

الصفحة 1 4 **	<b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</b> <b>الدورة الاستدراكية 2024</b> <b>-الموضوع-</b> SSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS      RS 22F	 المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
------------------------	--	--

3h	مدة الإنجاز	<b>الرياضيات</b>	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	4 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$  et par  $|z|$  son module
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

**Exercice 1 (3points) :**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1,1,0)$  et  $\Omega(-1,1,-2)$  et le plan  $(P)$  d'équation  $x+z-1=0$

- 0.5 1) a) Vérifier que  $A$  est un point du plan  $(P)$  et donner un vecteur normal de  $(P)$ .
- 0.5 b) Montrer que la droite  $(\Omega A)$  est perpendiculaire au plan  $(P)$ .
- 2) Soit  $(S)$  l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace vérifiant :  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$
- 0.5 a) Montrer que  $(S)$  est une sphère de centre  $\Omega$  et déterminer son rayon.
- 0.5 b) Montrer que  $(P)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle de centre  $A$  puis déterminer son rayon.
- 3) Soit  $(Q_m)$  un plan d'équation  $x+y+mz-2=0$ , où  $m$  est un nombre réel.
- 0.25 a) Vérifier que  $A$  est un point du plan  $(Q_m)$ , pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$
- 0.5 b) Déterminer la valeur du réel  $m$  pour que  $(Q_m)$  soit perpendiculaire au plan  $(P)$
- 0.25 c) Existe-t-il un plan  $(Q_m)$  qui coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle de centre  $A$  ? Justifier.

**Exercice 2 (4points)**

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E): z^2 - 4z + 9 = 0$

- 0.25 1) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est  $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$

- 0.5 2) Résoudre l'équation  $(E)$

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2 + i\sqrt{5}$ ,  $b = 2 - i\sqrt{5}$  et  $c = 2 - \sqrt{5}$ .

- 0.25 1) a) Vérifier que  $|a| = 3$

- 0.25 b) Montrer que le triangle  $OAB$  est isocèle.

- 0.5 2) a) Vérifier que  $\frac{a-c}{b-c} = i$

- 0.5 b) Déduire la nature du triangle  $ABC$

- 0.5 3) a) Déterminer l'affixe du point  $D$  image de  $B$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{CA}$

- 0.5 b) Montrer que  $ADBC$  est un carré.

4) On pose  $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$  et  $y_n = \frac{1}{1-x_n}$ , avec  $n$  un entier naturel non nul.

- 0.25 a) Vérifier que  $x_n \bar{x}_n = 1$

- 0.5 b) Montrer que  $y_n + \bar{y}_n = 1$  puis déduire la partie réelle de  $y_n$

**Exercice 3 (2points) :**

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

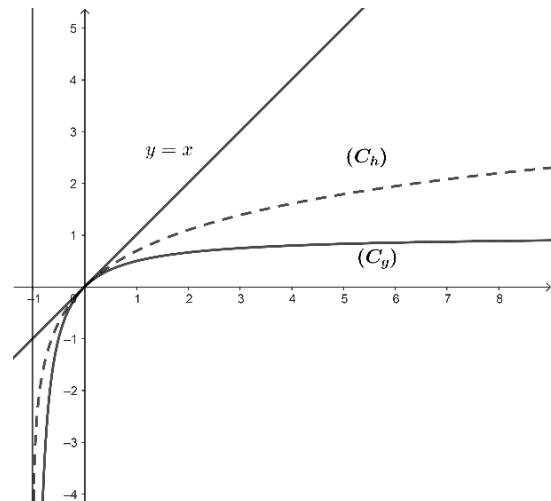
- 0.25 1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336
- 0.5 2) Calculer la probabilité de l'évènement  $A$  : « Tirer trois boules blanches ».
- 0.75 3) Montrer que la probabilité de l'évènement  $B$  : « Tirer trois boules de même couleur » est  $p(B) = \frac{5}{56}$
- 0.5 4) Calculer la probabilité de l'évènement  $C$  : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

**Problème (11points) :****Partie I :**

La figure ci-contre représente les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$

des fonctions  $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$  et  $h : x \mapsto \ln(1+x)$  sur

l'intervalle  $]-1, +\infty[$  et la droite d'équation  $y = x$ , dans un même repère orthonormé.



- 0.5 1) a) A partir de cette figure, justifier que :

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \text{ pour tout } x \text{ de } ]-1, +\infty[$$

- 0.25 b) En déduire que  $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$ , pour tout  $x$  de  $]-1, +\infty[$

- 0.5 c) Prouver que  $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

- 2) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et la relation  $u_{n+1} = g(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- 0.5 a) Montrer par récurrence que  $0 < u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- 0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))

- 0.25 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

- 0.75 d) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

**Partie II :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ .

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 0.5 1) a) Calculer  $f(0)$  et vérifier que  $f(x) > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- 0.5 b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 2) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x)$
- 0.5 b) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x (1+e^x)}$
- 0.5 c) Déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)
- 0.5 3) a) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 0
- 0.25 b) Vérifier que la tangente  $(T)$  passe par le point  $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$
- 0.75 c) Construire  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prend  $\ln 2 \approx 0,7$ )
- 0.5 4) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer  $f^{-1}(x)$ )
- 0.5 b) Vérifier que  $f^{-1}$  est dérivable en  $\ln 2$  et calculer  $(f^{-1})'(\ln 2)$
- 0.5 5) Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.
- 0.25 a) Vérifier que  $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
- 0.5 b) Montrer que  $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$
- 0.5 c) Montrer que  $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$  (Remarquer que  $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$ )
- 0.5 d) Déduire en fonction de  $\lambda$ , l'aire  $A_\lambda$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\lambda$
- 0.5 e) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$