Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R=2$

0.25 1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S)

2) Soit I le milieu du segment $[AB]$.

0.25 a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S)

0.5 b) Vérifier que $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB}=0$ puis montrer que $d(O,(AB))=\sqrt{2}$

3) On considère un point $M(0,m,0)$ de l'espace, où $m\in\mathbb{R}$

0.5 a) Vérifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}$

0.25 b) Déduire que $mx+2y+mz-2m=0$ est une équation cartésienne du plan (ABM)

0.25 c) Montrer que $d(O,(ABM))=\dfrac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r

0.5 Montrer que $r=\sqrt{2+\dfrac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2}<r\leq 2$, pour tout $m\in\mathbb{R}$

Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=\overline{a}$, $c=\dfrac{3(3+i)}{2}$, $d=\dfrac{3(1+i)}{2}$ et $\omega=\dfrac{5}{2}$

0.5 1) a) Vérifier que $a+b=2$ et déduire que l'affixe du point P, milieu du segment $[AB]$ est $p=1$

0.5 b) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2-2z+5=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$

0.5 2) a) Vérifier que $|\omega-a|=|\omega-b|=|\omega-c|$

0.25 b) Déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

0.25 3) a) Vérifier que $\dfrac{d-c}{a-b}=\dfrac{3}{4}i$

0.5 b) Montrer que $d-b=(c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires

4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $h(P)=G$

0.25 a) Vérifier que $z'=\dfrac{2}{3}z+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

0.25 b) Montrer que l'affixe du point G est $g=\dfrac{13}{6}+\dfrac{1}{2}i$

0.5 5) Montrer que les points Ω, G et D sont alignés.

Exercice 3 (2.5 points) :

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

A « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

B « Les deux boules tirées sont de même couleur »

0.5 1) a) Montrer que $p(A)=\dfrac{2}{5}$

0.5 b) Montrer que $p(B)=\dfrac{7}{15}$

0.5 c) Les évènements A et B sont – ils indépendants ? justifier.

2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement A.

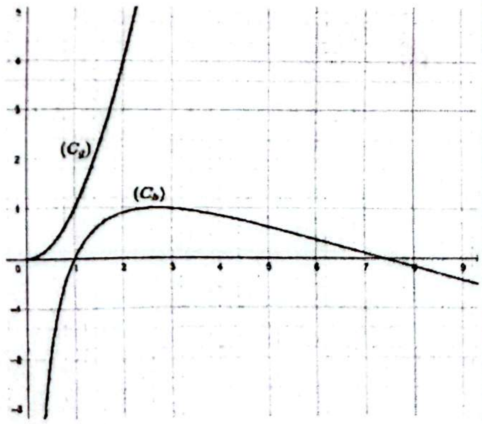
0.75 a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de X

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{27}{125}$			

0.25 b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X

Problème (11 points) :

Partie I : Le graphique ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions : $g:x\mapsto x^2$ et $h:x\mapsto 2\ln x-(\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ dans un même repère orthonormé.



0.25 1) a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0,+\infty[$:

$$g(x)-h(x)>0$$

0.5 b) Déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$: $\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}<1$

0.5 2) a) Vérifier que la fonction $H:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2}\ln(x)dx=1+e^2$

0.5 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx=2e^2-2$

0.5 c) Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation $h(x)=0$ et déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.

0.5 d) Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0.5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (On peut poser $t=\sqrt{x}$), puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 c) Déduire que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

0.75 2) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=1-\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$

0.5 b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$

(On peut utiliser la question Partie I-1-b)

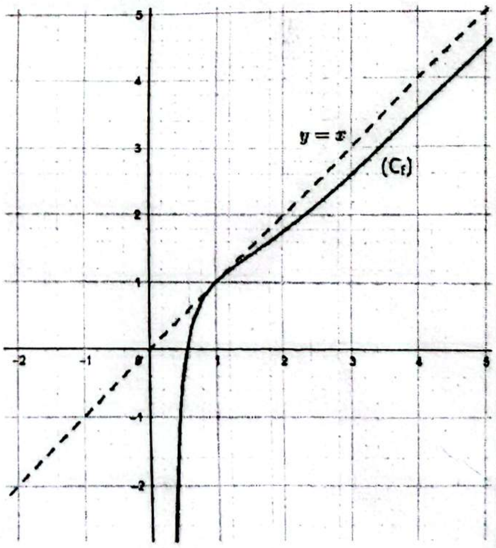
0.5 3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.75 b) Vérifier que $e^{-1}<\alpha<1$ et montrer que $\ln\alpha=-\alpha$.

0.25 c) Montrer que $f(x)\leq x$, pour tout $x\in]0,+\infty[$

0.5 d) Montrer que $y=x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1

4) Le graphique ci-contre représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$.



Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0,1]$

0.5 a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer l'expression $\varphi^{-1}(x)$)

0.5 b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $(\varphi^{-1})'(0)=\dfrac{\alpha}{2+2\alpha}$

0.75 c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie III :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 1) Montrer par récurrence que $1<u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)

0.25 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0.5 c) Déterminer la limite de la suite (u_n).