الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2008
– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

3	مدة الإنجاز		الرياضيات		المادة
7	المعامل		شعبة العلوم التجريبية بمسالكها		الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques	11 points

Exercice 1 : (3 *points*)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *les deux points* $A(0,-1,1)$ *et* $B(1,-1,0)$ *et la sphère* (S) *d'équation :*

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0.$$

1,25 — **1.** *Montrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,0,2)$ *et que son rayon est* $\sqrt{3}$ *et vérifier que A appartient à* (S).

1,25 — **2.** *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ *et montrer que* $x+y+z=0$ *est une équation cartésienne du plan* (OAB).

0,5 — **3.** *Montrer que le plan* (OAB) *est tangent à la sphère* (S) *au point A.*

Exercice 2 : (3 *points*)

1 — **1.** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^2-6z+34=0.$$

2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, *les points A, B et C d'affixes respectives :*

$$a=3+5i\ ,\ b=3-5i\ \text{ et }\ c=7+3i\ .$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' *l'affixe du point* M' *image de M par la translation T de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* $4-2i$.

0,75 — **a)** *Montrer que :* $z'=z+4-2i$ *et vérifier que le point C est l'image du point A par la translation T.*

0,5 — **b)** *Montrer que :* $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$.

0,75 — **c)** *En déduire que le triangle ABC est rectangle et que* $BC=2AC$.

Exercice 3 : (3 *points*)

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

1. *On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.*

1 — **a)** *Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.*

1 — **b)** *Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est* $\dfrac{16}{21}$.

1 — **2.** *On considère dans cette question l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.*
Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

Problème : (11 *points*)

I- *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*

$$g(x)=x-2\ln x\ .$$

0,5	**1. a)** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de l'intervalle* $]0,+\infty[$.
0,5	**b)** *Montrer que g est décroissante sur* $]0,2]$ *et croissante sur* $[2,+\infty[$.
0,5	**2.** *En déduire que* $g(x)>0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0,+\infty[$.
	(remarquer que $g(2)>0$*)*
	II- *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :*
	$$f(x)=x-(\ln x)^2.$$
	Soit (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75	**1.** *Calculer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ *et interpréter géométriquement ce résultat.*
0,5	**2. a)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$.
	(on pourra poser $t=\sqrt{x}$ *, on rappelle que :* $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$*)*
0,75	**b)** *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.
	(remarquer que : $f(x)=x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$*)*
0,5	**c)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ *puis en déduire que la courbe* (C) *admet, au voisinage de* $+\infty$*, une branche parabolique de direction la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.
0,5	**d)** *Montrer que la courbe* (C) *est au-dessous de la droite* (Δ).
0,75	**3. a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$ *et montrer que f est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.
0,25	**b)** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
0,5	**c)** *Montrer que* $y=x$ *est une équation cartésienne de la tangente à la courbe* (C) *au point d'abscisse 1.*
0,5	**4.** *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *dans* $]0,+\infty[$ *et que* $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ *(on admet que* $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$*).*
1	**5.** *Tracer la droite* (Δ) *et la courbe* (C) *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.
	(on admet que $I(e,e-1)$ *est un point d'inflexion de la courbe* (C) *et on prendra*

	$e \approx 2{,}7$).
0,5	**6. a)** *Montrer que* $H : x \mapsto x\ln x - x$ *est une fonction primitive de la fonction* $\ln : x \mapsto \ln x$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *puis montrer que :* $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.
0,75	**b)** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.
0,5	**c)** *Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (C), *la droite* (Δ) *et les deux droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.
	III- *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,75	**1.** *Montrer que* $1 \le u_n \le 2$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *(on pourra utiliser le résultat de la question* **II-3. a)**).
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
0,75	**3.** *En déduire que* (u_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*