المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2007 – الموضوع –

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul intégral	2,5 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et suites numériques	9 points

	Exercice 1 : (3 *points*)
	On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *la sphère* (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$ *et le plan* (P) *d'équation :* $x-y+2z+1=0$.
1	**1.** *Démontrer que le centre de la sphère* (S) *est le point* $\Omega(1,2,3)$ *et que son rayon est égale à* $\sqrt{6}$.
0,75	**2.** *Vérifier que le plan* (P) *est tangent à la sphère* (S).
0,5	**3.a)** *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par* Ω *et orthogonale à* (P).
0,75	**b)** *Déterminer les coordonnées de* ω *point de contact de* (P) *et* (S).
	Exercice 2 : (3 *points*)
0,5	**1.a)** *Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe :* $(3-2i)^2$.
1	**b)** *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-2(4+i)z+10+20i=0$.
	2. *On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$, *les points A, B et C d'affixes respectives :* $a=1+3i, b=7-i$ *et* $c=5+9i$.
0,5	**a)** *Montrer que :* $\dfrac{c-a}{b-a}=i$.
1	**b)** *En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.*
	Exercice 3 : (2,5 *points*)
0,5	**1.** *Vérifier que :* $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}-\{-1\}$.
1	**2.** *Montrer que :* $\int_0^2 \dfrac{x^2}{x+1}dx=\ln 3$.
1	**3.** *En utilisant une intégration par parties, montrer que :* $\int_0^2 x\ln(x+1)dx=\dfrac{3}{2}\ln 3$.
	Exercice 4 : (2,5 *points*)
	Un sac contient sept jetons portants les nombres : 0, 0, 0, −1, 1, 1, 1 (*les jetons sont indiscernables au toucher*). *On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.*

Soient les événements suivants :
A :" aucun jeton parmi les trois jetons tirés ne porte le nombre 0 *"*
B :" tirer trois jetons portants des nombres différents deux à deux "
C :" la somme des nombres portés par les trois jetons tirés est nulle"

2,5 — *Calculer la probabilité de chacun des deux événements A et B et montrer que la probabilité de l'événement C est :* $\frac{2}{7}$.

Problème : (9 *points*)

I) *On considère la fonction numérique g définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=e^{-x}+x-1$.

0,75 — **1.** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *puis en déduire que g est croissante sur* $[0,+\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty,0]$.

0,5 — **2.** *Montrer que* $g(x)\geq 0$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *(remarquer que* $g(0)=0$*) puis en déduire que* $e^{-x}+x\geq 1$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

II) *On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :*

$$f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}.$$

et soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 — **1.** *Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est* $\mathbb{R}$ *(on pourra utiliser le résultat de la question* **I) 2.**).

0,25 — **2.a)** *Montrer que :* $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}^*$.

1,5 — **b)** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ *puis interpréter géométriquement ces deux résultats.*

0,75 — **3.a)** *Montrer que :* $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^2}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

0,5 — **b)** *Etudier le signe de* $f'(x)$ *puis dresser le tableau de variations de la fonction f.*

0,5 — **4.a)** *Ecrire une équation de la tangente à la courbe* (C) *au point O origine du*

	repère.
0,75	**b)** *Vérifier que :* $x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *puis étudier le signe de* $x - f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.
0,25	**c)** *En déduire la position relative de la courbe* (C) *et la droite* (Δ) *d'équation :* $y = x$.
1	**5.** *Construire* (Δ) *et* (C) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(on prendra* $\dfrac{1}{1-e} \simeq -0,6$ *).*
	II) *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**1.** *Montrer par récurrence que :* $0 \le u_n \le 1$ *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$.
0,5	**2.** *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.* *(on pourra utiliser le résultat de la question* **II) 4.b)***).*
0,75	**3.** *En déduire que* (u_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*