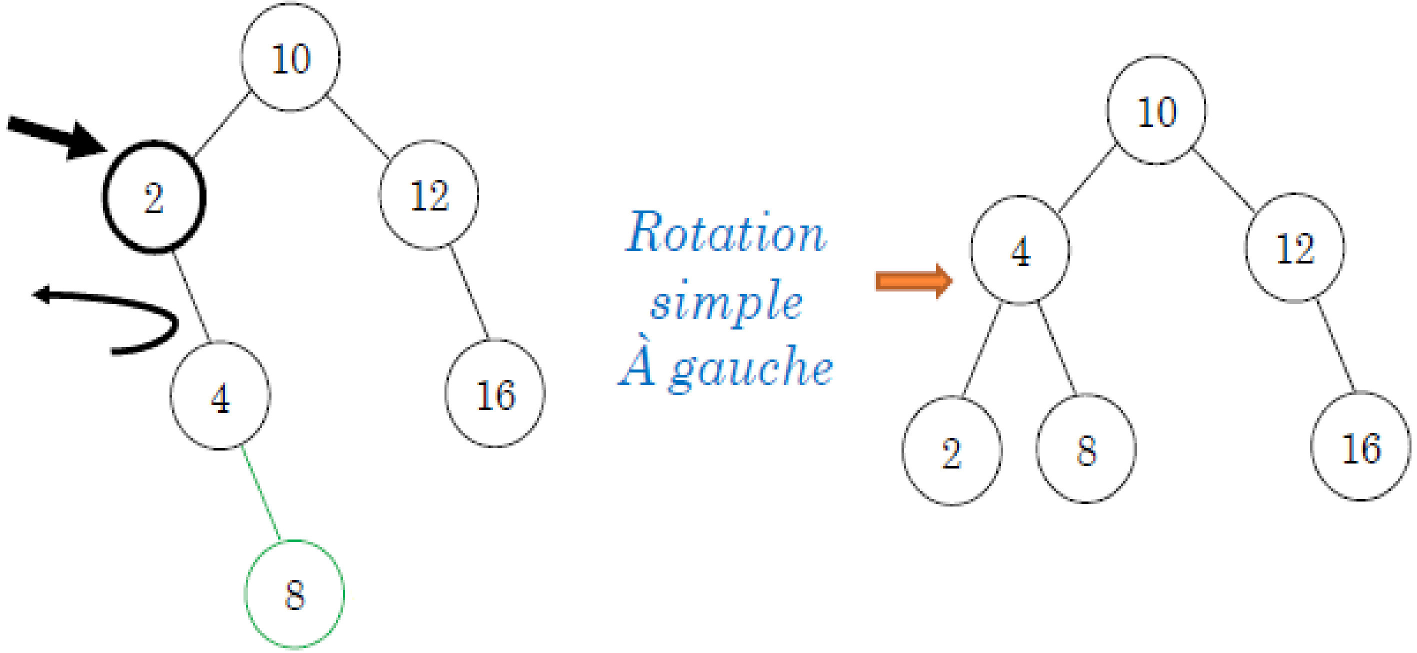


2 10 12 4 16 8 6 14



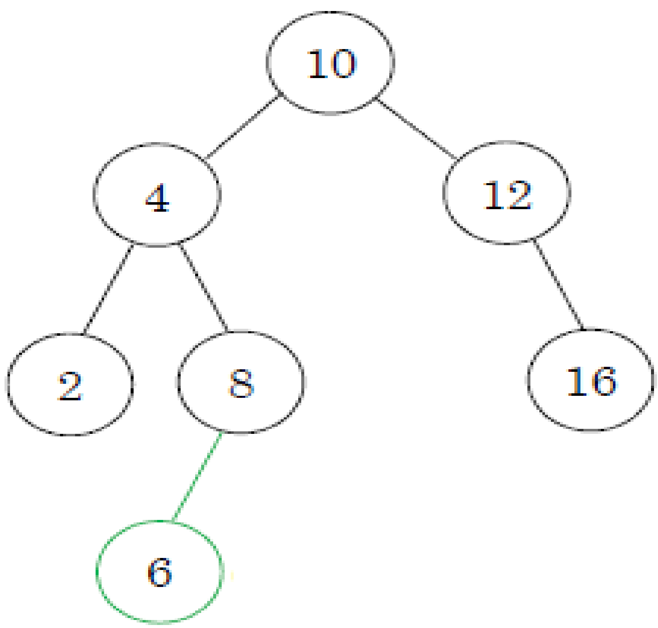
Exemples insertion

2 10 12 4 16 8 6 14 9 1 7



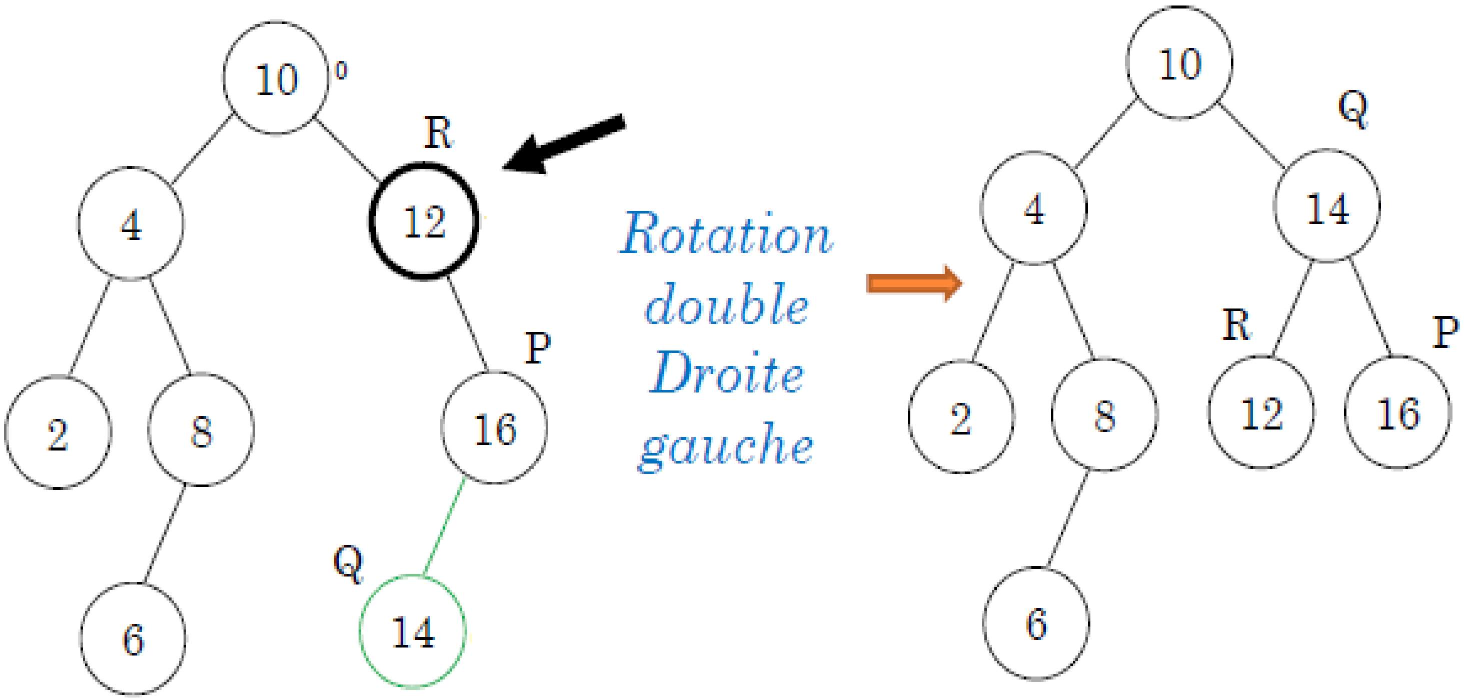
Exemples insertion

2 10 12 4 16 8 6 14 9 1 7



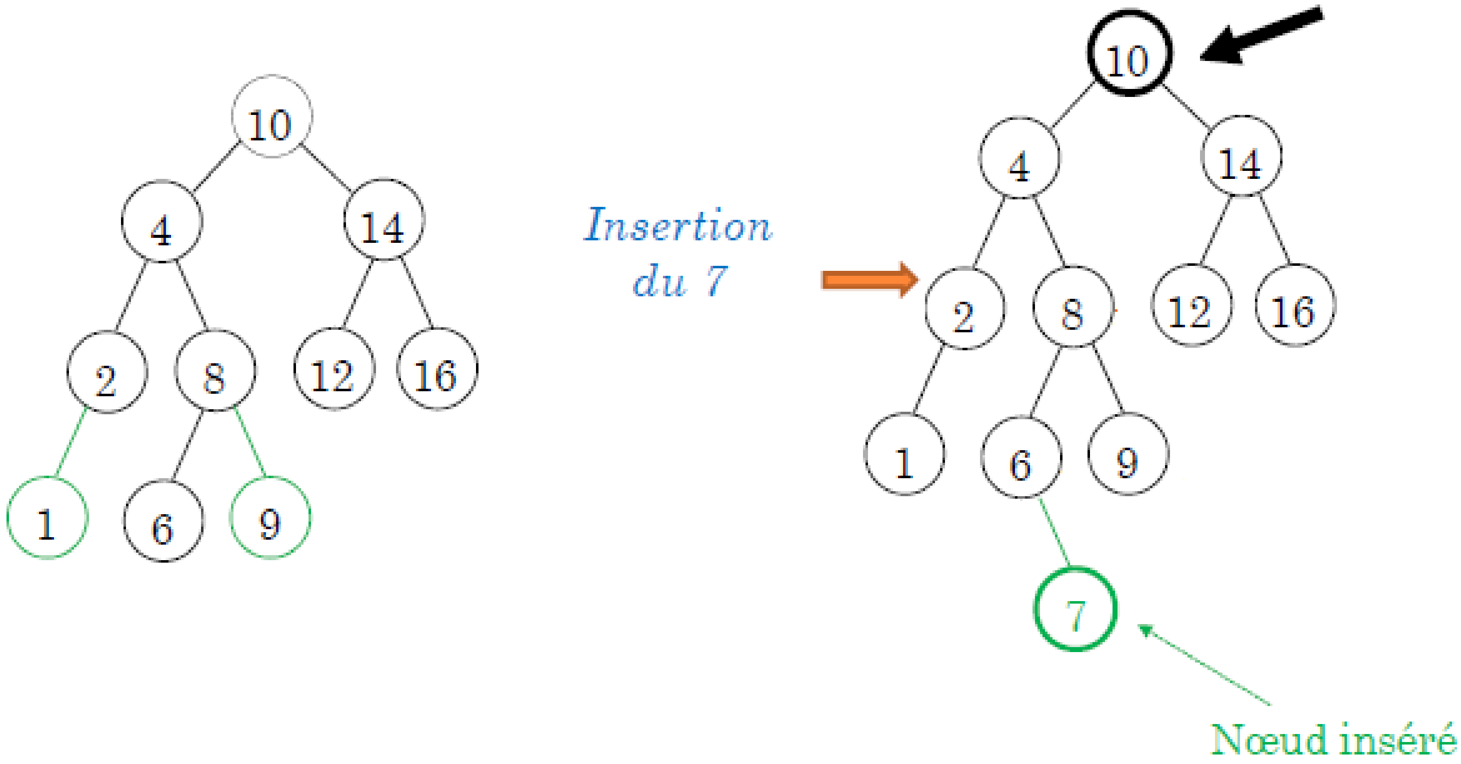
Exemples insertion

2 10 12 4 16 8 6 14 9 1 7



Exemples insertion

2 10 12 4 16 8 6 14 9 1 7



Exemples insertion

2 10 12 4 16 8 6 14 9 1 7