الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2006
– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 3 |
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها | المعامل | 7 |

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Equations différentielles | 2 points |
| Exercice 2 | Nombres complexes | 4 points |
| Exercice 3 | Géométrie dans l'espace | 4 points |
| Problème | Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques | 10 points |

| | |
|---|---|
| | **Exercice 1 : (2 *points*)** |
| 0,75 | **1.** *Résoudre l'équation différentielle :* $y''-6y'+9y=0$. |
| | **2.** *On considère l'équation différentielle suivante :* $(E): y''-6y'+9y=2e^{3x}$. |
| 0,75 | **a)** *Montrer que la fonction u définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $u(x)=x^2e^{3x}$ *est une solution particulière de l'équation* $(E)$. |
| 0,5 | **b)** *Donner la solution générale de l'équation* $(E)$. |
| | **Exercice 2 : (4 *points*)**<br>*On considère dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$, *l'équation :*<br>$z^2-2\sqrt{3}(1+i)z+8i=0$.<br>*On désigne par* $z_1$ *et* $z_2$ *les deux solutions de cette équation telles que :*<br>$\mathscr{R}_e(z_1)>\mathscr{R}_e(z_2)$. |
| 0,75 | **1.** *Déterminer* $z_1$ *et* $z_2$ *(remarquer que :* $(1-i)^2=-2i$ *).* |
| 1 | **2.a)** *Montrer que :* $z_1^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)$ *et* $z_2=i\overline{z_1}$. |
| 0,25 | **b)** *Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :* $4\left(\sqrt{3}+i\right)$. |
| 1 | **c)** *En déduire une forme trigonométrique de chacun des deux nombres complexes* $z_1$ *et* $z_2$. |
| 1 | **3.** *On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, *les deux points A et B d'affixes respectives* $z_1$ *et* $z_2$.<br>*Calculer* $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)$ *puis en déduire que le triangle OAB est équilatéral.* |
| | **Exercice 3 : (4 *points*)**<br>*On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *le point* $A(1;-1;3)$ *et le plan* $(P)$ *d'équation :* $x-y+3z=0$. |
| 0,5 | **1. a)** *Vérifier que :* $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *est une représentation paramétrique de la droite* $(OA)$. |
| 0,75 | **b)** *Déterminer une équation cartésienne du plan* $(Q)$ *orthogonal à la droite* $(OA)$ *au point A.* |

| | |
| --- | --- |
| 0,25 | **c)** *Vérifier que* $(P)$ *est parallèle à* $(Q)$. |
| | **2.** *On considère la sphère* $(S)$ *tangente au plan* $(Q)$ *en* $A$ *et qui se coupe avec le plan* $(P)$ *suivant le cercle* $\Gamma$ *de centre* $O$ *et de rayon* $\sqrt{33}$. |
| 0,75 | **a)** *Démontrer que* $\Omega(a,b,c)$ *centre de la sphère* $(S)$ *appartient à* $(OA)$ *puis en déduire que* $b=-a$ *et* $c=3a$. |
| 1,25 | **b)** *Démontrer que :* $\Omega A^2-\Omega O^2=33$ *puis en déduire que* $a-b+3c=-11$. |
| 0,5 | **c)** *En déduire les coordonnées de* $\Omega$ *centre de la sphère* $(S)$ *puis démontrer que son rayon est égale à* $2\sqrt{11}$. |
| | **Problème : (10 *points*)**<br>**I)** *On considère la fonction g définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par :*<br>$$g(x)=\ln(1+x)-x.$$ |
| 0,75 | **1.a)** *Calculer* $g'(x)$ *pour tout x de* $[0;+\infty[$ *puis montrer que la fonction g est strictement décroissante sur* $[0;+\infty[$. |
| 0,25 | **b)** *En déduire que :* $g(x)\leq 0$ *pour tout x de* $[0;+\infty[$. |
| 0,5 | **2.** *Montrer que :* $0<\ln(1+x)<x$ *pour tout x de* $]0;+\infty[$. |
| | **II)** *On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :*<br>$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$<br>*et* $(C)$ *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité 1cm ).* |
| 0,5 | **1.** *Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est :*<br>$$D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$$ |
| 0,5 | **2.a)** *Montrer que la fonction f est impaire.* |
| 0,5 | **b)** *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)$. |
| 0,75 | **3.a)** *Montrer que :* $\forall x\in D,\ f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$. |
| 0,5 | **b)** *En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle* $]1;+\infty[$. |
| 0,25 | **4.a)** *Vérifier que la droite* $(\Delta)$ *d'équation* $y=x$ *est une asymptote oblique de la courbe* $(C)$. |

| | |
|---|---|
| 0,5 | **b)** *Etudier le signe de* $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. |
| | (*remarquer que :* $\forall x \in D,\ \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$). |
| 0,25 | **c)** *En déduire la position relative de la courbe* $(C)$ *et la droite* $(\Delta)$. |
| 1 | **5.** *Construire la courbe* $(C)$ *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$. |
| | (*on prendra :* $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$ *et* $f(\sqrt{3}) \simeq 3$). |
| 1,25 | **6.a)** *Montrer que :* $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 5\ln 5 - 6\ln 3$ (*on pourra utiliser une intégration par parties*). |
| 0,5 | **b)** *En déduire, en* $cm^2$, *l'aire du domaine plan délimité par la courbe* $(C)$ *et les droites d'équations respectives :* $x = 2$, $x = 4$ *et* $y = x$. |
| | **III)** *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\geq 2}$ *définie par :* |
| | $u_n = f(n) - n$ *pour tout* $n$ *de* $\mathbb{N}^* - \{1\}$. |
| 0,25 | **1.a)** *Vérifier que :* $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$ *pour tout* $n$ *de* $\mathbb{N}^* - \{1\}$. |
| 0,75 | **b)** *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 2}$ *est décroissante.* |
| 0,5 | **2.a)** *Montrer que :* $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ *pour tout* $n$ *de* $\mathbb{N}^* - \{1\}$. |
| | (*on pourra utiliser le résultat de la question* **I) 2.**). |
| 0,5 | **b)** *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. |

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2006
- الموضوع -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 3 |
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها | المعامل | 7 |

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| Exercice 2 | Suites numériques | 3 points |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités | 3 points |
| Exercice 4 | Nombres complexes | 3 points |
| Problème | Equations différentielles, étude d'une fonction numérique et calcul intégral | 8 points |