

3h	مدة الإجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$  et par  $|z|$  son module
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

الصفحة		الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2024 - الموضوع		
2	RS 22F	- مادة: الرياضيات-		
4		مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)		

	<p><b>Exercice 1 (3points) :</b></p> <p>Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé <math>(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})</math>, on considère les deux points <math>A(1,1,0)</math> et <math>\Omega(-1,1,-2)</math> et le plan <math>(P)</math> d'équation <math>x + z - 1 = 0</math></p> <p>0.5 1) a) Vérifier que <math>A</math> est un point du plan <math>(P)</math> et donner un vecteur normal de <math>(P)</math>.</p> <p>0.5 b) Montrer que la droite <math>(\Omega A)</math> est perpendiculaire au plan <math>(P)</math>.</p> <p>2) Soit <math>(S)</math> l'ensemble des points <math>M(x, y, z)</math> de l'espace vérifiant : <math>x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0</math></p> <p>0.5 a) Montrer que <math>(S)</math> est une sphère de centre <math>\Omega</math> et déterminer son rayon.</p> <p>0.5 b) Montrer que <math>(P)</math> coupe <math>(S)</math> suivant un cercle de centre <math>A</math> puis déterminer son rayon.</p> <p>3) Soit <math>(Q_m)</math> un plan d'équation <math>x + y + mz - 2 = 0</math>, où <math>m</math> est un nombre réel.</p> <p>0.25 a) Vérifier que <math>A</math> est un point du plan <math>(Q_m)</math>, pour tout <math>m</math> de <math>\mathbb{R}</math></p> <p>0.5 b) Déterminer la valeur du réel <math>m</math> pour que <math>(Q_m)</math> soit perpendiculaire au plan <math>(P)</math></p> <p>0.25 c) Existe-t-il un plan <math>(Q_m)</math> qui coupe la sphère <math>(S)</math> suivant un cercle de centre <math>A</math> ? Justifier.</p>
	<p><b>Exercice 2 (4points)</b></p> <p><b>I)</b> On considère dans l'ensemble des nombres complexes <math>\mathbb{C}</math> l'équation <math>(E): z^2 - 4z + 9 = 0</math></p> <p>0.25 1) Vérifier que le discriminant de l'équation <math>(E)</math> est <math>\Delta = (2i\sqrt{5})^2</math></p> <p>0.5 2) Résoudre l'équation <math>(E)</math></p> <p><b>II)</b> Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct <math>(O, \vec{u}, \vec{v})</math>, on considère les points <math>A, B</math> et <math>C</math> d'affixes respectives <math>a = 2 + i\sqrt{5}</math>, <math>b = 2 - i\sqrt{5}</math> et <math>c = 2 - \sqrt{5}</math>.</p> <p>0.25 1) a) Vérifier que <math> a  = 3</math></p> <p>0.25 b) Montrer que le triangle <math>OAB</math> est isocèle.</p> <p>0.5 2) a) Vérifier que <math>\frac{a-c}{b-c} = i</math></p> <p>0.5 b) Dédire la nature du triangle <math>ABC</math></p> <p>0.5 3) a) Déterminer l'affixe du point <math>D</math> image de <math>B</math> par la translation de vecteur <math>\overrightarrow{CA}</math></p> <p>0.5 b) Montrer que <math>ADBC</math> est un carré.</p> <p>4) On pose <math>x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n</math> et <math>y_n = \frac{1}{1-x_n}</math>, avec <math>n</math> un entier naturel non nul.</p> <p>0.25 a) Vérifier que <math>x_n \overline{x_n} = 1</math></p> <p>0.5 b) Montrer que <math>y_n + \overline{y_n} = 1</math> puis déduire la partie réelle de <math>y_n</math></p>

**Exercice 3 (2points) :**

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

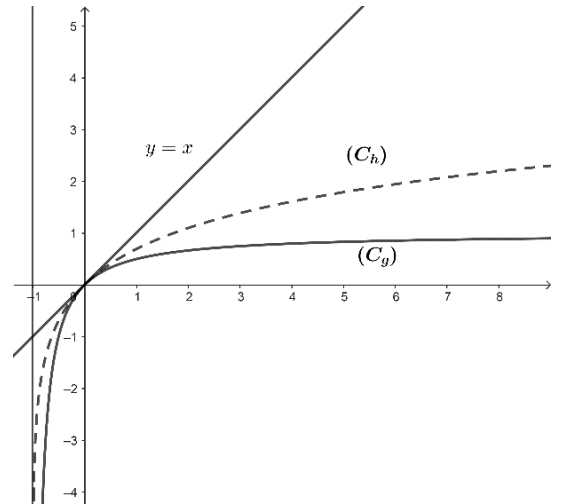
- 0.25 1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336
- 0.5 2) Calculer la probabilité de l'évènement  $A$  : « Tirer trois boules blanches ».
- 0.75 3) Montrer que la probabilité de l'évènement  $B$  : « Tirer trois boules de même couleur » est  $p(B) = \frac{5}{56}$
- 0.5 4) Calculer la probabilité de l'évènement  $C$  : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

**Problème (11points) :****Partie I :**

La figure ci-contre représente les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$

des fonctions  $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$  et  $h : x \mapsto \ln(1+x)$  sur

l'intervalle  $]-1, +\infty[$  et la droite d'équation  $y = x$ , dans un même repère orthonormé.



- 0.5 1) a) A partir de cette figure, justifier que :
- $$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \text{ pour tout } x \text{ de } ]-1, +\infty[$$
- 0.25 b) En déduire que  $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$ , pour tout  $x$  de  $]-1, +\infty[$
- 0.5 c) Prouver que  $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
- 2) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et la relation  $u_{n+1} = g(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- 0.5 a) Montrer par récurrence que  $0 < u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))
- 0.25 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 0.75 d) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

**Partie II :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ .

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

0.5	1) a) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$ , pour tout $x \in \mathbb{R}$
0.5	b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
0.5	c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
0.5	2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x)$
0.5	b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$
0.5	c) Dédire que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)
0.5	3) a) Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse 0
0.25	b) Vérifier que la tangente $(T)$ passe par le point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$
0.75	c) Construire $(T)$ et la courbe $(C_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prend $\ln 2 \approx 0,7$ )
0.5	4) a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$ )
0.5	b) Vérifier que $f^{-1}$ est dérivable en $\ln 2$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$
	5) Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
0.25	a) Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ , pour tout $x$ de $\mathbb{R}$
0.5	b) Montrer que $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$
0.5	c) Montrer que $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$ (Remarquer que $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$ )
0.5	d) Dédire en fonction de $\lambda$ , l'aire $A_\lambda$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$
0.5	e) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$