الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2003

– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Calcul intégral	2 points
Exercice 2	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et suites numériques	9 points

	Exercice 1 : (2 *points*)
1	**1.** *En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :* $I=\int_1^2 \ln(x)\,dx$.
1	**2.** *Calculer l'intégrale :* $J=\int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\,dx$ *(on pourra poser* $t=\sqrt{e^x}$ *).*
	Exercice 2 : (3 *points*) *Un sac contient six boules blanches portant les nombres* 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 2 *et deux boules noires portant les nombres* 0 *et* 1 *(les boules sont indiscernables au toucher).* *On tire simultanément et au hasard deux boules du sac.*
	1. *Calculer les probabilités des deux événements suivants :*
0,5	*A :" les deux boules tirées sont de même couleur ".*
1	*B :" le produit des nombres portés par les deux boules est nul ".*
1,5	**2.** *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées.* *Déterminer la loi de probabilité de X.*
	Exercice 3 : (3,5 *points*) *Soit m un nombre complexe de module* $\sqrt{2}$ *et* α *un de ses arguments.* *Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :* $(E): mz^2-2z+\overline{m}=0$ *(on rappelle que* $\overline{m}$ *est le conjugué de m et que* $\|m\|=\sqrt{m\overline{m}}$ *).*
1	**1.** *Montrer que les deux solutions de l'équation* (E) *sont :* $z'=\frac{1+i}{m}$ *et* $z''=\frac{1-i}{m}$.
1,5	**2.** *Ecrire sous forme trigonométrique* z', z'' *et* $\frac{z'}{z''}$.
1	**3.** *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *on considère les points A, B et C d'affixes* z', z'' *et* $z'+z''$ *respectivement.* *Montrer que le quadrilatère OACB est un carré.*
	Exercice 4 : (2,5 *points*) *On considère, dans l'espace muni d'un repère orthonormé, le point* $A(2,0,2)$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x+y-z-3=0$.
0,5	**1.** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (D) *passant par le point A et orthogonale au plan* (P).

0,5 **2.** *Déterminer les coordonnées de B point d'intersection de la droite* (D) *et le plan* (P).

3. *On considère la sphère* (S) *de centre A et qui coupe le plan* (P) *suivant le cercle de centre B et de rayon 2.*

1 **a)** *Déterminer le rayon de la sphère* (S).

0,5 **b)** *Ecrire une équation cartésienne de la sphère* (S).

Problème : (9 *points*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* : $\begin{cases} f(x)=\ln(1-x^3) & si\ x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & si\ x\geq 0 \end{cases}$.

Soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

0,5 **1.a)** *Montrer que f est continue au point* 0.

1 **b)** *Montrer que f est dérivable au point* 0 *(on rappelle que :* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$*).*

1,5 **2.** *Montrer que la fonction f est décroissante sur les deux intervalles* $]-\infty;0[$ *et* $[1;+\infty[$ *et croissante sur l'intervalle* $[0;1]$.

0,5 **3.a)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0,5 **b)** *Vérifier que : pour tout* $x<0$, $\frac{f(x)}{x}=3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$.

0,5 **c)** *Etudier les deux branches infinies de la courbe* (C).

1 **4.** *Construire la courbe* (C).

5. *Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle* $]-\infty;0[$.

0,5 **a)** *Montrer que h admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition J.*

1 **b)** *Déterminer* $h^{-1}(x)$ *pour tout x de J.*

6. *On considère la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_0=\frac{4}{9} \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2.$$

On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f.

0,5	**a)** *Montrer par récurrence que : pour tout n de* $\mathbb{N}, \frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$.
0,5	**b)** *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
1	**c)** *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*