

**Exercice 1 :** (2012 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$  les points A(1;1;-1), B(0;1;-2) et C(3;2;1) et (S) la sphère d'équation:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

- 1) Montrer que (S) est de centre  $\Omega(1 ; 0 ; 1)$  et de rayon  $\sqrt{3}$
- 2) a) Montrer que :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{k}}$  et vérifier que :  $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$  est une équation cartésienne du plan (ABC).
- b) Vérifier que :  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$  puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle ( $\Gamma$ ) de rayon 1.
- 3) Soit ( $\Delta$ ) la droite passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que  $\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + t \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est une

représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ).

- b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite ( $\Delta$ ) est (2;0;0)
- c) En déduire le centre du cercle ( $\Gamma$ )

**Exercice 2 :** (2012 S1) (3pts)

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - 12Z + 61 = 0$
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$  on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $\mathbf{a} = 6 - 5\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{b} = 4 - 2\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{c} = 2 + \mathbf{i}$

- a) Calculer  $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}}$  et en déduire que A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur  $\vec{\mathbf{u}}$  d'affixe  $1 + 5\mathbf{i}$   
b – Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est  $d = 3 + 6\mathbf{i}$

c – Montrer que  $\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = -1 + \mathbf{i}$  et que  $\frac{3\pi}{4}$  est un argument de  $-1 + \mathbf{i}$

d – En déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$

**Exercice 3 :** (2012 S1) (3pts)

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1 Et deux jetons portent les chiffres 2.

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac  
On considère les événements suivants:

- 1) A " Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux ". Montrer que :  $P(A) = \frac{5}{28}$
- 2) B "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ". Montrer que :  $P(B) = \frac{5}{56}$
- 3) C "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 " Montrer que :  $P(C) = \frac{3}{8}$

**Exercice 3 :** (2012 S1) (3pts)

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } U_0 = 11$$

$$1) \text{ Montrer que: } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \text{ a) Montrer que : } U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- b) Montrer que  $(U_n)$  est strictement croissante
- c) En déduire que  $(U_n)$  est convergente.

3) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = U_n - 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{10}{11}$  puis écrire  $V_n$  en fonction de n.

b) Montrer que  $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  puis calculer  $\lim U_n$

**Problème :** (2012 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $2x^2 \ln x$  ont même signe  
Sur  $]0, 1[$  et en déduire que  $\forall x \in ]0, 1] \quad g(x) \leq 0$

b) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $x^2 \ln x$  ont même signe  
Sur  $]1, +\infty[$  et en déduire que  $\forall x \in [1, +\infty[ \quad g(x) \geq 0$

II) On considère la fonction f définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

(C<sub>f</sub>) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé  $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$  (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  puis en déduire une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in ]0, +\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat  $f'(1) = 0$

b) En déduire que f est décroissante sur  $]0, 1]$  et croissante sur  $[1, +\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$

3) Construire la courbe (C<sub>f</sub>).

4) a – Montrer que  $u : x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$  est une primitive de la fonction  $x \rightarrow x^2 - 1$  sur  $\mathbb{R}$

b – A l'aide d'une intégration par parties montrer que :  $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$

c – Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par (C<sub>f</sub>) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .